Лекция 14

МНК для множественной регрессии.
Свойства МНК.
Коэффициент детерминации.
Качественные признаки в уравнении регрессии.

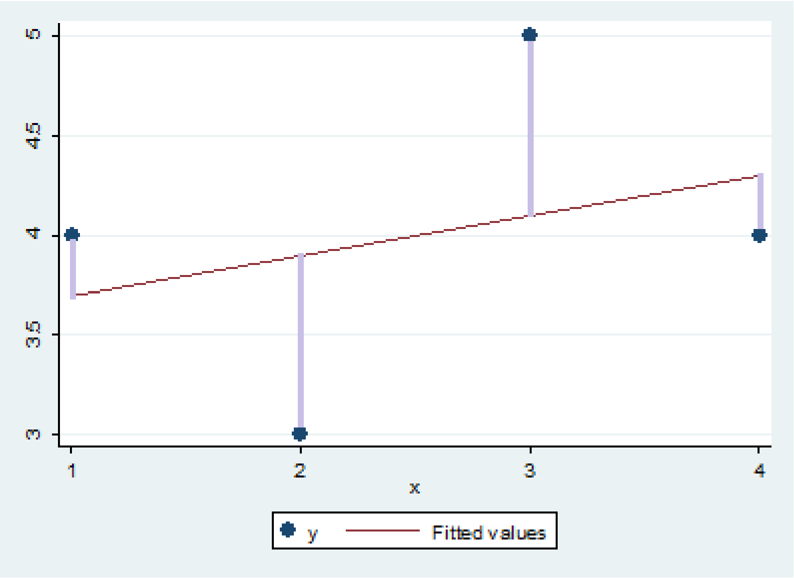
Напоминалка: МНК для парной регрессии - I

Имеются данные $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, которые мы желаем представить в виде

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i.$$

Задача о наименьших квадратах. Найдите значения β_1 и β_2, при которых сумма квадратов отклонений значений объясняемой величины Y_i от значений линейной функции $\beta_1 + \beta_2 X_i$ минимальна.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - (\beta_1 + \beta_2 X_i)\right)^2 \xrightarrow[\beta_1, \beta_2]{} \min.$$



Напоминалка: МНК для парной регрессии - II

Имеются данные $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, которые мы желаем представить в виде

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_i + \varepsilon_i.$$

Мы нашли оценки метода наименьших квадратов $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$:

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X}; \\ \hat{\beta}_2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}. \end{cases}$$

Получили оценённое уравнение регрессии $\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X$.

Для всех наблюдений в выборке мы можем рассчитать прогнозные (модельные) значения:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_i.$$

Остатки (residuals):

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i.$$

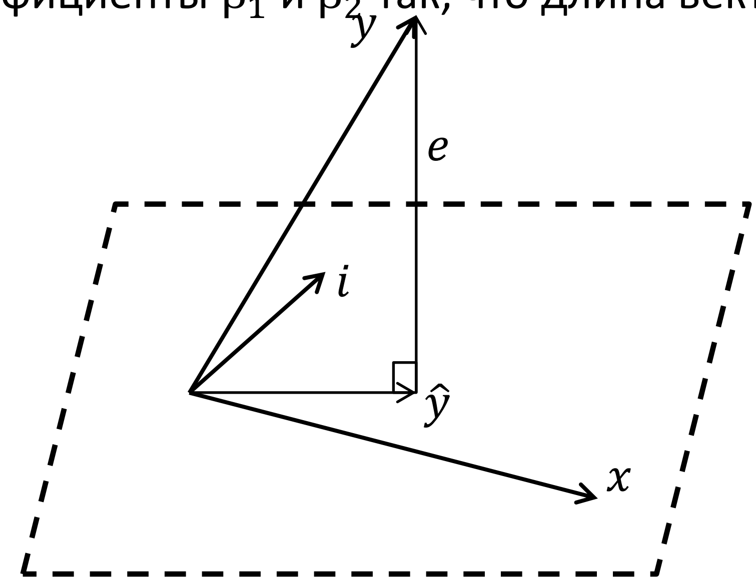
Напоминалка: МНК для парной регрессии - III

Рассмотрим векторы

$$\underbrace{y}_{(n\times 1)} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}; \quad \underbrace{i}_{(n\times 1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \underbrace{x}_{(n\times 1)} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{pmatrix}; \quad \underbrace{\hat{y}}_{(n\times 1)} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \dots \\ \hat{Y}_n \end{pmatrix} = \hat{\beta}_1 i + \hat{\beta}_2 x; \quad \underbrace{e}_{(n\times 1)} = y - \hat{y}.$$

$$\begin{cases} i'e = 0; \\ x'e = 0. \end{cases}$$

МНК подбирает коэффициенты $\hat{\beta}_1$ и $\hat{\beta}_2$ так, что длина вектора остатков e минимальна.



