ИДЗ 4 по Алгебре

Татаринов Никита, БПИ196
Вариант 20

2020
июнь, 20

Задача №1

1. Составим из векторов соответствующие матрицы:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 10 & 9 & 6 \\ -7 & 4 & 5 & -10 \\ -9 & 1 & 7 & -9 \\ -2 & -7 & 4 & -9 \end{pmatrix} \end{array}, B = \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 & 0 \\ -10 & -5 & 20 & -5 \\ -6 & 2 & 22 & -18 \\ 8 & -3 & -30 & 25 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Тогда, матрица линейного оператора M связана с A и B через выражение $B = M \cdot A$, то есть $M = B \cdot A^{-1}$.

$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}^T$, где A_{ij} - алгебраическое дополнение, то есть

$$A^{-1} = \frac{1}{(-4496)} \cdot \begin{pmatrix} -278 & -94 & -398 & -42 \\ -696 & -672 & 168 & 752 \\ 1210 & 490 & 18 & -642 \\ -622 & 194 & -470 & 278 \end{pmatrix}^T.$$

Таким образом, $M = B \cdot A^{-1} = \frac{1}{(-4496)} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -4 & 10 & 0 \\ -10 & -5 & 20 & -5 \\ -6 & 2 & 22 & -18 \\ 8 & -3 & -30 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -278 & -94 & -398 & -42 \\ -696 & -672 & 168 & 752 \\ 1210 & 490 & 18 & -642 \\ -622 & 194 & -470 & 278 \end{pmatrix}^T =$

$$\frac{1}{(-4496)} \cdot \begin{pmatrix} -1936 & 8544 & -9040 & -1744 \\ -4500 & 9920 & -10980 & -5540 \\ -6520 & -7008 & 5672 & -11224 \\ 8948 & 10208 & -8380 & 15492 \end{pmatrix} = \frac{1}{1124} \cdot \begin{pmatrix} 484 & -2136 & 2260 & 436 \\ 1125 & -2480 & 2745 & 1385 \\ 1630 & 1752 & -1418 & 2806 \\ -2237 & -2552 & 2095 & -3873 \end{pmatrix}.$$

2. $Ker\, M = \{$Векторы $c \mid M \cdot c = 0\}$, то есть необходимо найти все решения однородной СЛАУ $M \cdot c = 0$. Для этого приведём M к ступенчатому виду:

$$M = \frac{1}{1124} \cdot \begin{pmatrix} 484 & -2136 & 2260 & 436 \\ 1125 & -2480 & 2745 & 1385 \\ 1630 & 1752 & -1418 & 2806 \\ -2237 & -2552 & 2095 & -3873 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 121 & -534 & 565 & 109 \\ 0 & 107 & -108 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

x_3 и x_4 - главные переменные; x_1 и x_2 - зависимые.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{(-1)}{107} \cdot (23k + 167l) \\ x_2 = \dfrac{4}{107} \cdot (27k - 4l) \\ x_3 = k \\ x_4 = l \end{cases}$$

Значит, размерность ядра, равная размерности ФСР, равна $dim(KerM) = 2$.

3. $Im\, M = \{$Векторы $b \mid b = M \cdot a \quad \forall a$ из пространства$\}$. Матрица линейного оператора M переводит любые векторы из пространства в векторы из подпространства, в том числе и базисные: $E_2 = M \cdot E_1$. Так как в базисе все векторы линейно независимы, E_1 будет невырождена, то есть и ${E_1}^{-1}$ также будет невырождена ($det(X) \cdot det(X^{-1}) = 1$). Тогда по следствию из теоремы о ранге произведения матриц ранг матрицы $M = E_2 \cdot {E_1}^{-1}$ будет совпадать с рангом матрицы E_2, то есть в конечном подпространстве $Rg(M) = 2$ базисных вектора, то есть $dim(Im\, M) = 2$.

Ответ: матрица линейного оператора равна $\frac{1}{1124} \cdot \begin{pmatrix} 484 & -2136 & 2260 & 436 \\ 1125 & -2480 & 2745 & 1385 \\ 1630 & 1752 & -1418 & 2806 \\ -2237 & -2552 & 2095 & -3873 \end{pmatrix}$; размерность ядра линейного отображения равна 2; размерность образа линейного отображения равна 2.

