Аппроксимация кривыми Пирсона плотности распределения суммы независимых одинаково распределенных случайных величин

**Человек:** Предметом исследования является плотность распределения вероятностей суммы m независимых одинаково распределенных случайных величин. Анализу распределения сумм случайных величин посвящены многочисленные фундаментальные исследования. Теория суммирования была и остается одним из важнейших разделов теории вероятностей. Доказанные в рамках этой теории предельные теоремы позволяют судить о том, какими распределениями можно аппроксимировать суммы случайных величин при больших m. При этом погрешность приближения оценивается предельной ошибкой. Однако в большинстве прикладных задач число суммируемых величин конечно и не велико, а оценки погрешности в виде предельной ошибки оказываются недостаточно точными. Целью настоящего исследования является разработка конструктивного метода аппроксимации плотности распределения суммы конечного числа независимых случайных величин с одинаковым распределением. В качестве аппроксимирующих распределений предложено использовать кривые Пирсона. Такая аппроксимация лишена недостатков, связанных с применением предельных теорем. Она применима при любом числе суммируемых случайных величин m>1. Решение поставленной задачи базируется на методе моментов. Автором предложена рекурсивная формула для расчета начальных моментов суммы независимых случайных величин, что позволило найти центральные моменты суммы, а затем и параметры кривых Пирсона. Доказано, что параметры кривых Пирсона для суммы m случайных величин связаны простыми соотношениями с соответствующими параметрами суммируемой величины. Найдена зависимость расстояния от точки, соответствующей распределению суммы случайных величин в системе координат параметров Пирсона, до точки (0, 3), соответствующей нормальному распределению. По величине этого расстояния можно косвенно судить о возможности применения аппроксимации нормальным распределением. Рассмотрена возможность аппроксимации кривых Пирсона нормальным распределением. Погрешность приближения при этом оценивается как расстояние в -метрике. Получена приближенная формула для оценки погрешности аппроксимации суммы m случайных величин нормальным распределением.Приведены примеры аппроксимации распределения суммы случайных величин, часто встречающихся в задачах статистической радиотехники. В качестве справочного материала приведены точные и полные формулы для основных типов кривых Пирсона.Все полученные результаты применимы при суммировании любых случайных величин, имеющих конечные первые четыре начальных момента. Корректность выводов подтверждена численными расчетами, выполненными в программе MathCad.

**Key words:** случайная величина, кривые Пирсона, плотность распределения, моменты случайной величины, нормальный закон распределения, сумма случайных величин, рекурсивный алгоритм, вероятностная мера, погрешность аппроксимации, метод моментов

=================================

**FastText\_KMeans\_Clean:** Целью исследования является разработка конструктивного метода аппроксимации кривыми Пирсона распределения вероятностей конечной суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. При выборе распределения обычно представляет интерес информация о том, насколько сильно аппроксимирующее распределение отличается от нормального и нельзя ли нормальное распределение использовать для аппроксимации. Нормирующий множитель. Плотность распределения [7, с. 105]:. Рис. 4 Графики плотности распределения. Рис. 9 Области кривых Пирсона: а); б). Рис. 23 Области кривых Пирсона: а) показательное распределение с параметрами ; б) распределение Эрланга с параметрами ; в)-распределение с степенями свободы; г) показательно-степенное распределение с параметрами .

**Key words part:** 0.75

=================================

**FastText\_KMeans\_Raw/:** При этом предполагается, что вклады этих факторов в результат измерения малы и аддитивны, а сами факторы действуют независимо. В заключение отметим, что все расчетные соотношения этого параграфа получены для суммы независимых одинаково распределенных случайных величин и справедливы для любого исходного распределения с конечными начальными моментами -го порядка, . Предпосылкой для такого решения служит тот факт, что расстояние (см. (22)) с ростом стремится к нулю, а точки располагаются на прямой (23), начало которой находится в точке с координатами , а конец в точке (0, 3) – в точке нормального распределения (см. рис. 2). Рис. 7 Области кривых Пирсона: а); б) , в). Плотность распределения [7, с. 121]. Плотность распределения. Рис. 16 Графики плотности распределения. Пример 8 Распределение суммы гармонического сигнала со случайной начальной фазой и нормального шума.

