Увеличение скорости сходимости метода конечных разностей на основе использования промежуточного решения

**Человек:** математическая модель, дифференциальные уравнения, МКР, МКЭ, конечные разности, конечные элементы, численные методы, устойчивость, n-мерные задачи, математическое моделирование

**Key words:** 519.635.4

=================================

**FastText\_KMeans\_Clean:** Уменьшение числа этих элементов за счёт увеличения дискретов не всегда может пойти на пользу решения задачи, т.к. при таком подходе, во многих случаях, происходит снижение скорости сходимости к точному решению. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2). Указанную задачу нахождения промежуточного решения, в области W, можно решить путём аппроксимации значений интеграла `f(x)` – правой части уравнения (1), последовательно вдоль линий образующих однородную сетку разбиения U, c граничными условиям G. Аппроксимацию в зависимости от вида (1), можно производить различными функциями в зависимости от физической сущности задачи, например, многочленом вида:. `a\_(0) + a\_(1)z + a\_(2)z^2 + .

**Key words part:** 1.0

=================================

**FastText\_KMeans\_Raw/:** Сложность применения МКЭ обусловлена необходимостью разбиения пространства на конечные элементы. Для сокращения времени [3] вычислений МКР при решении ДУ в некоторой области W с граничными (краевыми для физических областей и начальными для времени) условиями G применяют укрупнение шага h сетки U в области W+G.При этом происходит потеря точности решения вплоть до того, что оно становится непригодным. Таким образом, ускорение процедуры сходимости, к решению задачи с заданной точностью p , происходит за счёт более быстрого формирования некоторого промежуточного решения в области W. Из теоремы о сходимости [4] разностного решения y (x ) с шагом сетки h к точному решению u (x ) уравнения:. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2).

**Key words part:** 1.0

=================================

**FastText\_PageRank\_Clean/:** Многие из этих алгоритмов имеются в свободном доступе в виде библиотек открытого кода. Для трёхмерного пространства доступные готовые инструменты триангуляции существенно скуднее. Общее число различных сеток обычно 2–3. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2). При этом вычислительная сложность может быть оценена:. `0(n prod\_(i=1)^n N\_(i))` (3). `a\_(0) + a\_(1)z + a\_(2)z^2 + . Величина ‖y' (x ) – u (x )‖=d' между точным решением и промежуточным, ‖y0 (x ) – u (x )‖=d0 между точным решением и начальным значением.

**Key words part:** 1.0

=================================

**FastText\_PageRank\_Raw/:** Для трёхмерного пространства доступные готовые инструменты триангуляции существенно скуднее. Общее число различных сеток обычно 2–3. где: A – дифференциальный оператор; x `in` W+G (W – область решения, G – граничные условия); `f(x)` – заданная функция;. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2). При этом вычислительная сложность может быть оценена:. `0(n prod\_(i=1)^n N\_(i))` (3). `a\_(0) + a\_(1)z + a\_(2)z^2 + . Величина ‖y' (x ) – u (x )‖=d' между точным решением и промежуточным, ‖y0 (x ) – u (x )‖=d0 между точным решением и начальным значением.

**Key words part:** 1.0

=================================

**Mixed\_ML\_TR/:** Недостатком МКР является относительно невысокая скорость сходимости при значительном числе элементов подлежащих итерационным операциям (расчётам). На сегодняшний день существует ряд алгоритмов позволяющих эффективно производить триангуляцию в n -мерных пространствах. Для сокращения времени [3] вычислений МКР при решении ДУ в некоторой области W с граничными (краевыми для физических областей и начальными для времени) условиями G применяют укрупнение шага h сетки U в области W+G.При этом происходит потеря точности решения вплоть до того, что оно становится непригодным. Общее число различных сеток обычно 2–3. Таким образом, ускорение процедуры сходимости, к решению задачи с заданной точностью p , происходит за счёт более быстрого формирования некоторого промежуточного решения в области W. Из теоремы о сходимости [4] разностного решения y (x ) с шагом сетки h к точному решению u (x ) уравнения:. Указанную задачу нахождения промежуточного решения, в области W, можно решить путём аппроксимации значений интеграла `f(x)` – правой части уравнения (1), последовательно вдоль линий образующих однородную сетку разбиения U, c граничными условиям G. Аппроксимацию в зависимости от вида (1), можно производить различными функциями в зависимости от физической сущности задачи, например, многочленом вида:. Величина ‖y' (x ) – u (x )‖=d' между точным решением и промежуточным, ‖y0 (x ) – u (x )‖=d0 между точным решением и начальным значением. В работе представлен метод вычисления промежуточного решения в n - мерных задачах с граничными условиями, способствующий ускорению процесса сходимости МКР. В практической реализации этого метода число итераций, для достижения заданной невязки, было снижено в 10 – 100 раз, за счёт поиска промежуточного решения.