Задача №2

Применим алгоритм нахождения жордановой нормальной формы для матрицы $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ -45 & -6 & 1 & 0 \\ -199 & -48 & 12 & 0 \\ 62 & 15 & -2 & 5 \end{bmatrix}$.

1. Составим характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E) = det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -45 & -6-\lambda & 1 & 0 \\ -199 & -48 & 12-\lambda & 0 \\ 62 & 15 & -2 & 5-\lambda \end{bmatrix}$, разложив A по последнему столбцу:

   $det(A - \lambda E) = (-1)^{4+4} \cdot (5-\lambda) \cdot det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 1 & 0 \\ -45 & -6-\lambda & 1 \\ -199 & -48 & 12-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda) \cdot \left((-1)^{1+1} \cdot (9-\lambda) \cdot det \begin{bmatrix} -6-\lambda & 1 \\ -48 & 12-\lambda \end{bmatrix} + \right.$
   $\left. (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot det \begin{bmatrix} -45 & 1 \\ -199 & 12-\lambda \end{bmatrix} \right) = (5-\lambda) \cdot (\,(9-\lambda) \cdot (\lambda^2 - 6\lambda - 24) - (45\lambda - 341)\,) =$

$(5-\lambda)(-\lambda^3+15\lambda^2-75\lambda+125) = (5-\lambda)^4$, – то есть у данной матрицы единственное собственное значение: $\lambda_1 = 5, m_1 = 4$, – то есть один жорданов блок.

2. Вычислим геометрическую кратность λ_1 : $\begin{bmatrix} 9-\lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ -45 & -6-\lambda_1 & 1 & 0 \\ -199 & -48 & 12-\lambda_1 & 0 \\ 62 & 15 & -2 & 5-\lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -45 & -11 & 1 & 0 \\ -199 & -48 & 7 & 0 \\ 62 & 15 & -2 & 0 \end{bmatrix} \to$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, то есть $s_1 = 2$.

   Тогда количество жордановых клеток внутри блока равно 2, то есть их размерности могут быть либо 3 и 1, либо 2 и 2.

3. Вычислим количество клеток размерности 1: $t_1 = r_2 - 2r_1 + r_0$.
   $r_0 = Rg\,(A-\lambda_1 E)^0 = Rg\,E = 4.$
   $r_1 = Rg\,(A-\lambda_1 E)^1 = Rg \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2.$
   $r_2 = Rg\,(A-\lambda_1 E)^2 = Rg \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -45 & -11 & 1 & 0 \\ -199 & -48 & 7 & 0 \\ 62 & 15 & -2 & 0 \end{bmatrix}^2 = Rg \begin{bmatrix} -29 & -7 & 1 & 0 \\ 116 & 28 & -4 & 0 \\ -29 & -7 & 1 & 0 \\ -29 & -7 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to Rg \begin{bmatrix} 29 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1.$
   $t_1 = 1 - 2\cdot 2 + 4 = 1$, то есть размерности жордановых клеток 1 и 3, то есть жорданова нормальная форма матрицы имеет вид $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$.

Ответ: жорданова форма матрицы $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 0 & 0 \\ -45 & -6 & 1 & 0 \\ -199 & -48 & 12 & 0 \\ 62 & 15 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ имеет вид $\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$.

Задача №3

1. Если произвольная функция $g(p)$ является линейной формой, то для для неё выполняются условия:

   1) $g(p+q) = g(p) + g(q) \qquad \forall p, q \in \mathbb{R}_3[x];$
   2) $g(\alpha p) = \alpha g(p) \qquad \forall p \in \mathbb{R}_3[x] \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

   Покажем, что данные условия выполняются и для $f(p)$.

