Национальный исследовательский университет ИТМО

Факультет ПИиКТ

Лабораторная работа №3
по вычислительной математике

Работу выполнила:

Тройникова Вероника

Группа: P3233

Преподаватель:

Перл О. В.

Санкт-Петербург

2022

1. Описание методов, расчетные формулы

Метод прямоугольников является методом численного интегрирования функции от 1 переменной. В течение некоторого числа итераций подбирается число разбиений первоначального отрезка [a, b], дающее нужную точность вычислений. На каждом полученном элементарном отрезке подынтегральная функция заменяется на константу (многочлен нулевой степени). То есть площадь под графиком функции принимается примерно равным сумме площадей прямоугольников (см. рис 1).

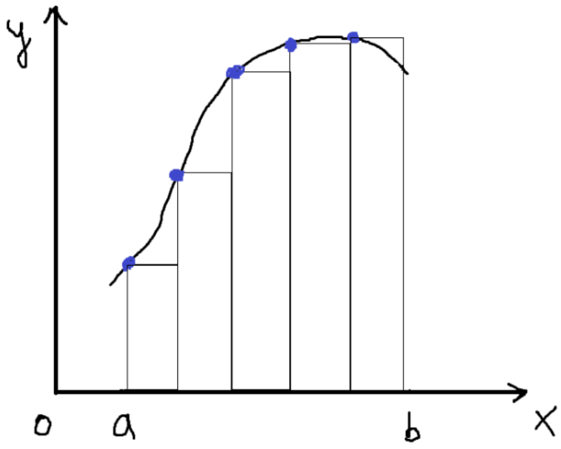

Рисунок 1 "Метод левых прямоугольников"

Для применения данного метода выбираются первоначальный отрезок [a, b] и погрешность вычислений. Составные формулы метода прямоугольников:

- метод левых прямоугольников:
$$\int_a^b f(x)\,dx => \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot h$$
- метод правых прямоугольников:
$$\int_a^b f(x)\,dx => \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot h$$
- метод средних прямоугольников:
$$\int_a^b f(x)\,dx => \sum_{i=0}^{n-1} f((x_i + x_{i+1})/2)\cdot h$$

Условием окончания выполнения итераций является достижение заданной точности: $|sum_i - sum_{i-1}| \le eps.$

При стремлении количества отрезков к бесконечности значение суммы приближается к истинному значению интеграла. Таким образом, чем больше количество конечных отрезков, тем точнее ответ получается в результате применения данного метода.

Оценка абсолютной погрешности метода прямоугольников:

- метод средних прямоугольников:
$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)\cdot(x_i - x_{i-1})$$
$$r_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} f\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right)dx$$

С помощью разложения в ряд Тейлора приводим к следующему виду:

$$r_i = f'\left(x_{i-1} + \frac{h}{2}\right) \cdot 0 + f''(C_i) \cdot \frac{h^3}{24} = f''(C_i) \cdot \frac{h^3}{24}$$

$$|r_i| \leq \max\big(f''(x)\big) \cdot \frac{h^3}{24} \quad (x \in [x_{i-1}; x_i])$$

Таким образом, $|R| \leq \max\big(f''(x)\big) \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2} \quad (x \in [a; b])$

- метод правых/левых прямоугольников:
  $|R| \leq \max\big(f'(x)\big) \cdot \frac{(b-a)^2}{2n} \quad (x \in [a; b])$

