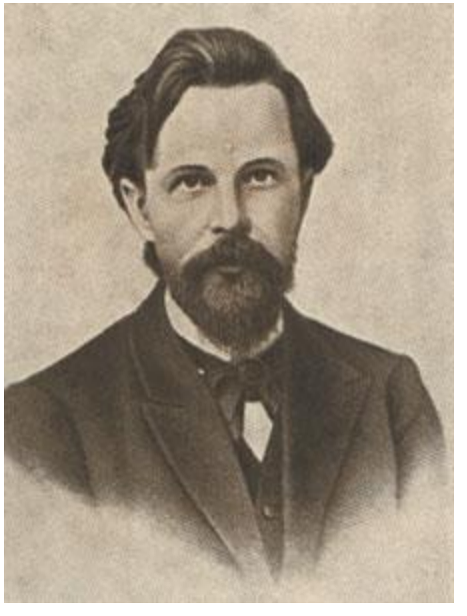
Лекция 5

Марковские цепи в дискретном времени



Андрей Андреевич Марков

Случайные процессы

Случайный процесс – это семейство случайных величин $\{X(t),\ t \in T\}$, заданных на некотором *пространстве параметров* T. Иногда вместо $X(t)$ пишут X_t.

Случайные процессы – способ описание динамики случайного признака.
$X(t)$ - значение признака в момент t.

Возможные значения $X(t)$ называются *состояниями* процесса.
Их множество – *пространство состояний*.

Пример. $N(t)$ – число заявок в системе во время t.

Пространство состояний: {0, 1, 2, …, макс. допустимое число заявок}
или {0, 1, 2, …} для систем с неограниченной ёмкостью.

Пространство параметров зависит от конкретной модели.
Часто $T = \{t: 0 \leq t < +\infty\}$ (процесс в непрерывном времени)
Или так: $T = \{0, 1, 2, \ldots\}$ (процесс в дискретном времени)

stochastic process – случайный процесс
state space – пространство состояний,
parameter space – пространство параметров.

Цепь Маркова: определение

Последовательность дискретных случайных величин $\{X_t\}, t = 0, 1, 2, \ldots$ называется цепью Маркова с дискретным пространством параметров, если

$$P(X_t = j|\{X_0 = i_0\} \cap \{X_1 = i_1\} \cap \cdots \cap \{X_{t-1} = i_{t-1}\}) = P(X_t = j|X_{t-1} = i_{t-1}) \quad \forall t, i_0, \ldots, i_t.$$

Если величина X_t принимает значение j, то говорят, что цепь находится в состоянии j после t шагов (или в момент t).

$P(X_t = j|X_{t-1} = i)$ - *вероятности перехода* (за один шаг).

Если вероятности перехода не зависят от t, цепь называют *однородной*.

У нас будут только однородные цепи Маркова, так что

$$P(X_t = j|X_{t-1} = i) = p_{ij}.$$

homogeneous Markov chain – однородная цепь Маркова,
transition probabilities – вероятности перехода.

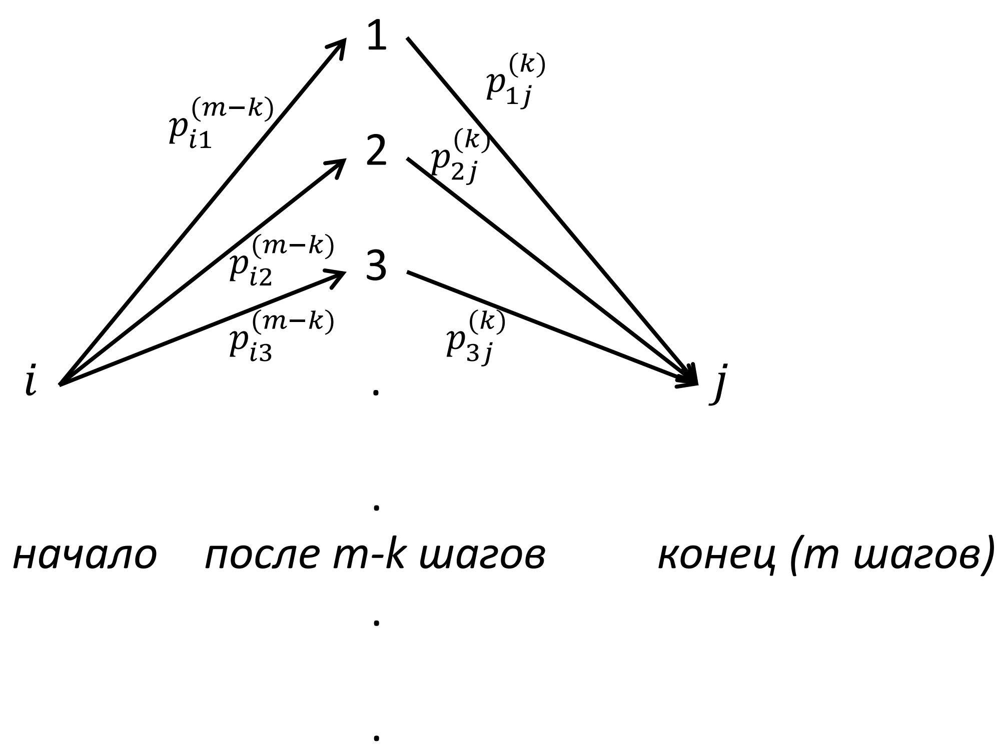
Уравнения Колмогорова-Чепмена

Вероятности перехода за m шагов:

$$p_{ij}^{(m)} = P(X_{t+m} = j | X_t = i)$$

Уравнения Колмгорова-Чепмена:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_{s \in S} p_{is}^{(m-k)} p_{sj}^{(k)}, \qquad 0 < k < m.$$



Пусть $p_j^{(t)}$ – вероятность, что в момент t цепь находится в состоянии j:

$$p_j^{(t)} = P(X_t = j)$$

Не путайте с вероятностями перехода $p_{ij}^{(m)}$ – у них два нижних индекса!

Можно найти $p_j^{(t)}$ для каждого состояния j и момента t с помощью уравнений Колмогорова-Чепмена, если знать:

- начальное распределение $\begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ \dots \end{pmatrix}$;
- вероятности переходов $\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots \\ p_{21} & p_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$.

Заметьте: $\sum_{s \in S} p_{is} = 1, i \in S$

Итак, распределение всей цепи Маркова определяется вектором начальных вероятностей и матрицей переходных вероятностей.

Они могут иметь бесконечную размерность!

Идея марковских цепей:

Завтра зависит от сегодня.

А зависит ли завтра от вчера?

Да. Но только посредством сегодня.

Пример: холодильники на складе

На складе магазина бытовой техники есть три холодильника. Вероятность продажи холодильника в течение дня равна 0.05 и не зависит от истории продаж. Вероятностью продажи более 1 холодильника в день пренебрежём.
Как только последний холодильник продан, магазин закупает ещё три штуки, так что на складе всегда есть 1, 2 или 3 холодильника.

Пусть X_t – число холодильников на складе в день t (сейчас $t = 0$). Найдём распределение вероятностей этой величины.

Пример: холодильники на складе

На складе магазина бытовой техники есть три холодильника. Вероятность продажи холодильника в течение дня равна 0.05 и не зависит от истории продаж. Вероятностью продажи более 1 холодильника в день пренебрежём.
Как только последний холодильник продан, магазин закупает ещё три штуки, так что на складе всегда есть 1, 2 или 3 холодильника.

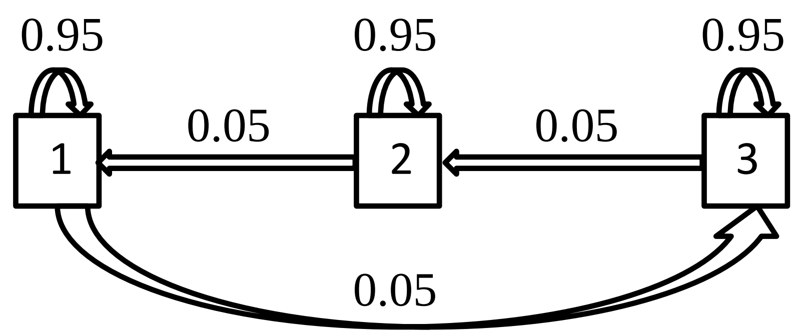
Пусть X_t – число холодильников на складе в день t (сейчас $t = 0$). Найдём распределение вероятностей этой величины.

Решение. Для начала опишем процесс.

Пространство состояний: $S = \{1, 2, 3\}$.
Пространство параметров: $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ (неотрицательные целые числа).

Вектор начальных вероятностей: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Переходная матрица: $\begin{pmatrix} 0.95 & 0 & 0.05 \\ 0.05 & 0.95 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.95 \end{pmatrix}$.



Холодильники на складе

Сейчас $t = 0$, есть три холодильника: $X_0 = 3$.
Что будет на следующий день?

$$t = 1:$$

С вероятностью 0.95 ничего не меняется: $X_1 = 3$.
С вероятностью 0.05 один холодильник купят: $X_1 = 2$.

