

Задание 2, номер задачи 1

Численное решение краевой задачи принципа максимума в задаче оптимального управления методом стрельбы

Содержание отчёта:

Постановка задачи	стр. 1	Исследование оптимальности экстремалей	стр. 6
Формализация задачи	стр. 1	Аналитическое решение и сопряжённая точка	стр. 8
Система необходимых условий оптимальности	стр. 2	Результаты решения задачи и их анализ	стр. 12
Аномальный случай и исследование задачи	стр. 3	Правило Рунге	стр. 14
Краевая задача	стр. 3	Просчёт назад	стр. 16
Численное решение краевой задачи методом стрельбы	стр. 3	Полученные фазовые переменные и значения функционала	стр. 17
Тест решения задачи Коши – гармонический осциллятор	стр. 4	Дополнение. Литературный обзор	стр. 24
Оценка точности решения задачи Коши	стр. 5	Литература	стр. 24

1. Постановка задачи.

Рассматривается задача Лагранжа с фиксированным временным отрезком, без ограничений вида „меньше или равно“:

$$B_0 = \int_0^T (\ddot{x}^2 - \dot{x}^2 - x^2) dt \longrightarrow \text{extr}, \quad (1)$$

$$x(0) = x(T) = 0, \quad \dot{x}(T) = 1,$$

где T – известная константа, параметр задачи.

Требуется формализовать задачу как задачу оптимального управления, принципом максимума Понтрягина свести задачу к краевой задаче, численно решить полученную краевую задачу методом стрельбы и обосновать точность полученных результатов, проверить полученные экстремали Понтрягина на оптимальность при различных значениях параметра $T = \{0.1, 1, 2, 3, 3.5, 10, 20\}$.

2. Формализация задачи.

Формализуем задачу как задачу оптимального управления. Для этого обозначим $u = \ddot{x}$, $y = \dot{x}$. Тогда исходная система (1) переписывается в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ u \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 0, \\ x(T) = 0, \\ y(T) = 1, \\ T = \text{const} \in \{0.1, 1, 2, 3, 3.5, 10, 20\}, \\ B_0 = \int_0^T (u^2 - y^2 - x^2) dt \longrightarrow \inf. \end{array} \right. \quad (2)$$

О выборе условия $B_0 \longrightarrow \inf$, а не $B_0 \longrightarrow \sup$ подробнее см. конец п. 9.

3. Система необходимых условий оптимальности

Выпишем функции Лагранжа и Понtryгина:

$$\mathcal{L} = \int_0^T L dt + l,$$

$$\begin{array}{ll} \text{лагранжиан} & L = \lambda_0(u^2 - y^2 - x^2) + p_x(\dot{x} - y) + p_y(\dot{y} - u), \\ \text{терминант} & l = \lambda_1 x(0) + \lambda_2 x(T) + \lambda_3(y(T) - 1), \\ & H = p_x y + p_y u - \lambda_0(u^2 - y^2 - x^2). \end{array}$$

Применим к задаче оптимального управления (2) принцип максимума Понtryгина. Необходимые

условия оптимальности:

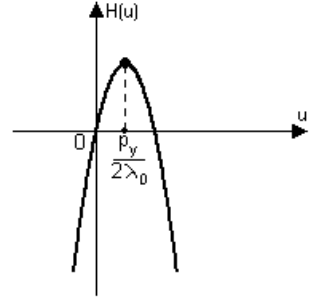
а) уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряжённая система уравнений, условие стационарности по $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$),

$$\begin{pmatrix} \dot{p}_x \\ \dot{p}_y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix}:$$

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -2\lambda_0 x, \\ \dot{p}_y = -p_x - 2\lambda_0 y; \end{cases}$$

б) условие оптимальности по управлению, $u = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} H(u)$:

$u = \arg \max_{u \in \mathbb{R}} (p_y u - \lambda_0 u^2) = \frac{p_y}{2\lambda_0}$, при $\lambda_0 \neq 0$, так как парабола $H(u) = -\lambda_0 u^2 + p_y u$ с ветвями, направленными вниз ($\lambda_0 \geq 0$, см. ниже пункт (е)), достигает максимума в вершине, при указанном значении аргумента u ;



в) условия трансверсальности по $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $p_x(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x(t_k)}$,
 $p_y(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial y(t_k)}$, где $k = 0, 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = T$:

$$p_y(0) = 0, \tag{4}$$

$$p_x(0) = \lambda_1, \quad p_x(T) = -\lambda_2, \quad p_y(T) = -\lambda_3; \tag{5}$$

г) условия стационарности по t_k :

нет, так как в задаче (2) t_k — известные константы;

д) условия дополняющей нежёсткости:

нет, так как в задаче (2) отсутствуют условия вида „меньше или равно“;

е) условие неотрицательности: $\lambda_0 \geq 0$;

ж) условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя);

з) НЕРОН (множители Лагранжа НЕ Равны Одновременно Нулю).

4. Анормальный случай и исследование задачи

Исследуем возможность анормального случая $\lambda_0 = 0$. При $\lambda_0 = 0$ из (2) и (3) получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{p}_x = 0, \\ \dot{p}_y = -p_x. \end{cases} \quad (6)$$

Отсюда получаем, $p_x(t) = c$, $\dot{p}_y(t) = -c$. Так же из условия б) оптимальности по управлению имеем $p_y(t) \equiv 0$, иначе $u(t) = \pm\infty$, и такой управляемый процесс не является допустимым. Следовательно, $c = 0$, $p_x(t) \equiv 0$. Из условий трансверсальности (5) получаем $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Таким образом, если $\lambda_0 = 0$, то все множители Лагранжа равны 0 и получается противоречие с условием з) НЕРОН. Значит, анормальный случай невозможен.

Так как $\lambda_0 \neq 0$, в силу однородности функции Лагранжа по множителям Лагранжа выберем следующее условие нормировки:

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}. \quad (7)$$

Тогда из условия б) определяется управление:

$$u = p_y. \quad (8)$$

5. Краевая задача

Таким образом, на основе принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления (2) сводится к краевой задаче (9)–(10). А именно, из (2)–(4), (7) и (8) имеем:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = p_y, \\ \dot{p}_x = -x, \\ \dot{p}_y = -p_x - y, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & x(T) &= 0, \\ p_y(0) &= 0, & y(T) &= 1, \\ T &\in \{0.1, 1, 2, 3, 3.5, 10, 20\}. \end{aligned} \quad (10)$$

6. Численное решение краевой задачи методом стрельбы

Краевая задача (9)–(10) решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения при $t = 0$: $\alpha_1 = y(0)$, $\alpha_2 = p_x(0)$. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке $[0, T]$, получим соответствующие выбранному значению $\vec{\alpha} := \{\alpha_1, \alpha_2\}$ функции $x(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2]$, $y(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2]$, $p_x(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2]$, $p_y(\cdot)[\alpha_1, \alpha_2]$ и, в частности, значения $x(T)[\alpha_1, \alpha_2]$, $y(T)[\alpha_1, \alpha_2]$. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений (9), начальных условий в 0 момент времени (10) и условий $y(0) = \alpha_1$, $p_x(0) = \alpha_2$ решается численно явным методом Рунге-Кутты 8-го порядка, основанным на расчётных формулах Дормана-Принса 8(7) DOPRI8 с автоматическим выбором шага (то есть с контролем относительной локальной погрешности на шаге по правилу Рунге). Для решения краевой задачи необходимо подобрать значения α_1 , α_2 так, чтобы выполнились условия:

$$\begin{aligned} x(T)[\alpha_1, \alpha_2] &= 0, \\ y(T)[\alpha_1, \alpha_2] - 1 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

соответственно вектор-функцией невязок будет функция $X(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} x(T)[\alpha_1, \alpha_2] \\ y(T)[\alpha_1, \alpha_2] - 1 \end{pmatrix}$. Таким образом, в результате выбора вычислительной схемы метода стрельбы, решение краевой задачи свелось к решению системы двух алгебраических уравнений от двух неизвестных. Корень $\vec{\alpha}$ системы алгебраических уравнений $X(\vec{\alpha}) = 0$ находится методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина. Решение линейной системы уравнений внутри модифицированного метода Ньютона осуществляется методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, с повторным пересчётом.

Схема численного решения краевой задачи методом стрельбы выбрана таким образом, что при отсутствии ошибок в программной реализации решения задачи Коши, найденный методом Ньютона корень будет правильным (без учёта погрешности численного интегрирования), даже если внутри метода Ньютона есть какие-то ишибки. Напротив, ошибка в решении задачи Коши делает бесполезным полученный результат, даже если всё остальное запрограммировано правильно и методу Ньютона удалось найти корень.

Исходя из этого крайне важен следующий тест части программы, решающей задачу Коши, на системе дифференциальных уравнений с известным аналитическим решением.

7. Тест решения задачи Коши – гармонический осциллятор.

В таблице ниже приведены результаты численного интегрирования системы дифференциальных уравнений гармонического осциллятора $\begin{cases} \dot{x}=y, \\ \dot{y}=-x, \end{cases}$ с начальными условиями $\begin{cases} x(0)=0, \\ y(0)=1, \end{cases}$ явным методом Рунге-Кутты с оценкой погрешности на шаге через 8-ую производную для различного конечного времени T и различных значений максимально допустимой относительной погрешности на шаге интегрирования $\Delta_{\text{лок. steps}}$ — общее число сделанных шагов интегрирования (число принятых шагов); $|x(T)|$ и $|y(T) - \cos T|$ — невязки в конце; $\Delta x(\cdot)$ и $\Delta y(\cdot)$ — максимальное отличие полученного решения от известного аналитического $\begin{cases} x(t)=\sin t, \\ y(t)=\cos t, \end{cases}$ по всем шагам; $\delta_K(T)$ — оценка глобальной погрешности по формуле $\delta_K(t_{i+1}) = r_i + \delta_K(t_i) \cdot e^{L_i}$, где r_i — главный член в оценке локальной погрешности, а $L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mu dt$; μ — логарифмическая норма матрицы Якоби исходной системы дифференциальных уравнений, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, равная максимальному собственному значению матрицы $(J + J^T)/2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то есть $0 \Rightarrow \delta_K(t_{i+1}) = r_{i+1} + \delta_K(t_i)$; $R_x = \left| \frac{x_{10-8}(T) - x_{10-10}(T)}{x_{10-10}(T) - x_{10-12}(T)} \right|$, $R_y = \left| \frac{y_{10-8}(T) - y_{10-10}(T)}{y_{10-10}(T) - y_{10-12}(T)} \right|$ должны быть примерно равны $100^{\frac{7}{8}} \approx 56.23$ — проверка правила Рунге.

Гармонический осциллятор.

T	$\Delta_{\text{лок}}$	$steps$	$ x(T) $	$ y(T) - \cos T $	$\Delta x(\cdot)$	$\Delta y(\cdot)$	$\delta_K(T)$	R_x	R_y
π	10^{-8}	6	$7.01 \cdot 10^{-10}$	$7.06 \cdot 10^{-10}$	$9.10 \cdot 10^{-10}$	$7.06 \cdot 10^{-10}$	$1.9 \cdot 10^{-8}$	173.16	130.95
	10^{-10}	10	$4.06 \cdot 10^{-12}$	$5.38 \cdot 10^{-12}$	$5.27 \cdot 10^{-12}$	$5.38 \cdot 10^{-12}$	$3.6 \cdot 10^{-10}$		
	10^{-12}	17	$2.85 \cdot 10^{-14}$	$3.40 \cdot 10^{-14}$	$3.62 \cdot 10^{-14}$	$3.40 \cdot 10^{-14}$	$6.8 \cdot 10^{-12}$		
10π	10^{-8}	52	$8.10 \cdot 10^{-9}$	$8.21 \cdot 10^{-9}$	$1.11 \cdot 10^{-8}$	$1.08 \cdot 10^{-8}$	$2.1 \cdot 10^{-7}$	192.41	146.40
	10^{-10}	93	$4.22 \cdot 10^{-11}$	$5.60 \cdot 10^{-11}$	$6.72 \cdot 10^{-11}$	$6.46 \cdot 10^{-11}$	$3.8 \cdot 10^{-9}$		
	10^{-12}	164	$2.99 \cdot 10^{-13}$	$3.32 \cdot 10^{-13}$	$4.35 \cdot 10^{-13}$	$4.12 \cdot 10^{-13}$	$6.7 \cdot 10^{-11}$		
$10^2\pi$	10^{-8}	520	$8.17 \cdot 10^{-8}$	$8.27 \cdot 10^{-8}$	$1.16 \cdot 10^{-7}$	$1.14 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-6}$	194.98	148.13
	10^{-10}	922	$4.20 \cdot 10^{-10}$	$5.58 \cdot 10^{-10}$	$6.96 \cdot 10^{-10}$	$6.83 \cdot 10^{-10}$	$3.8 \cdot 10^{-8}$		
	10^{-12}	1637	$3.26 \cdot 10^{-12}$	$3.31 \cdot 10^{-12}$	$4.64 \cdot 10^{-12}$	$4.53 \cdot 10^{-12}$	$6.7 \cdot 10^{-10}$		
$10^3\pi$	10^{-8}	5193	$8.17 \cdot 10^{-7}$	$8.27 \cdot 10^{-7}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$	$1.16 \cdot 10^{-6}$	$2.1 \cdot 10^{-5}$	194.33	148.05
	10^{-10}	9219	$4.20 \cdot 10^{-9}$	$5.58 \cdot 10^{-9}$	$6.97 \cdot 10^{-9}$	$6.96 \cdot 10^{-9}$	$3.8 \cdot 10^{-7}$		
	10^{-12}	16369	$1.95 \cdot 10^{-11}$	$3.31 \cdot 10^{-11}$	$3.89 \cdot 10^{-11}$	$3.89 \cdot 10^{-11}$	$6.7 \cdot 10^{-9}$		
$10^4\pi$	10^{-8}	51923	$8.17 \cdot 10^{-6}$	$8.27 \cdot 10^{-6}$	$1.16 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-5}$	$2.1 \cdot 10^{-4}$	192.88	148.05
	10^{-10}	92181	$4.27 \cdot 10^{-8}$	$5.58 \cdot 10^{-8}$	$7.03 \cdot 10^{-8}$	$7.02 \cdot 10^{-8}$	$3.8 \cdot 10^{-6}$		
	10^{-12}	163686	$5.82 \cdot 10^{-10}$	$3.31 \cdot 10^{-10}$	$7.53 \cdot 10^{-10}$	$7.54 \cdot 10^{-10}$	$6.7 \cdot 10^{-8}$		

