Лекция 6

Марковские цепи в непрерывном времени

Напоминалка: случайные процессы

Случайный процесс – это семейство случайных величин $\{X(t),\ \ t \in T\}$, заданных на некотором *пространстве параметров* T. Иногда вместо $X(t)$ пишут X_t.

Случайные процессы – способ описание динамики случайного признака.
$X(t)$ - значение признака в момент t.

Возможные значения $X(t)$ называются *состояниями* процесса.
Их множество – *пространство состояний*.

Пример. $N(t)$ – число заявок в системе во время t.

Пространство состояний: {0, 1, 2, …, макс. допустимое число заявок}
или {0, 1, 2, …} для систем с неограниченной ёмкостью.

Пространство параметров зависит от конкретной модели.
Часто $T = \{t: 0 \leq t < +\infty\}$ (процесс в непрерывном времени)
Или так: $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ (процесс в дискретном времени)

stochastic process – случайный процесс
state space – пространство состояний,
parameter space – пространство параметров.

Напоминалка: цепи Маркова в дискретном времени

Последовательность дискретных случайных величин $\{X_t\}, t = 0, 1, 2, \ldots$ называется цепью Маркова с дискретным пространством параметров, если

$$P(X_t = j | \{X_0 = i_0\} \cap \{X_1 = i_1\} \cap \cdots \cap \{X_{t-1} = i_{t-1}\}) = P(X_t = j | X_{t-1} = i_{t-1}) \quad \forall t, i_0, \ldots, i_t.$$

Если величина X_t принимает значение j, то говорят, что цепь находится в состоянии j после t шагов (или в момент t).

$P(X_t = j | X_{t-1} = i)$ - *вероятности перехода* (за один шаг).

Если вероятности перехода не зависят от t, цепь называют *однородной*.

У нас будут только однородные цепи Маркова, так что

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i) = p_{ij}.$$

homogeneous Markov chain – однородная цепь Маркова,
transition probabilities – вероятности перехода.

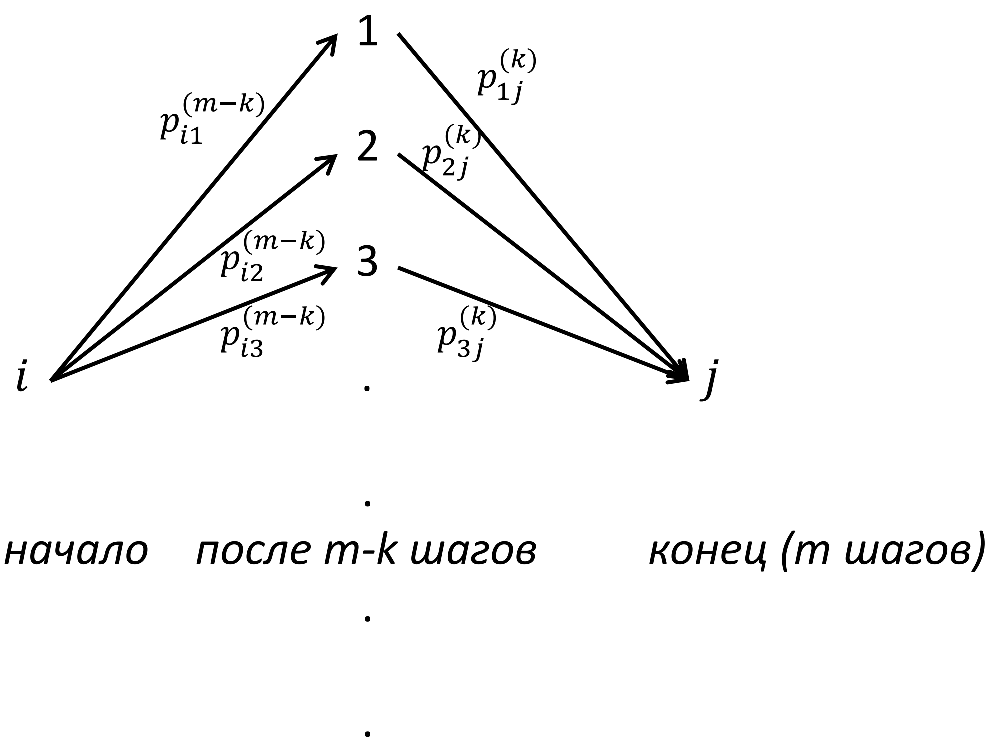
Уравнения Колмогорова-Чепмена

Вероятности перехода за m шагов:

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_{t+m} = j | X_t = i)$$

Уравнения Колмгорова-Чепмена:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{s \in S} p_{is}^{(m-k)} p_{sj}^{(k)}, \qquad 0 < k < m.$$



Напоминалка: начальное распределение и матрица переходов

Пусть $p_j^{(t)}$ – вероятность, что в момент t цепь находится в состоянии j:

$$p_j^{(t)} = P(X_t = j)$$

Не путайте с вероятностями перехода $p_{ij}^{(m)}$ – у них два нижних индекса!

Можно найти $p_j^{(t)}$ для каждого состояния j и момента t с помощью уравнений Колмогорова-Чепмена, если знать:

- начальное распределение $\begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ \dots \end{pmatrix}$;
- вероятности переходов $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

Заметьте: $\sum_{s \in S} p_{is} = 1, i \in S$

Итак, распределение всей цепи Маркова определяется вектором начальных вероятностей и матрицей переходных вероятностей.

Они могут иметь бесконечную размерность!

Цепь Маркова в непрерывном времени: определение

Случайный процесс $\{X(t)\}, t \in [0;\ \infty)$ с дискретным пространством состояний S называют цепью Маркова, если

$$P(X(t_n) = j | \{X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} \cap \dots \cap \{X(t_1) = i_1\}) = P(X(t_n) = j | X(t_{n-1}) = i_{t-1})$$

для любого набора $t_1 < t_2 < \dots < t_n, t_i \in [0;\ \infty)$,
для любых состояний $j, i_0, \dots, i_{n-1} \in S$.

Всё как в дискретном времени, но без отдельных «шагов».

Всё ещё есть вероятности переходов

$$p_{ij}(m) = P(X(t+m) = j | X(t) = i),$$

Уравнения Колмогорова-Чепмена в силе:

$$p_{ij}(m) = \sum_{s \in S} p_{is}(m-k) p_{sj}(k),$$

но нет особого интереса к вероятностям «одношаговых» переходов $p_{ij}(1)$.

Вместо фиксированных шагов будут бесконечно малые интервалы.

Интенсивности переходов

Рассмотрим бесконечно малый интервал Δ. Предпосылки:

- Вероятность более одного перехода за Δ единиц времени равна $o(\Delta)$

- Вероятность перехода из состояния i в состояние j ($i \neq j$) равна

$$p_{ij}(\Delta) = q_{ij}\Delta + o(\Delta),$$

где $q_{ij} \geq 0$ – *интенсивность перехода*.

- Вероятность остаться в i:

$$p_{ii}(\Delta) = 1 - \sum_{j \neq i} q_{ij}\Delta + o(\Delta) = 1 + q_{ii}\Delta + o(\Delta),$$

где $q_{ii} = -\sum_{j \neq i} q_{ij} \leq 0$.

Матрица интенсивностей переходов: $\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots \\ q_{21} & q_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

- диагональные элементы неположительные,
- недиагональные элементы неотрицательные,
- сумма по строке – 0.

Любая квадратная матрица с этими свойствами м.б. матрицей интенсивностей переходов.

Распределение в произвольный момент времени

Пусть у нас есть

- начальные вероятности $\begin{pmatrix} p_1\ (0) \\ p_2\ (0) \\ \dots \end{pmatrix}$,
- матрица интенсивностей переходов $\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots \\ q_{21} & q_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

Цель – найти вероятность оказаться в состоянии j в момент t:

$$p_j(t) = P(X(t) = j)$$

Распределение в произвольный момент времени

Цель – найти вероятность оказаться в состоянии j в момент t:

$$p_j(t) = P(X(t) = j)$$

Рассмотрим момент $t + \Delta$.

