ДЗ 4
по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.09.29

Задание 1

Условие

Надежда собирает деньги на благотворительность, её задача — собрать 8000 рублей. Она устраивается продавать билеты в музей, куда посетители приходят пуассоновским потоком, в среднем 5 в час. Каждый посетитель платит за вход 400 рублей.

В 11:30 Надежда заглядывает в кассу и обнаруживает там 6000 рублей. Она собирается покинуть музей, как только там наберётся нужная ей сумма.

а) С какой вероятностью она успеет уйти до 13:00?

б) Пусть T – время, которое потребуется, чтобы собрать оставшиеся 2000 рублей. Выпишите дополнительную функцию распределения величины T.

Решение

а) Пусть X – количество людей, которое придёт в интервал (11:30-13:00). Тогда:

$$X \sim Pois(\lambda \cdot 1.5) \sim Pois(7.5)$$

$$\mathbf{P}\{X \geqslant 5\} = 1 - \mathbf{P}\{X < 5\} = 1 - \sum_{k=0}^{4} \frac{(\lambda \cdot 1.5)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot 1.5} \approx 0.87$$

б) Время T складывается из времён ожиданий 5 человек, приходящих в пуассоновском потоке. Времена ожидания каждого по отдельности $T_1, \ldots, T_5$ независимы и имеют экспоненциальное распределение $Exp(\lambda)$. Значит, T имеет распределение Эрланга (по определению этого распределения).

$$T = \sum_{i=1}^{5} T_i \sim Erlang(5, \lambda)$$

Тогда:

$$G_T(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \frac{e^{-5 \cdot t}}{24} \cdot \left(24 + 120 \cdot t + 300 \cdot t^2 + 500 \cdot t^3 + 625 \cdot t^4\right)$$

Ответ

а) 0.87

б) $G_T(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \frac{e^{-5 \cdot t}}{24} \cdot \left(24 + 120 \cdot t + 300 \cdot t^2 + 500 \cdot t^3 + 625 \cdot t^4\right)$

Задание 2

Условие

Устройство состоит из двух блоков: A и B. Случайные величины T_A и T_B независимы и экспоненциально распределены: $T_A \sim Exp(\lambda_A)$, $T_B \sim Exp(\lambda_B)$ – они отражают время исправной работы блоков A и B. Устройство работает до отказа любого из блоков. Найдите функцию надёжности (т.е. дополнительную функцию распределения) для времени исправной работы устройства и среднее время до отказа.

Решение

Пусть T – время работы устройства.

$$G_T(t) \;=\; \mathbf{P}\big\{T > t\big\} \;=\; \mathbf{P}\Big(\big\{T_A > t\big\} \cap \big\{T_B > t\big\}\Big) \;=\; \mathbf{P}\big\{T_A > t\big\} \cdot \mathbf{P}\big\{T_B > t\big\} \;=\; e^{-(\lambda_A + \lambda_B)\cdot t}$$

$$E\big[T\big] \;=\; \int_0^{+\infty} G_T(t)\cdot dt \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_A+\lambda_B)\cdot t}\cdot dt \;=\; \Big(-\frac{1}{\lambda_A+\lambda_B}\cdot e^{-(\lambda_A+\lambda_B)\cdot t}\Big)\Big|_0^{+\infty} \;=$$
$$=\; 0 - \Big(-\frac{1}{\lambda_A+\lambda_B}\Big) \;=\; \frac{1}{\lambda_A+\lambda_B}$$

Ответ

$$G_T(t) \;=\; e^{-(\lambda_A+\lambda_B)\cdot t}$$
$$E\big[T\big] \;=\; \frac{1}{\lambda_A+\lambda_B}$$

Задание 3

Условие

Покажите, что геометрическое распределение обладает свойством отсутствия последействия, т.е.

$$G_X\Big(x+s \big| X > s\Big) \;=\; G_X(x) \quad \text{если } X \sim Geo(p)$$

Решение

$$G_X\Big(x+s\big|X>s\Big) \;=\; \mathbf{P}\Big(\big\{X > x+s\big\}\big|\big\{X>s\big\}\Big) \;=\; \frac{\mathbf{P}\Big(\big\{X>x+s\big\}\cap\big\{X>s\big\}\Big)}{\mathbf{P}\big\{X>s\big\}} \;=$$

$$=\; \frac{\mathbf{P}\big\{X>x+s\big\}}{\mathbf{P}\big\{X>s\big\}} \;=\; \frac{\sum\limits_{i=x+s}^{\infty}(1-p)^i\cdot p}{\sum\limits_{i=s}^{\infty}(1-p)^i\cdot p} \;=\; \frac{(1-p)^{x+s}\cdot {}^1\!/_p}{(1-p)^s\cdot {}^1\!/_p} \;=\; (1-p)^x$$

$$G_X(x) \;=\; \mathbf{P}\big\{X>x\big\} \;=\; \sum_{i=x}^{\infty}(1-p)^i\cdot p \;=\; p\cdot(1-p)^x\cdot {}^1\!/_p \;=\; (1-p)^x \;=\; G_X\Big(x+s\big|X>s\Big)$$