**Key words part:** 0.75

=================================

**FastText\_PageRank\_Clean/:** Распределение типа I. Кривая II типа. Знак совпадает со знаком . , знак совпадает со знаком ;. , должно выполняться неравенство . Частные случаи при :. - распределение близко к нормальному;. - распределение относится к типу VI. Распределение типа VI.

**Key words part:** 0.40625

=================================

**FastText\_PageRank\_Raw/:** Плотность распределения [7, с. 423]. Начальные моменты [7, с. 97]. Плотность распределения [7, с. 121]. Начальные моменты [7, с. 424]. Уравнение [3, с. 69]. Начальные моменты [1, с. 117]. Уравнение [10, с. 286]:. , знак совпадает со знаком ;.

**Key words part:** 0.4375

=================================

**Mixed\_ML\_TR/:** Метод моментов дает приближенный результат, то есть некоторую аппроксимацию распределения суммы случайных величин. Основная трудность, возникающая при вычислениях моментов, связана с необходимостью раскрытия суммы при произвольных целочисленных значениях и . Кривые Пирсона (распределения Пирсона) широко используются при аппроксимации распределений случайных величин. Рис. 1 График для определения типа кривой Пирсона в зависимости от и. Здесь - плотность распределения суммы случайных величин; - плотность нормального распределения; , - моменты суммы случайных величин; границы интервала существования плотности вероятностей . Далее приведены уравнения основных типов кривых Пирсона и примеры распределения суммы случайных величин, чаще всего встречающихся в задачах статистической радиотехники. Можно показать, что начальные моменты равны:. Распределение типа I. Параметры и не зависят от дисперсии . Рис. 22 Графики плотности гамма-распределения: а) 1 - показательное распределение с параметрами ; 2 – распределение Эрланга с параметрами ; б) 1 – -распределение с степенями свободы; 2 – показательно-степенное распределение с параметрами.

**Key words part:** 0.8125

=================================

**MultiLingual\_KMeans/:** Метод моментов дает приближенный результат, то есть некоторую аппроксимацию распределения суммы случайных величин. Основная трудность, возникающая при вычислениях моментов, связана с необходимостью раскрытия суммы при произвольных целочисленных значениях и . Рис. 1 График для определения типа кривой Пирсона в зависимости от и. Можно показать, что начальные моменты равны:. Распределение типа I. Параметры и не зависят от дисперсии . Рис. 22 Графики плотности гамма-распределения: а) 1 - показательное распределение с параметрами ; 2 – распределение Эрланга с параметрами ; б) 1 – -распределение с степенями свободы; 2 – показательно-степенное распределение с параметрами.

**Key words part:** 0.78125

=================================

**Multilingual\_PageRank/:** Однако чаще всего они сопряжены со значительными вычислительными трудностями. Полиномиальная аппроксимация не имеет связи с природой случайной величины. В ходе работы над статьей выяснилось, что, несмотря на обилие литературы, найти полное и точное описание уравнений кривых Пирсона не просто. При этом условие не выполняется. Это затрудняет решение многих прикладных задач, особенно связанных с проверкой статистических гипотез. Мода существует при . Частные случаи при :. - интенсивность отказов увеличивается со временем;.

**Key words part:** 0.5625

=================================

**RuBERT\_KMeans\_Without\_ST/:** Известно [1, с. 89], что распределение суммы независимых случайных величин можно найти одним из следующих способов:. Характеристики суммы случайных величин, распределенных по закону Фишера: а) зависимость типа кривой Пирсона от количества суммируемых величин; б) график расстояния ; в) график каппы Пирсона . Предпосылкой для такого решения служит тот факт, что расстояние (см. (22)) с ростом стремится к нулю, а точки располагаются на прямой (23), начало которой находится в точке с координатами , а конец в точке (0, 3) – в точке нормального распределения (см. рис. 2). Плотность распределения [7, с. 105]:. Рис. 7 Области кривых Пирсона: а); б) , в).

**Key words part:** 0.71875

=================================

**RuBERT\_KMeans\_With\_ST/:** Рис. 1 График для определения типа кривой Пирсона в зависимости от и. В социологии и экономике для оценки структурных сдвигов совокупностей используют дискретный аналог формулы (24), который называют индексом Лузмора-Хэнби [5]. Начальные моменты рассчитываются численно в среде MathCad:. Показано, что параметры , кривых Пирсона для суммы случайных величин связаны простыми соотношениями (16), (17) с соответствующими параметрами , суммируемой величины.