Продолжение на следующей странице

T	$\Delta_{\text{лок}}$	$steps$	$ x(T) $	$ y(T) - \cos T $	$\Delta x(\cdot)$	$\Delta y(\cdot)$	$\delta_K(T)$	R_x	R_y
$10^5\pi$	10^{-8}	519229	$8.17 \cdot 10^{-5}$	$8.27 \cdot 10^{-5}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	198.95	148.06
	10^{-10}	921810	$4.03 \cdot 10^{-7}$	$5.58 \cdot 10^{-7}$	$6.88 \cdot 10^{-7}$	$6.88 \cdot 10^{-7}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$		
	10^{-12}	1636856	$5.57 \cdot 10^{-9}$	$3.31 \cdot 10^{-9}$	$1.10 \cdot 10^{-8}$	$1.10 \cdot 10^{-8}$	$6.7 \cdot 10^{-7}$		
$10^6\pi$	10^{-8}	5192286	$8.17 \cdot 10^{-4}$	$8.27 \cdot 10^{-4}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$	188.52	148.06
	10^{-10}	9218092	$4.13 \cdot 10^{-6}$	$5.58 \cdot 10^{-6}$	$6.95 \cdot 10^{-6}$	$6.95 \cdot 10^{-6}$	$3.8 \cdot 10^{-4}$		
	10^{-12}	16368556	$1.80 \cdot 10^{-7}$	$3.31 \cdot 10^{-8}$	$3.37 \cdot 10^{-7}$	$3.37 \cdot 10^{-7}$	$6.7 \cdot 10^{-6}$		

Увеличение числа шагов интегрирования в 10 раз при увеличении длины отрезка интегрирования в 10 раз для всех значений $\Delta_{\text{лок}}$; уточнение 2 знаков в решении при различных значениях T и увеличении точности $\Delta_{\text{лок}}$ на 2 порядка, а также падение точности решения на порядок при фиксированной $\Delta_{\text{лок}}$ и увеличении на порядок длины отрезка интегрирования, которое видно из колонок $|x(T)|$, $|y(T) - \cos T|$, $\Delta x(\cdot)$, $\Delta y(\cdot)$, $\delta_K(T)$ позволяет предположить отсутствие ошибок в программной реализации решения задачи Коши указанным методом численного интегрирования.

Особенно следует отметить значения, полученные в колонках R_x и R_y . Они намного превышают теоретическую оценку 56.23 и свидетельствуют о большом запасе точности в методе — при уменьшении максимально допустимой относительной погрешности на шаге интегрирования на 2 порядка происходит существенное уточнение решения, метод в данном случае работает как метод более высокого порядка. Это в первую очередь связано с коэффициентами в расчётных формулах метода и особенностями системы дифференциальных уравнений гармонического осциллятора.

8. Оценка точности решения задачи Коши

Матрица Якоби системы дифференциальных уравнений (9) имеет вид:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Для определения скорости распространения ошибки в оценках глобальной погрешности определяется логарифмическая норма матрицы $\mu(J)$ — максимальное собственное значение матрицы $(J + J^T)/2$ и норма матрицы $\|J\|$ — максимальное сингулярное число:

$$J^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (J + J^T)/2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\lambda & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} &= \lambda^2 \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\lambda & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\lambda \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda^2 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 = \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\right) \left(\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\right) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Корни } \mu_{1,2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4} + 1\right)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}, \quad \mu_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Отсюда максимальное собственное значение матрицы $(J + J^T)/2$, $\mu(J) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. Теперь вычислим максимальное сингулярное число:

$$J^T J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(J^T J - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (\lambda^2 - 3\lambda + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\|J\| = \sqrt{\lambda_{\max}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Так как $\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \mu \leq \|J\| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, то применима следующая оценка глобальной погрешности:

$$\|\vec{x}(t) - \vec{v}(t)\| \leq e^{L(t)} \left(\delta_K(0) + \int_0^t e^{-L(s)} \rho(s) ds \right),$$

где \vec{x} – вектор точного значения фазовых переменных системы (9),

\vec{v} – вектор фазовых переменных системы (9), вычисляемый в результате решения задачи Коши,

$\rho(s)$ – ошибка в вычисленных правых частях системы (9) в момент времени s ,

$\delta_K(t)$ – ошибка в вычисленных значениях фазовых переменных задачи (9) в момент времени t , для оценки точности решения задачи Коши мы предполагаем, что в начальный момент времени значения фазовых переменных заданы правильно, то есть $\delta_K(0) = 0$,

$L(t) = \int_0^t l(s) ds$, где $l(s) = \mu(J(s, x(s), y(s), p_x(s), p_y(s)))$.

Так как для логарифмической нормы получена аналитическая формула, не зависящая от $t, x(t), y(t)$,

$p_x(t), p_y(t)$, — $l = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, то интеграл $L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} l ds$ можно не только оценивать, но и вычислить явно:

$L_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} l ds = \frac{1+\sqrt{5}}{4}(t_{i+1} - t_i)$, в частности $L(T) = \int_0^T l ds = \frac{1+\sqrt{5}}{4}T$. Тогда величина глобальной погрешности решения задачи Коши $\delta_K(T)$ может быть оценена через C_ρ , где константа $C_\rho \geq \rho(s)$ оценивает сверху $\rho(s)$:

$$\delta_K(T) \leq e^{L(T)} \left(\delta_K(0) + \int_0^T e^{-L(s)} \rho(s) ds \right) = e^{\frac{1+\sqrt{5}}{4}T} \cdot \int_0^T e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{4}s} C_\rho ds = \frac{4}{1+\sqrt{5}} C_\rho \cdot \left(e^{\frac{1+\sqrt{5}}{4}T} - 1 \right) \quad (12)$$

Таким образом, глобальная ошибка в решении задачи Коши оценивается по формуле (12), где C_ρ – максимум ошибки в вычислении правых частей.

9. Исследование оптимальности экстремалей

Для исследования экстремалей в задаче Лагранжа (2) рассмотрим пространство $X = C^1([0; T], \mathbb{R}) \times C([0; T])$. Элементы этого пространства $\xi := \{x(\cdot), y(\cdot), u(\cdot)\}$ называются управляемыми процессами. Элемент этого пространства, удовлетворяющий системе необходимых условий оптимальности, определённый в результате решения краевой задачи (9)–(10), для которого проверяется выполнение необходимых и достаточных условий оптимальности второго порядка обозначается $\xi := \{\hat{x}(\cdot), \hat{y}(\cdot), \hat{u}(\cdot)\}$.

Оператор типа равенства

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

$$x(0) = 0, \quad x(T) = 0, \quad y(T) = 1, \quad T \in \{0.1, 1, 2, 3, 3.5, 10, 20\} \quad (14)$$

действует из пространства X в пространство $Y := C([0, T], \mathbb{R}^2) \times \mathbb{R}^2$.

Обозначим через $\delta\xi := \{\delta x, \delta y, \delta u\}$ элемент касательного пространства к многообразию, определяемому в точке $\hat{\xi}$ пространства X условиями (13), (14).

Принадлежность элемента $\delta\xi$ касательному пространству, совпадающему в силу теоремы Люстерника с ядром производной оператора, определяющего условие типа равенства (13), (14), накладывает на $\delta x, \delta y, \delta u$ условия:

$$\begin{aligned}\dot{\delta x} &= \delta y, \\ \dot{\delta y} &= \delta u, \\ \delta u &\in \mathbb{R}, \\ \delta x(0) &= 0, \\ \delta x(T) &= 0, \\ \delta y(T) &= 1.\end{aligned}\tag{15}$$

Вторая вариация функции Лагранжа \mathcal{L} в данной задаче имеет вид:

$$\mathcal{L}_{\xi\xi} = \int_0^T ((\delta u)^2 - (\delta y)^2 - (\delta x)^2) dt.\tag{16}$$

Необходимым условием оптимальности является неотрицательная определённость $\mathcal{L}_{\xi\xi}[\delta\xi, \delta\xi] \geq 0$ на допустимых вариациях, а достаточным условием второго порядка — положительная определённость на допустимых экстремальных: $\mathcal{L}_{\xi\xi}[\delta\xi, \delta\xi] \geq \varepsilon \varphi(\delta\xi)$, $\varepsilon > 0$, $\varphi(\delta\xi) = \int_0^T (\delta u)^2 dt$.

Необходимое для неотрицательной определённости второй вариации $\mathcal{L}_{\xi\xi}[\delta\xi, \delta\xi]$ условие Лежандра выполняется в усиленной форме: $L_{uu} = 1 > 0$. Поэтому для неотрицательности второй вариации необходимо отсутствие на интервале $(0; T)$ сопряжённых точек, то есть выполнение условия Якоби, для положительности второй вариации достаточно выполнения усиленного условия Якоби: на полуинтервале $(0; T]$ нет сопряжённых точек.

В нашей задаче точка τ называется сопряжённой, если существует нетривиальное решение краевой задачи:

$$\begin{aligned}\dot{\delta x} &= \delta y, \\ \dot{\delta y} &= q_y, \\ \dot{\delta q_x} &= -\delta x, \\ \dot{\delta q_y} &= -q_x - \delta y, \\ \delta u &= q_y, \\ \delta x(0) &= 0, \\ \delta x(T) &= 0, \\ \delta y(T) &= 1, \\ q_y(0) &= 0.\end{aligned}\tag{17}$$

Она может быть формально получена в результате применения необходимых условий оптимальности (принцип Лагранжа) к задаче минимизации квадратичного функционала (16) при выполнении системы линейных условий (15) на временном интервале $[0; \tau]$ после замены T на τ в (15), (16). Множитель Лагранжа при функционале в задаче (17) выбран равным $\frac{1}{2}$. Первые два дифференциальных уравнения в (17) являются уравнениями в вариациях основной системы (13), следующие два — уравнениями в вариациях сопряжённой системы (3), пятое соотношение, условие оптимальности, соответствует вариации условия оптимальности исходной задачи (8). Так как система дифференциальных уравнений рассматриваемой краевой задачи (17) линейна и однородна, то все решения задач Коши, удовлетворяющие двум условиям при $t = 0$, $x(0) = 0$ и $q_y(0) = 0$, могут быть получены в виде линейных комбинаций

двух линейно-независимых решений задач Коши с начальными условиями:

$$\begin{pmatrix} \delta x^1(0) \\ \delta y^1(0) \\ q_x^1(0) \\ q_y^1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \delta x^2(0) \\ \delta y^2(0) \\ q_x^2(0) \\ q_y^2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Если в некоторый момент $\tau \in (0; T]$

$$\begin{vmatrix} \delta y^1(\tau) & \delta y^2(\tau) \\ q_x^1(\tau) & q_x^2(\tau) \end{vmatrix} = 0, \quad (19)$$

то краевая задача (17) имеет нетривиальное решение и точка τ будет сопряжённой.

Напоследок отметим, что при формализации исходной задачи (1) из условия $B_0 \rightarrow \text{extr}$ было выбрано именно условие $B_0 \rightarrow \inf$ из следующих соображений. При выборе условия $B_0 \rightarrow \sup \Leftrightarrow -B_0 \rightarrow \inf$ получаем лагранжиан $L = \frac{1}{2}(-u^2 + y^2 + x^2) + p_x(\dot{x} - y) + p_y(\dot{y} - u)$. И тогда вторая вариация по управлению $L_{uu} = -1 < 0$ — не выполняется необходимое условие слабого минимума Лежандра, значит полученные экстремали не были бы оптимальными, и поэтому не ищались.