**Key words part:** 1.0

=================================

**MultiLingual\_KMeans/:** Недостатком МКР является относительно невысокая скорость сходимости при значительном числе элементов подлежащих итерационным операциям (расчётам). На сегодняшний день существует ряд алгоритмов позволяющих эффективно производить триангуляцию в n -мерных пространствах. Для сокращения времени [3] вычислений МКР при решении ДУ в некоторой области W с граничными (краевыми для физических областей и начальными для времени) условиями G применяют укрупнение шага h сетки U в области W+G.При этом происходит потеря точности решения вплоть до того, что оно становится непригодным. Общее число различных сеток обычно 2–3. Величина ‖y' (x ) – u (x )‖=d' между точным решением и промежуточным, ‖y0 (x ) – u (x )‖=d0 между точным решением и начальным значением. В работе представлен метод вычисления промежуточного решения в n - мерных задачах с граничными условиями, способствующий ускорению процесса сходимости МКР. В практической реализации этого метода число итераций, для достижения заданной невязки, было снижено в 10 – 100 раз, за счёт поиска промежуточного решения.

**Key words part:** 1.0

=================================

**Multilingual\_PageRank/:** Многие из этих алгоритмов имеются в свободном доступе в виде библиотек открытого кода. Таким образом, в некоторых случаях есть смысл отказаться от применения МКР в пользу МКЭ. Для пространства размерностью более трёх, например, в задачах математической физики часто встречается четырёхмерное пространство (пространственно временной континуум), таких инструментов в отрытом доступе вообще не обнаружено. Разработка собственных библиотек алгоритмов для построения диаграммы Вороного в n -мерном пространстве является достаточно трудоёмким процессом и не всегда оправданна с точки зрения затрат ресурсов. Например, в основной задаче электростатики могут быть рассмотрены электрические заряды, описанные одной единственной точкой. Общее число различных сеток обычно 2–3. `a\_(0) + a\_(1)z + a\_(2)z^2 + . Таким образом, указанный способ можно применять для существенного повышения эффективности МКР.

**Key words part:** 1.0

=================================

**RuBERT\_KMeans\_Without\_ST/:** Таким образом, в некоторых случаях есть смысл отказаться от применения МКР в пользу МКЭ. В работе представлен метод, позволяющий сократить время вычислений в МКР за счёт повышения скорости сходимости итерационного процесса, сохранив при этом простоту реализации метода для произвольного n -мерного пространства. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2). Указанную задачу нахождения промежуточного решения, в области W, можно решить путём аппроксимации значений интеграла `f(x)` – правой части уравнения (1), последовательно вдоль линий образующих однородную сетку разбиения U, c граничными условиям G. Аппроксимацию в зависимости от вида (1), можно производить различными функциями в зависимости от физической сущности задачи, например, многочленом вида:.

**Key words part:** 1.0

=================================

**RuBERT\_KMeans\_With\_ST/:** Но несмотря на все преимущества, есть ряд практических особенностей ограничивающих замену МКР во всех случаях МКЭ. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2). В общем случае, если линии сетки не параллельны координатным осям образующим пространство W, z может не совпадать с набором переменных исходной задачи. Применение представленного метода[5] в некоторых задачах для достижения заданной точности решения позволило уменьшить число итераций в 10 – 100 раз, что говорит о существенном повышении эффективности МКР.