2. Блок-схема численного метода

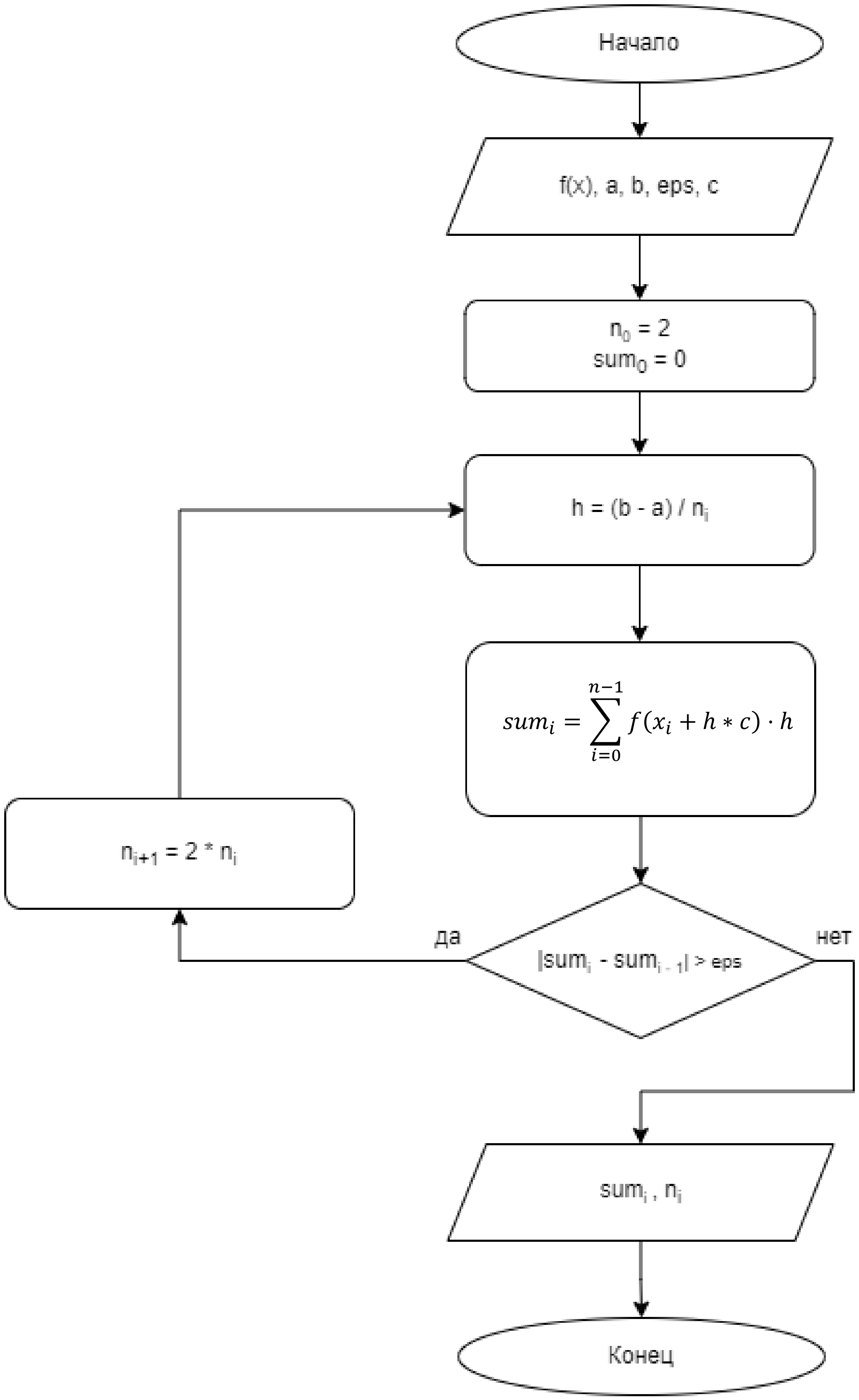

Рисунок 2 “Блок-схема метода прямоугольников”

3. Листинг реализованного численного метода программы

```java
public MethodAnswer findAnswer(OneArgEquation equation, double eps, double a, double b, int maxItr, double coef) {
    int segmentsCount = 2;
    int iterationCount = 0;
    double sum, currentSum = 0;
    String errorMessage = "";
    boolean continueFlag;
    do {
        iterationCount++;
        sum = currentSum;
        double h = (b - a) / segmentsCount;
        currentSum = 0;
        for (double i = a; i < b; i += h) {
            double x = equation.calculate(i + coef * h);
            if (Double.isInfinite(x) || Double.isNaN(x)) {
                x = (equation.calculate(i + coef * h + 0.0000000001) + equation.calculate(i + coef * h - 0.0000000001)) / 2;
            }
            currentSum += x;
        }
        if (Double.isInfinite(currentSum) || Double.isNaN(currentSum)) {
            errorMessage = "Невозможно вычислить интеграл!";
            break;
        }
        currentSum *= h;
        continueFlag = abs(currentSum - sum) > eps;
        segmentsCount *= 2;
    } while (continueFlag && maxItr > iterationCount);
    if (maxItr == iterationCount) errorMessage = "Невозможно вычислить интеграл!";
    return new MethodAnswer(currentSum, currentSum - sum, segmentsCount / 2, errorMessage);
}
```