10. Аналитическое решение и сопряжённая точка

Краевая задача решается аналитически. Из (9) имеем:

$$x = -\dot{p}_x = \ddot{p}_y + \dot{y} = y^{(3)} + \dot{y} = x^{(4)} + x^{(2)}.$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений краевой задачи (9) сводится к линейному дифференциальному уравнению:

$$x^{(4)} + x^{(2)} - x = 0. \quad (20)$$

Найдём общее решение (20). Характеристическое уравнение $\lambda^4 + \lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} i$, $\lambda_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $\lambda_3 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $\lambda_4 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} i$. Общее решение:

$$x = a_0 e^{\lambda_1 t} + b_0 e^{\lambda_2 t} + c_0 e^{\lambda_3 t} + d_0 e^{\lambda_4 t} = \\ a \cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) + b \sin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) + c \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t\right) + d \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t\right). \quad (21)$$

Дифференцируя это решение, получим выражения для искомых функций в краевой задаче (9)–(10):

$$y = -a \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \sin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) + b \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) + c \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t\right) + d \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t\right), \\ p_y = -a \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) - b \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) + c \frac{\sqrt{5}-1}{2} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t\right) + d \frac{\sqrt{5}-1}{2} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t\right), \\ p_x = -\dot{p}_y - y = -a \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)^3 \sin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) + b \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)^3 \cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) - c \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)^3 \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t\right) - \\ - d \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)^3 \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t\right) - y = a \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} - \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right)^3\right) \sin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) + \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
& + b \left(\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \right)^3 - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \cos \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t \right) - c \left(\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right)^3 + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t \right) - \right. \\
& \left. - d \left(\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right)^3 + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t \right) \right).
\end{aligned}$$

После подстановки их в краевые условия (10) получится система линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a, b, c, d :

$$\begin{cases} a + c = 0, \\ a \cos \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T \right) + b \sin \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T \right) + c \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T \right) + d \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T \right) = 0, \\ -a \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \sin \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T \right) + b \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \cos \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T \right) + c \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T \right) + d \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T \right) = 1, \\ -a \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + c \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 0. \end{cases} \quad (23)$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} a = 0, \\ b \sin \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T \right) + d \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T \right) = 0, \\ b \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \cos \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T \right) + d \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T \right) = 1, \\ c = 0. \end{cases}$$

\Updownarrow

$$\begin{cases} a = 0, \\ b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1} \cos \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T \right) - \sqrt{\sqrt{5}-1} \sin \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T \right) \operatorname{cth} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T \right)}, \\ c = 0, \\ d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{5}-1} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T \right) - \sqrt{\sqrt{5}+1} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T \right) \operatorname{ctg} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T \right)}. \end{cases} \quad (24)$$

Таким образом, система уравнений (21),(22) и коэффициентов (24) является аналитическим решением исходной задачи (2).

При $t = 0$ получаем значения параметров пристрелки для краевой задачи (9)–(10):

$$\begin{aligned} y(0) &= b \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + d \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}, \\ p_x(0) &= b \left(\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \right)^3 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right) - d \left(\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \right)^3 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right). \end{aligned} \quad (25)$$

При заданных в постановке задачи значениях параметра T получаем:

Точные значения параметров пристрелки.

T	$y(0)$	$p_x(0)$
0.1	−0.500250428907321520	−299.800335788296933970
1	−0.529658917112056926	−2.834528013273604152
2	−0.704254201775864619	−0.715004207901699607
3	−2.766260060093759243	−1.285304255998773959
3.5	3.123090362102298290	1.433593817232580836
10	1.119116338125226484	0.691834549816588429
20	1.305664794863987899	0.806945383366553415

Исследуем оптимальность полученных экстремалей. Как выяснилось в п. 9., на всех полученных экстремальных выполняется усиленное условие Лежандра. В силу линейности системы ограничений и квазиквадратичности рассматриваемого функционала, система дифференциальных уравнений Якоби в (17) совпадает с системой дифференциальных уравнений краевой задачи (9). Как было получено выше решение такой системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \delta x &= a' \cos \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t \right) + b' \sin \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t \right) + c' \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t \right) + d' \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t \right), \\ \delta y &= -a' \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \sin \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t \right) + b' \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \cos \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t \right) + c' \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t \right) + \\ &\quad + d' \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t \right), \\ q_x &= -a' \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sin \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t \right) + b' \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cos \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t \right) - \\ &\quad - c' \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t \right) - d' \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t \right), \\ q_y &= -a' \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cos \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t \right) - b' \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sin \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t \right) + c' \frac{\sqrt{5}-1}{2} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t \right) + \\ &\quad + d' \frac{\sqrt{5}-1}{2} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t \right). \end{aligned}$$

Начальные условия (18) однозначно определяют два набора коэффициентов:

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_1 + c'_1 = 0, \\ b'_1 \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + d'_1 \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 1, \\ b'_1 \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{\sqrt{5}-1}{2} - d'_1 \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 0, \\ -a'_1 \frac{\sqrt{5}+1}{2} + c'_1 \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0. \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_2 + c'_2 = 0, \\ b'_2 \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} + d'_2 \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 0, \\ b'_2 \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \frac{\sqrt{5}-1}{2} - d'_2 \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1, \\ -a'_2 \frac{\sqrt{5}+1}{2} + c'_2 \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0. \end{array} \right.$$

Откуда получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} a'_1 = 0, \\ b'_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10}}, \\ c'_1 = 0, \\ d'_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10}}, \end{array} \right. \quad \text{и} \quad \left\{ \begin{array}{l} a'_2 = 0, \\ b'_2 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10}}, \\ c'_2 = 0, \\ d'_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10}}. \end{array} \right.$$

Пусть $\tau^+ = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \tau$, $\tau^- = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \tau$. Тогда условие (19) преобразуется к виду:

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \tau\right) + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \tau\right) & \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10}} \cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \tau\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \tau\right)}{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \tau\right) - \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \tau\right)} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \tau\right) - \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \tau\right) & \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{10}} \cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \tau\right) + \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{10}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \tau\right) \end{array} \right| = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\left| \begin{array}{cc} (\sqrt{5}+1) \cos \tau^+ + (\sqrt{5}-1) \operatorname{ch} \tau^- & 2 \cos \tau^+ - 2 \operatorname{ch} \tau^- \\ 2 \cos \tau^+ - 2 \operatorname{ch} \tau^- & (\sqrt{5}-1) \cos \tau^+ + (\sqrt{5}+1) \operatorname{ch} \tau^- \end{array} \right| = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$4 \cos^2 \tau^+ + 4 \operatorname{ch}^2 \tau^- + (6 - 2\sqrt{5}) \cos \tau^+ \operatorname{ch} \tau^- + (6 + 2\sqrt{5}) \cos \tau^+ \operatorname{ch} \tau^- - 4 \cos^2 \tau^+ - 4 \operatorname{ch}^2 \tau^- + 4 \operatorname{ch} \tau^- \cos \tau^+ - 4 \operatorname{ch} \tau^- \cos \tau^+ = 0.$$

$$\Updownarrow$$

$$\cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \tau\right) \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \tau\right) = 0.$$

Минимальный положительный корень этого уравнения определяется условием $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \tau^* = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \tau^* = \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5}+1}} = 1.234883696486107629$. Таким образом, на интервале $(0, \tau^*)$ сопряжённые точки отсутствуют, и на экстремали задачи (2) при $T \in (0, \tau^*)$ выполняется усиленное условие Якоби, то есть достигается слабый локальный минимум. Поскольку выполняется условие квазирегулярности (усиленное условие Вейерштрасса, функция L является выпуклой функцией управления u , т.е. L_{uu} положительно определена в окрестности экстремали), то на экстремали достигается сильный локальный минимум. Так как задача линейно-квадратичная, сильный локальный минимум совпадает с абсолютным минимумом. При $T > \tau^*$ не выполняется необходимое условие Якоби слабого минимума. Таким

образом, при $T \in \{0.1, 1\}$ на единственной существующей экстремали задачи достигается абсолютный минимум; при $T \in \{2, 3, 3.5, 10, 20\}$ полученные экстремали неоптимальны, на самом деле можно показать, что минимизируемый функционал B_0 в этом случае можно сделать сколь угодно маленьким ($B_0 \rightarrow -\infty$).

11. Результаты решения задачи и их анализ

Для каждого значения T задача была решена с различными значениями максимально допустимой относительной погрешности на шаге решения задачи Коши $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-8}, 10^{-10}, 10^{-12}$. При этом точность решения задачи (удовлетворения условию $X(\alpha) = 0$) выбиралась равной $10 \cdot \Delta_{\text{лок}}$, начальный шаг для решения задачи Коши брался равным $T/10$, максимальный шаг — T . Для $T = 0.1$ задача была решена для случайно выбранных значений параметров пристрелки $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, для каждого следующего значения $T \in \{0.1, 1, 2, 3, 3.5, 10, 20\}$ решение было получено в результате выбора значений параметров пристрелки равными полученным значениям при решении задачи с предыдущим значением параметра T , то есть фактически был реализован метод продолжения по параметру со схемой $\vec{X}(\vec{\alpha}_{i+1}) = (1 - \beta)\vec{X}(\vec{\alpha}_i)$, причём решения нашлись сразу, при шаге $\beta = 1$.

В приведённой ниже таблице с результатами численного решения задачи T — значение параметра T , при котором решалась задача; $\Delta_{\text{лок}}$ — относительная погрешность на шаге решения задачи Коши; it — число итераций, за которое сошёлся метод Ньютона; $y(0)$ и $p(0)$ — полученные численно методом Ньютона искомые значения параметров пристрелки; $\Delta y(0)$ и $\Delta p_x(0)$ — их отличие от точного аналитического решения, полученного в п. 10.; $|x(T)|$ и $|y(T) - 1|$ — невязки.

Таблица 1: Результаты численного решения задачи (2).

T	$\Delta_{\text{лок}}$	it	$y(0)$	$p_x(0)$	$\Delta y(0)$	$\Delta p_x(0)$	$ x(T) $	$ y(T) - 1 $
0.1	10^{-8}	2	-0.50025042890612	-299.80033578830376	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$6.8 \cdot 10^{-12}$	$4.3 \cdot 10^{-16}$	$1.2 \cdot 10^{-14}$
	10^{-10}	2	-0.50025042890610	-299.80033578827931	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$1.8 \cdot 10^{-11}$	$2.4 \cdot 10^{-15}$	$8.9 \cdot 10^{-14}$
	10^{-12}	2	-0.50025042890601	-299.80033578828113	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$7.2 \cdot 10^{-15}$	$1.2 \cdot 10^{-14}$
1	10^{-8}	2	-0.52965892026664	-2.83452796121925	$3.2 \cdot 10^{-9}$	$5.2 \cdot 10^{-8}$	$1.1 \cdot 10^{-8}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$
	10^{-10}	2	-0.52965891711176	-2.83452801327526	$3.0 \cdot 10^{-13}$	$1.7 \cdot 10^{-12}$	$2.1 \cdot 10^{-13}$	$3.2 \cdot 10^{-13}$
	10^{-12}	2	-0.52965891711207	-2.83452801327367	$9.2 \cdot 10^{-15}$	$6.2 \cdot 10^{-14}$	$1.8 \cdot 10^{-15}$	$1.5 \cdot 10^{-14}$
2	10^{-8}	2	-0.70425420123460	-0.71500420778796	$5.4 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$1.5 \cdot 10^{-14}$	$8.2 \cdot 10^{-15}$
	10^{-10}	2	-0.70425420177211	-0.71500420790060	$3.7 \cdot 10^{-12}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$7.7 \cdot 10^{-17}$	$4.4 \cdot 10^{-16}$
	10^{-12}	2	-0.70425420177584	-0.71500420790169	$2.5 \cdot 10^{-14}$	$7.2 \cdot 10^{-15}$	$9.5 \cdot 10^{-16}$	$7.8 \cdot 10^{-16}$
3	10^{-8}	2	-2.76626005127567	-1.28530425197541	$8.8 \cdot 10^{-9}$	$4.0 \cdot 10^{-9}$	$9.1 \cdot 10^{-15}$	$2.5 \cdot 10^{-14}$
	10^{-10}	2	-2.76626006002568	-1.28530425596694	$6.8 \cdot 10^{-11}$	$3.2 \cdot 10^{-11}$	$7.4 \cdot 10^{-15}$	$2.9 \cdot 10^{-15}$
	10^{-12}	2	-2.76626006009351	-1.28530425599866	$2.5 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$1.7 \cdot 10^{-14}$	$5.9 \cdot 10^{-14}$
3.5	10^{-8}	2	3.12309036920618	1.43359382014942	$7.1 \cdot 10^{-9}$	$2.9 \cdot 10^{-9}$	$2.7 \cdot 10^{-15}$	$4.0 \cdot 10^{-15}$
	10^{-10}	2	3.12309036213535	1.43359381724514	$3.3 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$1.5 \cdot 10^{-13}$	$2.1 \cdot 10^{-13}$
	10^{-12}	2	3.12309036210207	1.43359381723247	$2.3 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$7.2 \cdot 10^{-14}$	$2.0 \cdot 10^{-13}$
10	10^{-8}	2	1.11911633115119	0.69183454550194	$7.0 \cdot 10^{-9}$	$4.3 \cdot 10^{-9}$	$4.3 \cdot 10^{-12}$	$2.6 \cdot 10^{-12}$
	10^{-10}	2	1.11911633808935	0.69183454979438	$3.6 \cdot 10^{-11}$	$2.2 \cdot 10^{-11}$	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-11}$
	10^{-12}	2	1.11911633812499	0.69183454981644	$2.3 \cdot 10^{-13}$	$1.5 \cdot 10^{-13}$	$5.4 \cdot 10^{-12}$	$4.2 \cdot 10^{-12}$
20	10^{-8}	2	1.30566477586467	0.80694537162433	$1.9 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$	$5.4 \cdot 10^{-9}$	$4.3 \cdot 10^{-9}$
	10^{-10}	3	1.30566479475366	0.80694538329837	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$6.8 \cdot 10^{-11}$	$4.2 \cdot 10^{-12}$	$3.3 \cdot 10^{-12}$
	10^{-12}	7	1.30566479486329	0.80694538336612	$7.0 \cdot 10^{-13}$	$4.3 \cdot 10^{-13}$	$4.0 \cdot 10^{-12}$	$3.1 \cdot 10^{-12}$