**Key words part:** 0.625

=================================

**RUBERT\_page\_rank\_Without\_ST/:** Они находятся из соотношений:. Аппроксимация нормальным распределением. Начальные моменты [7, с. 97]. Начальные моменты [1, с. 117]. - распределение относится к типу VI.

**Key words part:** 0.46875

=================================

**RUBERT\_page\_rank\_With\_ST/:** Система кривых Пирсона достаточно универсальна. Ограничение: Уравнение:. Частные случаи при :. - интенсивность отказов уменьшается со временем, распределение относится к типу VI;. - распределение относится к типу VI.

**Key words part:** 0.40625

=================================

**RUSBERT\_KMeans\_Without\_ST/:** Численные расчеты для различных распределений суммируемой случайной величины , показали, то выражение (24) с достаточной для практики точностью можно аппроксимировать формулой:. Рис. 4 Графики плотности распределения. Погрешность аппроксимации ( и ) не зависит от параметра . при - показательно-степенное распределение с параметром.

**Key words part:** 0.625

=================================

**RUSBERT\_KMeans\_With\_ST/:** Ситуация существенно упрощается, если в качестве аппроксимирующего распределения используется нормальное. Рис. 11 Области кривых Пирсона: , а); б) , в). Погрешность аппроксимации ( и ) не зависит от параметров и распределения. Плотность распределения [1, с. 121]. Показано, что параметры , кривых Пирсона для суммы случайных величин связаны простыми соотношениями (16), (17) с соответствующими параметрами , суммируемой величины.

**Key words part:** 0.75

=================================

**RUSBERT\_page\_rank\_Without\_ST/:** При этом условие не выполняется. - плотность одностороннего нормального распределения;. , знак совпадает со знаком ;. - распределение близко к нормальному;. - распределение относится к типу VI.

**Key words part:** 0.40625

=================================

**RUSBERT\_page\_rank\_With\_ST/:** Плотность распределения. Плотность распределения. Знак совпадает со знаком . Плотность распределения. Распределение типа VI.

**Key words part:** 0.375

=================================

**Simple\_PageRank/:** Численные расчеты для различных распределений суммируемой случайной величины , показали, то выражение (24) с достаточной для практики точностью можно аппроксимировать формулой:. Плотность распределения можно найти по общей формуле распределения квадрата случайной величины, приведенной в [7, с. 107]. В [9, с. 80] приведена формула для плотности распределения суммы гармонических колебаний с неодинаковыми амплитудами и случайными равномерно распределенными фазами. Плотность распределения нормированной по случайной величины описывается формулой [8, с. 188]. Приведено точное выражение для расстояния от точки, соответствующей распределению суммы случайных величин в системе координат параметров Пирсона (), до точки (0, 3), соответствующей нормальному распределению. Результаты настоящей работы могут найти применение при исследовании и проектировании каналов связи с входами и общи выходом, многоканальных РЛС с ФАР, многоканальных следящих измерителей и других систем, подверженных аддитивному воздействию независимых факторов.

**Key words part:** 0.65625

=================================

**TextRank/:** Метод моментов дает приближенный результат, то есть некоторую аппроксимацию распределения суммы случайных величин. Целью исследования является разработка конструктивного метода аппроксимации кривыми Пирсона распределения вероятностей конечной суммы независимых одинаково распределенных случайных величин. В заключение отметим, что все расчетные соотношения этого параграфа получены для суммы независимых одинаково распределенных случайных величин и справедливы для любого исходного распределения с конечными начальными моментами -го порядка, . Здесь - плотность распределения суммы случайных величин; - плотность нормального распределения; , - моменты суммы случайных величин; границы интервала существования плотности вероятностей . Далее приведены уравнения основных типов кривых Пирсона и примеры распределения суммы случайных величин, чаще всего встречающихся в задачах статистической радиотехники. Приведено точное выражение для расстояния от точки, соответствующей распределению суммы случайных величин в системе координат параметров Пирсона (), до точки (0, 3), соответствующей нормальному распределению.