   1) $p(x) = p_3x^3 + p_2x^2 + p_1x + p_0$, $q(x) = q_3x^3 + q_2x^2 + q_1x + q_0$, то есть:
      $p(0) = p_0;$
      $q(0) = q_0;$

$\big(p+q\big)(0) = \Big((p_3+q_3)x^3+(p_2+q_2)x^2+(p_1+q_1)x+(p_0+q_0)\Big) = (p_0+q_0);$
$p(1) = p_3+p_2+p_1+p_0;$
$q(1) = q_3+q_2+q_1+q_0;$
$\big(p+q\big)(1) = (p_3+q_3)+(p_2+q_2)+(p_1+q_1)+(p_0+q_0).$
Тогда $f(p+q) = \big(p+q\big)(0)+\big(p+q\big)(1) = \big(p_0+q_0\big)+\big((p_3+q_3)+(p_2+q_2)+(p_1+q_1)+(p_0+q_0)\big) = \big(p_3\cdot 0^3+p_2\cdot 0^2+p_1\cdot 0+p_0+q_3\cdot 0^3+q_2\cdot 0^2+q_1\cdot 0+q_0\big)+\big((p_3+p_2+p_1+p_0)+(q_3+q_2+q_1+q_0)\big) = \big(p(0)+q(0)\big)+\big(p(1)+q(1)\big) = f(p)+f(q).$

2) $p(x) = p_3x^3+p_2x^2+p_1x+p_0$, $\big(\alpha p\big)(x) = \alpha p_3x^3+\alpha p_2x^2+\alpha p_1x+\alpha p_0$, то есть:
$p(0) = p_0;$
$p(1) = p_3+p_2+p_1+p_0;$
$\big(\alpha p\big)(0) = \alpha p_0;$
$\big(\alpha p\big)(1) = \alpha p_3+\alpha p_2+\alpha p_1+\alpha p_0.$
Тогда $f(\alpha p) = \big(\alpha p\big)(0)+\big(\alpha p\big)(1) = \alpha p_0+\alpha p_3+\alpha p_2+\alpha p_1+\alpha p_0 = \alpha\big(p_0+p_3+p_2+p_1+p_0\big) = \alpha\big(p(0)+p(1)\big) = \alpha f(p).$

Таким образом, $f(p)$ действительно является линейной формой, чтд.

2. Необходимо найти строки координатной записи функции (координатами которой будут являться образы базисных векторов) в базисе:

   а) $[1, x, x^2, x^3]$.
   $f(1) = 1(0)+1(1) = 2;$
   $f(x) = x(0)+x(1) = 1;$
   $f(x^2) = (x^2)(0)+(x^2)(1) = 1;$
   $f(x^3) = (x^3)(0)+(x^3)(1) = 1.$
   Тогда, искомая строка имеет вид $(2, 1, 1, 1)$.

   б) $[4, x+10, x^2-x-4, x^3+10x^2+3x-1]$.
   $f(4) = 4(0)+4(1) = 8;$
   $f(x+10) = (x+10)(0)+(x+10)(1) = 21;$
   $f(x^2-x-4) = (x^2-x-4)(0)+(x^2-x-4)(1) = -8;$
   $f(x^3+10x^2+3x-1) = (x^3+10x^2+3x-1)(0)+(x^3+10x^2+3x-1)(1) = 12.$
   Тогда, искомая строка имеет вид $(8, 21, -8, 12)$.

Ответ: строки координатной записи функции в базисе

а) $[1, x, x^2, x^3]$ имеет вид $(2, 1, 1, 1)$;

б) $[4, x+10, x^2-x-4, x^3+10x^2+3x-1]$ имеет вид $(8, 21, -8, 12)$.

Задача №4

В пространстве $\mathbb{R}^3$ необходимо найти базис $\mathbf{f}=(f^1, f^2, f^3)$, взаимный с $\mathbf{e}=(e_1, e_2, e_3)$, где $e_1 = [-4; -9; 4]^T, e_2 = [3; -14; -9]^T, e_3 = [-8; -12; -11]^T$. Для этого необходимо построить матрицу $G^{-1}\cdot\begin{pmatrix} {e_1}^T \\ {e_2}^T \\ {e_3}^T \end{pmatrix}$, где $G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_2) & (e_1, e_3) \\ (e_2, e_1) & (e_2, e_2) & (e_2, e_3) \\ (e_3, e_1) & (e_3, e_2) & (e_3, e_3) \end{pmatrix}$ - матрица Грама для векторов e_1, e_2, e_3. В таком случае, строки получившейся матрицы и будут являться транспонированными векторами f^1, f^2, f^3, взаимными с e_1, e_2, e_3.

$$G = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16+81+16 & -12+126-36 & 32+108-44 \\ -12+126-36 & 9+196+81 & -24+168+99 \\ 32+108-44 & -24+168+99 & 64+144+121 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 113 & 78 & 96 \\ 78 & 286 & 243 \\ 96 & 243 & 329 \end{pmatrix}$$, то есть $G^{-1} = \frac{1}{2961841}\begin{pmatrix} 35045 & -2334 & -8502 \\ -2334 & 27961 & -19971 \\ -8502 & -19971 & 26234 \end{pmatrix}$.

