МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет
Кафедра теоретической механики и мехатроники

Отчёт о проведённой работе по предмету

«Численные методы и практика на ЭВМ»

Выполнил:
студент 422 группы
кафедры теоретической механики и мехатроники
Сергеев Никита Александрович

Москва
2022

Содержание

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\begin{cases} \int\limits_0^T (\ddot{x}^2 \cos(\alpha x) - \dot{x}^2)\ dt \to \infty, \\ |\ddot{x}| \leq 24, \\ x(0) = 11, \\ \dot{x}(T) = x(T) = 0, \\ \alpha = \{0.0; 0.001; 0.01; 0.1\}, \end{cases}$$

где T - известная константа, параметр задачи.

Требуется формализовать задачу как задачу оптимального управления, принципом максимума Понтрягина свести задачу к краевой задаче, численно решить полученную краевую задачу методом стрельбы и обосновать точность полученных результатов, проверить полученные экстремали Понтрягина на оптимальность при различных значениях параметра $\alpha = \{0.0; 0.001; 0.01; 0.1\}$.

2. Формализация задачи

Формализуем задачу как задачу оптимального управления. Для этого обозначим $\dot{x} = y$, $\ddot{x} = u$. Тогда исходная система (1) перепишется в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ u \in \mathbb{R}, \\ x(0) = 11, \\ x(T) = 0, \\ y(T) = 0, \\ |u| \leq 24, \\ \alpha = \{0.0; 0.001; 0.01; 0.1\}, \\ T = const = 4, \\ B_0 = \int\limits_0^T (u^2 \cos(\alpha x) - y^2)\ dt \to \infty. \end{cases}$$

3. Система необходимых условий оптимальности

Выпишем функции Лагранжа и Понтрягина:

$$\mathcal{L} = \int\limits_0^T L\ dt + l\ ,$$

$$\begin{array}{ccc} \text{лагранжиан} & - & L = \lambda_0(u^2 \cos(\alpha x) - y^2) + p_x(\dot{x} - y) + p_y(\dot{y} - u)\ , \\ \text{терминант} & - & l = \lambda_1(x(0) - 11) + \lambda_2 x(T) + \lambda_3 y(T)\ , \\ \text{гамильтониан} & - & H = p_x y + p_y u - \lambda_0(u^2 \cos(\alpha x) - y^2)\ . \end{array}$$

Применим к задаче оптимального управления (2) принцип максимума Понтрягина. Необходимые условия оптимальности:

1) уравнения Эйлера-Лагранжа (сопряжённая система уравнений, условие стационарности по $\binom{x}{y}$), $\binom{\dot{p}_x}{\dot{p}_y} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial H}{\partial y} \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} \dot{p}_x = -\alpha\lambda_0 u^2 \sin(\alpha x), \\ \dot{p}_y = -p_x - 2\lambda_0 y; \end{cases}$$

2) условие оптимальности по управлению, $u = \arg\operatorname{abs}\max\limits_{|u|\le 24} H(u)$:

   $u = \arg\operatorname{abs}\max\limits_{|u|\le 24} \Big(p_y u - \lambda_0\big(u^2\cos(\alpha x)\big)\Big)$

   $\sqsupset \cos(\alpha x) > 0$: $\quad u = \frac{p_y}{2\lambda_0\cos(\alpha x)}$, при $\lambda_0 \neq 0$, так как парабола $H = -u^2\cos(\alpha x)\lambda_0 + p_y u$ с ветвями, направленными вниз ($\lambda_0 \ge 0$), достигает максимума в вершине, при указанном значении аргумента u;
   $\sqsupset \cos(\alpha x) < 0$: $\quad u = \left[\begin{array}{c} 24 \\ -24 \end{array}\right.$, при $\lambda_0 \neq 0$, так как парабола $H = -u^2\cos(\alpha x)\lambda_0 + p_y u$ с ветвями, направленными вверх ($\lambda_0 \ge 0$), достигает максимума в одном из концов;

   $\sqsupset \cos(\alpha x) = 0$: $\quad u = \forall\beta : |\beta| \le 24, \beta \in \mathbb{R}$;

3) условия трансверсальности по $\binom{x}{y}$, $p_x(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial x(t_k)}$, $p_y(t_k) = (-1)^k \frac{\partial l}{\partial y(t_k)}$, где $k = 0; 1$, $t_0 = 0$, $t_1 = T$:

$$p_y(0) = 0$$
$$p_x(0) = \lambda_1, p_x(T) = -\lambda_2, p_y(T) = -\lambda_3;$$

4) условия стационарности по t_k:
   нет, так как в задаче t_k- известные константы;

5) условия дополняющей нежёсткости:
   нет, так как в задаче отсутствуют условия вида «меньше или равно»;

6) условие неотрицательности: $\lambda_0 \ge 0$;

7) условие нормировки (множители Лагранжа могут быть выбраны с точностью до положительного множителя);

8) НЕРОН (множители Лагранжа Не Равны Одновременно Нулю).