**Key words part:** 1.0

=================================

**RUBERT\_page\_rank\_Without\_ST/:** При укрупнении сетки граничные условия могут быть потеряны, что меняет решение. Общее число различных сеток обычно 2–3. `a\_(0) + a\_(1)z + a\_(2)z^2 + . Начальные значения y 0(x ) задаются произвольно, обычно y0 = const , как в случае на изображении (рис. 2). Величина ‖y' (x ) – u (x )‖=d' между точным решением и промежуточным, ‖y0 (x ) – u (x )‖=d0 между точным решением и начальным значением.

**Key words part:** 1.0

=================================

**RUBERT\_page\_rank\_With\_ST/:** Многие из этих алгоритмов имеются в свободном доступе в виде библиотек открытого кода. Общее число различных сеток обычно 2–3. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2). При этом вычислительная сложность может быть оценена:. `a\_(0) + a\_(1)z + a\_(2)z^2 + .

**Key words part:** 1.0

=================================

**RUSBERT\_KMeans\_Without\_ST/:** Например, можно увеличить число дискретизации там где необходимо повысить точность решения, а так же практически исключить эффект ступенчатости границ. В работе представлен метод, позволяющий сократить время вычислений в МКР за счёт повышения скорости сходимости итерационного процесса, сохранив при этом простоту реализации метода для произвольного n -мерного пространства. Таким образом, ускорение процедуры сходимости, к решению задачи с заданной точностью p , происходит за счёт более быстрого формирования некоторого промежуточного решения в области W. Из теоремы о сходимости [4] разностного решения y (x ) с шагом сетки h к точному решению u (x ) уравнения:. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2).

**Key words part:** 1.0

=================================

**RUSBERT\_KMeans\_With\_ST/:** Можно сделать выбор в пользу более быстрого метода конечных элементов (МКЭ), который так же позволяет решать ДУ и даже имеет ряд преимуществ. Для сокращения времени [3] вычислений МКР при решении ДУ в некоторой области W с граничными (краевыми для физических областей и начальными для времени) условиями G применяют укрупнение шага h сетки U в области W+G.При этом происходит потеря точности решения вплоть до того, что оно становится непригодным. и условия ||y(x) - u(x)|| `->` 0, следует, что если при `h->0` и заданном порядке точности p выполнено ||y(x) - u(x)|| ` ` `0(h^p)` , то указанный метод уменьшения шага сетки h , является прямым следствием этой теоремы. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2). В качестве многочлена (4) было использовано уравнение прямой `a\_(0) + a\_(1)x` , коэффициенты которой рассчитывались по двум элементам граничных условий из G. Представленные результаты (рис. 1) показывают существенное ускорение сходимости итерационного процесса МКР.

**Key words part:** 1.0

=================================

**RUSBERT\_page\_rank\_Without\_ST/:** Таким образом, в некоторых случаях есть смысл отказаться от применения МКР в пользу МКЭ. Общее число различных сеток обычно 2–3. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2). `0(n prod\_(i=1)^n N\_(i))` (3). `a\_(0) + a\_(1)z + a\_(2)z^2 + .

**Key words part:** 1.0

=================================

**RUSBERT\_page\_rank\_With\_ST/:** Сложность применения МКЭ обусловлена необходимостью разбиения пространства на конечные элементы. Общее число различных сеток обычно 2–3. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2). `0(n prod\_(i=1)^n N\_(i))` (3). `a\_(0) + a\_(1)z + a\_(2)z^2 + .

