Totale Unimodularità

In alcuni casi:

formulazione originale $\rightarrow$ formulazione ideale
problema di PLI

Si consideri il seguente problema di PLI in forma standard:

$$z_{PLI} := \min \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ intero}$$

dove A e $\mathbf{b}$ si assumono interi.

Sotto quali condizioni una generica soluzione di base ammissibile $\mathbf{x}^*$ ha componenti frazionarie?

Sia B la base associata a $\mathbf{x}^*$, si ha:

$$\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} B^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{x}^*$ ha componenti frazionarie se e solo se $B^{-1}\mathbf{b}$ non è intero.

L'inversa di B è calcolata come:

$$B^{-1} = \frac{1}{det(B)} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} \end{bmatrix}^T$$

dove $\alpha_{ij} := (-1)^{i+j} det(M_{ij})$ e M_{ij} è la sottomatrice ottenuta da B eliminando l'i-esima riga e la j-esima colonna.

$$\Downarrow$$

B è intera $\Rightarrow \alpha_{ij}, \forall i, j$ interi $\Rightarrow B^{-1}$ intera se $det(B) := \pm 1$

Si noti che la condizione è sufficiente, ma non necessaria per l'interezza di $B^{-1}\mathbf{b}$ (perché?)

$$\Downarrow$$

E' possibile dimostrare che data una matrice A contenente una base B con $|det(B)| \neq 1$ esiste sempre un problema di PL del tipo $\{\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \;\; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, con $\mathbf{c}$ e $\mathbf{b}$ opportuni, la cui soluzione ottima coincide con un vertice frazionario.

Definizione 1: Una matrice intera A di dimensione $m \times n$ con $m \leq n$ si dice unimodulare se per ogni sua sottomatrice quadrata $m \times m$ B vale:

$$det(B) \in \{-1, 0, 1\}.$$

Teorema 1: Sia A unimodulare e $\mathbf{b}$ intero. Allora il poliedro $P := \{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$ ha solo vertici interi.

Dim: Sia $\mathbf{x}^*$ un qualunque vertice di P. Allora esiste una base B di A tale che $\mathbf{x}^* = (B^{-1}\mathbf{b}, \mathbf{0})$. Poiché B è una sottomatrice quadrata di A di ordine m e non singolare si ha:

$|det(B)| = 1 \Rightarrow$ interezza di $B^{-1} \Rightarrow$ interezza di $B^{-1}\mathbf{b}$, $\forall$ $\mathbf{b}$ intero.
$\square$

Se il problema di PLI è in forma canonica:

$$\{\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

$$\Downarrow$$

$$\{\min \mathbf{c}^T\mathbf{x} : A\mathbf{x} - I\mathbf{s} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}\}$$

dove $\mathbf{s}$ sono variabili di surplus. La nuova matrice dei vincoli è $A' := [A, -I]$.

In generale, ogni sottomatrice $m \times m$ di A' si può ottenere selezionando k colonne da A e $m-k$ colonne da $-I$ $(0 \leq k \leq m)$.

Allora, a meno di permutazioni di righe e colonne, si ha:

$$B = \left[\begin{array}{c|c} -I' & F \\ \hline \underbrace{0}_{\text{colonne da } -I} & \underbrace{Q}_{\text{colonne da } A} \end{array}\right]$$

dove I' è una matrice identità di ordine $m-k$.

Pertanto:

$det(B) = \pm det(Q) \Rightarrow A'$ è unimodulare se e solo se vale $det(Q) \in \{-1, 0, 1\}$ per ogni sottomatrice quadrata Q di A, di qualunque ordine.

Definizione 2: Una matrice intera A di dimensione $m \times n$ si dice totalmente unimodulare (TUM) se $det(Q) \in \{-1, 0, 1\}$ per ogni sua sottomatrice quadrata Q, di qualunque ordine.

Teorema 2: Sia A TUM e $\mathbf{b}$ intero. Allora il poliedro $P := \{\mathbf{x} \geq \mathbf{0} : A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}\}$ ha solo vertici interi.

Dim: Sia $\mathbf{x}^*$ un qualunque vertice del poliedro P. Dimostriamo che $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^* := A\mathbf{x}^* - \mathbf{b})$ è vertice del poliedro $P' := \{(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \geq \mathbf{0} : A\mathbf{x} - \mathbf{s} = \mathbf{b}\}$.

Se così non fosse:

$\exists$ due punti $(\mathbf{x^1}, \mathbf{s^1})$, $(\mathbf{x^2}, \mathbf{s^2})$ distinti di P' tali che:

$(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*) = \lambda(\mathbf{x^1}, \mathbf{s^1}) + (1-\lambda)(\mathbf{x^2}, \mathbf{s^2})$ per qualche λ, $0 < \lambda < 1$.