**Key words part:** 0.8125

=================================

**TF-IDF\_KMeans/:** Параметры и характеристики кривых Пирсона для суммы случайных величин. При этом условие не выполняется. где функции распределения случайных величин и . Плотность распределения [7, с. 105]:. Рис. 5 Области кривых Пирсона: а); б) в). Начальные моменты [7, с. 97]. Распределение типа I. Пример 5 Распределение Накагами (-распределение). Уравнение [3, с. 69].

**Key words part:** 0.71875

=================================

**Текст:** Исследование вероятностных характеристик сумм независимых случайных величин на протяжении длительного времени является одной из ключевых проблем теории вероятностей. И до сих пор анализу различных стохастических эффектов суммы случайных величин посвящается большое число исследований. Исторически интерес к схеме суммирования появился в связи с созданием и развитием теории ошибок измерений, когда возникло понимание, что ошибки наблюдения некоторой величины формируются под влиянием многих факторов. При этом предполагается, что вклады этих факторов в результат измерения малы и аддитивны, а сами факторы действуют независимо. В рамках этих допущений разработаны классическая и современная теории предельных теорем для сумм независимых случайных величин. Предельные теоремы указывают на возможную аппроксимацию и дают погрешность приближения в виде неравенств. Такие результаты обычно достаточны для решения практических задач, связанных с оценкой погрешности измерения. Однако существует множество задач, в которых число суммируемых величин конечно. В этом случае оценка погрешности аппроксимации оказывается недостаточно точной. Поэтому задачи с конечным числом суммируемых случайных величин решаются путем непосредственного нахождения законов распределения прямыми методами, а предельные теоремы используются в качестве подтверждения правильности полученного результата.. Известно [1, с. 89], что распределение суммы независимых случайных величин можно найти одним из следующих способов:. 1) путем вычисления свертки распределений отдельных слагаемых;. 2) через характеристические функции;. 3) с помощью моментов.. Первые два похода дают точное решение. Однако чаще всего они сопряжены со значительными вычислительными трудностями. Исключение составляют лишь безгранично делимые распределения, перечень которых ограничен.. Метод моментов дает приближенный результат, то есть некоторую аппроксимацию распределения суммы случайных величин. Но при этом расчеты сводятся к достаточно простым вычислениям.. Аппроксимация в этом случае выполняется с помощью:. 1) полиномов,. 2) нормального распределения с поправками в виде полинома (метод Крамера) или производных от нормальной плотности распределения (ряды Шарлье),. 3) кривых Пирсона.. Методы Шарлье и Крамера пригодны лишь для приближенно нормальных распределений. Полиномиальная аппроксимация не имеет связи с природой случайной величины.. Метод Пирсона лишен этих недостатков. Система кривых Пирсона достаточно универсальна. Существует простой алгоритм определения типа кривой [2, с. 65]. Эти обстоятельства и определили выбор метода аппроксимации, реализованный в настоящей работе.. Целью исследования является разработка конструктивного метода аппроксимации кривыми Пирсона распределения вероятностей конечной суммы независимых одинаково распределенных случайных величин.. В ходе работы над статьей выяснилось, что, несмотря на обилие литературы, найти полное и точное описание уравнений кривых Пирсона не просто. Например, в [1, с. 133] приведены уравнения кривых, а параметры рекомендуется находить через решение вспомогательных уравнений. В других источниках ограничиваются ссылкой на результаты исследования У. Элдертона (W. Elderton), опубликованные в 1938 г. В этой связи считаем целесообразным привести точные и полные (с параметрами) уравнения кривых Пирсона основных типов.. Моменты суммы одинаково распределенных независимых случайных величин. Для определения параметров кривых Пирсона необходимо знание центральных моментов суммы случайных величин. Рассмотрим процедуру их расчета через начальные моменты.. Начальные моменты -го порядка суммы взаимно независимых случайных величин можно найти по одной из формул:. , , ,. где , , плотность, функция распределения вероятностей и закон распределения дискретной случайной величины соответственно.. Основная трудность, возникающая при вычислениях моментов, связана с необходимостью