Фактически, колонками $\Delta y(0)$ и $\Delta p_x(0)$ оценивается точность решения краевой задачи. Значение $it = 7$ при $T = 20$ и относительной локальной погрешности на шаге 10^{-12} означает плохую сходимость метода Ньютона в окрестности этой точки $T = 20$. Увеличение числа правильных знаков $y(0)$, $p_y(0)$ и улучшение невязок при увеличении точности на шаге соответствует правилу Рунге (см. таблицу 3).

В основном, точность решения задачи оценивается таблицей 2 — в ней приведены максимумы отклонения всех фазовых и сопряженных переменных от аналитического решения по всем точкам, в которые был сделан шаг при решении задачи Коши, с разными относительными погрешностями на шаге. $\Delta H(\cdot)$ — изменение первого интеграла задачи, функции Понтрягина, по всем сделанным шагам (т.е. $\max(H(t)) - \min(H(t))$), δ_K — оценка глобальной погрешности в решении задачи Коши, вычисляемая из соотношения $\delta_K(t_{i+1}) = r_i + \delta_K(t_i) \cdot e^{L_i}$, где L_i — функция из п. 8., а r_i — главный член в оценке локальной погрешности, вычисляемый на каждом шаге решения задачи Коши.

Таблица 2: Точность полученных экстремалей.

T	$\Delta_{\text{лок}}$	$\Delta x(\cdot)$	$\Delta y(\cdot)$	$\Delta p_x(\cdot)$	$\Delta p_y(\cdot)$	$\delta_K(T)$	$\Delta H(\cdot)$
0.1	10^{-8}	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-12}$	$5.9 \cdot 10^{-14}$	$9.0 \cdot 10^{-14}$
	10^{-10}	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-12}$	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$2.6 \cdot 10^{-14}$
	10^{-12}	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-12}$	$5.7 \cdot 10^{-14}$	$2.4 \cdot 10^{-14}$
1	10^{-8}	$1.3 \cdot 10^{-10}$	$2.9 \cdot 10^{-10}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$	$2.1 \cdot 10^{-10}$	$9.2 \cdot 10^{-9}$	$8.9 \cdot 10^{-10}$
	10^{-10}	$7.2 \cdot 10^{-13}$	$1.4 \cdot 10^{-12}$	$9.1 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	$4.5 \cdot 10^{-12}$
	10^{-12}	$5.9 \cdot 10^{-15}$	$1.5 \cdot 10^{-14}$	$6.8 \cdot 10^{-14}$	$7.1 \cdot 10^{-14}$	$2.7 \cdot 10^{-12}$	$2.5 \cdot 10^{-14}$
2	10^{-8}	$4.9 \cdot 10^{-10}$	$3.5 \cdot 10^{-10}$	$2.2 \cdot 10^{-10}$	$7.8 \cdot 10^{-10}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$	$8.2 \cdot 10^{-10}$
	10^{-10}	$3.1 \cdot 10^{-12}$	$1.8 \cdot 10^{-12}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$5.1 \cdot 10^{-12}$	$5.5 \cdot 10^{-10}$	$6.0 \cdot 10^{-12}$
	10^{-12}	$1.4 \cdot 10^{-14}$	$2.5 \cdot 10^{-14}$	$1.8 \cdot 10^{-14}$	$2.3 \cdot 10^{-14}$	$1.2 \cdot 10^{-11}$	$4.0 \cdot 10^{-14}$
3	10^{-8}	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$3.0 \cdot 10^{-9}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	$2.7 \cdot 10^{-9}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$
	10^{-10}	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$2.5 \cdot 10^{-11}$	$1.5 \cdot 10^{-11}$	$2.1 \cdot 10^{-11}$	$6.3 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$
	10^{-12}	$1.8 \cdot 10^{-13}$	$2.5 \cdot 10^{-13}$	$2.0 \cdot 10^{-13}$	$2.6 \cdot 10^{-13}$	$9.4 \cdot 10^{-11}$	$5.7 \cdot 10^{-13}$
3.5	10^{-8}	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$4.0 \cdot 10^{-9}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	$3.0 \cdot 10^{-9}$	$3.5 \cdot 10^{-7}$	$1.9 \cdot 10^{-8}$
	10^{-10}	$1.2 \cdot 10^{-11}$	$2.4 \cdot 10^{-11}$	$1.5 \cdot 10^{-11}$	$2.0 \cdot 10^{-11}$	$8.6 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-10}$
	10^{-12}	$1.6 \cdot 10^{-13}$	$2.3 \cdot 10^{-13}$	$1.6 \cdot 10^{-13}$	$2.4 \cdot 10^{-13}$	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$7.6 \cdot 10^{-13}$
10	10^{-8}	$3.8 \cdot 10^{-9}$	$4.3 \cdot 10^{-9}$	$2.7 \cdot 10^{-9}$	$6.1 \cdot 10^{-9}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$	$9.5 \cdot 10^{-9}$
	10^{-10}	$2.2 \cdot 10^{-11}$	$2.9 \cdot 10^{-11}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$3.7 \cdot 10^{-11}$	$7.2 \cdot 10^{-7}$	$6.3 \cdot 10^{-11}$
	10^{-12}	$1.6 \cdot 10^{-12}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$2.2 \cdot 10^{-12}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$3.8 \cdot 10^{-13}$
20	10^{-8}	$8.3 \cdot 10^{-9}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$7.8 \cdot 10^{-9}$	$1.6 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-1}$	$2.6 \cdot 10^{-8}$
	10^{-10}	$3.9 \cdot 10^{-9}$	$3.1 \cdot 10^{-9}$	$4.9 \cdot 10^{-9}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$
	10^{-12}	$3.9 \cdot 10^{-9}$	$3.1 \cdot 10^{-9}$	$5.0 \cdot 10^{-9}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$1.0 \cdot 10^{-12}$

Для каждого фиксированного значения T , для всех $\Delta_{\text{лок}}$ значения параметров пристрелки брались одинаковыми, равными соответствующим значениям, полученным при решении краевой задачи с $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$. Для сравнения результатов при различных $\Delta_{\text{лок}}$ задачу Коши необходимо начинать решать из одной и той же точки.

При анализе результатов, представленных в таблице следует обратить внимание на то, что при уменьшении $\Delta_{\text{лок}}$ в 100 раз число совпадающих знаков в среднем увеличивается на два, и также на два порядка порядка уменьшаются величины ΔH и δ_K . В общем случае это не является доказательством правильности решения задачи, но этот необходимый признак реально позволяет хоть как-то убедиться в корректности вычислений. В нашей задаче ситуация упрощается, в связи с нахождением аналитического решения можно говорить о правильности полученных результатов.

Опираясь на совпадение знаков, можно предположить, что точность решения задачи Коши примерно совпадает с погрешностью ΔH .

Отметим, что несоответствие величин $\delta_K(T)$ и $\Delta_{\text{лок}}$ друг другу кажущееся, так как $\delta_K(T)$ — оценка абсолютных, а $\Delta_{\text{лок}}$ — относительных величин.

12. Правило Рунге

В таблице 3, приведённой ниже, проверяется правило Рунге. А именно, были посчитаны отличия $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$, $\Delta p_x(t)$ и $\Delta p_y(t)$ фазовых и сопряжённых переменных от точного аналитического решения при $t = 0, T/4, T/2, 3T/4, T$ для различных значений максимально допустимой относительной погрешности на шаге. $|H(t) - H(0)|$ — отличие $H(t)$ от $H(0)$, то есть контроль за изменением первого интеграла задачи.

Таблица 3: Правило Рунге.

$\Delta_{\text{ЛОК}}$	t	$\Delta x(t)$	$\Delta y(t)$	$\Delta p_x(t)$	$\Delta p_y(t)$	$ H(t) - H(0) $
T=0.1						
10^{-8}	0	0.0	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	0.0	0.0
	0.025	$3.3 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$4.3 \cdot 10^{-13}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$
	0.050	$6.6 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$8.6 \cdot 10^{-13}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$
	0.075	$9.7 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$4.1 \cdot 10^{-10}$
	0.100	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-12}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$
10^{-10}	0	0.0	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	0.0	0.0
	0.025	$3.3 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$4.3 \cdot 10^{-13}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$
	0.050	$6.6 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$8.6 \cdot 10^{-13}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$
	0.075	$9.7 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$4.1 \cdot 10^{-10}$
	0.100	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-12}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$
10^{-12}	0	0.0	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	0.0	0.0
	0.025	$3.3 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$4.3 \cdot 10^{-13}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$
	0.050	$6.6 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$8.6 \cdot 10^{-13}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$
	0.075	$9.7 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$4.1 \cdot 10^{-10}$
	0.100	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-12}$	$4.0 \cdot 10^{-10}$
T=1						
10^{-8}	0	0.0	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$6.6 \cdot 10^{-14}$	0.0	0.0
	0.25	$1.9 \cdot 10^{-15}$	$1.4 \cdot 10^{-14}$	$6.8 \cdot 10^{-14}$	$1.7 \cdot 10^{-14}$	$9.0 \cdot 10^{-14}$
	0.5	$4.5 \cdot 10^{-15}$	$6.2 \cdot 10^{-13}$	$4.4 \cdot 10^{-13}$	$3.0 \cdot 10^{-14}$	$1.9 \cdot 10^{-12}$
	0.75	$3.1 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$7.7 \cdot 10^{-13}$	$5.2 \cdot 10^{-13}$	$3.7 \cdot 10^{-12}$
	1	$8.6 \cdot 10^{-13}$	$1.5 \cdot 10^{-12}$	$9.5 \cdot 10^{-13}$	$1.4 \cdot 10^{-12}$	$5.5 \cdot 10^{-12}$
10^{-10}	0	0.0	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$6.6 \cdot 10^{-14}$	0.0	0.0
	0.25	$1.9 \cdot 10^{-15}$	$1.4 \cdot 10^{-14}$	$6.8 \cdot 10^{-14}$	$1.7 \cdot 10^{-14}$	$9.0 \cdot 10^{-14}$
	0.5	$4.5 \cdot 10^{-15}$	$6.2 \cdot 10^{-13}$	$4.4 \cdot 10^{-13}$	$3.0 \cdot 10^{-14}$	$1.9 \cdot 10^{-12}$
	0.75	$2.8 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$7.1 \cdot 10^{-13}$	$4.8 \cdot 10^{-13}$	$3.4 \cdot 10^{-12}$
	1	$5.3 \cdot 10^{-13}$	$9.0 \cdot 10^{-13}$	$6.1 \cdot 10^{-13}$	$9.0 \cdot 10^{-13}$	$3.4 \cdot 10^{-12}$
10^{-12}	0	0.0	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$6.6 \cdot 10^{-14}$	0.0	0.0
	0.25	$2.5 \cdot 10^{-15}$	$1.2 \cdot 10^{-14}$	$6.6 \cdot 10^{-14}$	$1.9 \cdot 10^{-14}$	$8.4 \cdot 10^{-14}$
	0.5	$4.7 \cdot 10^{-15}$	$7.1 \cdot 10^{-15}$	$6.6 \cdot 10^{-14}$	$3.7 \cdot 10^{-14}$	$8.9 \cdot 10^{-14}$
	0.75	$5.4 \cdot 10^{-15}$	$3.1 \cdot 10^{-15}$	$6.6 \cdot 10^{-14}$	$5.4 \cdot 10^{-14}$	$9.2 \cdot 10^{-14}$
	1	$3.3 \cdot 10^{-15}$	$1.7 \cdot 10^{-14}$	$6.5 \cdot 10^{-14}$	$6.9 \cdot 10^{-14}$	$9.7 \cdot 10^{-14}$
T=2						
10^{-8}	0	0.0	$2.5 \cdot 10^{-14}$	$9.7 \cdot 10^{-15}$	0.0	0.0
	0.5	$3.7 \cdot 10^{-14}$	$1.9 \cdot 10^{-12}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$6.1 \cdot 10^{-14}$	$2.7 \cdot 10^{-12}$
	1	$9.7 \cdot 10^{-11}$	$2.4 \cdot 10^{-10}$	$1.5 \cdot 10^{-10}$	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$3.5 \cdot 10^{-10}$
	1.5	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$	$7.1 \cdot 10^{-11}$	$3.0 \cdot 10^{-10}$	$3.5 \cdot 10^{-10}$
	2	$3.7 \cdot 10^{-10}$	$8.7 \cdot 10^{-11}$	$5.7 \cdot 10^{-11}$	$6.0 \cdot 10^{-10}$	$6.3 \cdot 10^{-10}$