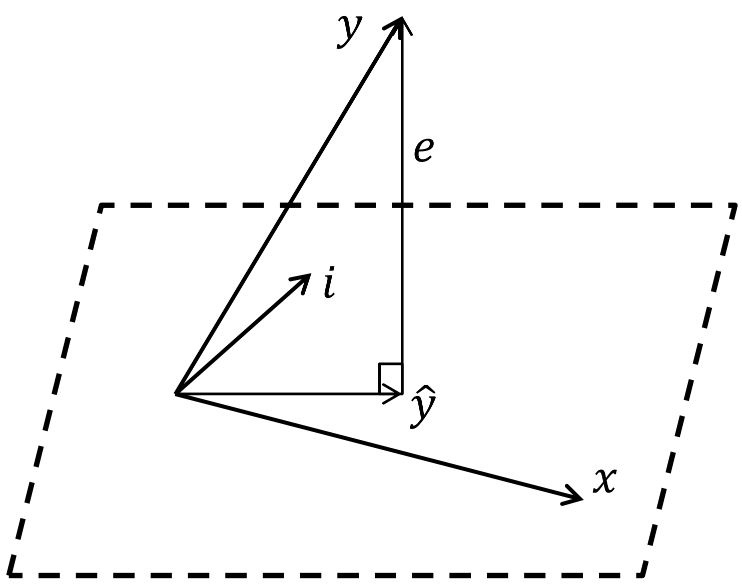
$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e$$

квадрат длины вектора e

Геометрическая интерпретация МНК – V: мораль

Вектор прогнозов $\hat{y}$ – ортогональная проекция вектора y на плоскость векторов i и x.

Вектор остатков e – ортогональная проекция вектора y на дополнение к плоскости векторов i и x.



$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = e'e$$

квадрат длины вектора e

МНК для множественной регрессии - I

Объясняемая переменная: Y_i.

Объясняющие переменные: $X_{2,i}, X_{3,i}, \dots, X_{k,i}$.

Имеются данные $\left(X_{2,1}, X_{3,1}, \dots, X_{k,1}, Y_1\right), \dots, (X_{2,n}, X_{3,n}, \dots, X_{k,n}, Y_n)$, которые мы желаем представить в виде

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + \beta_3 X_{3,i} + \dots + \beta_k X_{k,i} + \varepsilon_i.$$

Задача о наименьших квадратах. Найдите значения $\beta_1, \dots, \beta_k$, при которых сумма квадратов отклонений значений объясняемой величины Y_i от значений линейной функции $\beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + \beta_3 X_{3,i} + \dots + \beta_k X_{k,i}$ минимальна.

$$\sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \left(\beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + \beta_3 X_{3,i} + \dots + \beta_k X_{k,i}\right)\right)^2 \xrightarrow[\beta_1,\dots,\beta_k]{} \min.$$

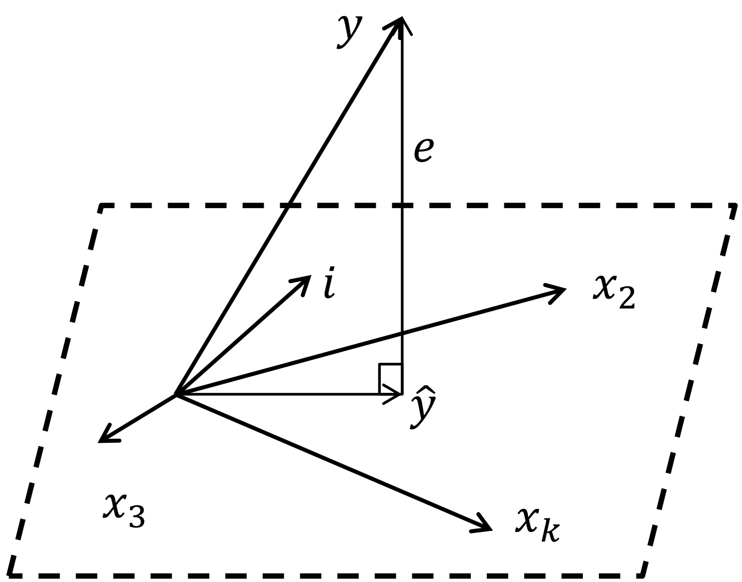
МНК для множественной регрессии - II

Рассмотрим векторы

$$\underbrace{y}_{(n\times 1)} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}; \ \underbrace{i}_{(n\times 1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}; \ \underbrace{x_j}_{(n\times 1)} = \begin{pmatrix} X_{j,1} \\ X_{j,2} \\ \dots \\ X_{j,n} \end{pmatrix}; \ \underbrace{\hat{y}}_{(n\times 1)} = \begin{pmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \dots \\ \hat{Y}_n \end{pmatrix} = \hat{\beta}_1 i + \hat{\beta}_2 x_2 + \dots + \hat{\beta}_k x_k;$$

$$\underbrace{e}_{(n\times 1)} = y - \hat{y}.$$

МНК подбирает коэффициенты $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k$ так, что длина вектора остатков e минимальна => $\hat{y}$ – ортогональная проекция вектора y на пространство векторов i и $x_2, \dots, x_k$.



