2022 Spr. 高代下 midterm.

1、判断题.(对于下面每个论断,说明其正确与否,对的打勾√,错的打叉×,不需要解释理由).

(a) 幂等变换(即满足$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$的线性变换)总可对角化.

(b) 两个3阶幂零矩阵相似当且仅当它们的最小多项式相同.

(c) 幂零变换是循环的当~~下~~且仅当其Jordan标准形只包含一个Jordan块.

(d) 两个n阶方阵合同当且仅当它们的秩相同.

2、简答题.(直接写出答案,不需解释理由).

(a) 设N为5阶幂零矩阵,其中rank(N)=3, rank(N^2)=1,写出N的一个Jordan标准形.

(b) 设$A=(a_{ij})\in M_n(K)$为n阶方阵,其中 $a_{ij}=\begin{cases}0, & 若 i=j.\\ 1, & 若 i\neq j.\end{cases}$ 求A的最小多项式.

(c) 求二次型 $q(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n)=n\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ 的秩(也即其Gram矩阵的秩).

(d) 数列$\{x_n\}_{n\geq1}$满足$x_{n+3}=3x_{n+2}-3x_{n+1}+x_n$,其中$x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=4$,求数列$\{x_n\}_{n\geq1}$的通项公式.

3、求下面矩阵A的Jordan标准形(不用计算转移矩阵):

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$$

4. 证明:任一n阶复数域上的可逆矩阵A都存在平方根,也即存在n阶矩阵B使得$A=B^2$.

5、设V是n维k-向量空间,f是V上的一个非退化双线性函数.证明:

(1) 任给V上的双线性函数φ,存在V上唯一的一个线性变换$\mathscr{A}_\varphi$,使得

$$\varphi(u,v)=f(\mathscr{A}_\varphi(u),v),\ \forall u,v\in V;$$

(2) 令$\sigma:\varphi\longmapsto\mathscr{A}_\varphi$,则σ是线性空间Bil(V)到$\mathrm{Hom}_k(V,V)$的同构映射.

6、设$\mathcal{N}$为n维向量空间V上的幂零变换,且$\mathcal{N}$在基$v_1,v_2,\cdots,v_n$下的矩阵为一Jordan块,证明:

(1) 包含v_n的$\mathcal{N}$不变子空间就是V本身;

(2) 任一非零$\mathcal{N}$不变子空间都包含v_1;

(3) V不能分解成两个非零$\mathcal{N}$不变子空间的直和;

(4) 子空间

$$V_i=\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_i),\ i=1,2,\cdots,n$$

且仅这些子空间为~~为~~$\mathcal{N}$不变子空间.