Si noti che $\mathbf{x^1}$ e $\mathbf{x^2}$ appartengono a P, dato che:

$$\mathbf{s^1} = A\mathbf{x^1} - \mathbf{b} \geq 0;$$

$$\mathbf{s^2} = A\mathbf{x^2} - \mathbf{b} \geq 0.$$

Inoltre:
$(\mathbf{x^1}, \mathbf{s^1}) \neq (\mathbf{x^2}, \mathbf{s^2}) \Rightarrow \mathbf{x^1} \neq \mathbf{x^2}$ e quindi $\mathbf{x}^* = \lambda\mathbf{x^1} + (1-\lambda)\mathbf{x^2}$ non potrebbe essere un vertice di P.

Poiché A è TUM $\Rightarrow A' := [A, -I]$ è unimodulare.

$$\Downarrow$$

Per il Teorema 1 $(\mathbf{x}^*, \mathbf{s}^*)$ è intero e quindi anche $\mathbf{x}^*$ è intero. $\square$

Come si dimostra che una matrice A è TUM?

- enumerando tutte le sottomatrici quadrate di A;
- verificando alcune semplici condizioni.

Condizione **necessaria** (non sufficiente) affinché A sia TUM:
$a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ per ogni elemento (sottomatrice 1×1) di A.

Condizione **sufficiente** (non necessaria) affinché A sia TUM:

Teorema 3: Sia A una matrice con $a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. A è TUM se valgono le seguenti condizioni:

1. ogni colonna di A ha non più di due elementi non nulli;
2. esiste una partizione (I_1, I_2) delle righe di A tale che ogni colonna con due elementi diversi da zero ha questi due elementi su righe appartenenti a insiemi I_1 e I_2 diversi se e solo se i due elementi sono concordi in segno.

Proposizione 1: La matrice A è TUM se e solo se:

- A^T è TUM;
- la matrice A' ottenuta da A permutando e/o cambiando segno ad alcune righe e/o colonne è TUM;
- le matrici:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \pm 1 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & A & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right] \text{ e } \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & A & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right] \text{ sono TUM.}$$

Esempio Dimostrare la totale unimodularità della seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione:

- Per la Proposizione 1 possiamo eliminare le righe #4 e #7 e la colonna #6 perché contengono un solo elemento diverso da zero;
- esiste una partizione delle righe della matrice rimanente in due sottoinsiemi distinti, così composti:

  $I_1 = \{1, 2, 6\}$ e $I_2 = \{3, 4, 5\}$.

Problema del Trasporto

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \quad i = 1, ..., m \quad \text{(vincoli sull'offerta)};$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge d_j \quad j = 1, ..., n \quad \text{(vincoli sulla domanda)};$$

$$0 \le x_{ij} \le q_{ij} \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n \quad \text{(vincoli di capacità)}$$

Cambiando segno ai vincoli sull'offerta e a quelli di capacità trasformiamo il problema in forma canonica:

$$\{\min \mathbf{c}^T \mathbf{x} : A\mathbf{x} \ge \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\},$$

dove:

$$
A = \begin{array}{c|cccccccc|}
 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{ij} & x_{i,j+1} & \cdots & x_{m,n-1} & x_{m,n} \\
\hline
1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
i & \vdots & \vdots & \cdots & -1 & -1 & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 \\
\hline
1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
2 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
j & \vdots & \vdots & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \vdots & \vdots \\
j+1 & \vdots & \vdots & \cdots & 0 & 1 & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
\hline
(1,1) & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
(i,j) & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
(m,n) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1
\end{array}
\quad \mathbf{b} = \left\|\begin{array}{c}
-s_1 \\ \vdots \\ -s_i \\ \vdots \\ -s_m \\
\hline
d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_j \\ d_{j+1} \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \\
\hline
-q_{1,1} \\ \vdots \\ -q_{i,j} \\ \vdots \\ -q_{m,n}
\end{array}\right\|
$$

Osserviamo che:

- ogni colonna ha esattamente 3 elementi diversi da zero;
- tutti gli elementi della matrice hanno valore $\in \{-1, 0, 1\}$ (condizione necessaria).

Dimostrazione di totale unimodularità:

- eliminiamo le ultime $m \times n$ righe (Proposizione 1);
- partizione delle righe (Teorema 3):

  $I_1 = \{1, 2, \cdots, m, m+1, \cdots, m+n\}$ e $I_2 = \emptyset$.