$$\begin{cases} i'e = 0; \\ x_2'e = 0; \\ x_3'e = 0; \\ \dots \\ x_k'e = 0. \end{cases}$$

МНК для множественной регрессии - III

Решаем систему:

$$\begin{cases} i'e = 0; \\ x_2'e = 0; \\ x_3'e = 0; \\ \dots \\ x_k'e = 0. \end{cases}$$

Пусть $\underbrace{X}_{(nxk)} = (i\ x_2\ x_3\ \dots x_k) = \begin{pmatrix} 1 & X_{2,1} & X_{3,1} & \dots & X_{k,1} \\ 1 & X_{2,2} & X_{3,2} & \dots & X_{k,2} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{2,n} & X_{3,n} & \dots & X_{k,n} \end{pmatrix}$.

В матричном виде система (*) записывается так: $X'e = \underbrace{0}_{(kx1)}$.

Теперь нужно выразить остатки через коэффициенты регрессии и решить уравнение относительно коэффициентов.

МНК для множественной регрессии – IV

Уравнение регрессии: $Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + \beta_3 X_{3,i} + \cdots + \beta_k X_{k,i} + \varepsilon_i$.

В векторной записи: $y = \beta_1 i + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon$, где $\underbrace{\varepsilon}_{(n\times 1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$.

В матричной записи: $y = X\beta + \varepsilon$, где $\underbrace{\beta}_{(k\times 1)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_k \end{pmatrix}$

Вектор прогнозов: $\hat{y} = \hat{\beta}_1 i + \hat{\beta}_2 x_2 + \cdots + \hat{\beta}_k x_k = X\hat{\beta}$, где $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \dots \\ \hat{\beta}_k \end{pmatrix}$.

Остатки: $e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta}$.

Условие ортогональности:

$$X'e = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X'\left(y - X\hat{\beta}\right) = 0.$$

МНК для множественной регрессии – V

Условие ортогональности:

$$X'e = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X'\left(y - X\hat{\beta}\right) = 0.$$

Раскрываем скобки:

$$X'y - X'X\hat{\beta} = 0.$$

Переносим:

$$X'X\hat{\beta} = X'y.$$

Домножаем слева на $(X'X)^{-1}$: *(а что если $(X'X)$ необратима?)*

$$(X'X)^{-1}X'X\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y.$$

Сокращаем:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y.$$

Вот и всё.

Подытожим

По данным $\left(X_{2,1}, X_{3,1}, \dots, X_{k,1}, Y_1\right), \dots, (X_{2,n}, X_{3,n}, \dots, X_{k,n}, Y_n)$ оценивается регрессия

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 X_{2,i} + \beta_3 X_{3,i} + \cdots + \beta_k X_{k,i} + \varepsilon_i.$$

Пусть $\underbrace{y}_{(n\times1)} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}$, $\underbrace{X}_{(nxk)} = \begin{pmatrix} 1 & X_{2,1} & X_{3,1} & \dots & X_{k,1} \\ 1 & X_{2,2} & X_{3,2} & \dots & X_{k,2} \\ 1 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & X_{2,n} & X_{3,n} & \dots & X_{k,n} \end{pmatrix}$, $\underbrace{\beta}_{(k\times1)} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_k \end{pmatrix}$, $\underbrace{\varepsilon}_{(n\times1)} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$.

Уравнение регрессии в матричной записи: $y = X\beta + \varepsilon$.