раскрытия суммы при произвольных целочисленных значениях и . Расчеты можно существенно упростить, если ввести рекурсивную функцию, построенную на полиномах Ньютона. Последовательно рассмотрим биномиальное представление суммы при различном числе суммируемых случайных величин.. При. , (1). где .. При. (2). В общем случае при можно записать:. . (3). Искомые начальные моменты суммы случайных величин найдем, усреднив выражения (1)…(3). Так, для начального момента -го порядка суммы двух случайных величин получим:. . (4). Здесь угловыми скобками обозначена операция математического ожидания, а - начальный момент -го порядка случайной величины :. (5). Очевидно, что при момент равен. ,. а при произвольном :. . (6). При решении задачи аппроксимации законов распределения методом моментов, используются центральные моменты, связанные с начальными соотношением [1]:. , (7). где начальный момент суммы случайных величин .. В дальнейшем нам понадобятся моменты не выше четвертого порядка, которые удобней рассчитывать по развернутым формулам:. ; (8). ; (9). . (10). Подставив в формулы (8…10) выражения для начальных моментов из (4) и (6) с учетом (5) получим более простые соотношения для центральных моментов суммы случайных величин:. , (8а). , (9а). . (10а). Здесь , , центральные моменты соответственно порядка 2, 3, 4 случайной величины .. Кривые Пирсона. Кривые Пирсона (распределения Пирсона) широко используются при аппроксимации распределений случайных величин. Они позволяют аппроксимировать практически все известные статистические распределения.. Пирсон предложил для описания статистического распределения случайной величины использовать решения дифференциального уравнения [3, с. 63]:. , (11). где – мода.. Коэффициенты в уравнении (11) могут быть вычислены с помощью центральных моментов. Они находятся из соотношений:. , ,. где. . (12). , (13). (14). Дискриминант знаменателя в уравнении (11) равен:. ,. где. (15). Общий интеграл уравнения (11) зависит от вида корней квадратного уравнения и определяется критерием («каппа Пирсона») и дополнительными параметрами [2, с. 278]:. ,. ,. .. В табл. 1 приведены типы кривых Пирсона и соответствующие им критерии, а так же границы области кривых Пирсона. Граница 1 – это верхняя граница всех распределений, а граница 0 – граница кривых Пирсона.. Таблица 1. Тип кривой. Граница 0. I. II. III. IV. V. VI. VII. Граница 1. Критерии. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . На рис. 1 приведен график областей кривых Пирсона, построенный по уравнениям, приведенным в [2, с. 278].. . Рис. 1 График для определения типа кривой Пирсона в зависимости от и. Область кривых типа I состоит из смежных областей типа I(U) (U-образные кривые плотности распределения) и типа I(J) (J-образные кривые). Точка с координатами (0;3) соответствует нормальному распределению.. Параметры и характеристики кривых Пирсона для суммы случайных величин. Найдем коэффициенты , , критерий и дополнительные характеристики для суммы случайных величин.. Коэффициенты и рассчитываются по формулам (13, 14), в которых центральные моменты определяются выражениями (8а…10а). Подставив соответствующие формулы (8а…10а) в (13, 14) после необходимых преобразований получим:. , (16). . (17). Здесь и коэффициенты суммируемой случайной величины . При известных начальных моментах они рассчитываются по формулам:. ,. ,. где. ,. ,. .. Подставив в (15) выражения (16, 17) получим формулу для критерия суммы случайных величин. . (18). Аналогично преобразуем формулы для дополнительных параметров:. , (19). , (20). . (21). Таким образом, коэффициенты ,, критерий и дополнительные параметры суммы независимых случайных величин определяются непосредственно через коэффициенты и суммируемой случайной величины .. При выборе распределения обычно представляет интерес информация о том, насколько сильно аппроксимирующее распределение отличается от нормального и нельзя ли нормальное распределение использовать для аппроксимации. Косвенно о близости распределений можно судить по расстоянию в системе координат между точкой с координатами и точкой нормального распределения с координатами (0, 3). Это расстояние равно:. . После подстановки в эту формулу выражений (16), (17) получим:. . (22). Можно показать, что точки расположены на прямой, описываемой уравнением. . (23). В заключение отметим, что все расчетные соотношения этого параграфа получены для суммы независимых одинаково распределенных