2024春 数学分析 期中(回忆版)

一、(1) 设 $z=e^u\ln v$, $u=\frac{x}{y}$, $v=x+4y$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$;

(2) 求函数 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$ 于点, $P=(\frac{1}{2},-\frac{3}{2})$ 处, 沿方向 $u=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ 的方向导数 $\frac{\partial f}{\partial u}(P)$.

(3) 计算曲线 $x=t^2$, $y=t^3$, $(0\le t\le 1)$ 的弧长;

(4) 计算曲线 $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $z=0$ 的曲率, 其中 $0<b<a$, $0\le t\le 2\pi$, 并指出曲率的最大值与最小值.

二、讨论当实数 α 取何值时, 以下极限存在: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f^{\alpha-1}(x,y)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$,

其中 $f(x,y)=\max\{|x|,|y|\}$. 若极限存在, 求其值.

三、(1) 选择填空: 设 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界函数, $D(f)$ 是 f 的所有间断点构成的集合, 则 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充分条件必要是(　　)。

A. $D(f)$ 为空集;　　　　B. $D(f)$ 为有限集;

C. $D(f)$ 为可数集;　　　　D. $D(f)$ 为 Lebesgue 零测集。

(2) 设由函数 $f(x)=(x-\frac{1}{2})^2D(x)$, 其中 $D(x)$ 为 Dirichlet 函数, 即当 x 为有理数时取值为1, 当 x 为无理数时取值为0. 问 $f(x)$ 于区间 $[0,1]$ 上是否可积? 给出理由.

四、设 $C_i\subset R^n$, $(i=1,2,\cdots,m)$ 均为紧致集(m 为有限正整数), 证明: 这些点集~~套~~的并集 $C=\bigcup_{i=1}^{m}C_i$ 为紧致集.

五、计算由平面曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

位于 $a\le x\le 2a$ 弧段绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积与旋转面面积。

提示: 可使用以下公式 $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+C$

六、椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $(a,b,c>0)$, 过点 $(1,1,2)$, 且该点处的切平面为 $4x+2y+3z=12$, 求 a,b,c 的值.

七、设由映射　$f(x,y,z)=\begin{pmatrix} x+y+z \\ xyz \end{pmatrix}$; $g(u,v)=\begin{pmatrix} a\sin u\cos v \\ a\sin u\sin v \\ a\cos u \end{pmatrix}$,

求复合映射 $f\circ g$ 的 Jacobi 矩阵.

八、设二元函数 $f(x,y)$ 定义如下:

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$$

证明: (1) $f(x,y)$ 于 $(0,0)$ 处沿任何方向的方向导数皆存在;

(2) $f(x,y)$ 于 $(0,0)$ 处可微.