Холодильники на складе

Сейчас $t = 0$, есть три холодильника: $X_0 = 3$.
Что будет на следующий день?

$$t = 1:$$

С вероятностью 0.95 ничего не меняется: $X_1 = 3$.
С вероятностью 0.05 один холодильник купят: $X_1 = 2$.

$$t = 2:$$

Теперь вероятное любое число холодильников.
$P(X_2 = 1) = 0.05 \times 0.05 = 0.0025.$
$P(X_2 = 2) = 0.95 \times 0.05 + 0.05 \times 0.95 = 0.095.$
$P(X_2 = 3) = 0.95 \times 0.95 = 0.9025.$

Холодильники на складе

Сейчас $t = 0$, есть три холодильника: $X_0 = 3$.
Что будет на следующий день?

$$t = 1:$$

С вероятностью 0.95 ничего не меняется: $X_1 = 3$.
С вероятностью 0.05 один холодильник купят: $X_1 = 2$.

$$t = 2:$$

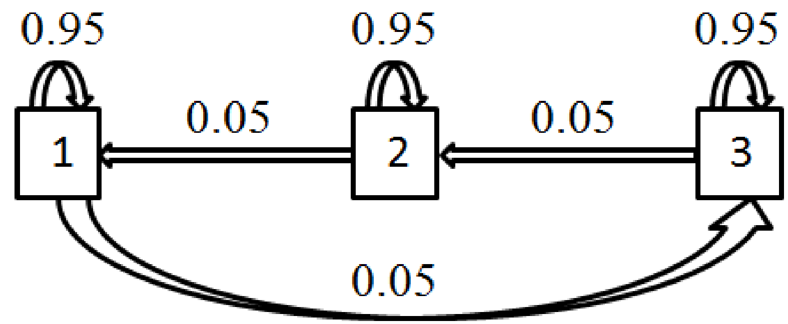
Теперь вероятное любое число холодильников.
$P(X_2 = 1) = 0.05 \times 0.05 = 0.0025$.
$P(X_2 = 2) = 0.95 \times 0.05 + 0.05 \times 0.95 = 0.095$.
$P(X_2 = 3) = 0.95 \times 0.95 = 0.9025$.

$$t = 3:$$

$P(X_3 = 1) = 0.95P(X_2 = 1) + 0.05P(X_2 = 2)$.
$P(X_3 = 2) = 0.95P(X_2 = 2) + 0.05P(X_2 = 3)$.
$P(X_3 = 3) = 0.95P(X_2 = 3) + 0.05P(X_2 = 1)$.

Холодильники на складе

В произвольный момент t:



$$P(X_t = 1) = 0.95P(X_{t-1} = 1) + 0.05P(X_{t-1} = 2).$$
$$P(X_t = 2) = 0.95P(X_{t-1} = 2) + 0.05P(X_{t-1} = 3).$$
$$P(X_t = 3) = 0.95P(X_{t-1} = 3) + 0.05P(X_{t-1} = 1).$$

В общем виде:

$$P(X_t = j) = \sum_{s \in S} P(X_{t-1} = s) P(X_t = j | X_{t-1} = s), \qquad j = 1, 2, 3.$$

или

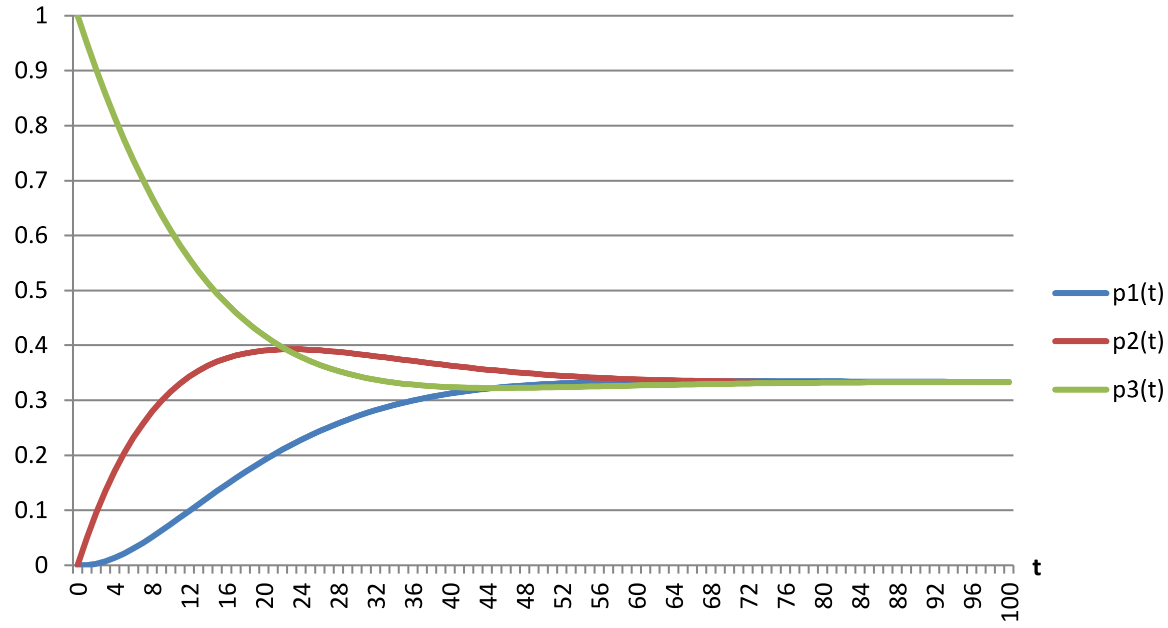
$$p_j^{(t)} = \sum_{s \in S} p_s^{(t-1)} p_{sj}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Это уравнения Колмогорова-Чепмена!

