

一 (本题满分 20 分)、对下面 \mathbb{R}^n 中的集合 E , 写出 $E^\circ, E', \overline{E}, \partial E$ (只需写出答案, 不需写出理由) .

(1) $n=2, E=\{(x,y):x^2+y^2<1\}$;

(2) $n=2, E=\{(x,y):x>0\}$;

(3) $n=2, E=\{(x,y):x\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z}\}$;

(4) $n=3, E=\{(x,y,z):z^2\geq x^2+y^2\}$;

(5) $E=\{(x_1,x_2,\dots,x_n):x_1x_2\dots x_n=0\}$.

二 (本题满分 20 分)、设 l 是平面直角坐标系中的曲线 $y=1-|x|^{3/2}$ ($-1\leq x\leq 1$) .

(1) 求 l 的弧长;

(2) 求 l 绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

三 (本题满分 15 分)、求曲线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=t^2$ 的曲率 (a 是常数) .

四 (本题满分 15 分)、设 $F(x,y)=y^2+x+\sin(xy)$. 试证明 $F(x,y)=0$ 在 $(0,0)$ 附近存在隐函数解 $x=x(y)$, 并求 $x'(0)$ 的值.

五 (本题满分 15 分)、椭球面的参数方程为

$$x=a\sin\theta\cos\varphi, y=b\sin\theta\sin\varphi, z=c\cos\theta,$$

这里 $a>0, b>0, c>0$ 是常数, $\theta\in[0,\pi], \varphi\in[0,2\pi)$.

(1) 求椭球面的第一基本量;

(2) 求椭球面在 $\theta=\frac{\pi}{4}, \varphi=\frac{\pi}{4}$ 处的切平面方程.

六 (本题满分 8 分)、二元函数 $f(x,y)$ 定义为:

$$f(0,0)=0; \text{ 当 } x^2+y^2>0 \text{ 时, } f(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

请判断 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是否可微, 并说明你的理由.

七 (本题满分 7 分)、设 E 是 \mathbb{R}^n 中的一个稠密集 (即对任意 $a\in\mathbb{R}^n$ 及任意 $r\in\mathbb{R}^+$, 均有 $B_r(a)\cap E\neq\emptyset$) . 证明: $E'=\mathbb{R}^n$, 即 \mathbb{R}^n 中的每个点都是 E 的极限点.