Тогда $G^{-1} \cdot \begin{pmatrix} {e_1}^T \\ {e_2}^T \\ {e_3}^T \end{pmatrix} = \frac{1}{2961841}\begin{pmatrix} 35045 & -2334 & -8502 \\ -2334 & 27961 & -19971 \\ -8502 & -19971 & 26234 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -9 & 4 \\ 3 & -14 & -9 \\ -8 & -12 & -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{1721}\begin{pmatrix} -46 & -105 & 148 \\ 147 & -76 & -24 \\ -137 & 24 & -83 \end{pmatrix}$,

то есть $f^1 = [\frac{-46}{1721}, \frac{-105}{1721}, \frac{148}{1721}]^T, f^2 = [\frac{147}{1721}, \frac{-76}{1721}, \frac{-24}{1721}]^T, f^3 = [\frac{-137}{1721}, \frac{24}{1721}, \frac{-83}{1721}]^T$.

Ответ: базис **f**$= (f^1, f^2, f^3)$, взаимный с **e**$= (e_1, e_2, e_3)$, состоит из векторов $f^1 = [\frac{-46}{1721}, \frac{-105}{1721}, \frac{148}{1721}]^T, f^2 = [\frac{147}{1721}, \frac{-76}{1721}, \frac{-24}{1721}]^T, f^3 = [\frac{-137}{1721}, \frac{24}{1721}, \frac{-83}{1721}]^T$.

Задача №5

Применим алгоритм ортогонализации Грама-Шмидта для столбцов матрицы A.

$A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, то есть $a_1 = (-4,-4,3)^T, a_2 = (-2,2,-4)^T, a_3 = (2,1,2)^T$. Тогда:

1) $b_1 = a_1 = (-4,-4,3)^T$;

2) $b_2 = a_2 - \frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1 = (-2,2,-4)^T - \frac{(8-8-12)}{(16+16+9)}(-4,-4,3)^T = (-2,2,-4)^T + \frac{12}{41}(-4,-4,3)^T = (-2,2,-4)^T + (\frac{-48}{41}, \frac{-48}{41}, \frac{36}{41})^T = (\frac{-130}{41}, \frac{34}{41}, \frac{-128}{41})^T$;

3) $b_3 = a_3 - \frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)}b_2 - \frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)}b_1 = a_3 = (2,1,2)^T - \frac{(\frac{-260}{41}+\frac{34}{41}+\frac{-256}{41})}{(\frac{16900}{1681}+\frac{1156}{1681}+\frac{16384}{1681})}(\frac{-130}{41}, \frac{34}{41}, \frac{-128}{41})^T - \frac{(-8-4+6)}{(16+16+9)}(-4,-4,3)^T = (2,1,2)^T + \frac{41 \cdot 482}{34440}(\frac{-130}{41}, \frac{34}{41}, \frac{-128}{41})^T + \frac{6}{41}(-4,-4,3)^T = (2,1,2)^T + (\frac{-62660}{34440}, \frac{16388}{34440}, \frac{-61696}{34440})^T + (\frac{-24}{41}, \frac{-24}{41}, \frac{18}{41})^T = (\frac{58}{41}, \frac{17}{41}, \frac{100}{41})^T + (\frac{-3133}{42 \cdot 41}, \frac{4097}{210 \cdot 41}, \frac{-7712}{105 \cdot 41})^T = (-\frac{697}{42 \cdot 41}, \frac{7667}{210 \cdot 41}, \frac{2788}{105 \cdot 41})^T$.

Значит, $Q = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & \frac{-130}{41} & -\frac{697}{42 \cdot 41} \\ -4 & \frac{34}{41} & \frac{7667}{210 \cdot 41} \\ 3 & \frac{-128}{41} & \frac{2788}{105 \cdot 41} \end{pmatrix} \end{array}$. Тогда $R = Q^{-1}A = \begin{pmatrix} 42 & -12 & -6 \\ 0 & \frac{840}{41} & \frac{-482}{41} \\ 0 & 0 & \frac{289}{210} \end{pmatrix}$.

