Лекция 8

Время ожидания в $M/M/1$

+

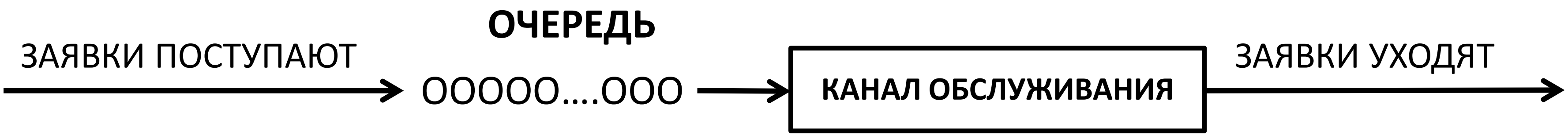
Закон Литтла

+

$M/M/1/K$

$M/M/1$

Схема СМО:



- Заявки поступают простейшим потоком с интенсивностью λ.

  Вероятность поступления за Δ единиц времени: $\lambda\Delta + o(\Delta)$

- Время обслуживания распределено экспоненциально, интенсивность обслуживания: μ.

  Среднее время обслуживания: $1/\mu$.
  Вероятность завершения обслуживания за время Δ: $\mu\Delta + o(\Delta)$.

- Один канал обслуживания, бесконечная ёмкость, нет потерь.

Найдём:

- загрузку мощностей; *было*
- длину очереди; *было*
- время ожидания. *теперь*

Напоминалка: *M*/*M*/1 как цепь Маркова

Пусть $N(t)$ – число заявок в системе в момент t.

Что может случиться за бесконечно малый промежуток Δ?

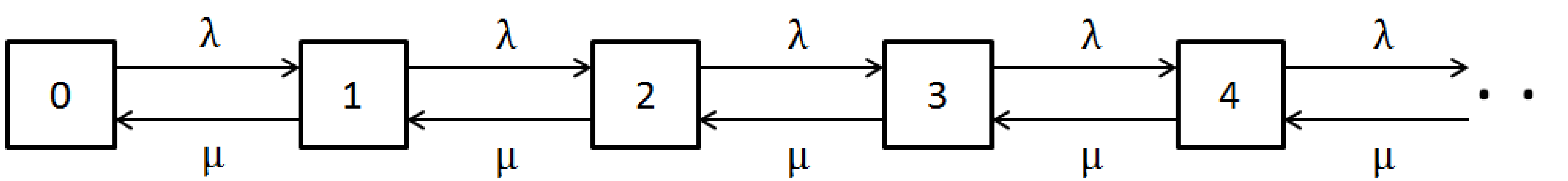
- Одна заявка пришла, ни одна не ушла,
  вероятность: $[\lambda\Delta + o(\Delta)] \times [1 - \mu\Delta + o(\Delta)] = \lambda\Delta - \lambda\mu\Delta^2 + o(\Delta) = \lambda\Delta + o(\Delta)$;

- Никто не пришёл, обслуживание одной заявки завершилось,
  вероятность: $[1 - \lambda\Delta + o(\Delta)] \times [\mu\Delta + o(\Delta)] = \mu\Delta - \lambda\mu\Delta^2 + o(\Delta) = \mu\Delta + o(\Delta)$;

- Ни поступлений, ни завершений,
  вероятность: $[1 - \lambda\Delta + o(\Delta)] \times [1 - \mu\Delta + o(\Delta)] = 1 - \lambda\Delta - \mu\Delta + \lambda\mu\Delta^2 + o(\Delta) =$
  $= 1 - (\lambda + \mu)\Delta + o(\Delta)$.

- Другие варианты,
  вероятность: $o(\Delta)$.

Интенсивности переходов:



Напоминалка: $M/M/1$ в стационарном режиме

Мы нашли стационарное распределение числа заявок в системе $M/M/1$ с интенсивностью входящего потока λ и интенсивностью обслуживания μ.

Если $\lambda \geq \mu$, то стационарного распределения нет.
Если $\lambda < \mu$, то вероятность простоя:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu},$$

а вероятность j заявок в системе (и $j - 1$ заявок в очереди):

$$p_j = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right).$$

Вероятности зависят от отношения интенсивностей λ/μ. Это отношение называют *приведённой интенсивностью потока заявок* и иногда измеряют в *эрлангах*:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Стационарные вероятности, выраженные через приведённую интенсивность:

$$p_j = \rho^j (1 - \rho), \qquad j = 0, 1, 2, \dots$$

Время ожидания в $M/M/1/\infty/FCFS$

Время ожидания в очереди = время между поступлением и началом обслуживания.
Время пребывания в системе = время между поступлением и завершением обслуживания.