Мы не будем их решать. Просто рассчитаем вероятности.

Холодильники на складе

Вот вероятности для $t = 0, 1, 2, \dots, 100$:



переходный период стационарный режим

Со временем все состояния становятся равновероятными.
А можно было к этому прийти, не рассчитывая вероятности для всех t?

Можно. Есть как минимум два пути.

Холодильники на складе

Два способа получить распределение в стационарном режиме:

1. Найти $p_j^{(t)} = P(X_t = j)$ аналитически. Затем найти $\lim\limits_{t\to\infty} p_j^{(t)}$.

Это может быть трудно.

2. Найти стационарной решение системы уравнений К-Ч:

$$p_j^{(t)} = \sum_{s\in S} p_s^{(t-1)} p_{sj}\,, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Решение стационарное, если $p_j^{(t)} = p_j^{(t-1)} = p_j$ для всех j.

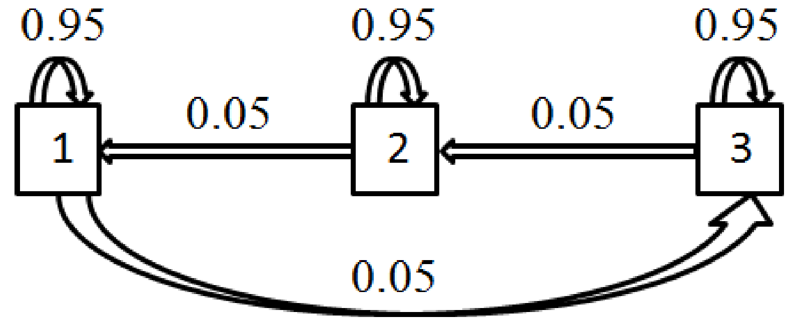
Значит, нужно решить систему:

$$p_j = \sum_{s\in S} p_s p_{sj}\,, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Попробуем.

Холодильники на складе: стационарные вероятности

В произвольный момент t:



$P(X_t = 1) = 0.95P(X_{t-1} = 1) + 0.05P(X_{t-1} = 2);$
$P(X_t = 2) = 0.95P(X_{t-1} = 2) + 0.05P(X_{t-1} = 3);$
$P(X_t = 3) = 0.95P(X_{t-1} = 3) + 0.05P(X_{t-1} = 1).$

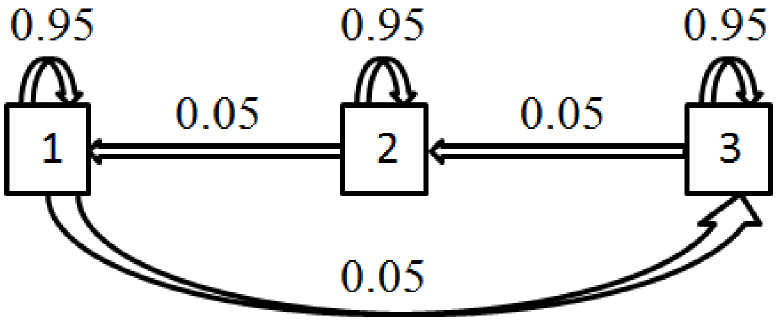
В стационарном режиме $P(X_t = j)$ не зависит от t:

$$\begin{cases} p_1 = 0.95p_1 + 0.05p_2 \\ p_2 = 0.95p_2 + 0.05p_3 \\ p_3 = 0.95p_3 + 0.05p_1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Refrigerators in stock: steady-state probabilities

В произвольный момент t:

$$P(X_t = 1) = 0.95P(X_{t-1} = 1) + 0.05P(X_{t-1} = 2);$$
$$P(X_t = 2) = 0.95P(X_{t-1} = 2) + 0.05P(X_{t-1} = 3);$$
$$P(X_t = 3) = 0.95P(X_{t-1} = 3) + 0.05P(X_{t-1} = 1).$$



В стационарном режиме $P(X_t = j)$ не зависит от t:

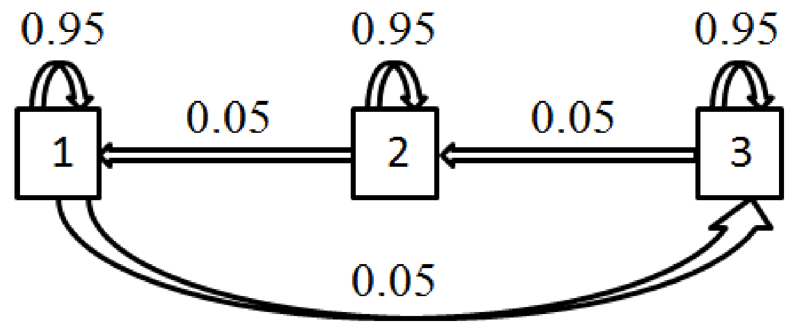
$$\begin{cases} p_1 = 0.95p_1 + 0.05p_2 \\ p_2 = 0.95p_2 + 0.05p_3 \\ p_3 = 0.95p_3 + 0.05p_1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} 0.05p_1 = 0.05p_2 \\ 0.05p_2 = 0.05p_3 \\ 0.05p_3 = 0.05p_1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Refrigerators in stock: steady-state probabilities

В произвольный момент t:



$$P(X_t = 1) = 0.95P(X_{t-1} = 1) + 0.05P(X_{t-1} = 2);$$
$$P(X_t = 2) = 0.95P(X_{t-1} = 2) + 0.05P(X_{t-1} = 3);$$
$$P(X_t = 3) = 0.95P(X_{t-1} = 3) + 0.05P(X_{t-1} = 1).$$

В стационарном режиме $P(X_t = j)$ не зависит от t:

$$\begin{cases} p_1 = 0.95p_1 + 0.05p_2 \\ p_2 = 0.95p_2 + 0.05p_3 \\ p_3 = 0.95p_3 + 0.05p_1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} 0.05p_1 = 0.05p_2 \\ 0.05p_2 = 0.05p_3 \\ 0.05p_3 = 0.05p_1 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Значит, $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$.

We did it!

Немного сомнений

Хорошо, мы нашли стационарное распределение.
Может, мы даже сможем рассчитать его дли какой-нибудь другой цепи.

НО

Точно ли процесс сходится к стационарному режиму?

Может ли у цепи Маркова быть несколько стационарных распределений?

А ни одного?

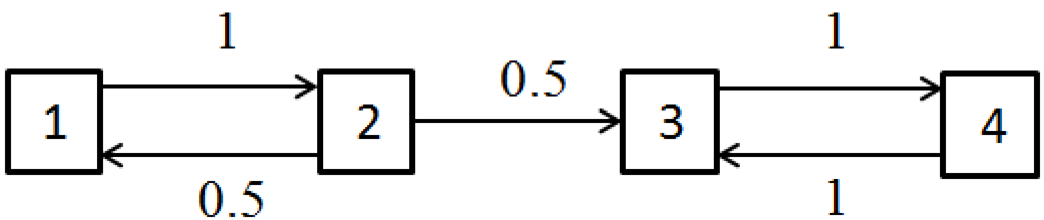
А если хоть какое-то из этих сомнений оправдано, как отличать «хорошую» цепь от «плохой»?

Тут понадобится экскурс в теорию.

Разложимость

Состояние j *достижимо* из состояния i, если $\exists m$: $p_{ij}^{(m)} > 0$.

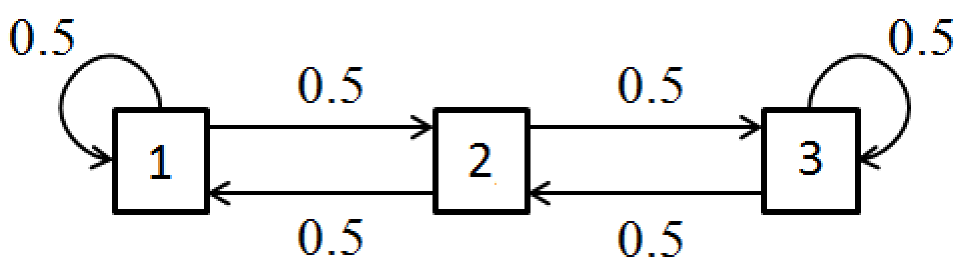
Состояния i и j *сообщаются*, если i достижимо из j, а j достижимо из i.



разложимая цепь

Состояние 1 достижимо из 2, но не достижимо из 4.
Состояния 3 и 4 достижимы из любого состояния.

Цепь называется *неразложимой*, если все её состояния сообщаются.



неразложимая цепь

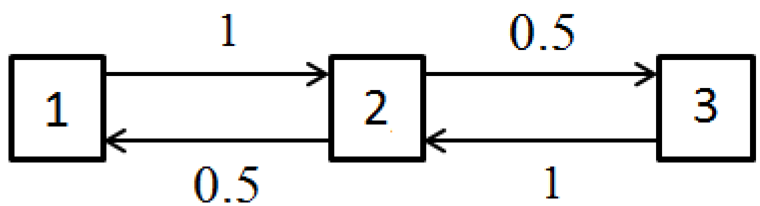
accessible – достижимый
to communicate – сообщаться
irreducible chain – неразложимая цепь

Периодичность

Период состояния j – наибольший общий делитель всех целых $\{n\}$, для которых $p_{jj}^{(n)} > 0$.

