

Семинар 3

по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.09.22

Задание 1

Условие

Пусть X - число событий за время $[0; 1]$ в пуассоновском потоке с интенсивностью λ , а Y - число событий в том же потоке за время $[0; 10]$. Найдите $Cov(X; Y)$ и $Corr(X, Y)$.

Решение

Так как X и Y находятся в одном потоке, а интервалы времени равны 1 и 10 соответственно, то величины имеют распределения:

$$\begin{cases} X \sim Pois(\lambda) \\ Y \sim Pois(10 \cdot \lambda) \end{cases}$$

Пусть Z - число событий за время $[1; 10]$ в том же потоке. Тогда:

$$Y = X + Z$$

, причём X и Z независимы в силу предпосылки об отсутствии последствия. Значит:

$$Cov(X; Y) = Cov(X; X + Z) = Cov(X; X) + Cov(X; Z) = D[X] + 0 = \lambda$$

$$Corr(X; Y) = \frac{Cov(X; Y)}{\sqrt{D[X] \cdot D[Y]}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda \cdot 10\lambda}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Ответ

$$Cov(X; Y) = \lambda$$

$$Corr(X; Y) = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Задание 2

Условие

Пусть $X \sim Pois(0.8)$.

а) Найдите $\mathbf{P}\{X \geq 1\}$.

б) Что больше - $\mathbf{P}\{\text{чётные } X\}$ или $\mathbf{P}\{\text{нечётные } X\}$?

Решение

а)

$$\mathbf{P}\{X \geq 1\} = 1 - \mathbf{P}\{X=0\} = 1 - \frac{0.8^0}{0!} \cdot e^{-0.8} = 1 - e^{-0.8}$$

б)

$$\mathbf{P}\{X=2 \cdot k\} - \mathbf{P}\{X=2 \cdot k+1\} = \frac{\lambda^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} \cdot e^{-\lambda} - \frac{\lambda^{2 \cdot k+1}}{(2 \cdot k+1)!} \cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^{2 \cdot k} \cdot (2 \cdot k+1 - \lambda)}{(2 \cdot k+1)!} > 0 \quad \forall k \geq 0$$

Ответ

а) $\mathbf{P}\{X \geq 1\} = 1 - e^{-0.8}$

б) $\mathbf{P}\{\text{чётные } X\} > \mathbf{P}\{\text{нечётные } X\}$

Задание 3

Условие

Запросы поступают пуассоновским потоком с интенсивностью 3 в секунду. Обработка каждого запроса занимает ровно секунду.

а) Какова вероятность, что к моменту $t=2$ ни один запрос не будет обработан?

б) За время $[0; 2]$ поступило 5 запросов. Какова вероятность, что не один из них не будет обработан?

Решение

а) Вероятность того, что за t минут ни один запрос не будет обработан, равна вероятности того, что ни один запрос не поступит за $(t-1)$ минут.

$$X \sim \text{Pois}(\lambda \cdot t)$$

$$\mathbf{P}\{X=0\} = e^{-\lambda \cdot t} = e^{-3}$$

б) Вероятность того, что ни один из n запросов, поступивших в систему в течение t минут, не будет обработан, равна вероятности того, что за $(t-1)$ минут в систему не поступил ни один запрос, при условии, что за t минут в систему поступило 5 запросов.

$$\begin{cases} X \sim \text{Pois}(\lambda \cdot (t-1)) & - \text{количество запросов в системе в промежутке } [0; t-1] \\ Y \sim \text{Pois}(\lambda \cdot t) & - \text{количество запросов в системе в промежутке } [0; t] \\ Z \sim \text{Pois}(\lambda) & - \text{количество запросов в системе в промежутке } [t-1; t] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\{X=0\} | \{Y=n\}\right) &= \frac{\mathbf{P}\left(\{X=0\} \cap \{Y=n\}\right)}{\mathbf{P}\{Y=n\}} = \frac{\text{по предпосылке об}}{\text{отсутствии последействия}} = \\ &= \frac{\mathbf{P}\{X=0\} \cdot \mathbf{P}\{Z=n\}}{\mathbf{P}\{Y=n\}} = \frac{e^{-\lambda \cdot (t-1)} \cdot \lambda^n / n! \cdot e^{-\lambda}}{(\lambda \cdot t)^n / n! \cdot e^{-\lambda \cdot t}} = \frac{1}{t^n} = \frac{1}{2^5} \end{aligned}$$

Ответ

а) $e^{-\lambda \cdot t} = e^{-3}$

б) $\frac{1}{t^n} = \frac{1}{2^5}$

Задание 4

Условие

В некоторой местности число детей в семье распределено по закону Пуассона. Найдите среднее число детей в семье, если доля бездетных семей составляет 20%.