Начнём со времени в очереди.

Распределение времени ожидания зависит от дисциплины (в отличие от распределения длины очереди).

Рассмотрим только дисциплину FCFS. В этом случае время ожидания для новоприбывшей заявки зависит от

- числа заявок в системе на момент прибытия,
- времени обслуживания ранее поступивших заявок.

Пусть T_q – время ожидания в очереди. По формуле полной вероятности:

$$G_q(t) = P\left(T_q > t\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(T_q > t | \text{было } n \text{ заявок}\right) \cdot p_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(T_q > t | \text{было } n \text{ заявок}\right) \cdot p_n, \qquad t \geq 0,$$

где $p_n = P(\text{было } n \text{ заявок}) = \rho^n(1-\rho)$. (вспомним PASTA)

Время ожидания в *M/M/1/∞/FCFS*

Заявок в системе перед прибытием	*Распределение времени в очереди (условное)*
0	-> немедленное обслуживание
1	-> экспоненциальное с параметром μ
2	-> Эрланга второго порядка с параметром μ
…	
n	-> Эрланга порядка *n* с параметром μ
…	

Плотность Эрланга (*n* = порядок, μ = параметр масштаба):

$$f(t) = \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}\mu e^{-\mu t}, \qquad t \geq 0.$$

Значит,

$$G_q(t) = P\left(T_q > t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(T_q > t | \text{было } n \text{ заявок}\right) \cdot p_n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho^n(1-\rho)\int_t^{\infty}\frac{(\mu u)^{n-1}}{(n-1)!}\mu e^{-\mu u}du\right] = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho^n\int_t^{\infty}\frac{(\mu u)^{n-1}}{(n-1)!}\mu e^{-\mu u}du\right]$$

Время ожидания в $M/M/1/\infty/FCFS$

$$G_q(t) = (1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty}\left[\rho^n \int_t^{\infty} \frac{(\mu u)^{n-1}}{(n-1)!}\mu e^{-\mu u} du\right].$$

Поменяем местами знаки интеграла и суммы:

$$G_q(t) = (1-\rho)\int_t^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n \frac{(\mu u)^{n-1}}{(n-1)!}\mu e^{-\mu u} du = \rho(1-\rho)\int_t^{\infty}\left[\mu e^{-\mu u}\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n-1}\frac{(\mu u)^{n-1}}{(n-1)!}\right] du\,.$$

Заметьте:

peace

$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho^{n-1}\frac{(\mu u)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mu u \rho)^{n-1}}{(n-1)!} = e^{\mu u \rho}.$$

Почему? Вспомним распределение Пуассона:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = 1 \;\; \to \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{\lambda}.$$

Вернёмся ко времени ожидания:

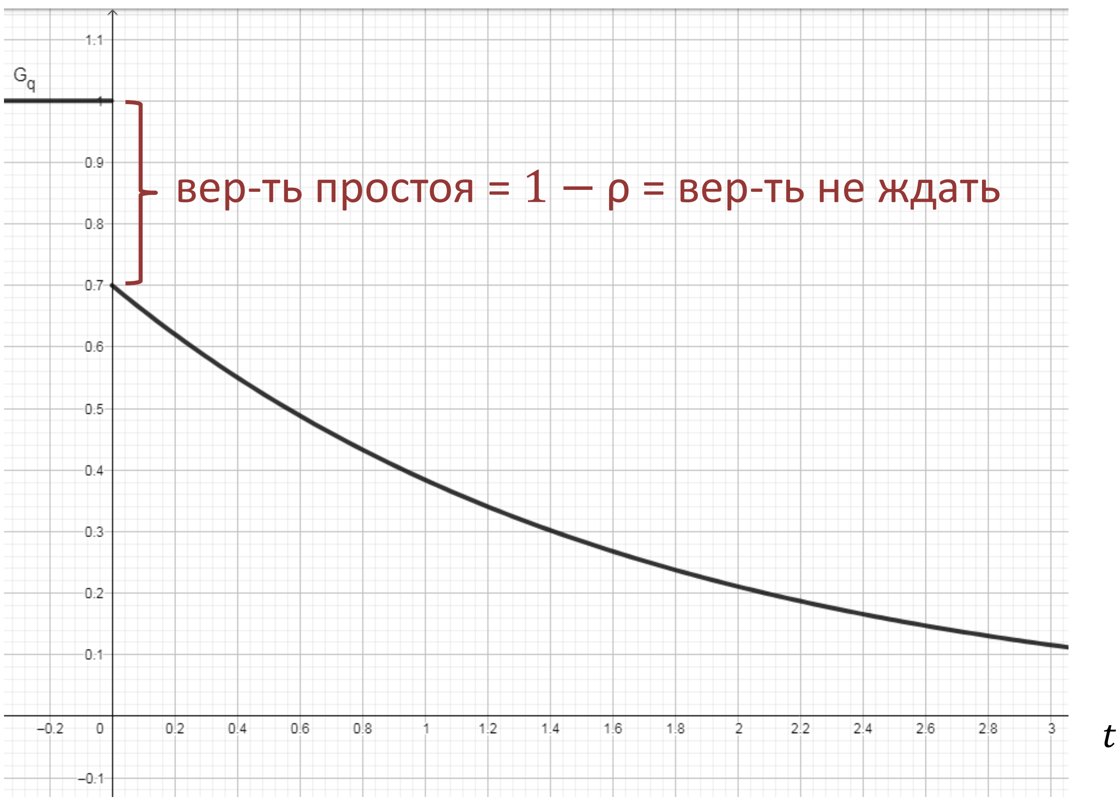
$$G_q(t) = \rho(1-\rho)\int_t^{\infty}\mu e^{-\mu u}e^{\mu u \rho} du = \rho(1-\rho)\int_t^{\infty}\mu e^{-\mu u(1-\rho)} du$$

Время ожидания в $M/M/1/\infty/FCFS$

…ко времени ожидания:

$$G_q(t) = \rho(1-\rho)\int_t^{\infty} \mu e^{-\mu u(1-\rho)}du = \rho(1-\rho)\mu\left[-\frac{1}{\mu(1-\rho)}e^{-\mu u(1-\rho)}\Big|_t^{\infty}\right] =$$

$$= \rho\left[-e^{-\mu u(1-\rho)}\Big|_t^{\infty}\right] = 0 - \rho\left(-e^{-\mu t(1-\rho)}\right) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}.$$



Так эта функция выглядит при
$\lambda = 1.4$,
$\mu = 2$,
$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.7$.

Среднее время ожидания в очереди, W_q

$$W_q = E(T_q) = \int_0^\infty G_q(t)dt = \int_0^\infty \rho e^{-\mu(1-\rho)t}dt = -\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}e^{-\mu(1-\rho)t}\Big|_0^\infty =$$

$$= 0 - \left(-\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}\right) = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}.$$

Через интенсивность входящего потока:

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\lambda/\mu}{\mu(1-\lambda/\mu)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}.$$

Распределение времени ожидания зависит от дисциплины (наш вывод – только для FCFS).
Средняя время в очереди **не** зависит от дисциплины.

Почему?

Среднее время пребывания в системе, W

Время пребывания T = время в очереди + время обслуживания, так что

$$W = E(T) = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} + \frac{1-\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}.$$

Через интенсивность входящего потока:

$$W = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu(1-\lambda/\mu)} = \frac{1}{\mu-\lambda}.$$

А если взять $\mu < \lambda$, получится отрицательное время!

время пребывания = sojourn time

Пример

В столовой одна касса. Покупатели подходят пуассоновским потоком, в среднем 0.5 в минуту. Время обслуживания распределено экспоненциально со средним 0.75 мин.

а) Какова вероятность, что покупателю не придётся ждать в очереди?

б) Какова вероятность, что покупателю придётся ждать в очереди более двух минут?

в) Каково среднее время ожидания в очереди?

Пример

В столовой одна касса. Покупатели подходят пуассоновским потоком, в среднем 0.5 в минуту. Время обслуживания распределено экспоненциально со средним 0.75 мин.

а) Какова вероятность, что покупателю не придётся ждать в очереди?

б) Какова вероятность, что покупателю придётся ждать в очереди более двух минут?

в) Каково среднее время ожидания в очереди?

Решение.

$\lambda = 0.5,\ \mu = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3}$, so that $\rho = \frac{1/2}{4/3} = \frac{3}{8}$.