**Key words part:** 1.0

=================================

**Simple\_PageRank/:** Уменьшение числа этих элементов за счёт увеличения дискретов не всегда может пойти на пользу решения задачи, т.к. при таком подходе, во многих случаях, происходит снижение скорости сходимости к точному решению. Для сокращения времени [3] вычислений МКР при решении ДУ в некоторой области W с граничными (краевыми для физических областей и начальными для времени) условиями G применяют укрупнение шага h сетки U в области W+G.При этом происходит потеря точности решения вплоть до того, что оно становится непригодным. Таким образом, ускорение процедуры сходимости, к решению задачи с заданной точностью p , происходит за счёт более быстрого формирования некоторого промежуточного решения в области W. Из теоремы о сходимости [4] разностного решения y (x ) с шагом сетки h к точному решению u (x ) уравнения:. аппроксимации промежуточного решения в области W, по имеющимся данным о граничных условиях G, с учётом правой части (1). Указанную задачу нахождения промежуточного решения, в области W, можно решить путём аппроксимации значений интеграла `f(x)` – правой части уравнения (1), последовательно вдоль линий образующих однородную сетку разбиения U, c граничными условиям G. Аппроксимацию в зависимости от вида (1), можно производить различными функциями в зависимости от физической сущности задачи, например, многочленом вида:. В качестве многочлена (4) было использовано уравнение прямой `a\_(0) + a\_(1)x` , коэффициенты которой рассчитывались по двум элементам граничных условий из G. Представленные результаты (рис. 1) показывают существенное ускорение сходимости итерационного процесса МКР.

**Key words part:** 1.0

=================================

**TextRank/:** Для сокращения времени [3] вычислений МКР при решении ДУ в некоторой области W с граничными (краевыми для физических областей и начальными для времени) условиями G применяют укрупнение шага h сетки U в области W+G.При этом происходит потеря точности решения вплоть до того, что оно становится непригодным. Таким образом, ускорение процедуры сходимости, к решению задачи с заданной точностью p , происходит за счёт более быстрого формирования некоторого промежуточного решения в области W. Из теоремы о сходимости [4] разностного решения y (x ) с шагом сетки h к точному решению u (x ) уравнения:. Указанную задачу нахождения промежуточного решения, в области W, можно решить путём аппроксимации значений интеграла `f(x)` – правой части уравнения (1), последовательно вдоль линий образующих однородную сетку разбиения U, c граничными условиям G. Аппроксимацию в зависимости от вида (1), можно производить различными функциями в зависимости от физической сущности задачи, например, многочленом вида:. В определённом смысле можно говорить, что для нахождения некоторого промежуточного решения задача МКР разбивается на множество одномерных задач МКЭ, равное числу линий сетки МКР. На Рис. 2 показаны точки A ,B ,C `in` G – элементы граничных условий, u (x ) – точное решение, y '(x ) – промежуточное решение и начальные значения y 0(x ). В работе представлен метод вычисления промежуточного решения в n - мерных задачах с граничными условиями, способствующий ускорению процесса сходимости МКР.

**Key words part:** 1.0

=================================

**TF-IDF\_KMeans/:** Таким образом, в некоторых случаях есть смысл отказаться от применения МКР в пользу МКЭ. В работе представлен метод, позволяющий сократить время вычислений в МКР за счёт повышения скорости сходимости итерационного процесса, сохранив при этом простоту реализации метода для произвольного n -мерного пространства. При этом каждое уточнение решения является итерационным, имеющее вычислительную сложность:. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2). В случае n – мерной (n > 1) задачи, интегрирование необходимо производить последовательно для всех линий образующих сетку в каждом направлении с последующей оценкой средних значений для каждого узла сетки. Ускорение итерационного процесса будет зависеть от значения в области решения W величины ‖y' (x ) – u (x )‖. На Рис. 2 показаны точки A ,B ,C `in` G – элементы граничных условий, u (x ) – точное решение, y '(x ) – промежуточное решение и начальные значения y 0(x ). Строгое математическое доказательство возможности аппроксимации функции u (x ) функцией y '(x ), и в частности, алгебраическим полиномом (4) приведено в [6].

