数学分析II (MA102a)期中考试题(2023.04.16)

一.(16分) 计算

(1)设$z=x^y+\sin(x^2y)$, $x>0, y>0$, 求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$, dz.

(2) 设$f(x,y,z)=\ln(x+y^2+z^3)$, $x>0, z>0$,求$f(x,y,z)$于点$(1,1,1)$处沿方向$(\dfrac{\sqrt{3}}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4})$的方向导数。

二.(16分) 计算

(1) 设$f(x,y,z)=\ln(1+x^2)+e^y+\sin z$, $\mathbf{g}(\theta,\varphi)=(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta)$, $h(\theta,\varphi)=f\circ\mathbf{g}$ 求h的Jacobi矩阵。

(2) 方程$x^3-7xy+y^3+5=0$在点$(1,1)$与$(1,2)$的近旁分别确定了函数$y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$. 试求$f_1'(1)$和$f_2'(1)$.

三.(10分) 设$f(x)$是于$[a,b]$上可积的非负函数，

(1) 试证明: $\sqrt{f(x)}$于$[a,b]$上可积；

(2) 若$f(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$, 问$\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$于$[a,b]$上是否必可积？若是，请证明；若否，请举例。

四. (16分) 设平面点集$D=\{(x,y);y^2\le x\le 2-y, 0\le y\le 1\}$。求$D$绕$x$轴旋转一周，在空间形成的旋转体$\Omega$的体积和表面积。

五. (16分)

(1) 计算空间曲线$(ae^{-t}\cos t, ae^{-t}\sin t, bt)$，$a>0, b>0$, 上每一点处的切向量和曲率。

(2) 写出曲面$z=6-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}$在点$(a,b,4)$处的切平面方程。

六.(10分) 证明以下命题：

(1) R^n $(n \geq 2)$中以原点为心的单位球面S^{n-1}是紧致集。

(2) 若f是S^{n-1}上的连续函数且不为常数，则存在实数$\alpha < \beta$,使得$f(S^{n-1}) = [\alpha, \beta]$。

七.(8分) 设$f(x,y) = \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2}$, $x^2 + y^2 \neq 0$, $f(0,0) = 0$. 试证明：$f(x,y)$于$(0,0)$处沿任何方向的方向导数皆存在并且相等，但$f(x,y)$于$(0,0)$处不连续。

八.(8分) 设D_1, D_2是R^n中区域，$D_1 \bigcap D_2 \neq \emptyset$. 判断以下命题是否正确。若是，请证明；若否，请举例。

(1) $D_1 \bigcup D_2$是区域；

(2) $D_1 \bigcap D_2$是区域；

(3) $D_1 \backslash \overline{D_2}$是区域。