а) Это то же, что и вероятность простоя: $P\left(T_q = 0\right) = p_0 = 1 - \rho = \frac{5}{8}$.

Пример

В столовой одна касса. Покупатели подходят пуассоновским потоком, в среднем 0.5 в минуту. Время обслуживания распределено экспоненциально со средним 0.75 мин.

а) Какова вероятность, что покупателю не придётся ждать в очереди?

б) Какова вероятность, что покупателю придётся ждать в очереди более двух минут?

в) Каково среднее время ожидания в очереди?

Решение.

$\lambda = 0.5$, $\mu = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3}$, so that $\rho = \frac{1/2}{4/3} = \frac{3}{8}$.

а) Это то же, что и вероятность простоя: $P\left(T_q = 0\right) = p_0 = 1 - \rho = \frac{5}{8}$.

б) Дисциплина FCFS, так что применяем формулу $G_q(t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$:

$$G_q(2) = \frac{3}{8} e^{-\frac{4}{3}\cdot\left(1-\frac{5}{8}\right)\cdot 2} = \frac{3}{8} e^{-\frac{5}{3}} = 0.071.$$

Пример

В столовой одна касса. Покупатели подходят пуассоновским потоком, в среднем 0.5 в минуту. Время обслуживания распределено экспоненциально со средним 0.75 мин.
а) Какова вероятность, что покупателю не придётся ждать в очереди?
б) Какова вероятность, что покупателю придётся ждать в очереди более двух минут?
в) Каково среднее время ожидания в очереди?

Решение.
$\lambda = 0.5,\ \mu = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3}$, so that $\rho = \frac{1/2}{4/3} = \frac{3}{8}$.
а) Это то же, что и вероятность простоя: $P\left(T_q = 0\right) = p_0 = 1 - \rho = \frac{5}{8}$.
б) Дисциплина FCFS, так что применяем формулу $G_q(t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t}$:

$$G_q(2) = \frac{3}{8} e^{-\frac{4}{3}\cdot\left(1-\frac{5}{8}\right)\cdot 2} = \frac{3}{8} e^{-\frac{5}{3}} = 0.071.$$

в) $W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{3}\cdot\left(1-\frac{3}{8}\right)} = \frac{3/8}{5/6} = \frac{9}{20}$.

Подытожим: *M*/*M*/1 в стационарном режиме

Инт. входящего потока: λ; обслуживания: μ; приведённая: $\rho = \lambda/\mu$.

Коэффициент загрузки = ρ = λ/μ.

Число заявок в системе N и длина очереди N_q

$N \sim Geo(1-\rho)$: $P(n \text{ в системе}) = \rho^n(1-\rho)$,

$P(> n \text{ в системе}) = \rho^{n+1},\ n = 0,1,2,\ldots$

Среднее число заявок в системе: $L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$.

Средняя длина очереди: $L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$.

$L = L_q + \rho$

Время пребывания в системе T и время ожидания в очереди T_q

Распределение времени ожидания в очереди: $G_q(t) = \rho e^{-\mu(1-\rho)t},\ \ t \ge 0.$ *FCFS only*

Среднее время пребывания: $W = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu-\lambda}$. *GD*

Среднее время ожидания: $W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$. *GD*

$W = W_q + \frac{1}{\mu}$.

Закон Литтла

Приглядимся к этим формулам:

Среднее число в системе: $L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$.

Среднее время пребывания: $W = \frac{1}{\mu-\lambda}$.

Средняя длина очереди: $L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$.

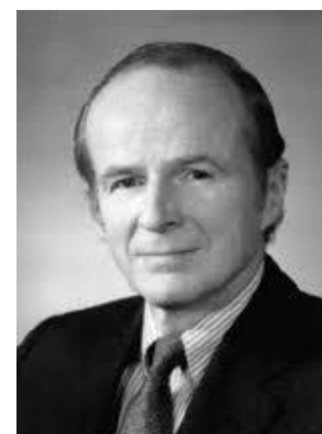
Среднее время в очереди: $W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$.

Соотношение между числом заявок и временем:

$$\boxed{\begin{gathered} L = \lambda W, \\ L_q = \lambda W_q. \end{gathered}}$$

Эти формулы называют законом Литтла.

Что в них особенного?



Джон Даттон Конант Литтл

Закон Литтла

$$\boxed{\begin{gathered} L = \lambda W, \\ L_q = \lambda W_q. \end{gathered}}$$

Замечательно то, что закон Литтла выполняется независимо от распределения времени обслуживания и времени ожидания заявки.

