КДЗ 5 по Дискретной Математике

Татаринов Никита, БПИ196

2020
июнь, 05

Задача №1

Необходимо выяснить, существует ли граф:

а) с 8 вершиами, 23 рёбрами и вершиной степени 1.
Предположим, что такой граф существует. Тогда, в данном графе есть вершина, инцидетная ровно 1-му ребру, то есть оставшиеся 22 ребра должны быть распределены между другими 7-ю вершинами. Однако, в ребре с 7-ю вершинами может быть не более $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$, т.е. максимальное количество рёбер меньше, чем требуемое. Получаем противоречие, т.е. данный граф существовать не может.

б) с степенной последовательностью $(3, 3, 3, 3, 2, 2)$.
Приведём иллюстрацию такого графа.

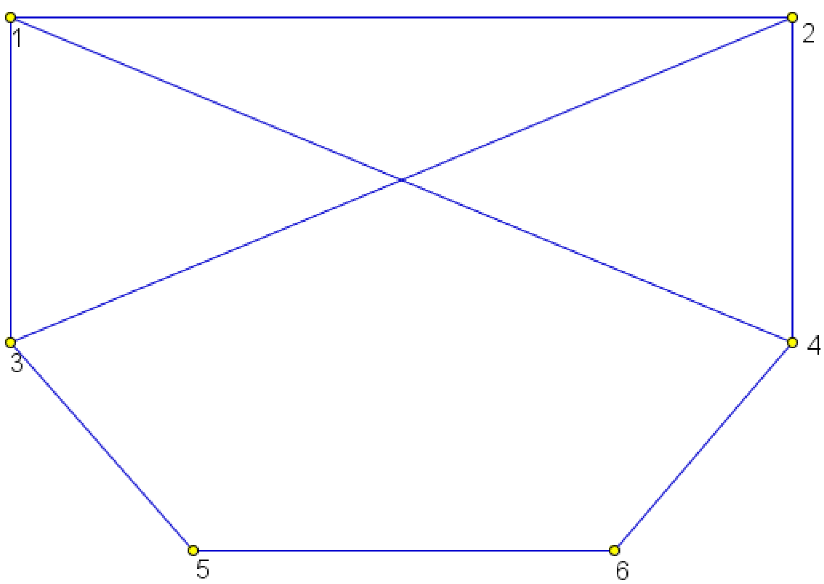

Рис. 1.1: Граф с степенной последовательностью $(3, 3, 3, 3, 2, 2)$

Ответ:

а) нет, не существует.

б) да, существует.

Задача №2

Рассмотрим графы, где любые 2 ребра имеют общую вершину, по количеству вершин n.

1. $n = 1$. Тогда степенная последовательность выглядит как (0).

2. $n = 2$. Тогда, степенная последовательность может выглядеть как $(0, 0)$ (нет рёбер) или как $(1, 1)$ (1 ребро).

3. $n = 3$. Тогда, с точностью до изоморфизма степенна последовательность может быть $(0, 0, 0)$ (нет рёбер), $(1, 1, 0)$ (1 ребро), $(2, 1, 1)$ (2 ребра) или $(2, 2, 2)$ (3 ребра). Заметим, что если в графе более 3-х вершин и 3 соединены как $(2, 2, 2)$, то других рёбер быть не может, так как хотя бы с одним из рёбер треугольника такое ребро не будет иметь общую вершину.

4. $n > 3$.
   Если в графе нет рёбер, то степенная послеовательность выглядит как $(\underbrace{0, 0, 0, \cdots, 0}_{n})$.

   Если в графе 1 ребро, то с точностью до изоморфизма степенная послеовательность выглядит как $(\underbrace{1, 1, 0, 0, 0, \cdots, 0}_{n})$.

   Если в графе 2 ребра, то с точностью до изоморфизма степенная послеовательность выглядит как $(\underbrace{2, 1, 1, 0, 0, \cdots, 0}_{n})$ (2 ребра в одной точке).

   Если в графе 3 ребра, то либо они образуют треугольник (с точностью до изоморфизма степенная последовательность выглядит как $(\underbrace{2, 2, 2, 0, 0, \cdots, 0}_{n})$), либо 3 ребра имеют общую точку (с точностью до изоморфизма степенная последовательность выглядит как $(\underbrace{3, 1, 1, 1, 0, \cdots, 0}_{n})$).