Ответ: $A = \begin{bmatrix} -4 & -2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix} = QR = \begin{pmatrix} -4 & \frac{-130}{41} & -\frac{697}{42 \cdot 41} \\ -4 & \frac{34}{41} & \frac{7667}{210 \cdot 41} \\ 3 & \frac{-128}{41} & \frac{2788}{105 \cdot 41} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 42 & -12 & -6 \\ 0 & \frac{840}{41} & \frac{-482}{41} \\ 0 & 0 & \frac{289}{210} \end{pmatrix}$.

Задача №6

Подпространство задано системой:

$$\begin{cases} 9x_1 - 7x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 9x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

1. Найдём базисные векторы подпространства: $\begin{pmatrix} 9 & -7 & 2 & 8 \\ 3 & -3 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9 & -7 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & -25 & 5 \\ 0 & 0 & 597 & -131 \end{pmatrix}$.

   $$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{149}{199}k \\ x_2 = \dfrac{145}{597}k \\ x_3 = \dfrac{131}{597}k \\ x_4 = k \end{cases}$$

   Тогда $(-447; 145; 131; 597)^T$ - базисный вектор.

2. Базисными векторами ортогонального дополнения будут являться строки матрицы СЛАУ: $(9; -7; 2; 8)^T$, $(3; -3; 9; 1)^T$ и $(4; 5; -1; 2)^T$.

3. Разложим α на перпендикулярную и параллельную составляющие: $\alpha = \alpha_{||} + \alpha_\perp = w_1 \begin{pmatrix} -447 \\ 145 \\ 131 \\ 597 \end{pmatrix} + v_1 \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} + v_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + v_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   $$\begin{pmatrix} -447 & 9 & 3 & 4 \\ 145 & -7 & -3 & 5 \\ 131 & 2 & 9 & -1 \\ 597 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \alpha$$

   $\left(\begin{array}{cccc|c} -447 & 9 & 3 & 4 & 3 \\ 145 & -7 & -3 & 5 & -1 \\ 131 & 2 & 9 & -1 & -5 \\ 597 & 8 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -447 & 9 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -1824 & -906 & 2815 & -12 \\ 0 & 0 & 13818 & 13369 & -7572 \\ 0 & 0 & 0 & 148601 & 21312 \end{array}\right)$, то есть $\begin{pmatrix} w_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{211}{148601} \\ \frac{84558}{148601} \\ -\frac{102050}{148601} \\ \frac{21312}{148601} \end{pmatrix}$.

   Тогда $\alpha_\perp = \frac{84558}{148601} \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \frac{102050}{148601} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{21312}{148601} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{540120}{148601} \\ -\frac{179196}{148601} \\ -\frac{770646}{148601} \\ \frac{617038}{148601} \end{pmatrix}$, то есть $|\alpha_\perp| = \frac{\sqrt{1298471971576}}{148601} = \frac{26 \cdot \sqrt{1920816526}}{148601}$.

4. Так как угол между вектором α и подпространством равен углу между этим вектором и его параллельной составляющей на подпространстве, $cos(\widehat{\alpha, L}) = \frac{(\alpha,\alpha_{||})}{|\alpha|\cdot|\alpha_{||}|}$.
$\alpha_{||} = \begin{pmatrix} \frac{-94317}{148601} \\ \frac{30595}{148601} \\ \frac{27641}{148601} \\ \frac{125967}{148691} \end{pmatrix}$, то есть $cos(\widehat{\alpha, L}) = \frac{\frac{178084}{148601}}{\frac{\sqrt{26463460484}}{148601}\cdot\sqrt{60}} = \frac{178084}{\sqrt{60}\sqrt{26463460484}}$.

Ответ: расстояние от вектора до подпространства равно $\frac{26\sqrt{1920816526}}{147601}$; косинус угла между ними равен $\frac{178084}{\sqrt{60}\sqrt{26463460484}}$.