Независимо от ёмкости системы и числа каналов обслуживания.

Независимо от дисциплины.

Он выполняется практически для всех СМО без отказов (потерь) в стационарном режиме. Если есть отказы, то нужно просто заменить интенсивность λ на *эффективную интенсивность входного потока* λ' (среднее число заявок, которые входят в систему за единицу времени):

$$\boxed{\begin{gathered} L = \lambda' W, \\ L_q = \lambda' W_q, \\ \lambda' = \lambda(1 - p_{loss}). \end{gathered}}$$

Доказательство тяжкое. Но идею легко понять.

Закон Литтла: идея

В очередь встаёт человек.

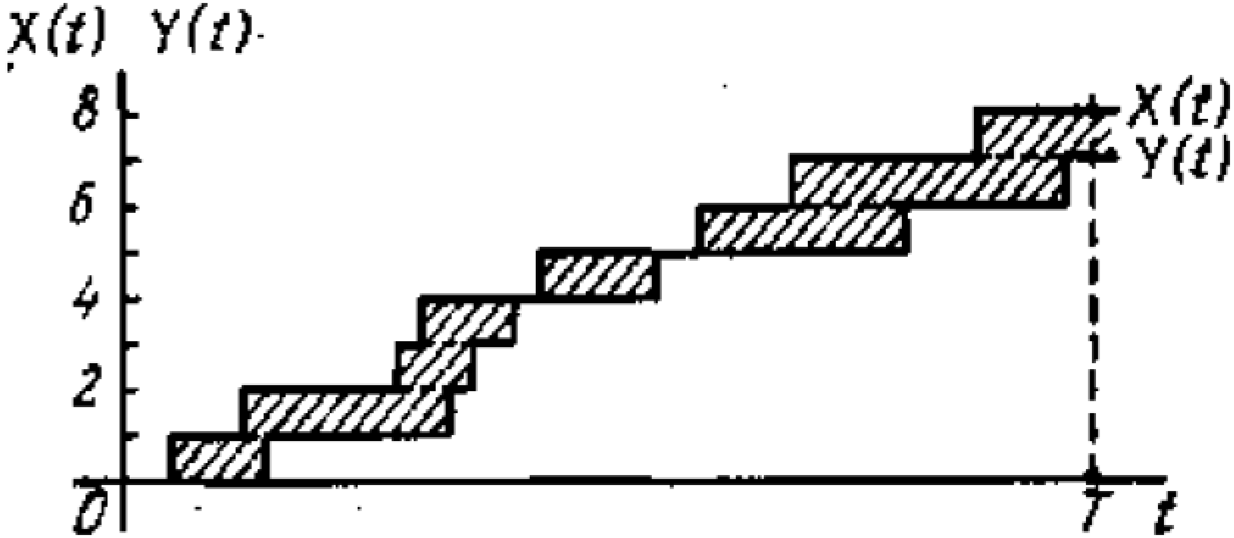
В среднем проходит W_q, прежде чем его начнут обслуживать.

Прямо перед обслуживанием он глядит назад и видит (в среднем) L_q человек.

Каждого человека ждали в среднем $\frac{1}{\lambda}$ единиц времени.
Значит, $\frac{L_q}{\lambda}$ – среднее время, за которое собирается очередь длиной L_q.

$$\frac{L_q}{\lambda} = W_q \quad \rightarrow \quad L_q = \lambda W_q.$$

Закон Литтла: эмпирическая версия



$X(t)$ – число заявок, поступивших за время t,
$Y(t)$ – число заявок, обслуженных за время t,
$\lambda(t) = \frac{X(t)}{t}$ – интенсивность входящего потока за время t.
$S(t)$ – суммарное время, проведённое заявками в системе,

Рассмотрим такое время t, что $X(t) = Y(t)$

$W(t) = \frac{S(t)}{X(t)} = \frac{S(t)}{Y(t)}$ – среднее время пребывания, $L(t) = \frac{S(t)}{t}$ – среднее число в системе,

Закон Литтла: $$L(t) = \frac{S(t)}{t} = \frac{X(t)}{t} \cdot \frac{S(t)}{X(t)} = \lambda(t)W(t).$$

Закон Литтла: пример

В большой компании работники заболевают с интенсивностью 2 в неделю. Среднее время на больничном – 1.2 недели. Сколько в среднем работников на больничном?