**Key words part:** 1.0

=================================

**Текст:** Недостатком МКР является относительно невысокая скорость сходимости при значительном числе элементов подлежащих итерационным операциям (расчётам). Уменьшение числа этих элементов за счёт увеличения дискретов не всегда может пойти на пользу решения задачи, т.к. при таком подходе, во многих случаях, происходит снижение скорости сходимости к точному решению. Можно сделать выбор в пользу более быстрого метода конечных элементов (МКЭ), который так же позволяет решать ДУ и даже имеет ряд преимуществ. Например, можно увеличить число дискретизации там где необходимо повысить точность решения, а так же практически исключить эффект ступенчатости границ. При этом МКЭ в большинстве случаев обеспечивает существенно более высокую скорость решения задачи по сравнению с МКР. Сложность применения МКЭ обусловлена необходимостью разбиения пространства на конечные элементы. На сегодняшний день существует ряд алгоритмов позволяющих эффективно производить триангуляцию в n -мерных пространствах. Многие из этих алгоритмов имеются в свободном доступе в виде библиотек открытого кода. Таким образом, в некоторых случаях есть смысл отказаться от применения МКР в пользу МКЭ. Но несмотря на все преимущества, есть ряд практических особенностей ограничивающих замену МКР во всех случаях МКЭ. К таким особенностям можно отнести, то что, большинство алгоритмов и программ предназначены для триангуляции в двумерном пространстве. Для трёхмерного пространства доступные готовые инструменты триангуляции существенно скуднее. Для пространства размерностью более трёх, например, в задачах математической физики часто встречается четырёхмерное пространство (пространственно временной континуум), таких инструментов в отрытом доступе вообще не обнаружено. Разработка собственных библиотек алгоритмов для построения диаграммы Вороного в n -мерном пространстве является достаточно трудоёмким процессом и не всегда оправданна с точки зрения затрат ресурсов.. В работе представлен метод, позволяющий сократить время вычислений в МКР за счёт повышения скорости сходимости итерационного процесса, сохранив при этом простоту реализации метода для произвольного n -мерного пространства.. Для сокращения времени [3] вычислений МКР при решении ДУ в некоторой области W с граничными (краевыми для физических областей и начальными для времени) условиями G применяют укрупнение шага h сетки U в области W+G.При этом происходит потеря точности решения вплоть до того, что оно становится непригодным. Например, в основной задаче электростатики могут быть рассмотрены электрические заряды, описанные одной единственной точкой. При укрупнении сетки граничные условия могут быть потеряны, что меняет решение. Поэтому обычным является решение, основанное на использовании нескольких сеток: первоначально применяется самая крупная U1, получая приближение решения, затем решение уточняют, последовательно применяя сетки с меньшим шагом Uk, k > 1. Общее число различных сеток обычно 2–3. Отметим, что, вообще говоря, шаг сетки h может быть различным в разных направлениях и областях сеткиU. Таким образом, ускорение процедуры сходимости, к решению задачи с заданной точностью p , происходит за счёт более быстрого формирования некоторого промежуточного решения в области W.. Из теоремы о сходимости [4] разностного решения y (x ) с шагом сетки h к точному решению u (x ) уравнения:. `Au(x) = f(x)` (1). где: A – дифференциальный оператор; x `in` W+G (W – область решения, G – граничные условия); `f(x)` – заданная функция;. и условия ||y(x) - u(x)|| `->` 0, следует, что если при `h->0` и заданном порядке точности p выполнено ||y(x) - u(x)|| ` ` `0(h^p)` , то указанный метод уменьшения шага сетки h , является прямым следствием этой теоремы. При этом каждое уточнение решения является итерационным, имеющее вычислительную сложность:. `0(k prod\_(i=1)^n N\_(i))` (2). где: n – размерность рассматриваемой задачи, Ni – число узлов сетки в каждом направлении, k – число итераций, обеспечивающее заданную точность на данном этапе. В многомерных задачах (особенно) указанная величина (2) может иметь очень большие значения даже при разряженной сетке.. . аппроксимации промежуточного решения в области W, по