试题-23 Spr. 数分二(H) final.(回忆版)

一、计算.

(1) 设 $f(x,y,z)=x^3y+xy^3+z^2$，Γ 是一条光滑曲线，其参数方程为

$$r=(a\cos t, a\sin t, bt),\ a>0, b>0, 0\leq t\leq 2\pi.$$

写出 f 于 Γ 上参数 $t=\frac{\pi}{4}$ 的点处沿 Γ 切线方向(参数 t 增加方向)的方向导数。

(2) 计算曲线积分 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$，其中曲线 L 为 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$，$0\leq t\leq 2\pi$，$a>0$.

二、计算.

(1) 于平面上给定三个不在同一直线上的点 (x_i,y_i)，$i=1,2,3$，用多元函数求极值的方法，求点 (x^*,y^*)，使其到给定三点的距离的平方和为最小；

(2) 于平面上给定点 $(0.5,-0.2)$，$(-0.3,0.5)$，$(-0.2,-0.3)$，用拉格朗日乘数法，求椭圆周 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 上的点到给定三个点的距离平方和的最大值与最小值.

三、计算积分 $\iiint_\Omega z\,dxdydz$，Ω 为 R^3 中由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$a>0$，和锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 围成的立体.

四、计算曲线积分 $\int_L x^2y\,dx+x^3dy$，其中曲线 L 为 $x^3+y^3=1$ 在第一象限中的部分，从 $(1,0)$ 到 $(0,1)$

五、计算曲面积分 $$\iint_\Sigma (x^2+3z)\,dydz+(xy^2+yz^2)\,dzdx$$

其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 位于 $z\geq 0$ 部分的上侧(即其法向量与 z 轴正向夹角不超过 $\frac{\pi}{2}$).

六、设 Σ 为 R^3 中正则曲面，其参数方程为 $r=r(u,v)$，$(u,v)\in D$，其中 D 为 (u,v) 平面上的有界闭区域。又设 f 为 Σ 上的连续函数。试证明：

存在 Σ 上一点 p，使得 $$\int_\Sigma f\,d\sigma=f(p)\sigma(\Sigma),$$

其中 $\sigma(\Sigma)$ 为 Σ 的面积.

七、设 $E\subset R^2$ 是平面上有界点集，E 由至多可数个点构成。证明：若 E 的导集 E' 为有限集，则 E 是零面积集。

八、设 $F: R^2\to R^2$，$F=(P,Q)$，P,Q 具有连续的偏导数。D 为 R^2 中有界区域，D 的边界 ∂D 为光滑曲线，定向为正向。如果

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\geq\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),\quad \forall (x,y)\in D,$$

并且存在 $(x_0,y_0)\in D$，使得上述不等式为严格不等，试证明存在点 $(x^*,y^*)\in\partial D$，在此点，F 与 ∂D 的切向量(沿曲线定向方向)夹角 $\theta<\frac{\pi}{2}$.