4. Примеры и результаты работы программы на разных данных

```
----Метод прямоугольников----
Вводить коэффициенты следует построчно, через пробел.
Пример ввода: a b c d...
Устранение разрыва происходит путем использования алгоритмического среднего от значения
от двух соседних точек функции f(x − ε), f(x + ε).
Уравнения:
1) y = a * sin(x) / x + b * cos(x) + c
2) y = a * x^3 + b * x^2 + c * x
3) y = a * x - ln(x + b) + c
Введите номер выбранного уравнения:
3
Введите 3 коэффициента(ов):
0 0 0
Введите точность (больше 0 и меньше 1):
0.001
Введите левую границу интервала:
-1
Введите правую границу интервала:
1
---- Результат метода левых прямоугольников ----
Невозможно вычислить интеграл!
---- Результат метода правых прямоугольников ----
Невозможно вычислить интеграл!
---- Результат метода средних прямоугольников ----
Невозможно вычислить интеграл!
```

```
----Метод прямоугольников----
Вводить коэффициенты следует построчно, через пробел.
Пример ввода: a b c d...
Устранение разрыва происходит путем использования алгоритмического среднего от значения
от двух соседних точек функции f(x - ε), f(x + ε).
Уравнения:
1) y = a * sin(x) / x + b * cos(x) + c
2) y = a * x^3 + b * x^2 + c * x
3) y = a * x - ln(x + b) + c
Введите номер выбранного уравнения:
1
Введите 3 коэффициента(ов):
1 0 0
Введите точность (больше 0 и меньше 1):
0.001
Введите левую границу интервала:
-1
Введите правую границу интервала:
1
---- Результат метода левых прямоугольников ----
Ответ: 1.8919700598687723
Количество разбиений: 32
Погрешность: 5.883327033697761E-4
---- Результат метода правых прямоугольников ----
Ответ: 1.891970059868772
Количество разбиений: 32
Погрешность: 5.88332703369554E-4
---- Результат метода средних прямоугольников ----
Ответ: 1.8922641839823007
Количество разбиений: 32
Погрешность: -2.9420858984097187E-4
```

```
----Метод прямоугольников----
Вводить коэффициенты следует построчно, через пробел.
Пример ввода: a b c d...
Устранение разрыва происходит путем использования алгоритмического среднего от значения
от двух соседних точек функции f(x - ε), f(x + ε).
Уравнения:
1) y = a * sin(x) / x + b * cos(x) + c
2) y = a * x^3 + b * x^2 + c * x
3) y = a * x - ln(x + b) + c
Введите номер выбранного уравнения:
2
Введите 3 коэффициента(ов):
1 1 1
Введите точность (больше 0 и меньше 1):
0.001
Введите левую границу интервала:
-1
Введите правую границу интервала:
1
---- Результат метода левых прямоугольников ----
Ответ: 0.6656901836395264
Количество разбиений: 4096
Погрешность: 9.763240814208984E-4
---- Результат метода правых прямоугольников ----
Ответ: 0.6676433086395264
Количество разбиений: 4096
Погрешность: -9.768009185791016E-4
---- Результат метода средних прямоугольников ----
Ответ: 0.66650390625
Количество разбиений: 64
Погрешность: 4.8828125E-4
```

5. Вывод

В ходе выполнения данной лабораторной работы были рассмотрены методы численного интегрирования функции: метод прямоугольников, метод трапеций, метод Симпсона. Все эти методы основаны на том, что отрезок интегрирования разбивается на элементарные отрезки, на которых функция заменяется многочленом (для которого вычисляется значение интеграла). Основное различие методов заключается в выборе степени многочлена: в методе прямоугольников используется многочлен нулевой степени, в методе трапеций – первой, в методе Симпсона – второй.

Рассматривая метод прямоугольников, я пришла к выводу, что применять следует именно метод средних прямоугольников, так как он является наиболее точным – за равное количество разбиений метод средних прямоугольников дает более точный ответ, чем методы правых/левых прямоугольников (такой вывод можно сделать исходя из формул погрешностей этих методов). Данную разницу в точности можно объяснить нарушением симметрии при использовании метода правых/левых прямоугольников.

Сравнение полученного с помощью метода средних прямоугольников значения интеграла с его аналитическим значением:

$f(x) = x^3 + x^2 + x$, a = -1, b = 1

метод средних прямоугольников: 0.666504

аналитическое значение: $\frac{2}{3}$

погрешность: $\frac{2}{3} - 0.666504 \approx 0.00016$

Оценки абсолютных погрешностей методов:

- метод прямоугольников (средних):
  $$|R| \leq \max\left(f''(x)\right) \cdot \frac{(b-a)^3}{24n^2} \quad (x \in [a;b])$$
  порядок точности: 2
- метод трапеций:
  $$|R| \leq \max\left(f''(x)\right) \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2} \quad (x \in [a;b])$$
  порядок точности: 2
- метод Симпсона:
  $$|R| \leq \max\left(f^{(4)}(x)\right) \cdot \frac{(b-a)^5}{2880} \quad (x \in [a;b])$$
  порядок точности: 4

Анализируя формулы погрешностей, можно сделать вывод, что при равном числе разбиений наиболее точным является метод Симпсона (это можно объяснить тем, что парабола в общем случае находится ближе к графику исходной функции). Погрешность метода трапеций в два раза больше погрешности метода прямоугольников при одинаковом количестве разбиений, однако метод трапеций применим к функциям, заданным на конечном числе точек, а метод прямоугольников – нет.