имеющимся данным о граничных условиях G, с учётом правой части (1). При этом вычислительная сложность может быть оценена:. `0(n prod\_(i=1)^n N\_(i))` (3). где: обычно n <<k , причём n и k имеют тот же смысл, что и в (2).. Указанную задачу нахождения промежуточного решения, в области W, можно решить путём аппроксимации значений интеграла `f(x)` – правой части уравнения (1), последовательно вдоль линий образующих однородную сетку разбиения U, c граничными условиям G. Аппроксимацию в зависимости от вида (1), можно производить различными функциями в зависимости от физической сущности задачи, например, многочленом вида:. `a\_(0) + a\_(1)z + a\_(2)z^2 + ... + a\_(p)z^p` (4). В общем случае, если линии сетки не параллельны координатным осям образующим пространство W, z может не совпадать с набором переменных исходной задачи. В этом случае необходимо учитывать поворот системы координат, в которых рассмотрен аргумент z , относительно исходной системы координат. В случае n – мерной (n > 1) задачи, интегрирование необходимо производить последовательно для всех линий образующих сетку в каждом направлении с последующей оценкой средних значений для каждого узла сетки. Среднее значение узла сетки вычисляется как среднее значений аппроксимации в точках линий сетки принадлежащих данному узлу. В определённом смысле можно говорить, что для нахождения некоторого промежуточного решения задача МКР разбивается на множество одномерных задач МКЭ, равное числу линий сетки МКР.. Предлагаемый метод исследовался на примере решения уравнений Лапласа ∆u = 0 в декартовой системе координат с числом измерений n = 2 и n = 3 (рис. 1) .. . Рис. 1. Значения логарифмов суммарных невязок по всем узлам сетки,в зависимости от номера итерации для случая с поиском предварительного решения и без поиска предварительного решения в двумерном пространстве.. В качестве разбиения области W была выбрана прямоугольная сетка (образованная линиями параллельными координатным осям) с равным во всех направлениях шагом h. В качестве многочлена (4) было использовано уравнение прямой `a\_(0) + a\_(1)x` , коэффициенты которой рассчитывались по двум элементам граничных условий из G.. Представленные результаты (рис. 1) показывают существенное ускорение сходимости итерационного процесса МКР.. Применение представленного метода[5] в некоторых задачах для достижения заданной точности решения позволило уменьшить число итераций в 10 – 100 раз, что говорит о существенном повышении эффективности МКР.. Устойчивость МКР, для ДУ, в частности для уравнения Лапласа, показана в [2-4].. Представленный метод способствует сходимости МКР, путём нахождения некоторого промежуточного решения y '(x ). Ускорение итерационного процесса будет зависеть от значения в области решения W величины ‖y' (x ) – u (x )‖. Чем меньше эта величина, тем ближе мы к точному решению, и тем меньше итераций требуется для уточнения решения (снижения невязки до некоторой заданной величины). Промежуточное решение y' (x ) будет зависеть от способа аппроксимации. На Рис. 2 показаны точки A ,B ,C `in` G – элементы граничных условий, u (x ) – точное решение, y '(x ) – промежуточное решение и начальные значения y 0(x ). Области между элементами множества G, принадлежат области W – в которой необходимо отыскать решение. Начальные значения y 0(x ) задаются произвольно, обычно y0 = const , как в случае на изображении (рис. 2). Величина ‖y' (x ) – u (x )‖=d' между точным решением и промежуточным, ‖y0 (x ) – u (x )‖=d0 между точным решением и начальным значением.. Строгое математическое доказательство возможности аппроксимации функции u (x ) функцией y '(x ), и в частности, алгебраическим полиномом (4) приведено в [6].. . Строгое математическое доказательство возможности аппроксимации функции u (x ) функцией y '(x ), и в частности, алгебраическим полиномом (4) приведено в [6].. В работе представлен метод вычисления промежуточного решения в n - мерных задачах с граничными условиями, способствующий ускорению процесса сходимости МКР. В практической реализации этого метода число итераций, для достижения заданной невязки, было снижено в 10 – 100 раз, за счёт поиска промежуточного решения. Таким образом, указанный способ можно применять для существенного повышения эффективности МКР.