МНК-оценка вектора коэффициентов:

$$\boxed{\underbrace{\hat\beta}_{(k\times1)} = \begin{pmatrix} \hat\beta_1 \\ \hat\beta_2 \\ \dots \\ \hat\beta_k \end{pmatrix} = (X'X)^{-1}X'y.}$$

Вектор объясняемой переменной и его проекции

Ортогональная проекция y на пространство регрессоров (линейную оболочку X):

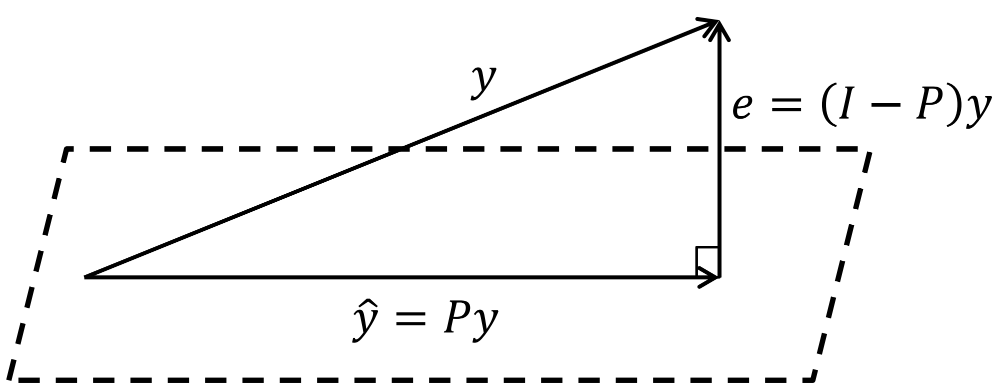
$$\hat{y} = X\hat{\beta} = X \underbrace{(X'X)^{-1}X'y}_{\hat{\beta}} = Py.$$

$P = X(X'X)^{-1}X'$ - матрица оператора ортогонального проецирования на пространство регрессоров (hat matrix).

Ортогональная проекция y на дополнение к пространству регрессоров:

$$e = y - \hat{y} = y - Py = (I - P)y.$$

$(I - P)$ – матрица оператора ортогонального проецирования на дополнение к пространству регрессоров.



Интерпретация коэффициентов в парной и множественной регрессии

Пример. По ежеквартальным данным об экономике США с I квартала 1952 г. по II квартал 1961 г. оценена зависимость конечного потребления C от располагаемого дохода Y и объёма ликвидных активов L:

$$\hat{C} = -10.63 + 0.68Y + 0.37L;$$

$$\hat{C} = -7.16 + 0.95Y.$$

Все переменные в млрд. долл. США 1954 года.

Интерпретация коэффициентов в парной и множественной регрессии

Пример. По ежеквартальным данным об экономике США с I квартала 1952 г. по II квартал 1961 г. оценена зависимость конечного потребления C от располагаемого дохода Y и объёма ликвидных активов L:

$$\hat{C} = -10.63 + 0.68Y + 0.37L;$$

$$\hat{C} = -7.16 + 0.95Y.$$

Все переменные в млрд. долл. США 1954 года.

А теперь зависимость ликвидных активов от дохода:

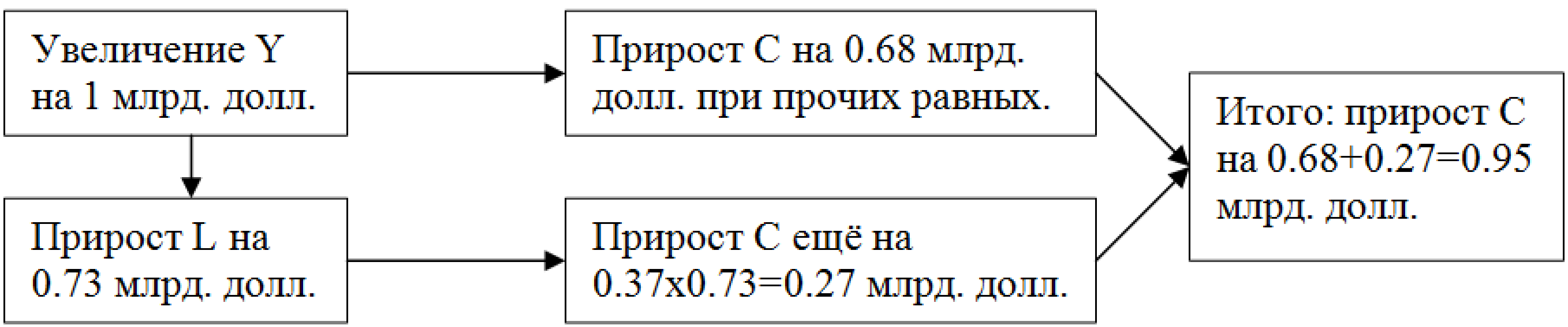
$$\hat{L} = 9.31 + 0.73Y.$$

$$\hat{C} = -10.63 + 0.68Y + 0.37L;$$

$$\hat{C} = -7.16 + 0.95Y;$$

$$\hat{L} = 9.31 + 0.73Y.$$

Можно разделить связь между C и Y на «непосредственную» (при прочих равных условиях) и опосредованную связью обеих переменных с L:

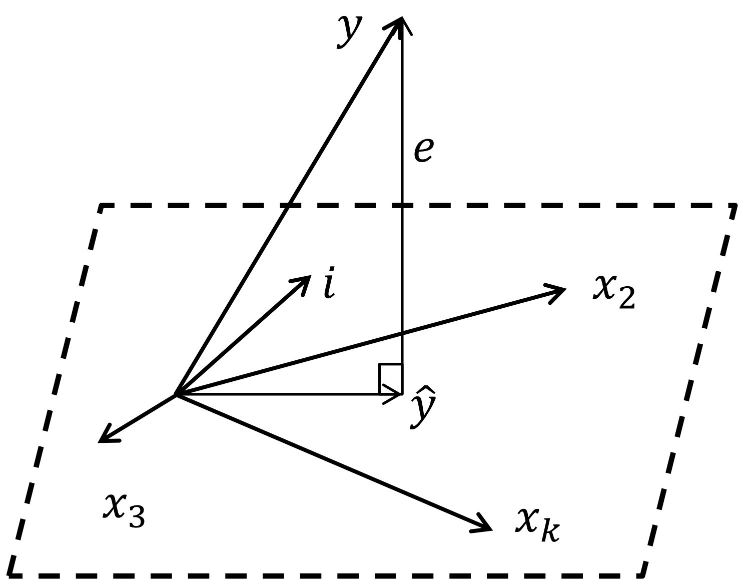


Часть третья: свойства МНК и коэффициент детерминации

Свойства МНК (первая порция):

1° $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0.$
2° $\sum_{i=1}^{n} X_{j,i} e_i = 0,\ j = 2, \dots, k.$
3° $\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i e_i = 0.$

1° $i'e = 0.$
2° $x_j'e = 0,\ j = 2, \dots, k.$
3° $\hat{y}'e = 0.$



$$\begin{cases} i'e = 0; \\ x_2'e = 0; \\ x_3'e = 0; \\ \dots \\ x_k'e = 0. \end{cases}$$

Свойства МНК (вторая порция)

4° $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$.

Док-во: ◀ $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i + e_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{Y}_i + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} e_i}_{0} = \bar{\hat{Y}}$. ▶

Свойства МНК (вторая порция)

4° $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$.

Док-во: ◀ $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i + e_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{Y}_i + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} e_i}_{0} = \bar{\hat{Y}}$. ▶

5° $\bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\bar{X}_2 + \cdots + \hat{\beta}_k\bar{X}_k$.

Док-во: ◀ $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2,i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{k,i}\right) =$

$= \frac{1}{n}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1}_{n\hat{\beta}_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_2 X_{2,i}}_{\hat{\beta}_2 n\bar{X}_2} + \cdots + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_k X_{k,i}}_{\hat{\beta}_k n\bar{X}_k}\right) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\bar{X}_2 + \cdots + \hat{\beta}_k\bar{X}_k$. ▶

Свойства МНК (вторая порция)

4° $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}}$.

Док-во: ◀ $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i + e_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i + \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{i=1}^{n} e_i}_{0} = \bar{\hat{Y}}$. ▶

5° $\bar{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\bar{X}_2 + \cdots + \hat{\beta}_k\bar{X}_k$.

Док-во: ◀ $\bar{Y} = \bar{\hat{Y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_{2,i} + \cdots + \hat{\beta}_k X_{k,i}\right) =$

$= \frac{1}{n}\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_1}_{n\hat{\beta}_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_2 X_{2,i}}_{\hat{\beta}_2 n\bar{X}_2} + \cdots + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\hat{\beta}_k X_{k,i}}_{\hat{\beta}_k n\bar{X}_k}\right) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\bar{X}_2 + \cdots + \hat{\beta}_k\bar{X}_k$. ▶

6° Введём обозначения:

$TSS = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ (Total Sum of Squares)

$ESS = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2$ (Explained Sum of Squares)

$RSS = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$ (Residual Sum of Squares)

Тогда

$$TSS = ESS + RSS.$$

Коэффициент детерминации

$$TSS = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2 \qquad \text{(Total Sum of Squares)}$$

$$ESS = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 \qquad \text{(Explained Sum of Squares)}$$

$$RSS = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \qquad \text{(Residual Sum of Squares)}$$

$$TSS = ESS + RSS$$

Коэффициент детерминации:

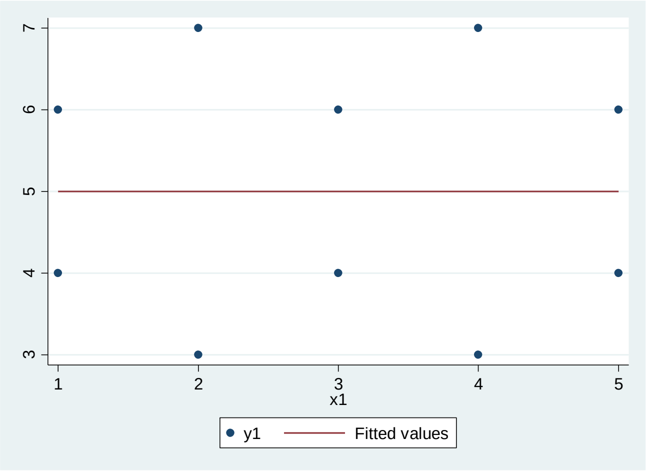
$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}.$$

$$0 \le R^2 \le 1$$

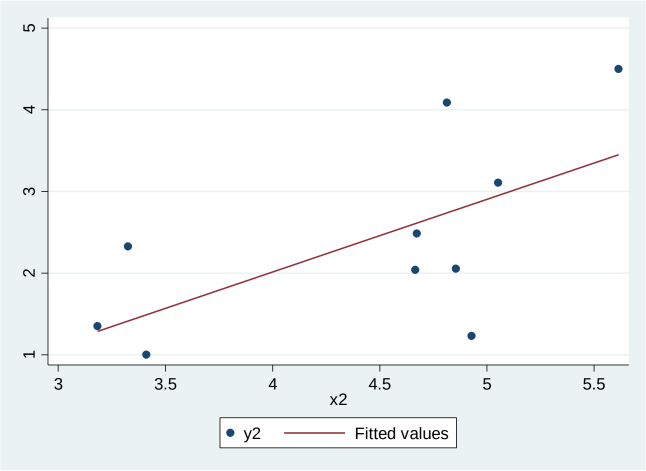
нет связи объясняемой переменной с объясняющими ($ESS = 0, \hat{Y}_i = const$)

строгая линейная связь объясняемой переменной с объясняющими ($RSS = 0$, все остатки равны нулю, данные идеально описываются уравнением регрессии)

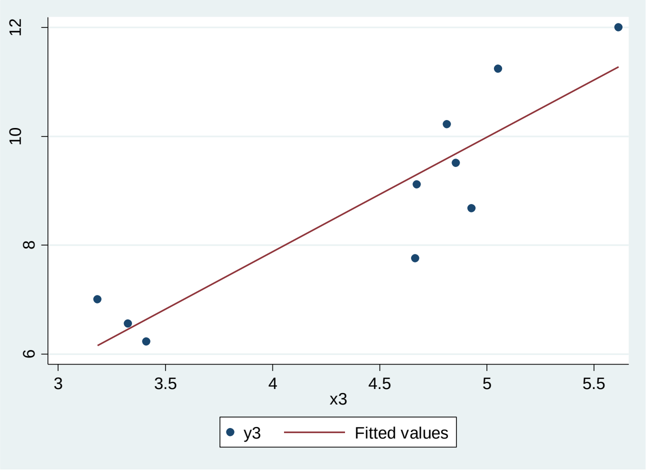
Коэффициент детерминации - 2



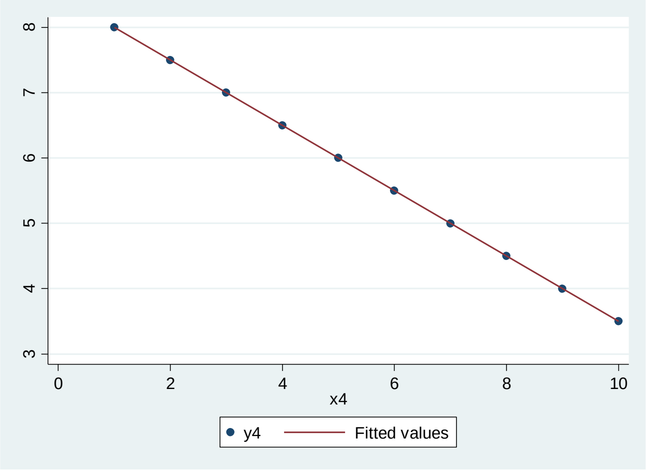
$$R^2 = 0$$



$$R^2 = 0.4$$



$$R^2 = 0.8$$



$$R^2 = 1$$

Множественный коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции между Y и прогнозами $\hat{Y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 X_2 + \cdots + \hat{\beta}_k X_k$ называется множественным коэффициентом корреляции между признаком Y и признаками $X_2, \ldots, X_k$.

$$0 \le r_{Y,\hat{Y}} \le 1.$$

Утверждение. $R^2 = r^2_{Y,\hat{Y}}$.