случайных величин и справедливы для любого исходного распределения с конечными начальными моментами -го порядка, . Корректность полученных результатов подтверждается численными расчетами. Расчетные формулы весьма просты и легко реализуются в программе MathCad.. На рис. 2 и 3 для примера приведены результаты расчета для суммы независимых случайных величин с -распределением Фишера с параметрами , .. . Рис. 2. Траектория точек суммы случайных величин, распределенных по закону Фишера. . Рис. 3. Характеристики суммы случайных величин, распределенных по закону Фишера: а) зависимость типа кривой Пирсона от количества суммируемых величин; б) график расстояния ; в) график каппы Пирсона .. Примечание. На рис. 2а номера типов кривых обозначены латинскими, а не римскими цифрами вследствие ограничений, накладываемых программой MathCad, в которой проводились расчеты.. Рисунок 2 позволяет визуально оценить тип аппроксимирующего распределения в зависимости от . Данные рис. 3 дают более точное представление об изменении типа распределения: при сумма аппроксимируется распределением типа VI, затем – распределением типа IV. Это подтверждается переходом критерия из области в интервал . При этом условие не выполняется. Следовательно, аппроксимация кривой типа III невозможна при заданных параметрах , .. Аппроксимация нормальным распределением. Функции распределения Пирсона практически всех типов выражаются через специальные функции и не табулированы. При этом квантили приходится находить численными методами. Это затрудняет решение многих прикладных задач, особенно связанных с проверкой статистических гипотез. Ситуация существенно упрощается, если в качестве аппроксимирующего распределения используется нормальное. Предпосылкой для такого решения служит тот факт, что расстояние (см. (22)) с ростом стремится к нулю, а точки располагаются на прямой (23), начало которой находится в точке с координатами , а конец в точке (0, 3) – в точке нормального распределения (см. рис. 2). С ростом числа слагаемых точка стремится к точке (0, 3), то есть к нормальному распределению. Это утверждение справедливо для суммы любых независимых одинаково распределенных случайных величин с конечными начальными моментами и является наглядной иллюстрацией справедливости центральной предельной теоремы. Отметим, что распределения Пирсона всех типов имеют конечную дисперсию, следовательно, в рассматриваемом случае выполняются условия теоремы Леви-Линдеберга [1, с. 71].. Оценка точности приближения одних случайных величин другими определяется расстоянием между ними в предварительно заданной вероятностной метрике. В настоящей работе в качестве метрики выбрано расстояние полной вариации . Это «одна из самых сильных метрик, используемых в теории вероятностей» [4, с. 110].. Привлекательность -метрики состоит еще и в том, что значения ограничены интервалом [0; 1]. При ошибки аппроксимации нет, а при между случайными величинами существует предельно возможное различие. Тогда по величине можно судить насколько сильно распределения случайных величин и отличаются между собой по сравнению с предельно возможным случаем.. Расстояние полной вариации задается соотношением:. ,. где функции распределения случайных величин и .. В нашем случае плотности распределения существуют и -метрику можно рассчитать по формуле. (24). Здесь - плотность распределения суммы случайных величин; - плотность нормального распределения; , - моменты суммы случайных величин; границы интервала существования плотности вероятностей .. Примечание. В социологии и экономике для оценки структурных сдвигов совокупностей используют дискретный аналог формулы (24), который называют индексом Лузмора-Хэнби [5].. Численные расчеты для различных распределений суммируемой случайной величины , показали, то выражение (24) с достаточной для практики точностью можно аппроксимировать формулой:. , (25). где - -метрика аппроксимации распределения суммы двух случайных величин (с исходным распределением); - количество суммируемых случайных величин.. Отметим, что выражение (25) с точностью до постоянного множителя совпадает с границей неравенства Бери-Эссеена [6, с. 155].. Некоторые плотности распределения Пирсона заданы в интервале ограниченной длины. В этом случае важным критерием качества аппроксимации является вероятность. . (26). Очевидно, что вероятность строго равна единице только при и . Тем не менее, если окажется, что она достаточно близка к