Цепь может находиться в j в момент $t + \Delta$, если:

цепь была в состоянии 1 в момент t, случился один переход $1 \to j$;

вероятность: $q_{1j}\Delta + o(\Delta)$;

цепь была в состоянии 2 в момент t, случился один переход $2 \to j$;

вероятность: $q_{2j}\Delta + o(\Delta)$;

…

цепь была в состоянии j в момент t, не было переходов;

вероятность: $1 + q_{ii}\Delta + o(\Delta)$;

…

более одного перехода с вероятностью $o(\Delta)$.

Отсюда:

$$p_j(t + \Delta) = (1 + q_{ii}\Delta)p_j(t) + \sum_{i \neq j} q_{ij}\Delta p_i(t) + o(\Delta) = p_j(t) + \Delta \sum_i q_{ij} p_i(t) + o(\Delta).$$

Распределение в произвольный момент: уравнения Колмогорова

Имеем:

$$p_j(t+\Delta) = p_j(t) + \Delta \sum_i q_{ij} p_i(t) + o(\Delta).$$

Перейдём к разностям:

$$p_j(t+\Delta) - p_j(t) = \Delta \sum_i q_{ij} p_i(t) + o(\Delta).$$

Распределение в произвольный момент: уравнения Колмогорова

Имеем:

$$p_j(t+\Delta) = p_j(t) + \Delta \sum_i q_{ij} p_i(t) + o(\Delta).$$

Перейдём к разностям:

$$p_j(t+\Delta) - p_j(t) = \Delta \sum_i q_{ij} p_i(t) + o(\Delta).$$

А теперь так:

$$\frac{p_j(t+\Delta) - p_j(t)}{\Delta} = \sum_i q_{ij} p_i(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta}.$$

Распределение в произвольный момент: уравнения Колмогорова

Имеем:

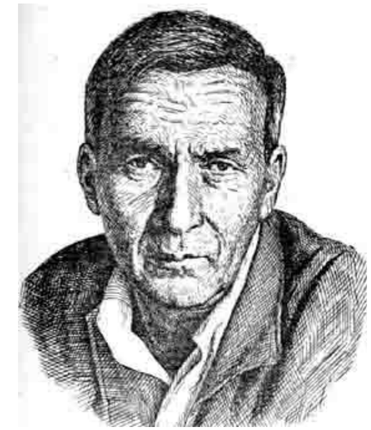
$$p_j(t+\Delta) = p_j(t) + \Delta \sum_i q_{ij} p_i(t) + o(\Delta).$$

Перейдём к разностям:

$$p_j(t+\Delta) - p_j(t) = \Delta \sum_i q_{ij} p_i(t) + o(\Delta).$$

А теперь так:

$$\frac{p_j(t+\Delta) - p_j(t)}{\Delta} = \sum_i q_{ij} p_i(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta}.$$



Андрей Николаевич
Колмогоров

Переходим к пределу и получаем дифференциальные уравнения :

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{p_j(t+\Delta) - p_j(t)}{\Delta} = \sum_i q_{ij} p_i(t), \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Это – *уравнения Колмогорова*.
Их решение – распределение цепи Маркова в любой момент t *(если* $\sum_j p_j = 1$*)*

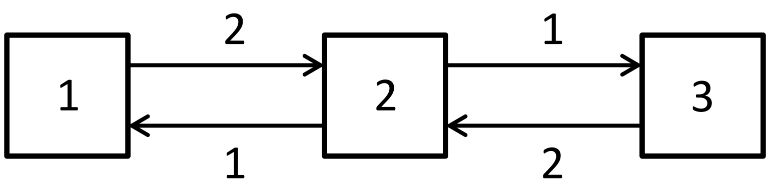
Их стационарное решение (такое что $dp_j(t)/dt = 0$) есть вектор вероятностей в стационарном режиме.

