一、(1)、$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^x+e^y}{\cos x-\sin y}=2$

(2)、$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty,\\ y\to+\infty}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x+y}} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to+\infty,\\ y\to+\infty}} \frac{x}{x+y}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{\substack{x\to+\infty,\\ y\to+\infty}} \frac{1}{x+y}} = e^0 = 1$

(3)、$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^3}{x^2+y^2}\quad ((x,y)\neq(0,0))$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{t\to0} 2t\ln|t|=0$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}\quad ((x,y)\neq(0,0))$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases} 2x\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(4)、$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2xz}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{2yz}{(x^2+y^2)^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{1}{x^2+y^2}$

$du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz=-\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}dx-\dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}dy+\dfrac{1}{x^2+y^2}dz$

二、$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0, M>0$，使得当$0<|x-a|<\delta, y>M$时，$|f(x,y)-A|<\varepsilon$

证明：$\forall\varepsilon>0, \exists\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{6},a\right), M=2a\sqrt{\dfrac{2\max(|16a^3-3|,3)}{\varepsilon}}$

$0<|x-a|<\delta, y>M$时，$\left|\dfrac{2x^5+3xy^2}{x+y^2}-3a\right|=\left|3(x-a)+\dfrac{x^2(2x^3-3)}{x+y^2}\right|$

$\leq 3|x-a|+\dfrac{x^2|2x^3-3|}{x+y^2}<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{x^2|2x^3-3|}{y^2}<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{4a^2\max(|16a^3-3|,3)}{y^2}$

$<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ □

三、$V=\pi\displaystyle\int_{-1}^{15}(x+1)dx-\pi\int_{11}^{15}(x-11)^2dx=\frac{320}{3}\pi$

四、(1)、$E^\circ=E$，$\partial E=[0,1)\times\{0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$，$\overline{E}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq1\}$

(2)、$E^\circ=\varnothing$，$\partial E=[-1,1]\times[-1,1]$，$\overline{E}=[-1,1]\times[-1,1]$

五、证明：(1)、$F\setminus G=F\cap G^c$

由于G是开集，故G^c是闭集，$F\setminus G$是闭集

(2)、$G\setminus F=G\cap F^c$

由于F是闭集，故F^c是开集，$G\setminus F$是开集 $\square$

六、(1)、证明：设$u=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\theta\in[0,2\pi)$为所有方向，

则$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(tu)-f(0,0)}{t}=\cos^3\theta$ $\square$

(2)、不可微。证明如下：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^3}{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}-\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$，设$g(x,y)=-\frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

取$s_i=(\frac{1}{i},0)$，$t_i=(\frac{1}{i},\frac{1}{i})$，则$s_i\to 0\ (i\to\infty)$，$t_i\to 0\ (i\to\infty)$，$g(s_i)=0$，$g(t_i)=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$不存在

$\Rightarrow f(x,y)$于$(0,0)$处不可微 $\square$

七、(1)、证明：$\overline{D}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a\}$是有界闭集，因此是紧致集

又由于f是$\overline{D}$上的连续函数，故f在$\overline{D}$上一致连续，则f在D上也一致连续 $\square$

(2)、不一致连续。证明如下：

取$s_i=(i,\frac{\pi}{2i})$，$t_i=(i,\frac{\pi}{6i})$，则$\|s_i-t_i\|=\frac{\pi}{3i}\longrightarrow 0\ (i\to\infty)$，$f(s_i)=1$，$f(t_i)=\frac{1}{2}$，

$|f(s_i)-f(t_i)|=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow f$在$\mathbb{R}^2$上不一致连续 $\square$

八、证明：(1)、$S\subseteq B_{2a}(0)=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\|x\|<2a\}$

$\Rightarrow S$是有界集

$S^c=\{x\in\mathbb{R}^n\,|\,\|x\|<a$或$\|x\|>a\}$

对任意$x\in S^c$，

若$\|x\|<a$，令$r=a-\|x\|$，对任意$y\in B_r(x)$，

$\|y\|\le\|y-x\|+\|x\|<a-\|x\|+\|x\|=a$

$\Rightarrow B_r(x)\subseteq S^c$

若$\|x\|>a$，令$r=\|x\|-a$，对任意$y\in B_r(x)$，

$\|y\|\ge\|x\|-\|x-y\|>\|x\|-(\|x\|-a)=a$

$\Rightarrow B_r(x)\subseteq S^c$

$\Rightarrow S^c$是开集

$\Rightarrow S$是闭集

又由于 S 是有界集，故 S 是紧致集，

又由于 f 是连续的，故 f 在 S 上可以取到最大值和最小值 $\square$

(2)、设 $f(x)=M, f(y)=m$，$S=\{(x,y)\mid x=a\cos\theta, y=a\sin\theta\}$，

$x=(a\cos\theta_1, a\sin\theta_1), y=(a\cos\theta_2, a\sin\theta_2)$，不妨设 $\theta_1>\theta_2$ 且 $|\theta_1-\theta_2|<2\pi$

令 $S_1=\{(x,y)\mid x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, \theta\in[\theta_2,\theta_1]\}$，

$S_2=\{(x,y)\mid x=a\cos\theta, y=a\sin\theta, \theta\in[\theta_1,\theta_2+2\pi]\}$，

对 $\forall x,y\in S_1$，设 $x=(a\cos\varphi_1, a\sin\varphi_1), y=(a\cos\varphi_2, a\sin\varphi_2)$，不妨设 $\varphi_2>\varphi_1$，

则存在连续映射 $x=\varphi(t)=(a\cos t, a\sin t), t\in[\varphi_1,\varphi_2]$ 并且 $\varphi(\varphi_1)=x, \varphi(\varphi_2)=y$

$\Rightarrow S_1$ 是道路连通集

考虑 S_1 上的连续函数 f，则 $\exists \xi_1\in S_1$ 使得 $f(\xi_1)=\eta\in(f(y),f(x))=(m,M)$

同理，$\exists \xi_2\in S_2$ 使得 $f(\xi_2)=\eta\in(m,M)$

$\Rightarrow S$ 中至少存在两个互异的点使得 f 在这两点处函数值等于 η $\square$