единице, то аппроксимацию нормальным распределением можно считать практически приемлемой, при условии, что значения малы. С другой стороны, если окажется, что вероятность недопустимо мала, то независимо от значений от аппроксимации придется отказаться.. Далее приведены уравнения основных типов кривых Пирсона и примеры распределения суммы случайных величин, чаще всего встречающихся в задачах статистической радиотехники.. Кривая I типа. Ограничение: κ < 0. Уравнение:. .. Примечание. В дальнейшем для сокращения записи в формулах не указывается область нулевых значений плотности вероятности. Если приводится функция с указанием ограничений ее аргумента, то это означает, что в области, где ограничения не выполняются, функция тождественно равна нулю.. Параметры:. ,. при берется , а при - наоборот.. , ,. . где , .. Нормирующий множитель. ,. где - гамма-функция.. Коэффициенты и положительны. Показатели степени и больше -1.. Пример 1 Квадрат нормальной случайной величины. Плотность распределения [7, с. 105]:. , .. Примечание. В формуле (3.10) [7, с. 105] допущена опечатка: в показателе степени экспоненты вместо y2 следует читать y.. . Рис. 4 Графики плотности распределения. Начальные моменты рассчитываются численно в среде MathCad:. ,. . Рис. 5 Области кривых Пирсона: а); б) в). Распределение типа I. При переходит в тип VI.. Пример 2 Квадрат случайной величины с равномерным распределением. Плотность распределения можно найти по общей формуле распределения квадрата случайной величины, приведенной в [7, с. 107]. Плотность вероятностей квадрата равномерно распределенной случайной величины зависит от соотношения между границами интервала равномерного распределения:. , , , или , ,. , ,, ,. , , , .. . Рис. 6 Графики плотности распределения: а) , б). Можно показать, что начальные моменты равны:. ,. . Рис. 7 Области кривых Пирсона: а); б) , в). Распределение типа I(J) с переходом в I.. Пример 3 Распределение Релея. Распределение огибающей узкополосного нормального процесса.. Плотность распределения [7, с. 423]. , .. . Рис. 8 Графики плотности распределения Релея. Начальные моменты [7, с. 97]. ,. . Рис. 9 Области кривых Пирсона: а); б). Распределение типа I. Параметры и не зависят от дисперсии .. Пример 4 Распределение Релея-Райса (Обобщенное распределение Релея [7, с.123]). Распределение огибающей суммы узкополосного нормального процесса и гармонического сигнала.. Плотность распределения [7, с. 121]. , , ,. где - функция Бесселя первого рода нулевого порядка.. . Рис. 10 Графики плотности распределения Релея-Райса. Начальные моменты [7, с. 424]. , ,. где - вырожденная гипергеометрическая функция.. . Рис. 11 Области кривых Пирсона: , а); б) , в). Распределение типа I.. Пример 5 Распределение Накагами (-распределение). Распределение огибающей гармонического сигнала со случайной амплитудой и фазой [8, с. 59].. Плотность распределения. . .. Частные случаи:. - плотность одностороннего нормального распределения;. - плотность распределения Релея;. - используется для аппроксимации плотности распределения Релея-Райса.. . Рис. 12 Графики плотности распределения Накагами.. Начальные моменты. ,. . Рис. 13 Области кривых Пирсона: , а); б) , в). Распределение типа I.. Кривая II типа. Ограничения: , . Уравнение [3, с. 69]. , .. Параметры:. , , [1, с.133]. Коэффициент . При распределение унимодальное (U-образное).. Пример 6 Распределение арксинуса. По закону арксинуса распределено гармоническое колебание с известной амплитудой и случайной фазой , равномерно распределенной в интервале .. Плотность распределения [8, с. 184]. , .. . Рис. 14 График плотности распределения арксинуса. Можно показать, что первые четыре начальных момента равны. , , , .. . Рис. 15 Области кривых Пирсона. Сумма случайных величин аппроксимируется кривой типа II. Погрешность аппроксимации ( и ) не зависит от параметра .. Примечание. В [9, с. 80] приведена формула для плотности распределения суммы гармонических колебаний с неодинаковыми амплитудами и случайными равномерно распределенными фазами.. Пример 7 Распределение гармонического сигнала со случайной амплитудой и фазой. Случайный сигнал , где случайные функции и независимы в один и тот же момент времени. Амплитуда распределена равномерно в интервале . Фаза - равномерно в интервале .. Плотность распределения мгновенного значения сигнала [8, с. 186]:. , .. . Рис. 16 Графики плотности распределения. Можно показать, что начальные моменты