Продолжение на следующей странице

$\Delta_{\text{ЛОК}}$	t	$\Delta x(t)$	$\Delta y(t)$	$\Delta p_x(t)$	$\Delta p_y(t)$	$ H(t) - H(0) $
10^{-10}	0	0.0	$2.5 \cdot 10^{-14}$	$9.7 \cdot 10^{-15}$	0.0	0.0
	0.5	$1.7 \cdot 10^{-14}$	$7.1 \cdot 10^{-13}$	$4.5 \cdot 10^{-13}$	$2.6 \cdot 10^{-14}$	$1.0 \cdot 10^{-12}$
	1	$6.3 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$	$7.0 \cdot 10^{-13}$	$1.0 \cdot 10^{-12}$	$2.0 \cdot 10^{-12}$
	1.5	$1.5 \cdot 10^{-12}$	$6.2 \cdot 10^{-13}$	$3.8 \cdot 10^{-13}$	$2.4 \cdot 10^{-12}$	$3.0 \cdot 10^{-12}$
	2	$2.1 \cdot 10^{-12}$	$9.0 \cdot 10^{-13}$	$5.7 \cdot 10^{-13}$	$3.4 \cdot 10^{-12}$	$4.2 \cdot 10^{-12}$
10^{-12}	0	0.0	$2.5 \cdot 10^{-14}$	$9.7 \cdot 10^{-15}$	0.0	0.0
	0.5	$1.2 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$1.8 \cdot 10^{-15}$	$1.7 \cdot 10^{-14}$	$3.0 \cdot 10^{-14}$
	1	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$2.5 \cdot 10^{-15}$	$8.9 \cdot 10^{-15}$	$1.5 \cdot 10^{-14}$	$2.1 \cdot 10^{-14}$
	1.5	$7.8 \cdot 10^{-15}$	$9.3 \cdot 10^{-15}$	$1.6 \cdot 10^{-14}$	$1.8 \cdot 10^{-15}$	$1.6 \cdot 10^{-14}$
	2	$1.0 \cdot 10^{-15}$	$5.2 \cdot 10^{-15}$	$1.8 \cdot 10^{-14}$	$1.8 \cdot 10^{-14}$	$7.4 \cdot 10^{-15}$
T=3						
10^{-8}	0	0.0	$2.5 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	0.75	$5.1 \cdot 10^{-11}$	$3.2 \cdot 10^{-10}$	$2.0 \cdot 10^{-10}$	$8.4 \cdot 10^{-11}$	$1.4 \cdot 10^{-9}$
	1.5	$7.0 \cdot 10^{-10}$	$4.1 \cdot 10^{-10}$	$2.6 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-9}$	$4.1 \cdot 10^{-9}$
	2.25	$1.1 \cdot 10^{-9}$	$7.9 \cdot 10^{-10}$	$4.8 \cdot 10^{-10}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	$6.6 \cdot 10^{-9}$
	3	$1.6 \cdot 10^{-10}$	$2.1 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$2.7 \cdot 10^{-10}$	$8.7 \cdot 10^{-9}$
10^{-10}	0	0.0	$2.5 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	0.75	$1.7 \cdot 10^{-12}$	$7.4 \cdot 10^{-12}$	$4.6 \cdot 10^{-12}$	$2.8 \cdot 10^{-12}$	$3.5 \cdot 10^{-11}$
	1.5	$8.2 \cdot 10^{-12}$	$3.5 \cdot 10^{-12}$	$2.3 \cdot 10^{-12}$	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$5.0 \cdot 10^{-11}$
	2.25	$1.0 \cdot 10^{-11}$	$9.7 \cdot 10^{-12}$	$5.8 \cdot 10^{-12}$	$1.7 \cdot 10^{-11}$	$7.4 \cdot 10^{-11}$
	3	$5.1 \cdot 10^{-13}$	$2.0 \cdot 10^{-11}$	$1.2 \cdot 10^{-11}$	$3.5 \cdot 10^{-13}$	$8.9 \cdot 10^{-11}$
10^{-12}	0	0.0	$2.5 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	0.75	$1.6 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-13}$	$2.8 \cdot 10^{-14}$	$2.2 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$
	1.5	$1.6 \cdot 10^{-13}$	$6.7 \cdot 10^{-14}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$1.9 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-12}$
	2.25	$5.5 \cdot 10^{-14}$	$1.2 \cdot 10^{-13}$	$1.9 \cdot 10^{-13}$	$5.6 \cdot 10^{-14}$	$9.3 \cdot 10^{-13}$
	3	$2.7 \cdot 10^{-15}$	$3.7 \cdot 10^{-14}$	$1.9 \cdot 10^{-13}$	$2.6 \cdot 10^{-13}$	$8.0 \cdot 10^{-13}$
T=3.5						
10^{-8}	0	0.0	$2.3 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	0.875	$1.9 \cdot 10^{-10}$	$6.9 \cdot 10^{-10}$	$4.3 \cdot 10^{-10}$	$3.1 \cdot 10^{-10}$	$3.4 \cdot 10^{-9}$
	1.75	$8.0 \cdot 10^{-10}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$7.3 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$4.8 \cdot 10^{-9}$
	2.625	$8.1 \cdot 10^{-10}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$9.8 \cdot 10^{-10}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$8.9 \cdot 10^{-9}$
	3.5	$1.0 \cdot 10^{-9}$	$2.1 \cdot 10^{-9}$	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$1.6 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$
10^{-10}	0	0.0	$2.3 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	0.875	$2.4 \cdot 10^{-12}$	$6.3 \cdot 10^{-12}$	$3.9 \cdot 10^{-12}$	$3.9 \cdot 10^{-12}$	$3.6 \cdot 10^{-11}$
	1.75	$8.8 \cdot 10^{-12}$	$3.3 \cdot 10^{-14}$	$8.2 \cdot 10^{-14}$	$1.4 \cdot 10^{-11}$	$5.8 \cdot 10^{-11}$
	2.625	$6.1 \cdot 10^{-12}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$	$9.8 \cdot 10^{-12}$	$1.0 \cdot 10^{-11}$	$9.3 \cdot 10^{-11}$
	3.5	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$1.8 \cdot 10^{-11}$	$1.0 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-11}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$
10^{-12}	0	0.0	$2.3 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	0.875	$1.5 \cdot 10^{-13}$	$7.4 \cdot 10^{-14}$	$7.2 \cdot 10^{-15}$	$2.2 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$
	1.75	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$1.1 \cdot 10^{-13}$	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$9.8 \cdot 10^{-14}$	$1.0 \cdot 10^{-12}$
	2.625	$9.1 \cdot 10^{-15}$	$5.5 \cdot 10^{-14}$	$1.6 \cdot 10^{-13}$	$1.7 \cdot 10^{-13}$	$8.3 \cdot 10^{-13}$
	3.5	$3.7 \cdot 10^{-14}$	$1.7 \cdot 10^{-13}$	$1.4 \cdot 10^{-13}$	$2.5 \cdot 10^{-13}$	$7.2 \cdot 10^{-13}$
T=10						
10^{-8}	0	0.0	$2.4 \cdot 10^{-13}$	$1.5 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	2.5	$7.2 \cdot 10^{-10}$	$10.0 \cdot 10^{-10}$	$6.2 \cdot 10^{-10}$	$1.2 \cdot 10^{-9}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$
	5	$1.3 \cdot 10^{-9}$	$1.9 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^{-9}$	$2.1 \cdot 10^{-9}$	$4.5 \cdot 10^{-9}$
	7.5	$1.8 \cdot 10^{-9}$	$2.9 \cdot 10^{-9}$	$1.8 \cdot 10^{-9}$	$2.9 \cdot 10^{-9}$	$6.6 \cdot 10^{-9}$
	10	$2.3 \cdot 10^{-9}$	$4.0 \cdot 10^{-9}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	$3.7 \cdot 10^{-9}$	$8.8 \cdot 10^{-9}$

Продолжение на следующей странице

$\Delta_{\text{лок}}$	t	$\Delta x(t)$	$\Delta y(t)$	$\Delta p_x(t)$	$\Delta p_y(t)$	$ H(t) - H(0) $
10^{-10}	0	0.0	$2.4 \cdot 10^{-13}$	$1.5 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	2.5	$3.6 \cdot 10^{-12}$	$6.4 \cdot 10^{-12}$	$3.9 \cdot 10^{-12}$	$5.8 \cdot 10^{-12}$	$1.5 \cdot 10^{-11}$
	5	$6.6 \cdot 10^{-12}$	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$7.9 \cdot 10^{-12}$	$1.1 \cdot 10^{-11}$	$3.0 \cdot 10^{-11}$
	7.5	$9.5 \cdot 10^{-12}$	$2.0 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$1.5 \cdot 10^{-11}$	$4.6 \cdot 10^{-11}$
	10	$1.0 \cdot 10^{-11}$	$2.9 \cdot 10^{-11}$	$1.5 \cdot 10^{-11}$	$2.0 \cdot 10^{-11}$	$6.2 \cdot 10^{-11}$
10^{-12}	0	0.0	$2.4 \cdot 10^{-13}$	$1.5 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	2.5	$3.7 \cdot 10^{-14}$	$2.0 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-13}$	$4.9 \cdot 10^{-14}$	$5.0 \cdot 10^{-13}$
	5	$2.8 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-13}$	$1.4 \cdot 10^{-13}$	$1.2 \cdot 10^{-13}$	$4.1 \cdot 10^{-13}$
	7.5	$3.2 \cdot 10^{-13}$	$3.0 \cdot 10^{-13}$	$2.3 \cdot 10^{-13}$	$5.0 \cdot 10^{-15}$	$3.2 \cdot 10^{-13}$
	10	$1.6 \cdot 10^{-12}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$2.2 \cdot 10^{-12}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$2.2 \cdot 10^{-13}$
T=20						
10^{-8}	0	0.0	$7.0 \cdot 10^{-13}$	$4.3 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	5	$1.5 \cdot 10^{-9}$	$2.3 \cdot 10^{-9}$	$1.4 \cdot 10^{-9}$	$2.5 \cdot 10^{-9}$	$6.3 \cdot 10^{-9}$
	10	$2.7 \cdot 10^{-9}$	$4.8 \cdot 10^{-9}$	$3.0 \cdot 10^{-9}$	$4.4 \cdot 10^{-9}$	$1.2 \cdot 10^{-8}$
	15	$3.5 \cdot 10^{-9}$	$7.5 \cdot 10^{-9}$	$4.5 \cdot 10^{-9}$	$5.9 \cdot 10^{-9}$	$1.8 \cdot 10^{-8}$
	20	$2.2 \cdot 10^{-10}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$	$1.4 \cdot 10^{-9}$	$9.2 \cdot 10^{-9}$	$2.4 \cdot 10^{-8}$
10^{-10}	0	0.0	$7.0 \cdot 10^{-13}$	$4.3 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	5	$7.8 \cdot 10^{-12}$	$1.5 \cdot 10^{-11}$	$9.1 \cdot 10^{-12}$	$1.3 \cdot 10^{-11}$	$4.1 \cdot 10^{-11}$
	10	$1.2 \cdot 10^{-11}$	$3.2 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-11}$	$2.3 \cdot 10^{-11}$	$8.3 \cdot 10^{-11}$
	15	$5.9 \cdot 10^{-11}$	$1.1 \cdot 10^{-10}$	$6.7 \cdot 10^{-11}$	$7.5 \cdot 10^{-11}$	$1.2 \cdot 10^{-10}$
	20	$3.9 \cdot 10^{-9}$	$3.1 \cdot 10^{-9}$	$4.9 \cdot 10^{-9}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$	$1.7 \cdot 10^{-10}$
10^{-12}	0	0.0	$7.0 \cdot 10^{-13}$	$4.3 \cdot 10^{-13}$	0.0	0.0
	5	$6.5 \cdot 10^{-14}$	$5.8 \cdot 10^{-13}$	$4.1 \cdot 10^{-13}$	$1.7 \cdot 10^{-13}$	$1.8 \cdot 10^{-12}$
	10	$1.3 \cdot 10^{-12}$	$6.9 \cdot 10^{-13}$	$2.2 \cdot 10^{-12}$	$1.2 \cdot 10^{-12}$	$1.5 \cdot 10^{-12}$
	15	$7.7 \cdot 10^{-11}$	$6.0 \cdot 10^{-11}$	$9.8 \cdot 10^{-11}$	$4.8 \cdot 10^{-11}$	$1.3 \cdot 10^{-12}$
	20	$3.9 \cdot 10^{-9}$	$3.1 \cdot 10^{-9}$	$5.0 \cdot 10^{-9}$	$2.4 \cdot 10^{-9}$	$1.0 \cdot 10^{-12}$

При анализе данных из таблицы видно, что при увеличении точности на шаге уточняются значения фазовых и сопряжённых переменных. Причём в среднем $\frac{y_t^{-8} - y_t^{-10}}{y_t^{-10} - y_t^{-12}} \approx (100)^{\frac{7}{8}}$, где y соответствует фазовым переменным x, y, p_x, p_y ; t соответствует временам $T/4, T/2, 3T/4, T$; а верхние индексы — точностям на шаге. Отсутствие уточнения при $T = 20$ соответствует плохой сходимости, так как T сильно „далеко“ за сопряжённой точкой и накоплением большой ошибки в результате решения задачи Коши. Отсутствие улучшения знаков при $T = 0.1$ соответствует тому, что во все приведённые в таблице точки мы попадаем за один шаг, и данная оценка неприменима.