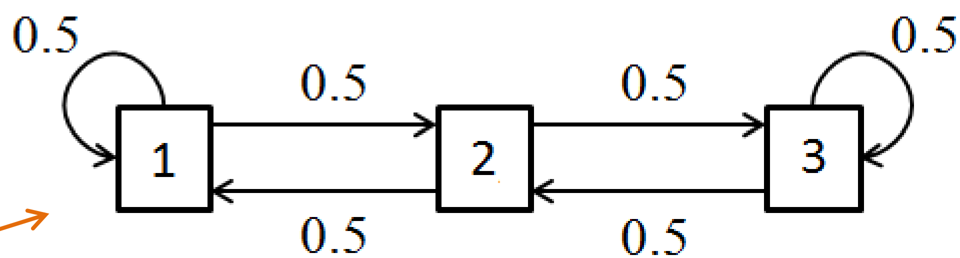
Т.е. у состояния j период k, если цепь может вернуться в j только за k, $2k$, $3k$ … шагов.

Состояние с периодом 1 называют *апериодическим*.



периодическая цепь

У всех состояний период 2. Это *периодические* состояния.



апериодическая цепь

У всех состояний период 1. Они апериодические.

Если все состояния апериодические, то цепь тоже называют апериодической.

Возвратность

Пусть $f_{jj}^{(k)}$ – вероятность того, что цепь из состояния j впервые вернётся в j за k шагов.

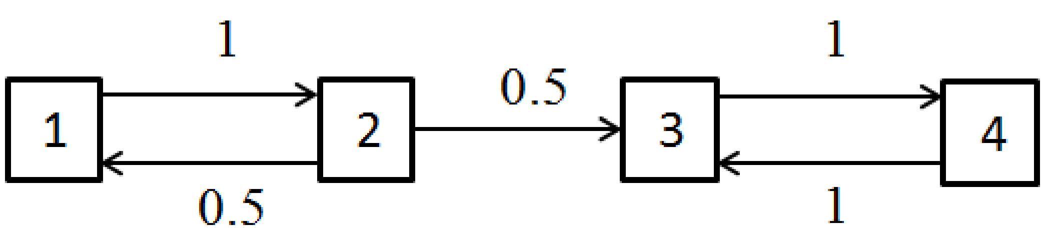
Вероятность когда-либо вернуться в j:

$$f_{jj} = \sum_{k=1}^{\infty} f_{jj}^{(k)} .$$

Если $f_{jj} = 1$, то состояние j называют *возвратным*.
Если $f_{jj} < 1$, то состояние j невозвратное.

Среднее время возвращения:

$$m_{jj} = \sum_{k=1}^{\infty} k f_{jj}^{(k)} .$$



Состояния 1 и 2 невозвратные,
состояния 3 и 4 возвратные, среднее время возвращения = 2.

Возвратность

Если $m_{jj} < \infty$, то состояние j называют *положительным*.

Если $m_{jj} = \infty$, то состояние j называют *нулевым*.

Пример нулевого состояния когда-нибудь, возможно, будет здесь.