   Если в графе больше 3 рёбер, то они могут только сходиться в одной точке (так как треугольник отсекает возможность добавлять новые рёбра), то есть с точностью до изоморфизма степенная последовательность выглядит как $(\underbrace{m, \overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{m}, 0, 0, \cdots, 0}_{n})$, где $m = \overline{4, (n-1)}$.
   Таким образом, если в графе больше 3 вершин, то с точностью до изоморфизма степенная последовательность выглядит как $(\underbrace{2, 2, 2, 0, 0, \cdots, 0}_{n})$ или как $(\underbrace{m, \overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{m}, 0, 0, \cdots, 0}_{n})$, где $m = \overline{0, (n-1)}$.

Ответ: графы из $n \in \mathbb{N}$ вершин, где любые 2 ребра имеют вершину, имеют с точностью до изоморфизма следующие степенные последовательности:

$$\begin{cases} (\underbrace{m, \overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{m}, 0, 0, \cdots, 0}_{n}), & m = \overline{0, (n-1)} \\ (\underbrace{2, 2, 2, 0, 0, \cdots, 0}_{n}), & n > 2 \end{cases}$$

Задача №3

Воспользуемся теоремой Турана.

Теорема (Турана - 3.1)**.** *Среди всех графов на v вершинах, не содержащих подграфа K_n, максимальное количество рёбер имеет граф $T_n(v)$. Если $v = m(n-1) + r$, где r - остаток от деления v на $(n-1)$, то этот максимум равен*
$ex(v, n) = \frac{(n-2)(v^2-r^2)}{2n-2} + \frac{r(r-1)}{2}$.

В нашем случае $v = 400$ и $n = 3$ (т.е. $m = 200, r = 0$). Тогда, в графе с 400 вершинами, в котором не содержится подграф, изоморфный K_3, максимальное количество рёбер равно $ex(400, 3) = \frac{(3-2)(400^2-0^2)}{2\cdot 3-2} + \frac{0(0-1)}{2} = \frac{160000}{4} + 0 = 40000$. При этом, исходный граф имеет степенную последовательность $(\underbrace{201, 201, \cdots, 201}_{400})$, т.е. по лемме о рукопожатиях количество рёбер равно половине суммы степеней вершин графа, то есть равно $\frac{400\cdot 201}{2} = 40200$, что на 200 рёбер больше, чем в максимальное количество рёбер в графе, не содержащем подграфа, изоморфного K_3. Таким образом, граф из условия содержит подграф, изоморфный K_3, чтд.

Задача №4

Необходимо построить граф G на 5 или более вершинах, такой что $G \cong \overline{G}$, т.е. граф, изоморфный своему дополнению, то есть самодополнительный граф. Приведём пример самодополнительного графа с 5 вершинами.

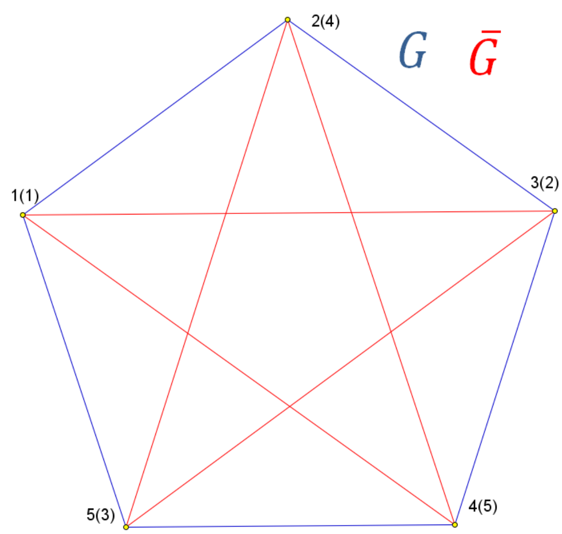

Рис. 4.1: Самодополнительный граф с 5 вершинами

Подстановка изоморфизма имеет следующий вид: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача №5

Задача №6

Рассмотрим двух произвольных человек из этой компании. Если о них известно, что они братья, то задача решена. Если же нет, то рассмотрим оставшихся пятерых человек. Среди них есть 3 человека, являющихся братьями первому, и 3 человека, являющихся братьями второму. Тогда, по принципу Дирихле, у двух рассматриваемых человек есть хотя бы 1 общий брат, то есть они тоже являются братьями, то есть задача решена, чтд.