13. Просчёт назад

В таблице 4 приведены результаты „просчёта назад“. Для каждого из заданных в условии значений параметра T были выбраны численно полученные в п. 11. при $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$ начальные значения параметров пристрелки. После этого с разной относительной точностью на шаге для каждого T была решена задача Коши от 0 до T . В результате этого были получены значения фазовых и сопряжённых переменных в момент времени T . После этого задача Коши решалась назад от времени T до 0 и были вычислены разности исходных значений x, y, p_x, p_y в 0 момент времени и новых значений в 0, полученных в результате просчёта задачи Коши вперёд-назад. При решении задачи могут быть допущены случайные ошибки и систематические ошибки (например, неправильно заданные правые части). Просчёт назад помогает отслеживать белый шум, то есть случайные ошибки.

Таблица 4: Просчёт назад.

T	$\Delta_{\text{лок}}$	$\Delta x(0)$	$\Delta y(0)$	$\Delta p_x(0)$	$\Delta p_y(0)$
0.1	10^{-8}	$1.87 \cdot 10^{-17}$	$3.33 \cdot 10^{-16}$	0.0	$5.97 \cdot 10^{-15}$
	10^{-10}	$1.41 \cdot 10^{-18}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$	$5.68 \cdot 10^{-14}$	$6.51 \cdot 10^{-16}$
	10^{-12}	$6.95 \cdot 10^{-18}$	$1.11 \cdot 10^{-16}$	0.0	$5.97 \cdot 10^{-15}$
1	10^{-8}	$1.17 \cdot 10^{-10}$	$3.27 \cdot 10^{-10}$	$1.97 \cdot 10^{-10}$	$1.89 \cdot 10^{-10}$
	10^{-10}	$2.87 \cdot 10^{-13}$	$1.98 \cdot 10^{-12}$	$1.20 \cdot 10^{-12}$	$4.68 \cdot 10^{-13}$
	10^{-12}	$1.19 \cdot 10^{-15}$	$1.14 \cdot 10^{-14}$	$7.55 \cdot 10^{-15}$	$1.53 \cdot 10^{-15}$
2	10^{-8}	$1.00 \cdot 10^{-10}$	$7.75 \cdot 10^{-10}$	$4.76 \cdot 10^{-10}$	$1.62 \cdot 10^{-10}$
	10^{-10}	$3.25 \cdot 10^{-13}$	$5.89 \cdot 10^{-12}$	$3.62 \cdot 10^{-12}$	$5.26 \cdot 10^{-13}$
	10^{-12}	$2.71 \cdot 10^{-15}$	$3.92 \cdot 10^{-14}$	$2.39 \cdot 10^{-14}$	$3.85 \cdot 10^{-15}$
3	10^{-8}	$2.30 \cdot 10^{-10}$	$3.98 \cdot 10^{-9}$	$2.47 \cdot 10^{-9}$	$3.72 \cdot 10^{-10}$
	10^{-10}	$2.88 \cdot 10^{-12}$	$3.52 \cdot 10^{-11}$	$2.18 \cdot 10^{-11}$	$4.66 \cdot 10^{-12}$
	10^{-12}	$5.13 \cdot 10^{-15}$	$1.95 \cdot 10^{-13}$	$1.18 \cdot 10^{-13}$	$3.62 \cdot 10^{-15}$
3.5	10^{-8}	$2.39 \cdot 10^{-10}$	$5.49 \cdot 10^{-9}$	$3.40 \cdot 10^{-9}$	$3.87 \cdot 10^{-10}$
	10^{-10}	$1.45 \cdot 10^{-12}$	$3.75 \cdot 10^{-11}$	$2.33 \cdot 10^{-11}$	$2.35 \cdot 10^{-12}$
	10^{-12}	$3.89 \cdot 10^{-15}$	$2.21 \cdot 10^{-13}$	$1.40 \cdot 10^{-13}$	$1.08 \cdot 10^{-14}$
10	10^{-8}	$9.18 \cdot 10^{-12}$	$7.55 \cdot 10^{-9}$	$4.67 \cdot 10^{-9}$	$1.46 \cdot 10^{-11}$
	10^{-10}	$1.79 \cdot 10^{-13}$	$5.05 \cdot 10^{-11}$	$3.11 \cdot 10^{-11}$	$1.83 \cdot 10^{-13}$
	10^{-12}	$3.60 \cdot 10^{-14}$	$2.70 \cdot 10^{-13}$	$2.33 \cdot 10^{-13}$	$2.49 \cdot 10^{-14}$
20	10^{-8}	$8.34 \cdot 10^{-11}$	$1.75 \cdot 10^{-8}$	$1.08 \cdot 10^{-8}$	$1.45 \cdot 10^{-10}$
	10^{-10}	$2.13 \cdot 10^{-10}$	$2.85 \cdot 10^{-10}$	$1.99 \cdot 10^{-10}$	$1.32 \cdot 10^{-10}$
	10^{-12}	$2.92 \cdot 10^{-10}$	$2.30 \cdot 10^{-10}$	$3.71 \cdot 10^{-10}$	$1.80 \cdot 10^{-10}$

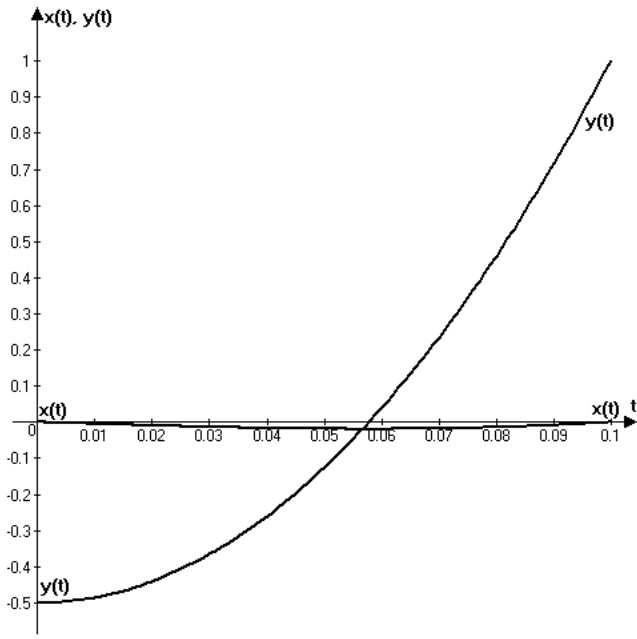
При $T \in \{1, 2, 3, 3.5, 10\}$ из таблицы видно, что увеличение относительной локальной погрешности на 2 порядка на 2 порядка уточняет решение задачи Коши, что свидетельствует о работе правила Рунге. При $T = 0.1$, при увеличении точности на шаге, уточнение решения задачи не происходит за счёт малого числа шагов и полученной уже при ошибке на шаге 10^{-8} точности близкой к машинной. Ухудшение результатов при $T = 20$ соответствует тому, что это значение T находится „далеко“ за сопряжённой точкой, метод сходится плохо, что так же обусловлено большой накапливаемой погрешностью (см. оценки δ_K из табл. 2).

14. Полученные фазовые переменные и значения функционала.

Решением (ответом) в исходной задаче оптимального управления (2) являются фазовые переменные $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, управление $u(\cdot)$, которое совпадает с сопряжённой переменной $p_y(\cdot)$, см. (8) и значение исходного функционала B_0 для всех значений $T \in \{0.1, 1, 2, 3, 3.5, 10, 20\}$. Так как в п. 10. было получено аналитическое решение (21),(22),(24), и в таблице 2 приведено отличие решения, полученного численно методом стрельбы, от аналитического, то далее, вместо таблиц со значениями фазовых переменных и управления в различных точках, приводятся их графики.

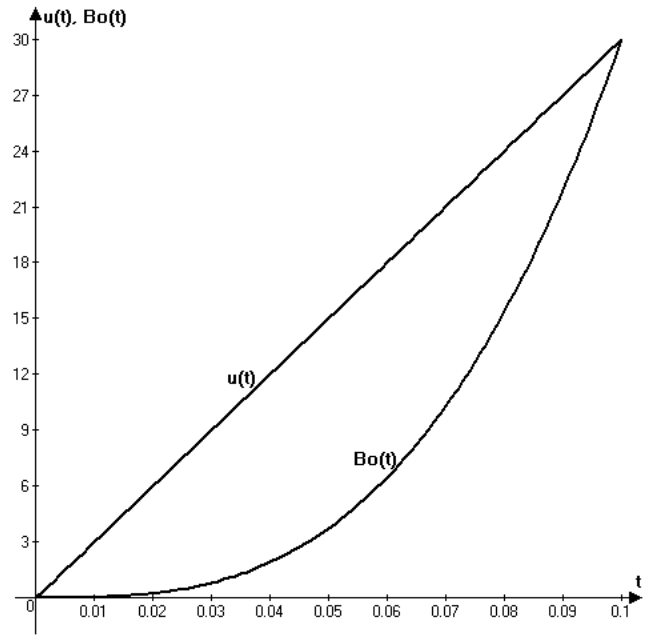
Приведённые ниже графики отображают значения фазовых переменных и управления, полученные численным интегрированием с максимально допустимой относительной локальной погрешностью на шаге $\Delta_{\text{лок}} = 10^{-12}$, при этом ставилось ограничение на максимальный шаг $T/100$, чтобы получить по крайней мере 100 точек. Далее будем считать функционал $B_0 = \int_0^T (u^2 - y^2 - x^2) dt$ функцией от t ,

$B_0(t) = \int_0^t (u^2(\zeta) - y^2(\zeta) - x^2(\zeta)) d\zeta$. Пусть также $f(t) = u^2(t) - y^2(t) - x^2(t)$.

