

Лекция 2

по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.09.15

Введение в дифференциальные и разностные уравнения

Примеры разностных уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} P(t) \text{ - численность омёб в момент } t \\ P(t) = 2 \cdot P(t) \\ P(0) = 100 \end{array} \right| \text{ разностное уравнение 1го порядка}$$

$$y(t) = 2 - y(t-1) + 0.5 \cdot y(t-2) \quad \text{разностное уравнение 2го порядка}$$

Это было в школе (1):

$$y(k) = y(k-1) + b \quad \rightarrow \quad y(k) = y(0) + k \cdot b$$

$$y(k) = C + k \cdot b \quad \text{- общее решение разностного уравнения}$$

$$y(k) = 3 + k \cdot b \quad \text{- частное решение, удовлетворяющее условию } y(0) = 3$$

Это было в школе (2):

$$y(k) = a \cdot y(k-1) \quad \rightarrow \quad y(k) = a^k \cdot y(0)$$

$$y(k) = C \cdot a^k \quad \text{- общее решение разностного уравнения}$$

Этого в школе не было, но сводится:

$$y(k) = a \cdot y(k-1) + b \quad \rightarrow \quad y(k) = a^k \cdot y(0) + b \cdot \frac{a^k - 1}{a - 1}$$

$$y(k) = C \cdot a^k + b \cdot \frac{a^k - 1}{a - 1} \quad \text{- общее решение разностного уравнения}$$

При $|a| < 0$:

$$a^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$$

$$y(k) \rightarrow \frac{b}{1-a}$$

При $|a| > 0$:

$$\nexists \lim_{k \rightarrow +\infty} y(k)$$

При $|a| = 1$?

Стационарное решение:

$$y(k) = y(k-1) = y(k-2) = \dots$$

Примеры дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = y+3$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = 50 \cdot x^3$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - 2y = 2 \cdot x^4$$

Пример решения:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cdot x$$

$$\int \frac{dy}{dx} \cdot dx = \int 2 \cdot x \cdot dx + C$$

$$y = x^2 + C \quad - \text{общее решение дифференциального уравнения}$$

Начальное условие $y(0) = 12$:

$$y(0) = C \rightarrow C = 12$$

$$y = x^2 + 12 \quad - \text{частное решение дифференциального уравнения}$$

Школьный пример:

$$\begin{cases} y(t) & - \text{высота шарика в момент } t \\ y(0) & = 50 \\ \dot{y}(0) & = 0 \\ \ddot{y} & = -9.81 \end{cases}$$

Ищем скорость:

$$\dot{y} = \int \ddot{y} \cdot dt + C = \int (-9.81) \cdot dt + C = (-9.81) \cdot t + C$$

Из начальных условий:

$$0 = \dot{y}(0) = (-9.81) \cdot 0 + C = C$$

Ищем высоту:

$$y = \int \dot{y} \cdot dt + C = \int (-9.81) \cdot t \cdot dt + C = \left(-\frac{9.81}{2}\right) \cdot t^2 + C$$

Из начальных условий:

$$50 = y(0) = \left(-\frac{9.81}{2}\right) \cdot 0^2 + C = C$$

Частное решение:

$$y(t) = \left(-\frac{9.81}{2}\right) \cdot t^2 + 50$$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} \cdot \varphi(y) = f(x)$$

Схема решения:

$$\varphi(y) \cdot dy = f(x) \cdot dx$$

$$\int \varphi(y) \cdot dy = \int f(x) \cdot dx + C$$

Линейное дифференциальное уравнение (метод вариации произвольной постоянной)

$$\frac{dy}{dx} + a(x) \cdot y = f(x)$$

Интегрирующий множитель:

$$u(x) = e^{\int a(x) \cdot dx}$$

Домножаем:

$$\frac{dy}{dx} \cdot u(x) + a(x) \cdot u(x) \cdot y = f(x) \cdot u(x)$$

Пусть $g(x) = y(x) \cdot u(x)$. Тогда:

$$\frac{dg}{dx} = f(x) \cdot u(x)$$

$$g(x) = \int dg = \int f(x) \cdot u(x) \cdot dx + C$$

$$y = \frac{g(x)}{u(x)}$$