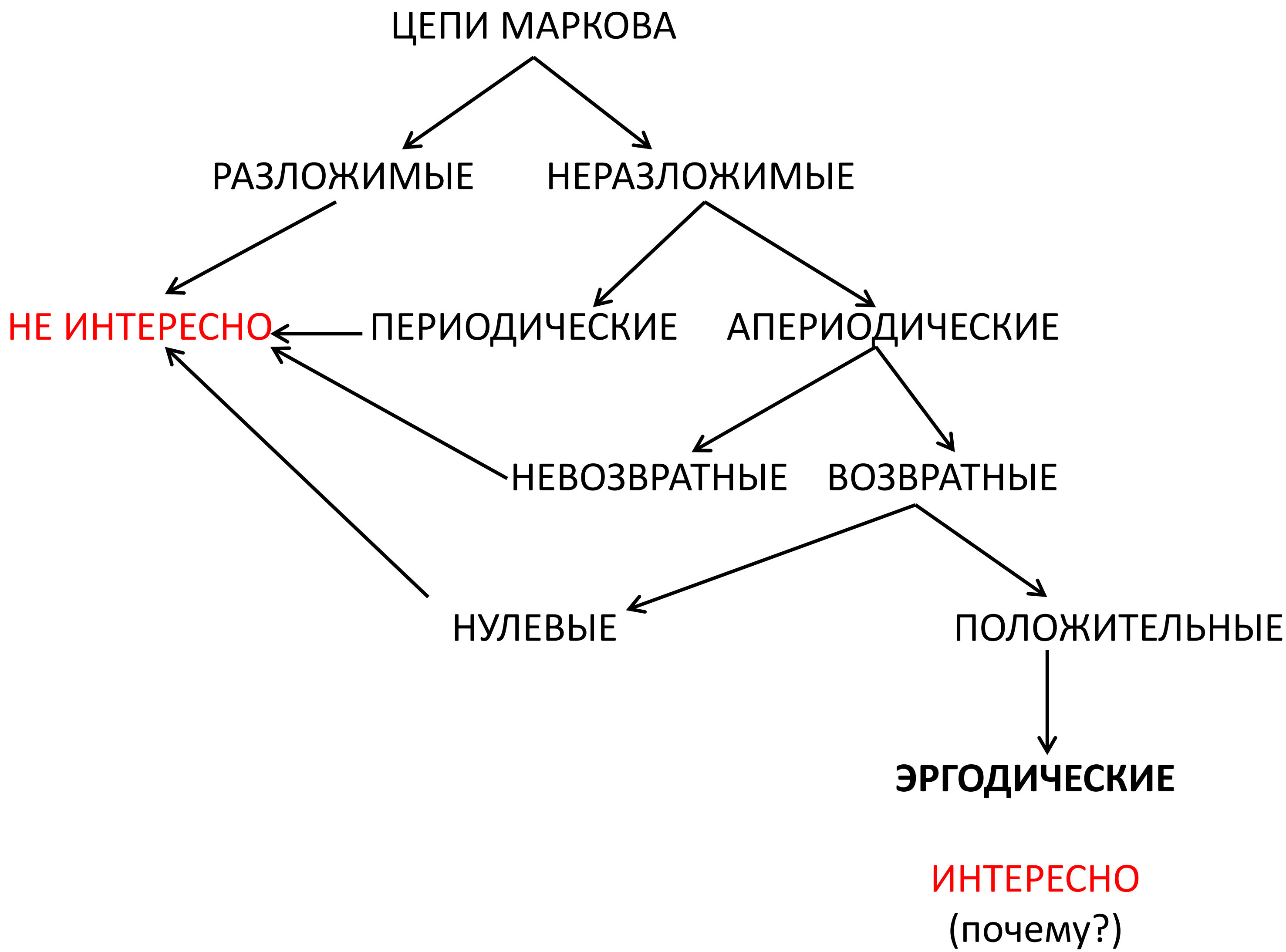
Пара теорем:

Если марковская цепь неразложима, то она либо возвратная, либо невозвратная, то есть либо все её состояния возвратные, либо все невозвратные.

Если марковская цепь неразложимая и невозвратная, то либо все её состояния положительные, либо все нулевые.

Эргодичность

Неразложимая, апериодическая и положительная возвратная цепь называется *эргодической*.



Очень важная теорема

У неразложимой апериодичной цепи Маркова предельные вероятности

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_j^{(t)} = \lim_{t\to\infty} P(X_t = j), \qquad j \in S,$$

Всегда существуют и не зависят от начального распределения.

Если все состояния невозвратные или нулевые, то $\pi_j = 0\ \forall j \in S$ и стационарное распределение не существует.

Если все состояния положительные (цепь эргодическая), то $\pi_j > 0\ \forall j \in S$ и предельное распределение совпадает со стационарным распределением, которое есть единственное решение следующей системы:

$$\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}\,,$$

$$\sum_{i\in S} \pi_i = 1.$$

A very important theorem

У неразложимой апериодичной цепи Маркова предельные вероятности

$$\pi_j = \lim_{t\to\infty} p_j^{(t)} = \lim_{t\to\infty} P(X_t = j), \qquad j \in S,$$

Всегда существуют и не зависят от начального распределения.

Если все состояния невозвратные или нулевые, то $\pi_j = 0\ \forall j \in S$ и стационарное распределение не существует.

Если все состояния положительные (цепь эргодическая), то $\pi_j > 0\ \forall j \in S$ и предельное распределение совпадает со стационарным распределением, которое есть единственное решение следующей системы:

$$\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i p_{ij}\,,$$

$$\sum_{i\in S} \pi_i = 1.$$

Эргодическая цепь Маркова

- имеет единственное стационарное распределение,
- сходится к нему независимо от начального распределения.

Ещё одна важная теорема

Апериодичная неразложимая цепь Маркова эргодична тогда и только тогда, когда существует ненулевое решение системы уравнений

$$\sum_{j \in S} x_j p_{ji} = x_i, \quad i \in S,$$

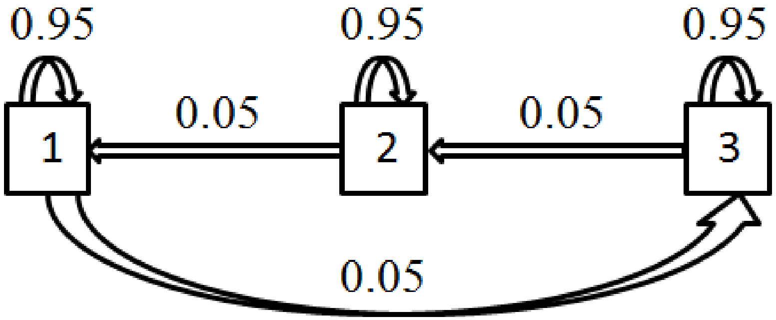
Такое что

$$\sum_{j \in S} |x_j| < \infty .$$

Что это значит?
Почему это важно?
Достойно внимания.