Пример

Вот матрица интенсивностей переходов для цепи Маркова:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Графическое представление:



Уравнения Колмогорова: $$\frac{dp_1(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{3} q_{i1} p_i(t) = -2p_1(t) + p_2(t);$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{3} q_{i2} p_i(t) = 2p_1(t) - 2p_2(t) + 2p_3(t);$$

$$\frac{dp_3(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{3} q_{i3} p_i(t) = p_2(t) - 2p_3(t).$$

А ещё мы знаем, что $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1.$

Пример

Найдём стационарное решение: $p_j(t) = p_j(s) = p_j,\ \dfrac{dp_j(t)}{dt} = 0.$

Получаем систему:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -2p_1(t) + p_2(t) = -2p_1 + p_2 = 0;$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt} = 2p_1(t) - 2p_2(t) + 2p_3(t) = 2p_1 - 2p_2 + 2p_3 = 0;$$
$$\frac{dp_3(t)}{dt} = p_2(t) - 2p_3(t) = p_2 - 2p_3 = 0.$$

С виду легко.

Пример

Найдём стационарное решение: $p_j(t) = p_j(s) = p_j,\ \dfrac{dp_j(t)}{dt} = 0.$

Получаем систему:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -2p_1(t) + p_2(t) = -2p_1 + p_2 = 0;$$
$$\frac{dp_2(t)}{dt} = 2p_1(t) - 2p_2(t) + 2p_3(t) = 2p_1 - 2p_2 + 2p_3 = 0;$$
$$\frac{dp_3(t)}{dt} = p_2(t) - 2p_3(t) = p_2 - 2p_3 = 0.$$

С виду легко. На самом деле тоже легко.

$$p_2 = 2p_1 = 2p_3.$$

Стационарное распределение:

$$p_1 = 0.25,\ p_2 = 0.5,\ p_3 = 0.25.$$

Время между переходами

Пусть цепь находится в состоянии *i*.
Нас интересует время до выхода из этого состояния (*T*).

$$G_T(t) = P(T > t) = P(\text{ни одного перехода за } t \text{ единиц времени})$$

Можно выразить и так:

$$G(t+\Delta) = G(t)P(\text{ни одного перехода за } \Delta \text{ единиц времени}) = G(t)\big(1 + q_{ii}\Delta + o(\Delta)\big) =$$
$$= G(t) + q_{ii}\Delta + o(\Delta).$$

Или так:

$$\frac{G(t+\Delta) - G(t)}{\Delta} = q_{ii}G(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta}.$$

$$\frac{dG(t)}{dt} = q_{ii}G(t).$$

Это уравнение с разделяющимися переменными.

Время между переходами

$$\frac{dG(t)}{dt} = q_{ii} G(t).$$

Разделяем:

$$\frac{1}{G(t)} dG(t) = q_{ii} dt$$

Интегрируем:

$$\ln G(t) = q_{ii} + C$$

Общее решение:

$$G(t) = \exp(q_{ii} t + C)$$

Начальное условие:

$$G(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Частное решение:

$$G(t) = \exp(q_{ii} t)$$

Вывод. Время между переходами распределено экспоненциально с параметром масштаба

$$-q_{ii} = \sum_{i \neq j} q_{ij}.$$

Система $M/M/1/1$

В системе один канал обслуживания. Когда поступает заявка, система блокируется и все последующие заявки получают отказ, пока не закончится обслуживание. Время обслуживания распределено экспоненциально с параметром масштаба μ (интенсивность обслуживания).

Заявки поступают пуассоновским потоком с интенсивностью λ.

Что мы сделаем:

- представим СМО как цепь Маркова;
- найдём вероятности простоя и занятости в стационарном режиме;
- найдём вероятности простоя и занятости в переходном периоде.

Система $M/M/1/1$

В системе один канал обслуживания. Когда поступает заявка, система блокируется и все последующие заявки получают отказ, пока не закончится обслуживание. Время обслуживания распределено экспоненциально с параметром масштаба μ (интенсивность обслуживания).

Заявки поступают пуассоновским потоком с интенсивностью λ.

Что мы сделаем:

- представим СМО как цепь Маркова;
- найдём вероятности простоя и занятости в стационарном режиме;
- найдём вероятности простоя и занятости в переходном периоде.

Описание. $N(t)$ = number in the system = number of customer at service.
Пространство параметров: [0; ∞)
Пространство состояний: {0 – свободна, 1 – занята}.