Решение. Имеем $\lambda = 2$ и $W = 1.2$. По закону Литтла, $L = \lambda W = 2.4$.
В среднем болеют 2.4 работника.

А что с L_q и W_q?

Закон Литтла: пример

В большой компании работники заболевают с интенсивностью 2 в неделю. Среднее время на больничном – 1.2 недели. Сколько в среднем работников на больничном?

Решение. Имеем $\lambda = 2$ и $W = 1.2$. По закону Литтла, $L = \lambda W = 2.4$.
В среднем болеют 2.4 работника.

А что с L_q и W_q?

Очереди нет. Каждую заявку обслуживаем немедленно (отправляем на больничный).
Система $G/G/\infty$.

А как с сезонностью, эпидемиями?

Закон Литтла: пример

В большой компании работники заболевают с интенсивностью 2 в неделю. Среднее время на больничном – 1.2 недели. Сколько в среднем работников на больничном?

Решение. Имеем $\lambda = 2$ и $W = 1.2$. По закону Литтла, $L = \lambda W = 2.4$.
В среднем болеют 2.4 работника.

А что с L_q и W_q?

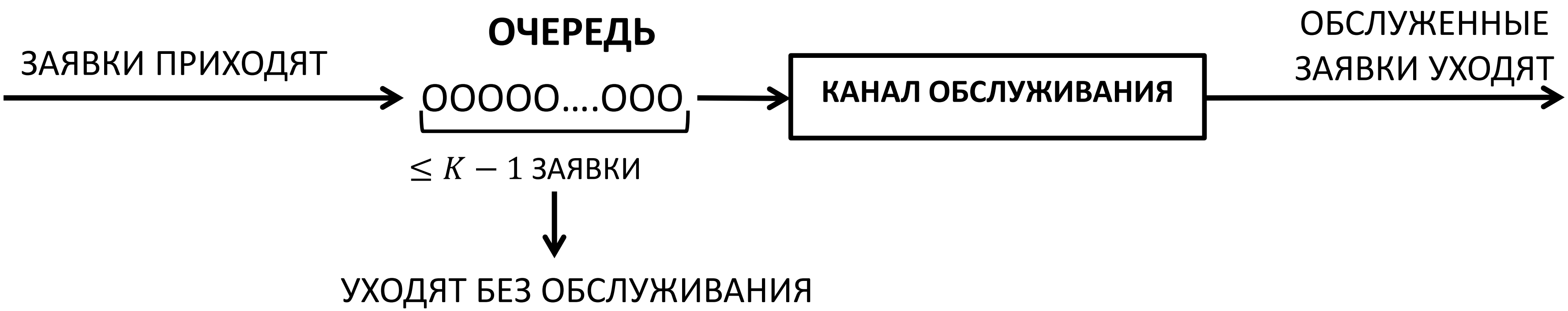
Очереди нет. Каждую заявку обслуживаем немедленно (отправляем на больничный).
Система $G/G/\infty$.

А как с сезонностью, эпидемиями?

Они результат не отменяют, но при интерпретации надо быть осторожным.

$M/M/1/K$

Теперь система работает так:



- Заявки поступают пуассоновским потоком с интенсивностью λ.
- Экспоненциальное время обслуживания, интенсивность μ (среднее время: $1/\mu$).
- Один канал, конечная ёмкость – не более K заявок в системе.

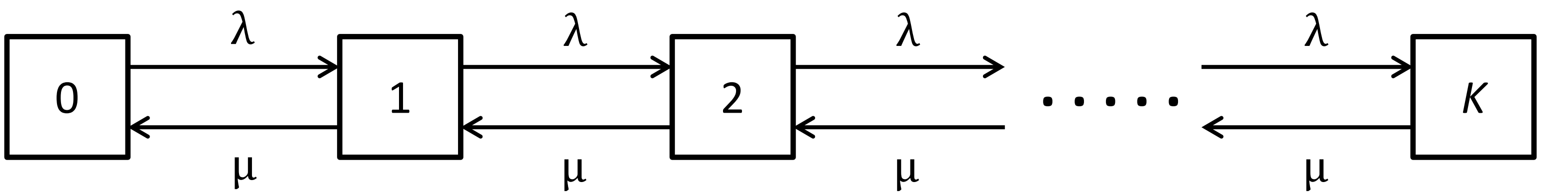
Хотим знать:

- загрузку мощностей;
- длину очереди;
- время ожидания;
- вероятность потерь.