Доказательство.

$$◀\ r^2_{Y,\hat{Y}} = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}})\right]^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n \left(\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}}\right)^2} = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{Y})\right]^2}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2} = \frac{\left[\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{Y})\right]^2}{TSS \cdot ESS}.$$

$$\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})(\hat{Y}_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^n Y_i \hat{Y}_i - \sum_{i=1}^n Y_i \bar{Y} - \sum_{i=1}^n \bar{Y}\hat{Y}_i + \sum_{i=1}^n \bar{Y}^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i + e_i)\hat{Y}_i - \bar{Y} \underbrace{\sum_{i=1}^n Y_i}_{n\bar{Y}} - \bar{Y} \underbrace{\sum_{i=1}^n \hat{Y}_i}_{n\bar{Y}} + n\bar{Y}^2 = \sum_{i=1}^n \hat{Y}_i^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^n e_i \hat{Y}_i}_{0} - n\bar{Y}^2 = \sum_{i=1}^n \left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 = ESS.$$

Таким образом, $r^2_{Y,\hat{Y}} = \frac{ESS^2}{TSS \cdot ESS} = \frac{ESS}{TSS} = R^2$. ▶

Важно:

- Нет смысла сравнивать R^2 в моделях с разными объясняемыми переменными (например, Y и $\ln Y$).

- R^2 не уменьшается (обычно растёт) при добавлении регрессора.

- R^2 не применим к регрессии без свободного члена

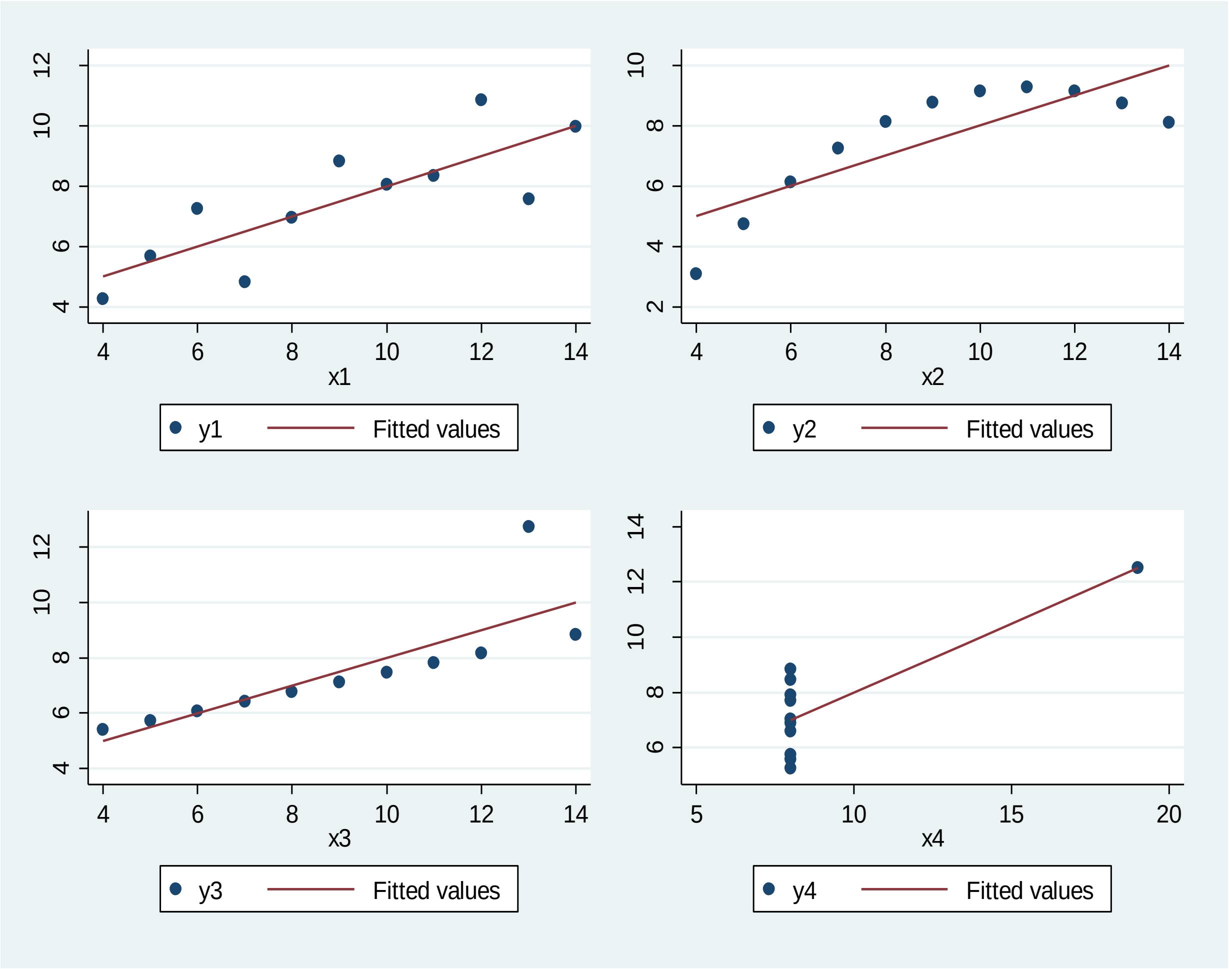
$$Y_i = \beta_1 X_{1,i} + \beta_2 X_{2,i} + \cdots + \beta_k X_{k,i} + \varepsilon_i.$$