4. Аномальный случай и исследование задачи

Исследуем возможность аномального случая $\lambda_0 = 0$. При $\lambda_0 = 0$ получим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{p}_x = 0, \\ \dot{p}_y = -p_x; \end{cases}$$

Отсюда получаем, $p_x(t) = c, \dot{p}_y(t) = -c$. Так же из условия 2) оптимальности по управлению имеем $p_y \equiv 0$, а значит $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, что противоречит условию 8) НЕРОН.

В силу условия 7) можно выбрать $\lambda_0 = {}^1\!/_2$, тогда обозначим $\cos(\alpha x) = g(\alpha, x)$ и управление преобразуется в $u = \left[\begin{array}{ll} {}^{p_y}\!/_{g(\alpha,x)} & g(\alpha,x) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} 24 \\ -24 \end{array}\right. & g(\alpha,x) < 0, \\ \forall\beta : |\beta| \leq 24, \beta \in \mathbb{R} & g(\alpha,x) = 0; \end{array}\right.$

5. Краевая задача

Таким образом, на основе принципа максимума Понтрягина задача оптимального управления сводится к краевой задаче. Итого имеем:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = u, \\ \dot{p}_x = -\frac{\alpha}{2} u^2 \sin(\alpha x), \\ \dot{p}_y = -p_x - y; \end{cases}} \\ x(0) = 11, & x(T) = 0, \\ p_y(0) = 0, & y(T) = 0, \\ T \equiv 4, & \alpha = \{0.0; 0.001; 0.01; 0.1\}. \end{array}$$

6. Численное решение методом стрельбы

Краевая задача решается численно методом стрельбы. В качестве параметров пристрелки выбираются недостающие для решения задачи Коши значения при $t = 0$: $\alpha_1 = y(0),\ \alpha_2 = p_x(0)$. Задав эти значения каким-либо образом и решив задачу Коши на отрезке $[0;\ T]$, получим соответствующие выбранному значению $\vec{\alpha} := \{\alpha_1;\ \alpha_2\}$ функции $x(\cdot)[\vec{\alpha}],\ y(\cdot)[\vec{\alpha}],\ p_x(\cdot)[\vec{\alpha}],\ p_y(\cdot)[\vec{\alpha}]$, и, в частности, значения $x(T)[\vec{\alpha}],\ y(T)[\vec{\alpha}]$. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений, начальных условий в 0 момент времени и условий $y(0) = \alpha_1$, $p_x(0) = \alpha_2$ решается численно явным методом Рунге-Кутты 8-го порядка, основанным на расчётных формулах Фельберга с автоматическим выбором шага (то есть с контролем относительной локальной погрешности на шаге по правилу Рунге). Для решения краевой задачи необходимо подобрать значения α_1, α_2 так, чтобы выполнились условия: $\begin{array}{l} x(T)[\vec{\alpha}] = 0, \\ y(T)[\vec{\alpha}] = 0. \end{array}$

Соответственно вектор-функцией невязок будет функция $X(\vec{\alpha}) = \begin{pmatrix} x(T)[\vec{\alpha}] \\ y(T)[\vec{\alpha}] \end{pmatrix}$. Таким образом, в результате выбора вычислительной схемы метода стрельбы, решение краевой задачи свелось к реше- нию системы двух алгебраических уравнений от двух неизвестных. Корень $\vec{\alpha}$ системы алгебраических уравнений $X(\vec{\alpha}) = 0$ находится методом Ньютона с модификацией Исаева-Сонина. Решение линейной системы уравнений внутри модифицированного метода Ньютона осуществляется методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу, с повторным пересчётом.

Схема численного решения краевой задачи методом стрельбы выбрана таким образом, что при отсутствии ошибок в программной реализации решения задачи Коши, найденный методом Ньютона корень будет правильным (без учёта погрешности численного интегрирования), даже если внутри метода Ньютона есть какие-то ишибки. Напротив, ошибка в решении задачи Коши делает бесполезным полученный результат, даже если всё остальное запрограммировано правильно и методу Ньютона удалось найти корень.

Исходя из этого крайне важен следующий тест части программы, решающей задачу Коши, на системе дифференциальных уравнений с известным аналитическим решением.

7. Тест решения задачи Коши: гармонический осциллятор