Система $M/M/1/K$ как цепь Маркова

Это процесс гибели-размножения, как и $M/M/1$.
Теперь пространство состояний конечно: число заявок $N(t) \leq K$.

Интенсивности переходов:



Уравнения Колмогорова:

как и для M/M/1/∞

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);$$

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + \mu) p_j(t) + \mu p_{j+1}(t), \qquad 1 < j < K;$$

$$\frac{dp_K(t)}{dt} = \lambda p_{K-1}(t) - \mu p_K(t).$$

$M/M/1/K$: стационарное распределение

Уравнения Колмогорова:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t);$$

$$\frac{dp_j(t)}{dt} = \lambda p_{j-1}(t) - (\lambda + \mu) p_j(t) + \mu p_{j+1}(t), \qquad 1 < j < K;$$

$$\frac{dp_K(t)}{dt} = \lambda p_{K-1}(t) - \mu p_K(t).$$

Уравнения баланса, $\frac{dp_j(t)}{dt} = 0$:

$$\begin{cases} 0 = -\lambda p_0 + \mu p_1; \\ 0 = \lambda p_{j-1} - (\lambda + \mu) p_j + \mu p_{j+1}, \quad 1 < j < K; \\ 0 = \lambda p_{K-1} - \mu p_K; \\ p_1 + \cdots + p_K = 1. \end{cases}$$

Для $j = 1, \dots, K-1$ уравнения те же, что и в $M/M/1$, и вывод такой же:

$$p_j = p_0 \prod_{i=1}^{j} \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_i} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j, \qquad j < K.$$

То же и для $j = K$:

$$p_K = \frac{\lambda}{\mu} p_{K-1} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^K$$

M/*M*/1/*K*: стационарное распределение

Имеем систему:

$$\begin{cases} p_j = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \rho^j p_0, \quad j = 0, \dots, K; \\ p_0 + \dots + p_K = p_0 \sum_{j=0}^{K} \rho^j = 1. \end{cases}$$

Здесь $\rho = \lambda/\mu$ – приведённая интенсивность потока заявок.

Как и в M/M/1, но теперь геометрическая прогрессия конечная.
Сумма в нижней строчке системы сводится к одному из двух выражений:

$$\sum_{j=0}^{K} \rho^j = \begin{cases} \dfrac{1-\rho^{K+1}}{1-\rho}, & \rho \neq 1; \\ K+1, & \rho = 1. \end{cases}$$

Отсюда вероятность простоя:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{K} \rho^j} = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1; \\ \dfrac{1}{K+1}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Стационарное распределение существует даже при $\rho \geq 1$. Это вполне естественно.

$M/M/1/K$: стационарное распределение

Мы знаем это:

$$p_j = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j = \rho^j p_0, \quad j = 0, \dots, K;$$

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{K} \rho^j} = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1; \\ \dfrac{1}{K+1}, & \rho = 1. \end{cases}$$

Отсюда – распределение числа заявок:

$$\boxed{p_j = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^j}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1; \\ \dfrac{1}{K+1}, & \rho = 1. \end{cases}}$$

Перейдём к числовым характеристикам.

Коэффициент загрузки. Вероятность потерь. Эффективная интенсивность входного потока.

Загрузка мощностей $= 1 - p_0 = \begin{cases} \frac{\rho - \rho^{K+1}}{1 - \rho^{K+1}}, & \rho \neq 1; \\ \frac{K}{K+1}, & \rho = 1. \end{cases}$

Вероятность потерь $= p_K = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^{K}}{1 - \rho^{K+1}}, & \rho \neq 1; \\ \frac{1}{K+1}, & \rho = 1. \end{cases}$ *(почему?)*

Эффективная интенсивность входного потока: $\lambda' = \lambda(1 - p_K)$.

Среднее число заявок в системе

$$L = E(N) = \sum_{j=0}^{K} j p_j \,.$$

Если $\rho = 1$, то $p_j = \frac{1}{K+1}$ и

$$L = \frac{1}{K+1} \sum_{j=0}^{K} j = \frac{K}{2}.$$

Если $\rho \neq 1$, то $p_j = \rho^j p_0$ и

$$L = p_0 \sum_{j=0}^{K} j \rho^j = p_0 \rho \sum_{j=0}^{K} j \rho^{j-1} = p_0 \rho \sum_{j=0}^{K} \frac{d\rho^j}{d\rho}.$$

Занятный фокус! Теперь меняем местами дифференцирование и сложение:

$$L = p_0 \rho \frac{d}{d\rho} \left(\sum_{j=0}^{K} \rho^j \right) = p_0 \rho \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1 - \rho^{K+1}}{1 - \rho} \right) = p_0 \rho \frac{1 - (K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1-\rho)^2}.$$

Длина очереди и время ожидания.