В этом случае он может выходить за пределы от 0 до 1, не равен квадрату корреляции и лишён обычного смысла.
Без свободного члена не выполняется ряд свойств МНК.
В частности, $TSS \neq ESS + RSS$.

Упражнение. Проверьте, какие свойства МНК выполняются для регрессии без свободного члена.

Интерлюдия: квартет Энскомба

F. G. Anscombe (1973), “Graphs in Statistical Analysis”.



Во всех четырёх случаях $\hat{Y} = 3 + 0.5X,\ R^2 = 0.67.$

Качественные признаки в уравнении регрессии

Пример. Данные о заработных платах 1472 работников в Бельгии, 1994 год.

Объясняемый признак: $wage_i$, $i = 1, \ldots, 1472$, почасовая заработная плата.
Объясняющие:

$exper_i$ - опыт работы в годах;
- пол;
- уровень образования (пять категорий).

Как учесть пол?

Сделаем так: $male_i = \begin{cases} 1, & \text{работник } i \ - \text{мужчина}, \\ 0, & \text{работник } i \ - \text{женщина}. \end{cases}$

$$\ln \widehat{wage} = 1.85 + 0.16 \ln(1 + exper) + 0.08 male, \qquad R^2 = 0.13.$$

Интерпретация: $male \uparrow$ на 1 при прочих равных => $\ln \widehat{wage} \uparrow$ на 0.08 =>
=> $\widehat{wage} \uparrow$ в $e^{0.08} = 1.08$ раз.

<u>Заработная плата мужчины в среднем на 8% выше з/п женщины с тем же опытом работы.</u>

Статистический жаргон: дамми-переменная (dummy variable) – переменная, которая принимает значения 0 или 1, бинарная переменная.

Качественные признаки в уравнении регрессии - II

Как учесть образование?

Можно создать пять дамми-переменных – индикаторов для каждого уровня образования.

$$D1_i = \begin{cases} 1, & \text{у работника } i \text{ первый уровень образования,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$D2_i = \begin{cases} 1, & \text{у работника } i \text{ второй уровень образования,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

$$\dots$$

$$D5_i = \begin{cases} 1, & \text{у работника } i \text{ пятый уровень образования,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Но в уравнение включаются не все переменные, а любые четыре.
Одна категория образования остаётся без переменной. Она называется *базовой категорией*.

Возьмём в качестве базового первый (низший) уровень образования:

$$\widehat{\ln wage} = 1.27 + 0.23 \ln(1 + exper) + 0.12 male + 0.14 D2 + 0.30 D3 + 0.47 D4 + 0.64 D5,$$
$$R^2 = 0.40.$$

Качественные признаки в уравнении регрессии - III

$$\ln\widehat{wage} = 1.27 + 0.23\ln(1 + exper) + 0.12male + 0.14D2 + 0.30D3 + 0.47D4 + 0.64D5,$$
$$R^2 = 0.40.$$

Интерпретация: $D2 \uparrow$ на 1 при прочих равных => $\ln\widehat{wage} \uparrow$ на 0.14 =>
=> $\widehat{wage} \uparrow$ в $e^{0.14} = 1.15$ раз.

Заработная плата работника со вторым уровнем образования в среднем на 15% выше з/п работника того же пола и с тем же опытом работы, но с первым уровнем образования.

Т.е. коэффициенты при дамми-переменных отражают отличия выделяемой категории (второй уровень образования) от базовой (первый уровень).

Уровень образования	Оценённый коэффициент, $\hat{\beta}_j$	Потенцированный коэфф-т, $e^{\hat{\beta}_j}$	Прибавка к з/п базовой категории при прочих равных, %
1	-	-	0
2	0.14	1.15	15%
3	0.30	1.36	36%
4	0.47	1.61	61%
5	0.64	1.89	89%

В следующий раз:

классическая линейная нормальная регрессионная модель
и оценивание её параметров,

теорема Гаусса-Маркова.