Вероятности переходов за бесконечно малое время:

$$p_{01}(\Delta) = P(1\text{ or more arrivals in }\Delta\text{ units of time and no completions}) = \lambda\Delta + o(\Delta);$$
$$p_{10}(\Delta) = P(1\text{ or more completions in }\Delta\text{ units of time and no arrivals}) = \mu\Delta + o(\Delta).$$

Заслуживает пояснения!

Система $M/M/1/1$

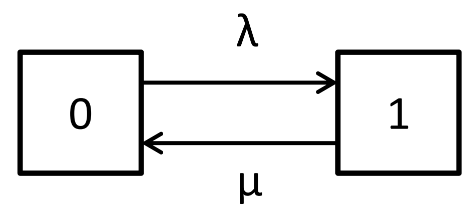
Пространство состояний: {0 – свободна, 1 – занята}.

Вероятности переходов за бесконечно малое время:

$$p_{01}(\Delta) = P(1\text{ or more arrivals in }\Delta\text{ units of time and no completions}) = \lambda\Delta + o(\Delta);$$
$$p_{10}(\Delta) = P(1\text{ or more completions in }\Delta\text{ units of time and no arrivals}) = \mu\Delta + o(\Delta).$$

Интенсивности переходов:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \end{array}$$



Заметьте: время ожидания заявки экспоненциальное, как и нужно.

Уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t); \\ p_0(t) + p_1(t) = 1. \end{cases}$$

Система $M/M/1/1$

Уравнения Колмогорова:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t); \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = \lambda p_0(t) - \mu p_1(t); \\ p_0(t) + p_1(t) = 1. \end{cases}$$

В стационарном режиме $dp_j(t)/dt = 0,\ p_j(t) = p_j$:

$$\begin{cases} -\lambda p_0 + \mu p_1 = 0; \\ \lambda p_0 - \mu p_1 = 0; \\ p_0 + p_1 = 1. \end{cases}$$

Решение: $p_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu},\ p_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}.$ <- это стационарное распределение.

Не сложно получить и переходное решение.

Система $M/M/1/1$

Нам потребуются начальные вероятности: $p_0(0),\ p_1(0).$

Они послужат начальными условиями для уравнений Колмогорова.

Возьмём первое уравнение:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) = -\lambda p_0(t) + \mu - \mu p_0(t)$$

В стандартной для линейного уравнения форме $y'(t) + a(y)y(t) = f(t)$:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} + (\lambda + \mu)\, p_0(t) = \mu.$$

Интегрирующий множитель: $u(t) = \exp\left(\int a(t)dt\right) = \exp\left(\int (\lambda+\mu)dt\right) = e^{(\lambda+\mu)t}.$

Умножаем:

$$\frac{d}{dt}\left[p_0(t)e^{(\lambda+\mu)t}\right] = \mu e^{(\lambda+\mu)t}.$$

Интегрируем:

$$p_0(t)e^{(\lambda+\mu)t} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t} + C.$$

Система *M*/*M*/1/1

$$p_0(t)e^{(\lambda+\mu)t} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{(\lambda+\mu)t} + C.$$

Общее решение:

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + Ce^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Начальное условие:

$$p_0(0) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + Ce^{-(\lambda+\mu)0} = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + C \quad \Rightarrow \quad C = p_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}.$$

Частное решение:

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(p_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)t};$$

$$p_1(t) = 1 - p_0(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \left(p_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)e^{-(\lambda+\mu)t}.$$

Предельное распределение:

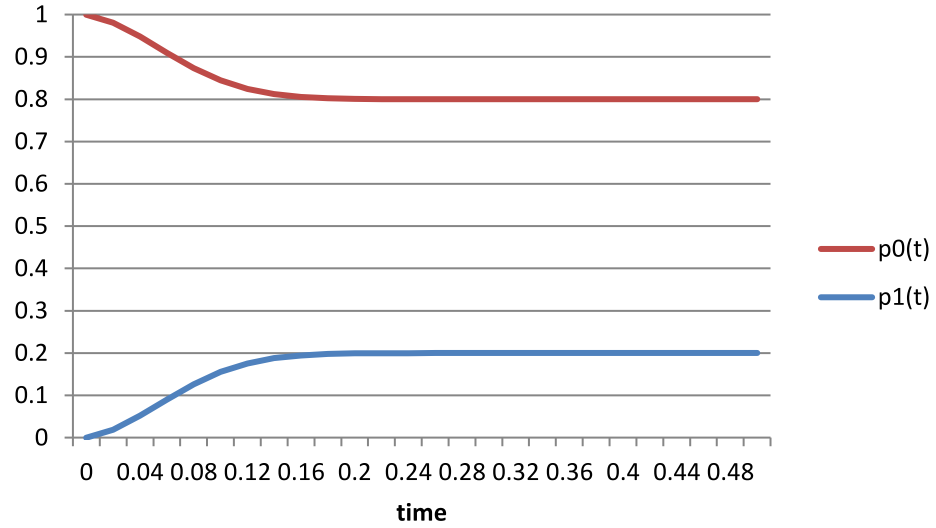
$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}; \quad \lim_{t\to\infty} p_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Совпадает со стационарным – процесс эргодический.

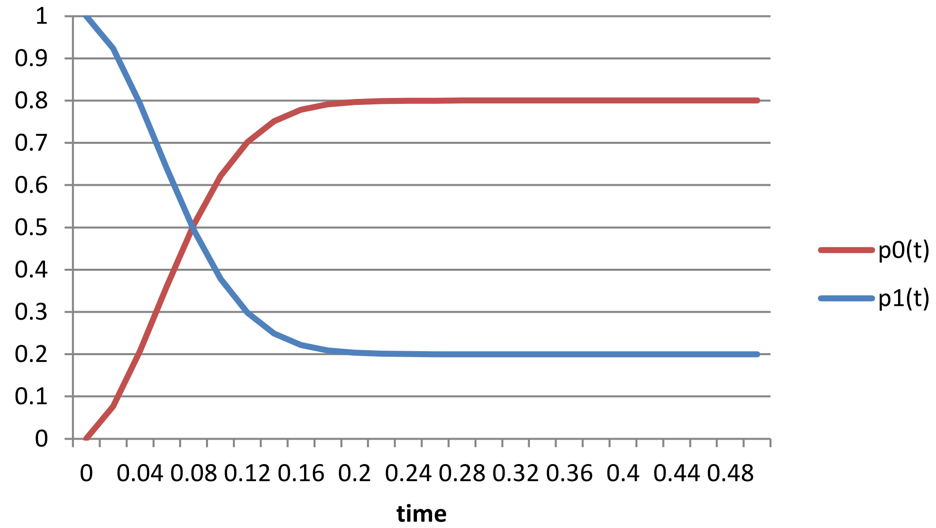
Переходные вероятности для $M/M/1/1$

$$\lambda = 1, \mu = 4.$$

$p_0(0) = 1,$
$p_1(0) = 0.$



$p_0(0) = 0,$
$p_1(0) = 1.$



Эргодичность

Как удостовериться, что цепь эргодическая, т.е.

- у неё единственное стационарное решение с положительными вероятностями,
- её предельное распределение совпадает со стационарным

?

Эргодичность

Как удостовериться, что цепь эргодическая, т.е.
- у неё единственное стационарное решение с положительными вероятностями,
- её предельное распределение совпадает со стационарным

?

Проще чем в дискретном времени.

Неразложимая цепь Маркова в дискретном времени с конечным множеством состояний всегда эргодическая!

Напоминалка. Цепь Маркова называется неразложимой, если все её состояния сообщаются, т.е. каждое состояние достижимо из всех остальных.

Как и в дискретном случае, *доля времени, которое цепь Маркова проводит в некотором состоянии, в долгосрочном периоде совпадает с вероятностью этого состояния в стационарном режиме*.

Пример: регистратура

На телефоне сидит единственный сотрудник, отвечающий на звонки, которые поступают простейшим потоком с интенсивностью 0.1 звонок в минуту. В среднем разговор занимает 1 минуту 15 секунд, его продолжительность распределена экспоненциально.
Найдите долю времени, которое сотрудник простаивает. Предполагается, что звонящие не ждут, если не получают мгновенный ответ.