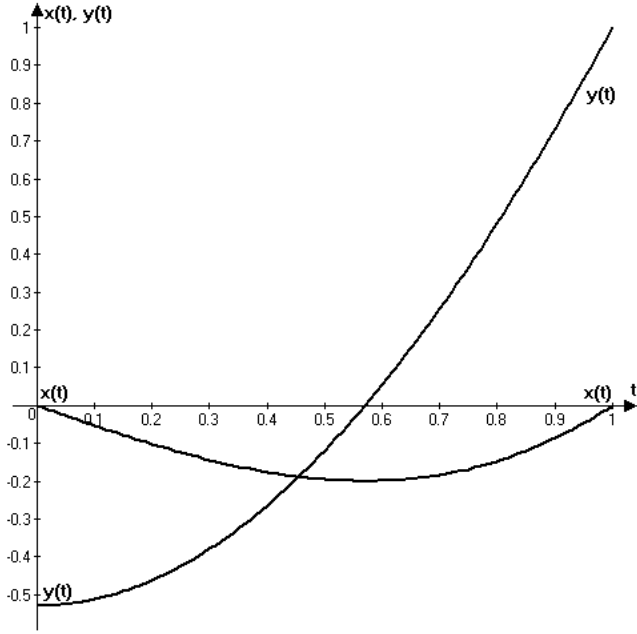


$x(\cdot), y(\cdot)$

$T = 0.1$

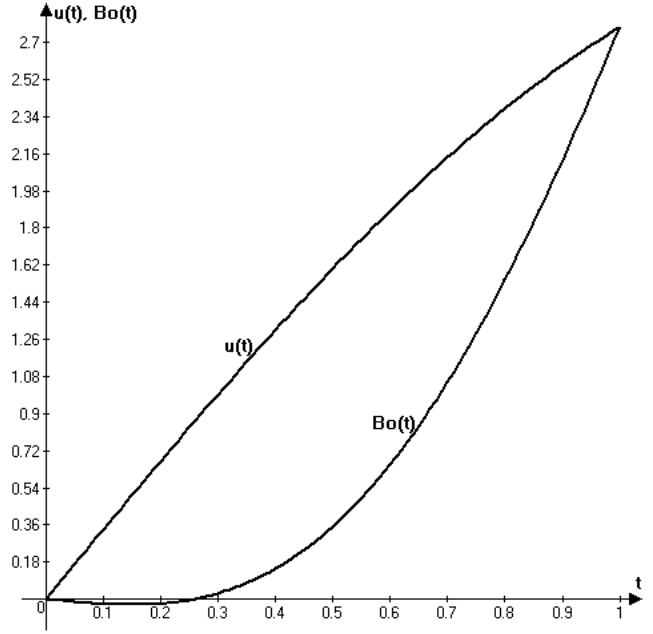


$u(\cdot), B_0(\cdot)$

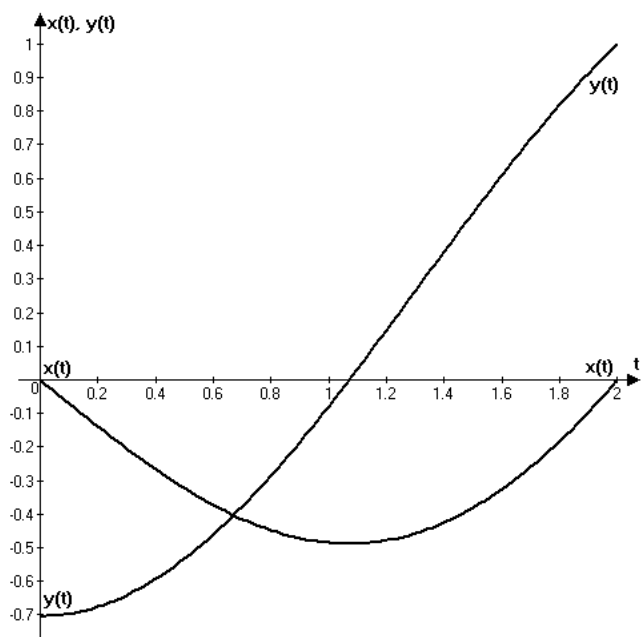


$x(\cdot), y(\cdot)$

$T = 1$

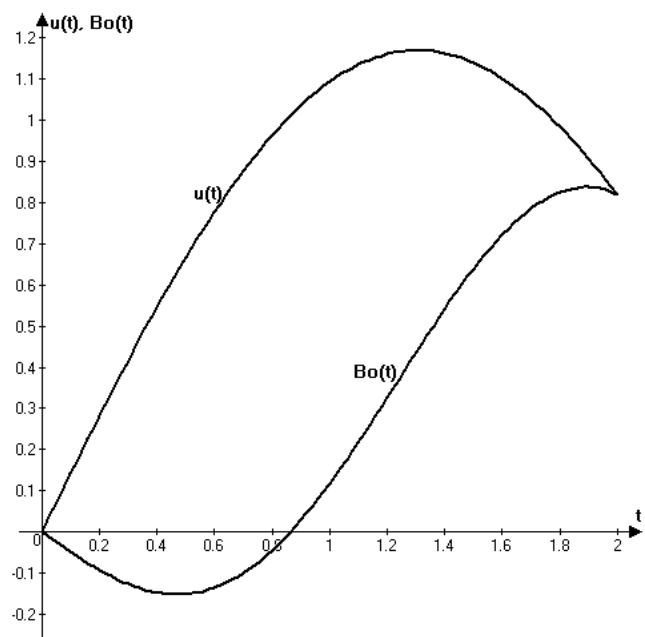


$u(\cdot), B_0(\cdot)$

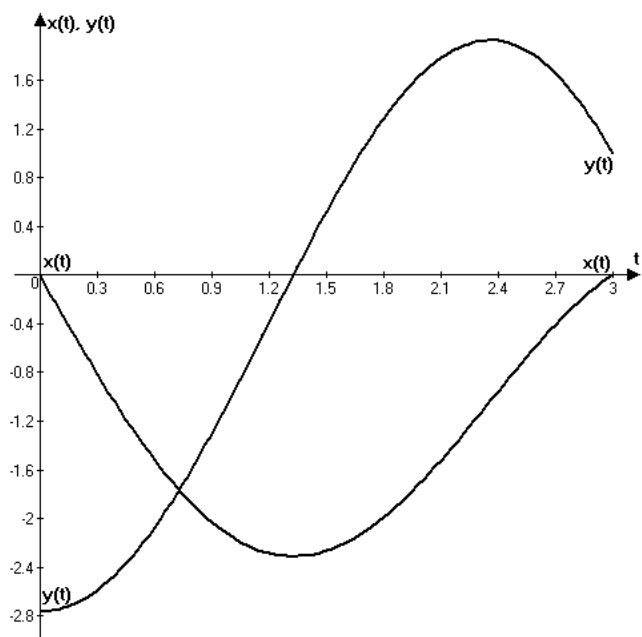


$x(\cdot), y(\cdot)$

T = 2

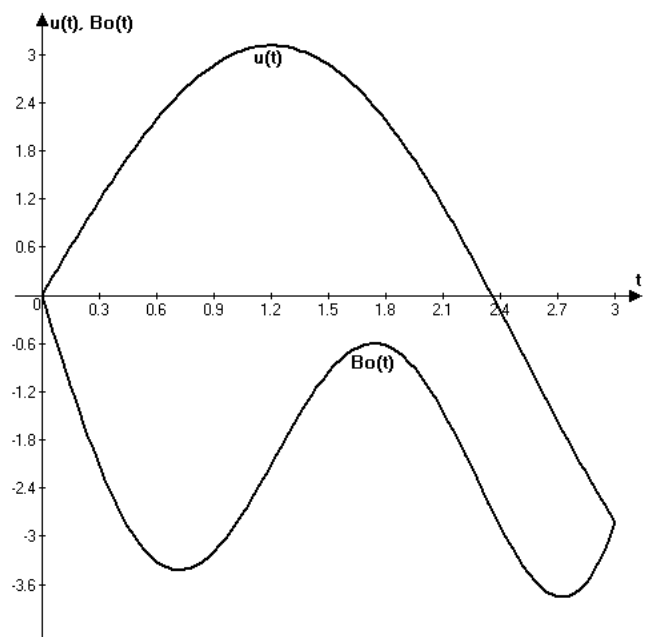


$u(\cdot), B_0(\cdot)$

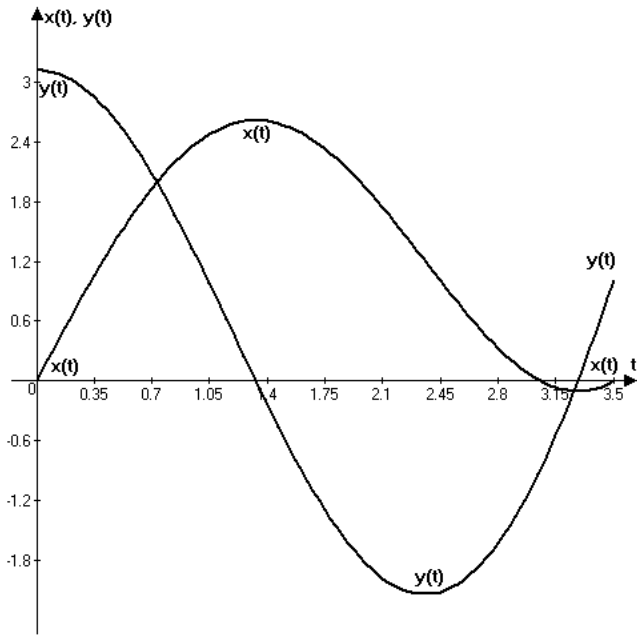


$x(\cdot), y(\cdot)$

T = 3

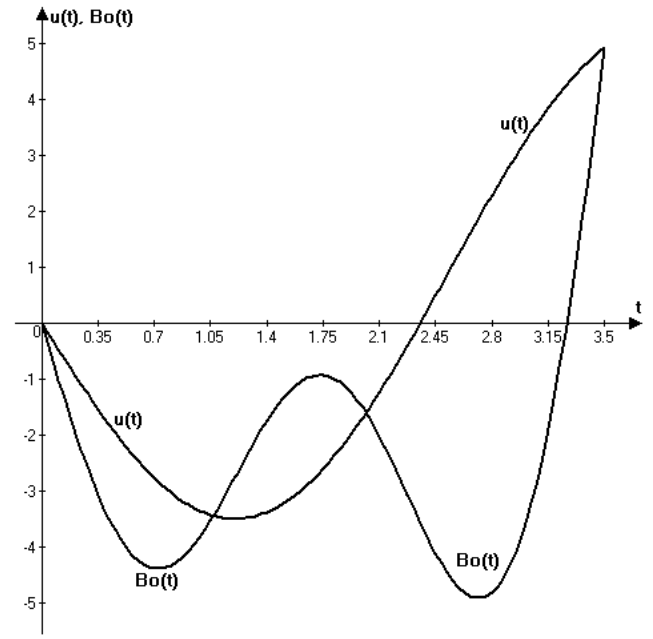


$u(\cdot), B_0(\cdot)$

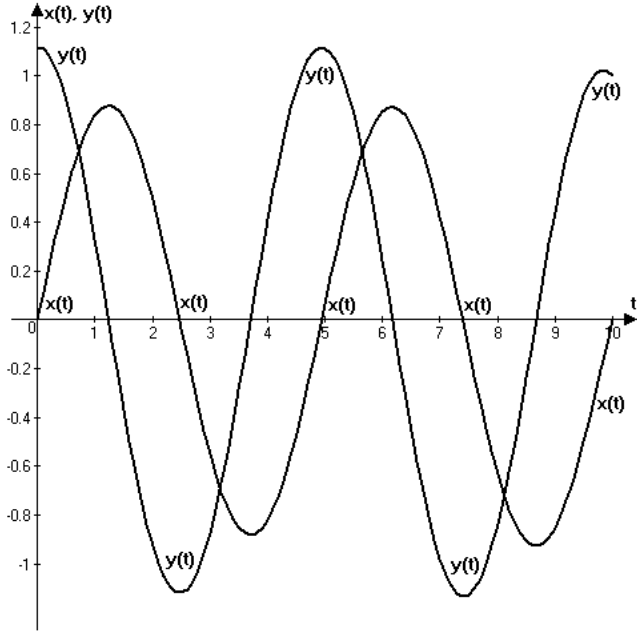


$x(\cdot), y(\cdot)$

$T = 3.5$

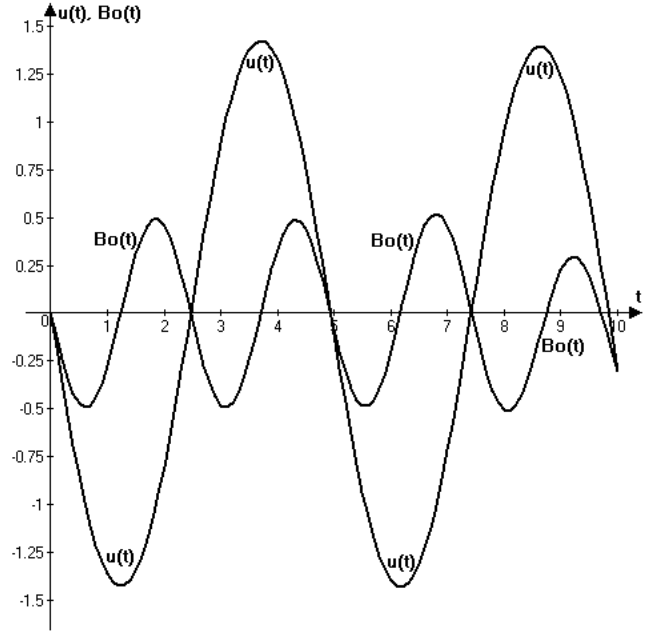


$u(\cdot), B_0(\cdot)$

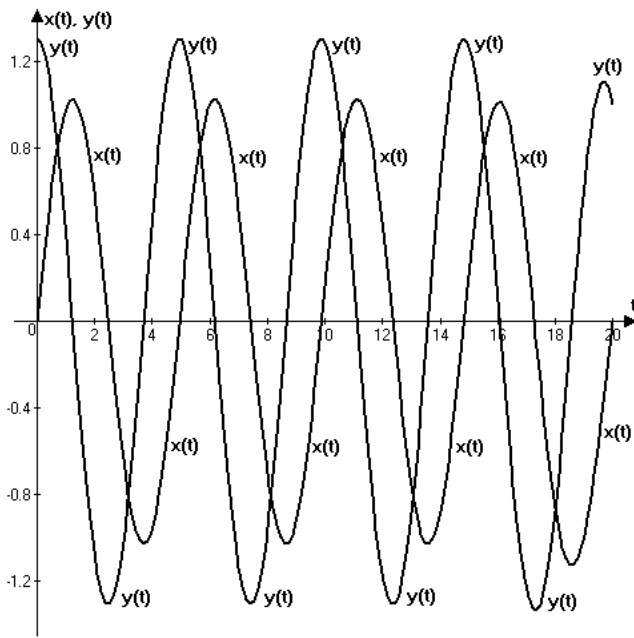


$x(\cdot), y(\cdot)$

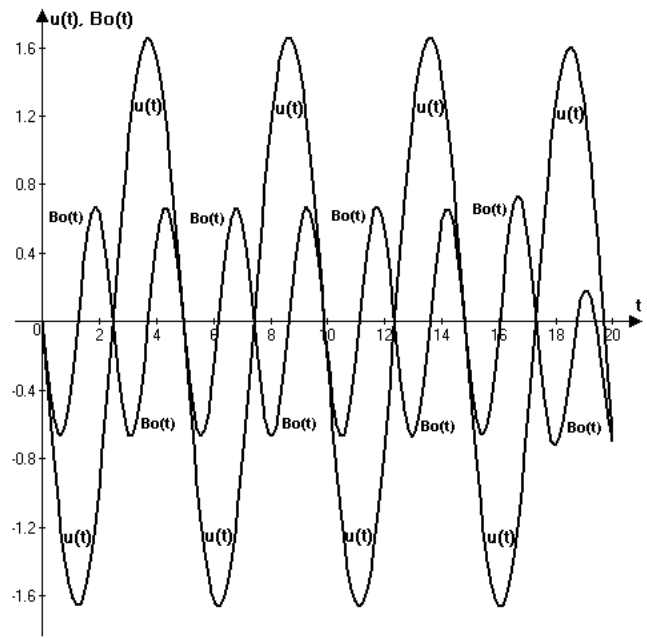
$T = 10$



$u(\cdot), B_0(\cdot)$



$x(\cdot), y(\cdot)$



$u(\cdot), B_0(\cdot)$

$T = 20$

Вычисление значения функционала $B_0(T)$ „стандартным“ способом, то есть вычисление интеграла на отрезке $[0, T]$ по полученным численным интегрированием точкам суммированием методом прямоугольников, трапеций или каким-либо схожим образом даст сильно неточный результат из-за того что T „достаточно большое“, $T \geq 0.1$, а число полученных интегрированием с выбором оптимального шага точек „слишком маленькое“ – при увеличении T от 0.1 до 20 это число меняется от 3 до 133. Если же „заставить“ метод Рунге сделать больше шагов интегрирования, установив максимально допустимый шаг маленьким, так чтобы диаметр разбиения при подсчёте интеграла был меньше 10^{-6} , то за такое большое число шагов интегрирования накопится огромная вычислительная ошибка, и значение интеграла опять будет неверным. Тем не менее есть несколько способов достаточно точного вычисления интеграла $B_0(T)$, результаты вычислений по которым приведены в табл. 5 ниже:

1. Так как функции $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ известны, то упомянутый выше метод прямоугольников или трапеций может быть применён для получения площади под графиком функции $f(t) = u^2(t) - y^2(t) - x^2(t)$;
2. Являющиеся комбинацией тригонометрических и гиперболических функций, функции $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$ таковы, что интеграл от $u^2(t) - y^2(t) - x^2(t)$ может быть вычислен аналитически;
3. Наконец, исходя из формулы дифференцирования $\left(\int_0^t f(\zeta) d\zeta \right)' = f(t)$ в методе численного интегрирования задачи Коши в систему дифференциальных уравнений можно добавить формальное соотношение $\dot{B}_0 = u^2 - y^2 - x^2$.

Остановимся подробнее на аналитическом вычислении $\int_0^T (u^2 - y^2 - x^2) dt$. В п. 10. было получено:

$$u = p_y = -b \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sin \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t \right) + d \frac{\sqrt{5}-1}{2} \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t \right),$$

$$y = b \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) + d \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t\right),$$

$$x = b \sin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) + d \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t\right),$$

$$\text{где } b = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \cos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \sin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right) \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right)},$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)}.$$

Обозначив $\nu = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$, $\eta = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$; $\nu^2 + \eta^2 = \sqrt{5}$, $\nu\eta = 1$, отсюда получаем:

$$u^2 - y^2 - x^2 = b^2 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \sin^2 \nu t + d^2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \operatorname{sh}^2 \eta t - 2bd \sin \nu t \operatorname{sh} \eta t - b^2 \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \cos^2 \nu t -$$

$$d^2 \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \operatorname{ch}^2 \eta t - 2bd \cos \nu t \operatorname{ch} \eta t - b^2 \sin^2 \nu t - d^2 \operatorname{sh}^2 \eta t - 2bd \sin \nu t \operatorname{sh} \eta t =$$

$$= b^2(1 + \sqrt{5}) \sin^2 \nu t + d^2(1 - \sqrt{5}) \operatorname{sh}^2 \eta t - 4bd \sin \nu t \operatorname{sh} \eta t - 2bd \cos \nu t \operatorname{ch} \eta t - \frac{\sqrt{5}+1}{2} b^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} d^2.$$

Используя следующие тождества,

$$\int_0^T \sin^2 \nu t dt = \left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 2\nu t}{4\nu}\right) \Big|_0^T = \frac{T}{2} - \frac{\sin 2\nu T}{4\nu},$$

$$\int_0^T \operatorname{sh}^2 \eta t dt = \left(\frac{\operatorname{sh} 2\eta t}{4\eta} - \frac{t}{2}\right) \Big|_0^T = \frac{\operatorname{sh} 2\eta T}{4\eta} - \frac{T}{2},$$

$$\int_0^T \cos \nu t \operatorname{ch} \eta t dt = \left(\frac{\nu \sin \nu t \operatorname{ch} \eta t + \eta \cos \nu t \operatorname{sh} \eta t}{\nu^2 + \eta^2}\right) \Big|_0^T = \frac{\nu \sin \nu T \operatorname{ch} \eta T + \eta \cos \nu T \operatorname{sh} \eta T}{\nu^2 + \eta^2}$$

$$\int_0^T \sin \nu t \operatorname{sh} \eta t dt = \left(\frac{\eta \sin \nu t \operatorname{ch} \eta t - \nu \cos \nu t \operatorname{sh} \eta t}{\nu^2 + \eta^2}\right) \Big|_0^T = \frac{\eta \sin \nu T \operatorname{ch} \eta T - \nu \cos \nu T \operatorname{sh} \eta T}{\nu^2 + \eta^2},$$

получим: $\int_0^T (u^2 - y^2 - x^2) dt = b^2(1 + \sqrt{5}) \left(\frac{T}{2} - \frac{\sin 2\nu T}{4\nu}\right) + d^2(1 - \sqrt{5}) \left(\frac{\operatorname{sh} 2\eta T}{4\eta} - \frac{T}{2}\right) -$

$$- \frac{4}{\sqrt{5}} bd(\eta \sin \nu T \operatorname{ch} \eta T - \nu \cos \nu T \operatorname{sh} \eta T) - \frac{2}{\sqrt{5}} bd(\nu \sin \nu T \operatorname{ch} \eta T + \eta \cos \nu T \operatorname{sh} \eta T) - \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} b^2 + \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{5}-1}{2} d^2\right) T = -b^2(\sqrt{5}+1) \frac{\sin 2\nu T}{4\nu} - d^2(\sqrt{5}-1) \frac{\operatorname{sh} 2\eta T}{4\eta} - \frac{4}{\sqrt{5}} bd(\eta \sin \nu T \operatorname{ch} \eta T - \nu \cos \nu T \operatorname{sh} \eta T) -$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} bd(\nu \sin \nu T \operatorname{ch} \eta T + \eta \cos \nu T \operatorname{sh} \eta T).$$