Задача №7

Поскольку $x_1 \in \{t_1v_1 + t_2v_2 + x_1\}$ и $x_2 \in \{t_1w_1 + t_2w_2 + x_2\}$, вектор $x_2 - x_1$ будет соединять точки двух данных многообразий, то есть длина его проекции, перпендикулярной обоим многообразиям, и будет расстоянием между многообразиями.
Рассмотрим все векторы a, перпендикулярные обоим многообразиям.

$$\begin{cases} (a, v_1) = 0 \\ (a, v_2) = 0 \\ (a, w_1) = 0 \\ (a, w_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{array} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = k \\ a_4 = 0 \\ a_5 = 0 \end{cases}$$

Тогда, $a_0 = (0, 0, 1, 0, 0)^T$ и $(x_2 - x_1)_\perp = \mu a_0$. При этом $\big((x_2 - x_1), a_0\big) = \big((x_2 - x_1)_\perp + (x_2 - x_1)_{||}, a_0\big) = \big((x_2 - x_1)_\perp, a_0\big) + \big((x_2 - x_1)_{||}, a_0\big)$, а так как $\big((x_2 - x_1)_{||}, a_0\big) = 0$ $\big(\big((x_2 - x_1)_{||}, a_0\big)$ параллельно многообразиям, а a_0 перпендикулярно им), то $\big((x_2 - x_1), a_0\big) = \big((x_2 - x_1)_\perp, a_0\big) = \big(\mu a_0, a_0\big) = \mu(a_0, a_0)$, откуда $\mu = \frac{\big((x_2 - x_1), a_0\big)}{(a_0, a_0)} = 39$, значит, $|(x_2 - x_1)_\perp| = |\mu a_0| = 39$.

Ответ: расстояние между многообразиями равно 39.

Задача №8

Составим характеристический многочлен: $\chi_A(\lambda) = det(A{-}\lambda E) = det\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{pmatrix} =$ $-\lambda^3+2\lambda^2-2\lambda+1 = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda+1) = (1-\lambda)(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}-\lambda)(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}-\lambda) = (1-\lambda)(cos(\frac{\pi}{3})+isin(\frac{\pi}{3})-\lambda)(cos(-\frac{\pi}{3})+isin(-\frac{\pi}{3})-\lambda)$. Тогда, в каноническом виде матрица равна $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, а угол поворота равен $\frac{\pi}{3}$.

Для нахождения оси поворота приведём матрицу $A{-}\lambda_1 E$ к ступенчатому виду: $\begin{pmatrix} \frac{2}{3}-\lambda_1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda_1 & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda_1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{cases} x_1 = 3k \\ x_2 = k \\ x_3 = k \end{cases}$$

Значит, любые 2 ненулевых вектора отличаются друг от друга на коэффициент, то есть любой из них может задавать ось поворота: пусть $(3;1;1)^T$.

Ответ: канонический вид ортогонального оператора: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; угол поворота равен $\frac{\pi}{3}$; ось поворота равна $(3;1;1)^T$

Задача №9

Матрицу оператора можно привести ортогональными преобразованиями к диагональному виду, если равны алгебраическая и геометрическая кратность всех её собственных значений.
Для данной матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{13}{3} \end{pmatrix}$ составим характеристический многочлен: $\chi_A(\lambda) =$ $det(A-\lambda E) = det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3}-\lambda & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{13}{3}-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-5)$.
Таким образом, в данной матрице 3 собственных значения, алгебраическая кратность каждого из которых равна 1, а так как $0 < s_i \leqslant m_i$ для любого собственного значения, то и геометрическая кратность каждого из данных собственных значений равна 1, то есть данная матрица приводима к диагональному виду.
Для этого необходимо привести матрицу $A - \lambda E$ для каждого из собственных значений к ступенчатому виду, составляя векторы $e_1, e_2, e_3 (|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1)$ для матрицы преобразования.

1. $\begin{pmatrix} 4-\lambda_1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3}-\lambda_1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{13}{3}-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (s_1 = 1).$

$$\begin{cases} x_1 = (-2)k \\ x_2 = (-2)k \\ x_3 = k \\ \ \ 1 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \end{cases}$$

$k = -\frac{1}{3}$, то есть $e_1 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})^T$.

2. $\begin{pmatrix} 4-\lambda_2 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3}-\lambda_2 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{13}{3}-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (s_2 = 1).$

$$\begin{cases} x_1 = (-\dfrac{1}{2})k \\ x_2 = k \\ x_3 = k \\ \ \ 1 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \end{cases}$$

$k = \frac{2}{3}$, то есть $e_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})^T$.