Пример: регистратура

На телефоне сидит единственный сотрудник, отвечающий на звонки, которые поступают простейшим потоком с интенсивностью 0.1 звонок в минуту. В среднем разговор занимает 1 минуту 15 секунд, его продолжительность распределена экспоненциально.
Найдите долю времени, которое сотрудник простаивает. Предполагается, что звонящие не ждут, если не получают мгновенный ответ.

Решение.
Имеем систему M/M/1/1 с интенсивность входящего потока $\lambda = 0.1$

и интенсивностью обслуживания $\mu = \frac{1}{1.25} = 0.8.$

Стационарная вероятность простоя: $p_0 = \frac{\mu}{\mu + \lambda} = \frac{0.8}{0.8 + 0.1} = \frac{8}{9} \approx 0.89.$

Сотрудник простаивает 89% рабочего времени.

Пример: регистратура

На телефоне сидит единственный сотрудник, отвечающий на звонки, которые поступают простейшим потоком с интенсивностью 0.1 звонок в минуту. В среднем разговор занимает 1 минуту 15 секунд, его продолжительность распределена экспоненциально.
Найдите долю времени, которое сотрудник простаивает. Предполагается, что звонящие не ждут, если не получают мгновенный ответ.

Решение.
Имеем систему M/M/1/1 с интенсивность входящего потока $\lambda = 0.1$

и интенсивностью обслуживания $\mu = \frac{1}{1.25} = 0.8.$

Стационарная вероятность простоя: $p_0 = \dfrac{\mu}{\mu+\lambda} = \dfrac{0.8}{0.8+0.1} = \dfrac{8}{9} \approx 0.89.$

Сотрудник простаивает 89% рабочего времени.

Вопрос. Заметьте: доля занятого времени 1-0.89=0.11.
Значит ли это, что 11% входящих звонков находят систему занятой и получают отказ?

Пример: регистратура

На телефоне сидит единственный сотрудник, отвечающий на звонки, которые поступают простейшим потоком с интенсивностью 0.1 звонок в минуту. В среднем разговор занимает 1 минуту 15 секунд, его продолжительность распределена экспоненциально.
Найдите долю времени, которое сотрудник простаивает. Предполагается, что звонящие не ждут, если не получают мгновенный ответ.

Решение.
Имеем систему M/M/1/1 с интенсивность входящего потока $\lambda = 0.1$

и интенсивностью обслуживания $\mu = \frac{1}{1.25} = 0.8$.

Стационарная вероятность простоя: $p_0 = \frac{\mu}{\mu+\lambda} = \frac{0.8}{0.8+0.1} = \frac{8}{9} \approx 0.89.$

Сотрудник простаивает 89% рабочего времени.

Вопрос. Заметьте: доля занятого времени 1-0.89=0.11.
Значит ли это, что 11% входящих звонков находят систему занятой и получают отказ?

Ответ. Да, хотя это не прозрачный сюжет. Такие выводы нужно делать осторожно.

Пара слов о PASTA

У простейшего потока есть свойство, которое часто называют PASTA (Poisson Arrivals See Time-Averages). Его нелегко доказать.

Если система 30% своего времени проводит в некотором состоянии, то вероятность, что заявка поступит, когда система будет в этом состоянии, тоже равна 30%, если входящий поток простейший.

Это **неверно** в общем случае.

Контрпример. Заявки поступают с интервалами ровно в 10 минут. Каждую обслуживают ровно 8 минут. Система занята 80% времени, но свободна к моменту поступления каждой заявки.

Ещё пример: сервер в сети

В локальной сети один сервер. Пуассоновский поток шоков с интенсивностью 0.015 шоков в час выводит сервер из строя (делает недоступным). Время устранения неполадки распределено экспоненциально со средним 12 мин (0.2 часа). Какую долю времени сервер недоступен?

Решение.

Имеем систему $M/M/1/1$.

Интенсивность входящего потока $\lambda = 0.015$.
Интенсивность обслуживания $\mu = \frac{1}{0.2} = 5$.

Вероятность быть недоступным в стационарном режиме: $\frac{\lambda}{\lambda+\mu} = \frac{0.015}{5.015} \approx 0.003$.

Сервер недоступен 0.3% времени.

В следующий раз:

Процессы гибели и размножения

M/M/1