В таблице 5 приведены результаты вычисления функционала B_0 3 способами, указанными выше. При этом величина $\Delta_{\text{лок}}$ бралась равной 10^{-12} , в методе трапеций длина отрезков разбиения бралась равной 10^{-8} . В колонке ΔB_0 приведено отличие численно посчитанного значения функционала B_0 от полученного аналитически.

Таблица 5: Значения минимизируемого функционала B_0 .

T	$u(T)$	B_0 , метод трапеций	B_0 , аналитически	B_0 , численно	ΔB_0
0.1	29.97997522283958	29.97997522284124	29.97997522284028	29.97997522283852	$1.8 \cdot 10^{-12}$
1	2.77353355446152	2.77353355446218	2.77353355446153	2.77353355446152	$1.2 \cdot 10^{-14}$
2	0.82026089496566	0.82026089496562	0.82026089496565	0.82026089496568	$3.1 \cdot 10^{-14}$
3	-2.82838540446885	-2.82838540446891	-2.82838540446899	-2.82838540446897	$1.9 \cdot 10^{-14}$
3.5	4.92783452668161	4.92783452667936	4.92783452668001	4.92783452668291	$2.9 \cdot 10^{-12}$
10	-0.30144870717617	-0.30144870717648	-0.30144870717615	-0.30144870717626	$1.1 \cdot 10^{-13}$
20	-0.69503967158763	-0.69503967159371	-0.69503967159332	-0.69503967158224	$1.1 \cdot 10^{-11}$

Столь странный результат, который можно видеть на графиках приведённых выше и в табл. 5, — достаточно точное совпадение $\int_0^T (u^2 - y^2 - x^2) dt$ и $u(T)$, что сразу на первый взгляд ниоткуда не следует, может быть обоснован аналитически. А именно, подставим b и d со стр. 22 в выражения для $\int_0^T (u^2 - y^2 - x^2) dt$, $u(T)$ и упростим их.

$$\begin{aligned}
u(T) &= -b \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} t\right) + d \frac{\sqrt{5}-1}{2} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} t\right) = \\
&= -\frac{\sqrt{5}+1}{2} \frac{1}{\sin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right)} \sin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right) + \\
&+ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \frac{1}{\operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right)} \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)} \operatorname{sh}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) = \\
&= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)}.
\end{aligned}$$

Далее, используя соотношения,

$$\begin{aligned}
b^2 &= \frac{1}{\sin^2\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)\right)^2}, \\
d^2 &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right)} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)\right)^2}, \\
bd &= \frac{1}{\sin\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right) \operatorname{sh}^2\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right)} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)\right)^2},
\end{aligned}$$

получим:

$$\begin{aligned} \int_0^T (u^2 - y^2 - x^2) dt = & - \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)\right)^2} \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right) + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) \right) + \\ & + \frac{2}{\sqrt{5} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)\right)^2} \left(\left(2\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right) \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) + \right. \\ & \left. + \left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} - 2\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right) \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right) \right) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что на полученных экстремалиях действительно

$$u(T) = \int_0^T (u^2 - y^2 - x^2) dt = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \operatorname{cth}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} T\right) - \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} \operatorname{ctg}\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} T\right)}.$$

На этом исследование задачи завершено.

15. Дополнение. Литературный обзор.

При исследовании задачи использовались теоремы из [1] (также см. литературу в нём). Были использованы следующие численные методы. Явный метод Рунге-Кутты решения задачи Коши 8-го порядка, основанный на расчётных формулах Дормана-Принса 8(7) DOPRI8 с автоматическим выбором шага (контролем погрешности на шаге, правило Рунге), модифицированный метод Ньютона (модификация Исаева-Сониной), решение системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу и повторным пересчётом. Таблицы были сгенерированы автоматически (программа на С выдавала код для L^AT_EX'a, который впоследствии копировался в соответствующий файл).

Программы реализующие метод стрельбы, были написаны на C++, рисунки построены в *advanced grapher*'е и сохранены в формате .bmp, затем перекодированы в формат .eps программой *Adobe Photoshop CS4* и вставлены в файл отчёта. Для автоматического генерирования таблиц необходимо было многократно запускать одну и ту же программу с разными константами, для этого были реализованы скрипты, написанные на *bash*. Отчёт был набран в L^AT_EX'e (MikTeX 2.7).

Постановка задачи была взята из [1]. Исследование задачи было проведено аналогичное исследованию примеров из [1]. Так же в [1] описан метод стрельбы численного решения задач оптимального управления. Книга [1] была написана как дополнение и расширение [2]. В [2] описан использовавшийся модифицированный метод Ньютона. Численное решение задачи Коши и теоремы об оценках точности полученного решения описаны и были взяты из [3].

Список литературы

- [1] И. С. Григорьев. Методическое пособие по численным методам решения краевых задач принципа максимума в задачах оптимального управления. — М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005.
- [2] В. В. Александров, Н. С. Бахвалов, К. Г. Григорьев, Г. Ю. Данков, М. И. Зеликин, С. Я. Ищенко, С. В. Конягин, Е. А. Лапшин, Д. А. Силаев, В. М. Тихомиров, А. В. Фурсиков. Практикум по численным методам в задачах оптимального управления — М.: Издательство Московского университета, 1988.
- [3] Эрист Хайрер, Сиверт Пауль Нёрсетт, Герхард Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений — М.: Мир, 1989.