3. $\begin{pmatrix} 4-\lambda_3 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3}-\lambda_3 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{13}{3}-\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (s_3 = 1).$

$$\begin{cases} x_1 = k \\ x_2 = (-\dfrac{1}{2})k \\ x_3 = k \\ \ \ 1 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \end{cases}$$

$k = \frac{2}{3}$, то есть $e_3 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})^T$.

Таким образом, матрица в диагональном виде равна $\left(\begin{array}{c|c|c} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$, а матрица преобразования имеет вид $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$.

Ответ: да, возможно; матрица преобразования: $\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \end{array}$; диагональный вид:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{1}{|c|}{4} & 0 \\ \cline{2-3} 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{5} \end{array}\right).$$

Задача №10

Найдём сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = V \cdot \Sigma \cdot U^T$.

Для этого составим характеристический многочлен: $\chi_{A^T \cdot A}(\lambda) = det(A^T \cdot A - \lambda E) = det \begin{pmatrix} 10-\lambda & -6 & -6 \\ -6 & 10-\lambda & -6 \\ -6 & -6 & 18-\lambda \end{pmatrix} =$ $-\lambda(16-\lambda)(22-\lambda)$, то есть $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{22} & 0 \end{pmatrix}$.

Приведём матрицу $A^T \cdot A - \lambda E$ для каждого из собственных значений к ступенчатому виду, составляя векторы $e_1, e_2, e_3 (|e_1| = |e_2| = |e_3| = 1)$ для матрицы U.

1. $\begin{pmatrix} 10-\lambda_1 & -6 & -6 \\ -6 & 10-\lambda_1 & -6 \\ -6 & -6 & 18-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -6 & -6 \\ -6 & 10 & -6 \\ -6 & -6 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   $$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3}{2}k \\ x_2 = \dfrac{3}{2}k \\ x_3 = k \\ \ 1 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \end{cases}$$

   $k = \frac{2}{\sqrt{22}}$, то есть $e_1 = (\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}})^T$.

2. $\begin{pmatrix} 10-\lambda_2 & -6 & -6 \\ -6 & 10-\lambda_2 & -6 \\ -6 & -6 & 18-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -6 \\ -6 & -6 & -6 \\ -6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   $$\begin{cases} x_1 = -k \\ x_2 = k \\ x_3 = 0 \\ \ 1 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \end{cases}$$

   $k = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^T$.

3. $\begin{pmatrix} 10-\lambda_3 & -6 & -6 \\ -6 & 10-\lambda_3 & -6 \\ -6 & -6 & 18-\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -6 & -6 \\ -6 & -12 & -6 \\ -6 & -6 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{3}k \\ x_2 = -\dfrac{1}{3}k \\ x_3 = k \\ \ 1 = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 \end{cases}$$

$k = -\frac{3}{\sqrt{11}}$, то есть $e_1 = (\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, -\frac{3}{\sqrt{11}})^T$.

В такое случае, $U = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_2 & e_3 & e_1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix} \end{array}.$

Матрица V будет состоять из ортогонализованных векторов $\frac{Ae_2}{\sigma_2} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ и $\frac{Ae_3}{\sigma_3} = \frac{1}{\sqrt{22}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \\ -\frac{3}{\sqrt{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Так как $\left(\frac{Ae_2}{\sigma_2}, \frac{Ae_3}{\sigma_3}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$, векторы уже ортогонализованы, то есть $V = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Проверим: $V \cdot \Sigma \cdot U^T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{22} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & \sqrt{11} & 0 \\ -2\sqrt{2} & -\sqrt{11} & 0 \end{pmatrix} \cdot$ $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = A.$

Если в разложении оставить только первое сингулярное число, а остальные сингулярные числа заменить нулями, то получится матрица $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}^T =$ $\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ -2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & -\frac{3}{\sqrt{11}} \\ \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{3}{\sqrt{22}} & \frac{2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$

Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = V \cdot \Sigma \cdot U^T = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{22} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{3}{\sqrt{22}} \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{11}} & \frac{2}{\sqrt{22}} \end{pmatrix}^T;$

если в разложении оставить только первое сингулярное число, а остальные сингулярные числа заменить нулями, то получится матрица $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.