Задача №7

Рассмотрим произвольную страну из $(n \geqslant 2) \in \mathbb{N}$ городов, при разделении которой на 2-е непустые группы всегда существуют хотя бы 2 города из разных групп, соединённые дорогой.

1. Для начала разделим страну так, что в 1-й группе будет 1 город (любой), а во 2-й - оставшиеся $(n-1)$ городов. В таком случае, исходя из условия о разделении, во 2-й группе есть город, соединённый дорогой с город из первой группы. В таком случае, 2 данных города будет образовывать свзный граф.

2. Теперь разделим страну так, что в 1-й группе будут находиться 2 города из прошлого пункта, образующие связный граф, а во 2-й группе - оставшиеся $(n-2)$ городов. В таком случая, исходя из условия о разделении, в 2-й группе найдётся хотя бы 1 город, соединённый дорогой с одним из городов 1-й группы. При этом города в 1-й группе образуют связный граф, то есть из найденнного во 2-й группе города можно попасть в любой другой город из 1-й группы, то есть данные 3 города образуют связный граф.

... Продолжаем аналогичные рассуждения.

k. Теперь разделим страну так, что в 1-й группе будут находиться k городов из прошлого пункта, образующие связный граф, а во 2-й группе - оставшиеся $(n-k)$ городов. В таком случая, исходя из условия о разделении, в 2-й группе найдётся хотя бы 1 город, соединённый дорогой с одним из городов 1-й группы. При этом города в 1-й группе образуют связный граф, то есть из найденнного во 2-й группе города можно попасть в любой другой город из 1-й группы, то есть данные $(k+1)$ городов образуют связный граф.

... Продолжаем аналогичные рассуждения.

(n-1). Теперь разделим страну так, что в 1-й группе будут находиться $(n-1)$ городов из прошлого пункта, образующие связный граф, а во 2-й группе - оставшийся 1 город. В таком случая, исходя из условия о разделении, город из 2-й группы будет соединён дорогой с одним из городов 1-й группы. При этом города в 1-й группе образуют связный граф, то есть из города во 2-й группе можно попасть в любой другой город из 1-й группы, то есть данные n городов образуют связный граф.

Таким образом, в произвольной стране, при делении которой на 2 непустые группы существуют 2 города из разных групп, соединённые дорогой, города образуют связный граф, то есть из любого города такой страны можно попасть в любой другой её город, чтд.

Задача №8

Разобъём вершины булева куба на 2-е части, в 1-й из которых будут двоичные числа с чётным числом 0 (или 1 - они определяют друг друга), а во 2-й - с нечётным числом 0 (или 1 соответственно). В таком случае, ни одна вершина из 1-й части не будет смежна ни одной вершине из 2-1 части, так как наличие ребра между вершинами равносильно тому, что числа в них отличаются в 400-х разрядах, что невозможно для любой пары вершин из разных частей, так как они всегда отличаются в нечётном количестве разрядов (1 изменение в любом разряде меняет чётность количества 1 и 0). Получается, что из 1-й части нет ни одного ребра во 2-ю часть, то есть граф не связан.
Ответ: нет, граф $B_{1000,400}$ не связан.

Задача №9

Любое дерево является двудольным графом, то есть его можно разделить на 2 части, внутри которых не сущетвует рёбер между вершинами (рёбра есть только между вершинами из разных частей). Так как в рассматриваемом дереве по условию $2n$ рёбер, то либо обе части содержат по n вершин, либо одна содержит меньше, а другая больше n вершин. В обоих случаях (то есть во вссех случаях) в дереве всегда можно найти n попарно несмежных вершин, чтд.

Задача №10

Разобъём вершины булева куба на 2-е части, в 1-й из которых будут двоичные числа с чётным числом 0 (или 1 - они определяют друг друга), а во 2-й - с нечётным числом 0 (или 1 соответственно). В таком случае, числа внутри части будут отличаться чётным числом разрядов (так как 1 изменение в любом разряде меняет чётность количества 1 и 0), что гарантирует отсутствие рёбер между каждой парой вершин с данными числами, то есть граф булева куба является двудольным.
Ответ: да, булев куб B_n является двудольным графом.