равны:. , , , , .. . Рис. 17 Области кривых Пирсона. Погрешность аппроксимации ( и ) не зависит от параметра .. Пример 8 Распределение суммы гармонического сигнала со случайной начальной фазой и нормального шума. Сумма независимых случайных процессов: гармонического колебания с равномерно распределенной начальной фазой и нормального стационарного шума с нулевым средним и дисперсией. .. Плотность распределения нормированной по случайной величины описывается формулой [8, с. 188]. , ,. где - отношение сигнал/шум по напряжению.. . Рис. 18 Графики плотности распределения. Начальные моменты рассчитываются численно по формуле. , .. . Рис. 19 Области кривых Пирсона: а) , б) , в). Пример 9 Равномерное распределение. Плотность распределения. , .. . Рис. 20 График плотности равномерного распределения. Начальные моменты [1, с. 117]. ,. . Рис. 21 Области кривых Пирсона. Погрешность аппроксимации ( и ) не зависит от параметров и распределения.. Кривая III типа.. Ограничения: , (). Уравнение [10, с. 286]:. , .. Параметры:. , , [3, с. 268].. Мода существует при .. Пример 10 Гамма-распределение. Плотность распределения [1, с. 121]. , .. Частные случаи:. при гамма-распределение совпадает с показательным;. при - с - распределением с степенями свободы;. при гамма-распределение называется распределением Эрланга с параметрами ;. при - показательно-степенное распределение с параметром. При фиксированном гамма-распределение является безгранично делимым.. . Рис. 22 Графики плотности гамма-распределения: а) 1 - показательное распределение с параметрами ; 2 – распределение Эрланга с параметрами ; б) 1 – -распределение с степенями свободы; 2 – показательно-степенное распределение с параметрами. Начальные моменты [1, с. 121]:. ,. . Рис. 23 Области кривых Пирсона: а) показательное распределение с параметрами ; б) распределение Эрланга с параметрами ; в)-распределение с степенями свободы; г) показательно-степенное распределение с параметрами .. Кривая IV типа. Ограничения: , . Уравнение:. , ,. где. , , ,. , см. формулу (12).. Знак параметра выбирается противоположным знаку момента . Нормирующий множитель. ,. где - табулированная функция.. Мода .. Кривая V типа. Ограничение: Уравнение:. , .. Параметры. , , .. Знак совпадает со знаком .. Кривая VI типа. Ограничение: . Уравнение:. , , ,. .. Здесь. , знак совпадает со знаком ;. , должно выполняться неравенство .. Пример 11 Распределение Вейбулла. Описывает случайную наработку до отказа, при которой интенсивность отказов пропорциональна времени.. Плотность распределения. , .. Стандартная форма плотности распределения при [8, с. 62]:. , .. Частные случаи при :. - интенсивность отказов уменьшается со временем, распределение относится к типу VI;. - интенсивность отказов не меняется со временем, экспоненциальное распределение (тип III);. - интенсивность отказов увеличивается со временем;. - распределение близко к нормальному;. - распределение относится к типу VI.. . Рис. 24 Графики плотности распределения Вейбулла,. Начальные моменты. ,. . Рис. 25 Области кривых Пирсона. Распределение типа VI.. Кривая VII типа. Ограничение: , . Уравнение:. , .. Параметры:. , , .. Распределение симметрично относительно . Коэффициент .. Заключение. Получены расчетные соотношения (4) для начальных моментов суммы независимых случайных величин.. Показано, что параметры , кривых Пирсона для суммы случайных величин связаны простыми соотношениями (16), (17) с соответствующими параметрами , суммируемой величины.. Приведено точное выражение для расстояния от точки, соответствующей распределению суммы случайных величин в системе координат параметров Пирсона (), до точки (0, 3), соответствующей нормальному распределению.. Получена приближенная формула (25) для оценки погрешности аппроксимации суммы случайных величин нормальным распределением.. Приведены точные и полные уравнения кривых Пирсона.. В качестве примеров найдены аппроксимации распределения суммы случайных величин, часто встречающихся в задачах статистической радиотехники.. Все полученные результаты применимы для любых случайных величин, имеющих конечные первые четыре начальных момента. Корректность выводов подтверждена численными расчетами.. Результаты настоящей работы могут найти применение при исследовании и проектировании каналов связи с входами и общи выходом, многоканальных РЛС с ФАР, многоканальных следящих измерителей и других систем, подверженных аддитивному воздействию независимых факторов..