Эргодичность и холодильники

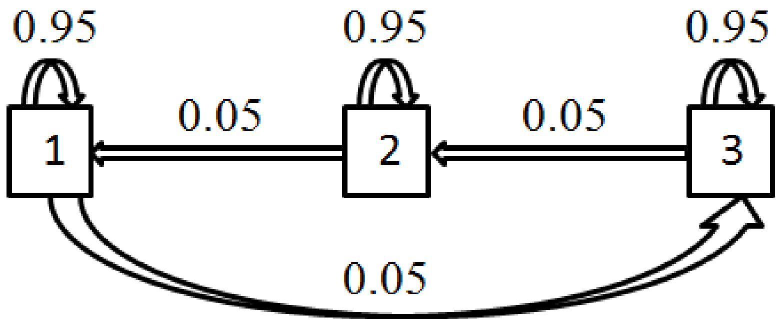
Вернёмся к холодильникам и проверим цепь на эргодичность.



Она неразложимая?

Эргодичность и холодильники

Вернёмся к холодильникам и проверим цепь на эргодичность.



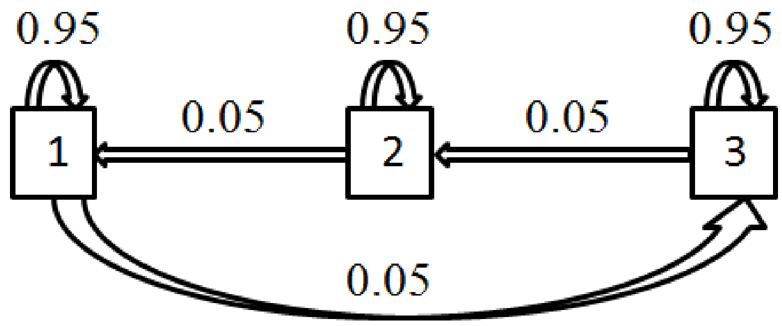
Она неразложимая?

Все состояния сообщаются => цепь неразложимая.

Она апериодичная?

Эргодичность и холодильники

Вернёмся к холодильникам и проверим цепь на эргодичность.



Она неразложимая?

Все состояния сообщаются => цепь неразложимая.

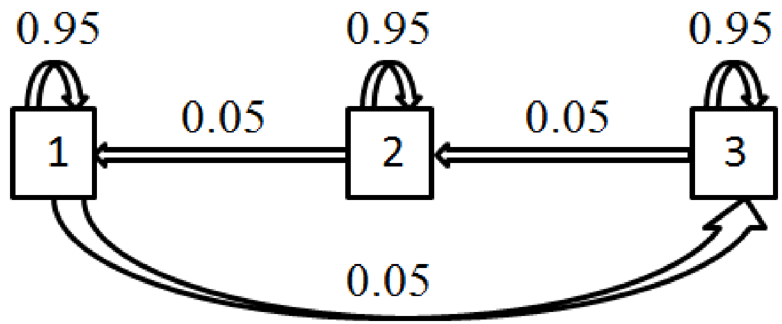
Она апериодичная?

У каждого состояния период 1 => цепь апериодичная.

Она эргодическая?

Эргодичность и холодильники

Вернёмся к холодильникам и проверим цепь на эргодичность.



Она неразложимая?

Все состояния сообщаются => цепь неразложимая.

Она апериодичная?

У каждого состояния период 1 => цепь апериодичная.

Она эргодическая?

Мы уже решили систему $\sum_{j\in S} x_j p_{ji} = x_i,\ i \in S$:

$x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}$ – вот стационарные вероятности.

Цепь эргодическая!

Вероятности и время

Стационарные вероятности в эргодической цепи Маркова отражают долю времени, которое цепь проводит в соответствующем состоянии в долгосрочном периоде.

Стационарные вероятности для холодильников:

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$$

В долгосрочном периоде треть времени на складе находится один холодильник, другую треть – два холодильника, ещё треть времени – три холодильника.

Я снова поменял букву!
На странице 15 было p_i*, на предыдущей странице –* x_i*, а теперь –* π_i*.*
Всё, чтобы запутать?

Замечание

Часть лекции про классификацию цепей и состояний взята из книги “Fundamentals of Queueing Theory”, D. Gross, C.M. Harris.

Следующая лекция:

Цепи Маркова в непрерывном времени

система $M/M/1/1$.