Задача №11

Задача №12

Пусть в классе A n учеников. Тогда, в классе B $(26 - n)$ учеников.
Представим учеников данных классов в качестве вершин графа, а случившуюся между двумя учениками драку в виде ребра этого графа. В таком случае степенная последовательность бу-

дет выглядеть слудеющим образом: $(\underbrace{\leqslant (26-n), \leqslant (26-n), \cdots, \leqslant (26-n)}_{n}, \overbrace{\leqslant n, \leqslant n, \cdots, \leqslant n}^{26-n})$, т.е. суммарное количество драк (являющиеся суммарным количеством рёбер графа и по лемме о рукопожатиях равное половине суммы степеней вершин графа) меньше либо равно $\frac{n(26-n)+(26-n)n}{2} = n(26-n)$, т.е. максимальное количество драк зависит от количества учеников в классах.
$n(26-n) = 26n - n^2$ - парабола с ветвями вниз, т.е. имеет точку максимума в вершине. Корни параболы - $n = 0$ и $n = 26$, т.е. вершина параболы находится в $n = 13$, то есть при $n = 13$ достигается максимальное возможное количество драк, равное $13 \cdot (26-13) = 169$. При других n максимальное возможное количество драк всегда меньше, а нас по условию просят найти количесво человек в каждом классе, при котором количество драк будет равно 169. Таким образом, мы получаем, что в каждом из классов должно быть по 13 человек, причём каждый ученик из класса A должен был подраться с каждым учеником из класса B.
Ответ: в каждом классе должно быть по 13 учеников (других вариантов нет).

Задача №13

Приведём пример орграфа G порядка $\geqslant 2$, в котором из любой вершины есть путь в любую другую и где полустепень исхода одной из вершин не равна 1.

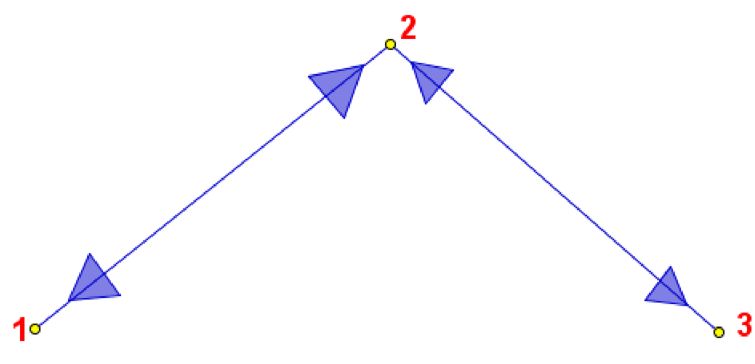

Рис. 13.1: Пример орграфа

Ответ: нет, не обязательно полустепень исхода каждой вершины в G равна 1.

Задача №14

Необходимо доказать, что в любом турнире есть простой (ориентированный) путь, включающий все вершины, то есть гамильтонов путь, а это теорема Редеи-Камиона. Докажем через принцип математической индукции.
$\underset{n=3}{\text{База}}$: для 3 вершин теорема очевидным образом выполняется.

$\underset{n=k\to n=k+1}{\text{Переход:}}$ предположим, что теорема верна для всех турниров из n и менее вершин. Рассмотрим турнир τ из $(n+1)$ вершины. Так как по определению турнира между любой парой его различных вершин есть ровно 1 ориентированное ребро, любой подграф турнира будет турниром (так как рёбра между каждой парой вершин будут сохраняться).
Тогда, рассмотрим любой подтурнир из n вершин. По предположению индукции в нём есть гамильтонов путь. Не умаляя общности, пусть он имеет вид $v_1 \to v_2 \to ... \to v_n$.
По построению в τ есть либо ребро $v_{n+1} \to v_1$, либо ребро $v_1 \to v_{n+1}$. Если в нём есть $v_{n+1} \to v_1$, то $v_{n+1} \to v_1 \to v_2 \to ... \to v_n$ - искомый гамильтонов путь. В протином случае найдём первую по порядку вершину v_i (i уже гарантированно $\geqslant 2$), такую что в турнире есть ребро $v_{n+1} \to v_i$. Если такое ребро существует, то $v_1 \to ... \to v_{i-1} \to v_{n+1} \to v_i \to ... \to v_n$ - искомый гамильтонов путь. Если же его не существует, то $v_1 \to ... \to v_n \to v_{n+1}$ - искомый гамильтонов путь.
Таким образом, в любом турнире существует простой путь, включающий все вершины, чтд.