Решение

Пусть X – число детей в семье:

$$X \sim Pois(\lambda)$$

Доля бездетных составляет 20%, то есть если из всех семей случайно выбрать одну, то вероятность, что она будет бездетная, будет равна 0.2:

$$\mathbf{P}\{X=0\} = 0.2$$

$$e^{-\lambda} = 0.2$$

$$\lambda = -\ln(0.2)$$

Среднее число детей в семье равно:

$$E[X] = \lambda = -\ln(0.2)$$

Ответ

$$-\ln(0.2)$$

Задание 5

Условие

Рассмотрим когорту новорождённых, которые со временем взрослеют и умирают. Пусть $S(t)$ – доля доживших до возраста t , $S(0)=1$. Функция $\lambda(t) = -\frac{dS/dt}{S(t)}$ называется силой (или интенсивностью) смертности. Бенджамин Гомперц предположил, что она экспоненциально растёт:

$$\lambda(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$$

Выведите функцию должития $S(t)$, соответствующую указанной силе смертности $\lambda(t)$.

Решение

$$-\frac{dS/dt}{S(t)} = a \cdot e^{b \cdot t}$$

$$-\frac{dS}{S(t)} = a \cdot e^{b \cdot t} \cdot dt$$

$$\int -\frac{dS}{S(t)} = \int a \cdot e^{b \cdot t} \cdot dt + C$$

$$-\ln |S(t)| = \frac{a}{b} \cdot e^{b \cdot t} + C$$

$$S(t) = |S(t)| = \exp\left(-\frac{a}{b} \cdot e^{b \cdot t} + C\right) \quad \text{-- общее решение}$$

Из начальных условий:

$$1 = S(0) = \exp\left(-\frac{a}{b} \cdot e^{b \cdot 0} + C\right)$$

$$0 = -\frac{a}{b} + C$$

$$C = \frac{a}{b}$$

Частное решение:

$$S(t) = \exp\left((1 - e^{b \cdot t}) \cdot \frac{a}{b}\right)$$

Ответ

$$S(t) = \exp((1 - e^{b \cdot t}) \cdot a / b)$$

Задание 6

Условие

Решите дифференциальное уравнение:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - 2 \cdot y = 2 \cdot x^4$$

Решение

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\left(-\frac{2}{x}\right)}_{a(x)} \cdot y = \underbrace{2 \cdot x^3}_{f(x)}$$

Интегрирующий множитель:

$$u(x) = e^{\int a(x) \cdot dx} = e^{\int \left(-\frac{2}{x}\right) \cdot dx} = e^{-2 \cdot \ln|x|} = \frac{1}{x^2}$$

Тогда:

$$y = \frac{\int f(x) \cdot u(x) \cdot dx + C}{u(x)} = \frac{\int 2 \cdot x^3 \cdot (1/x^2) \cdot dx + C}{(1/x^2)} = \frac{\int 2 \cdot x \cdot dx + C}{(1/x^2)} = x^2 \cdot (x^2 + C)$$

Ответ

$$y = x^2(x^2 + C)$$

Задание 7

Условие

Решите дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2}{3t}$$

Найдите стационарное решение. Сходятся ли нестационарные решения к стационарному?

Решение

Сначала найдём стационарное решение ($y(t) = C$):

$$0 = \frac{C^2}{3t}$$

Уравнение обращается в тождество только при $C = 0$, то есть стационарное решение имеет вид:

$$y(t) = 0$$

Теперь найдём общее решение. Обособленное решение:

$$y(t) = 0$$

Отбросим это решение:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y^2} &= \frac{dt}{3t} \\ \int \frac{dy}{y^2} &= \int \frac{dt}{3t} + C \\ -\frac{1}{y} &= \frac{\ln|t|}{3} + C \\ y &= -\frac{1}{\ln|t|/3 + C} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

Ответ

Стационарное решение:

$$y(t) = 0$$

Решение в общем виде (сходится к стационарному):

$$y(t) = \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{\ln|t|/3 + C} \end{cases}$$