Средняя длина очереди:

$$L_q = E(N_q) = E(N - N_s) = L - (1 - p_0).$$

Если $\rho = 1$, то $p_0 = \frac{1}{K+1}, L = \frac{K}{2}$ и

$$L_q = \frac{K}{2} - \frac{K}{K+1} = \frac{K(K+1) - 2K}{2(K+1)} = \frac{K(K-1)}{2(K+1)}.$$

Если $\rho \neq 1$, то $p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, L = p_0 \rho \frac{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1-\rho)^2}$ и

$$L_q = L - \left(1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}\right) = L - \frac{\rho(1-\rho^K)}{1-\rho^{K+1}}.$$

Характеристики времени получим из закона Литтла:

$$W = \frac{L}{\lambda'} = \frac{L}{\lambda(1 - p_K)},$$

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda'} = \frac{L_q}{\lambda(1 - p_K)}.$$

Пример

Марина делает аксессуары на заказ, получая за каждое изделие 800 рублей. Заказы поступают простейшим потоком с интенсивностью 0.4 в день. Время исполнения распределено экспоненциально, в среднем 2 дня на заказ.
Марина не любит быть отягощённой обязательствами. Если на ней висят три заказа, она отказывает остальным покупателям. Найдите среднюю потерю выручки в день из-за отказов и среднее время ожидания исполнения заказа покупателем.

Пример

Марина делает аксессуары на заказ, получая за каждое изделие 800 рублей. Заказы поступают простейшим потоком с интенсивностью 0.4 в день. Время исполнения распределено экспоненциально, в среднем 2 дня на заказ.
Марина не любит быть отягощённой обязательствами. Если на ней висят три заказа, она отказывает остальным покупателям. Найдите среднюю потерю выручки в день из-за отказов и среднее время ожидания исполнения заказа покупателем.

Решение: потерянная выручка.

Марина работает как $M/M/1/3$, $\lambda = 0.4$, $\mu = \frac{1}{2} = 0.5$, так что $\rho = \frac{0.4}{0.5} = 0.8$.

Её дневная выручка:

$800 \times \text{число принятых заказов} = 800 \times (\text{число поступивших} - \text{число отказов})$.

Потеря выручки из-за отказов $= 800 \times \text{число отказов}$.

Вероятность отказа: $p_{loss} = p_3 = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}} = 0.173$.

Среднее время отказов в день: $\lambda p_{loss} = 0.4 \times 0.173 = 0.069$.

Средняя потеря выручки в день $= 800 \times 0.069 = 55.5$.

В среднем Марина теряет 55.5 рублей в день.

Пример

Марина делает аксессуары на заказ, получая за каждое изделие 800 рублей. Заказы поступают простейшим потоком с интенсивностью 0.4 в день. Время исполнения распределено экспоненциально, в среднем 2 дня на заказ.
Марина не любит быть отягощённой обязательствами. Если на ней висят три заказа, она отказывает остальным покупателям. Найдите среднюю потерю выручки в день из-за отказов и среднее время ожидания исполнения заказа покупателем.

Решение: среднее время.

$\lambda = 0.4,\ \mu = \frac{1}{2} = 0.5,\ \rho = \frac{0.4}{0.5} = 0.8.$ $p_{loss} = 0.173$

Эффективная инт-сть входящего потока: $\lambda' = \lambda(1 - p_{loss}) = 0.4 \times (1 - 0.173) \approx 0.33.$

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} = \frac{1-0.8}{1-0.8^{3+1}} \approx 0.339.$$

Среднее число заявок:

$$L = p_0\rho\frac{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{(1-\rho)^2} = 0.339 \times 0.8 \times \frac{1-(3+1)\times 0.8^3 + 3 \times 0.8^{3+1}}{(1-0.8)^2} \approx 1.22.$$

Среднее время пребывания:

$$W = \frac{L}{\lambda'} = \frac{1.22}{0.33} \approx 3.69.$$

В следующий раз:

Имитационное моделирование СМО