Лекция 2

Введение в разностные
и дифференциальные уравнения

Вы хорошо знаете *алгебраические уравнения* вроде $x^2 + 2x = 10$.

Решить такое уравнение – найти все его корни, т.е. значения x, которые обращают уравнение в верное равенство.

В разностных и дифференциальных уравнениях неизвестная – это не число, а функция. Надо найти все функции, являющиеся решениями такого уравнения.

Пример. Популяция амёб каждый час удваивается. Каково число амёб в момент t, если изначально ($t = 0$) в популяции 100 амёб?

Нужно найти функцию $P(t)$, которая удовлетворяет *разностному уравнению*

$$P(t) = 2P(t-1)$$

с начальным условием

$$P(0) = 100.$$

Разностные уравнения

Возникают, когда мы связываем значение признака *y* в момент *t* со значениями этого же признака в предыдущие (дискретные) моменты времени.

Примеры:

$$\left.\begin{array}{l} y(t) - y(t-1) = t \\[2ex] y(t) = 0.5y(t-1) + 2 \end{array}\right\}\ \text{разностные уравнения первого порядка}$$

$$\left.\begin{array}{l} y(t) = -0.3y(t-1) + 0.5y(t-2) \\[2ex] y(t) - y(t-2) = 8 \end{array}\right\}\ \text{разностные уравнения второго порядка}$$

Здесь *t* не обязательно означает время, *y*(*t*) – просто число с номером *t* в какой-то последовательности.
Числа Фиббоначи:

$$y(t) = y(t-1) + y(t-2)$$

Решить такое уравнение – найти все функции *y*(*t*), которые обращают уравнение в тождество.

Мы рассмотрим только простые линейные разностные уравнения первого порядка.

Это было в школе (1)

Такое уравнение задаёт арифметическую прогрессию:

$$y(t) = y(t-1) + b$$

Развернём:

$$y(t) = y(t-1) + b = (y(t-2) + b) + b = \big((y(t-3) + b) + b\big) + b = \cdots = y(0) + tb$$

Любая функция вида $y(t) = tb + C$ будет решением. Чтобы найти С, требуется дополнительное ограничение – *начальное условие*. Например, можно задать $y(0)$ или $y(t)$ для какого-то конкретного t.

Допустим, мы знаем, что $y(0) = 5$. Тогда

$y(t) = tb + C$ это *общее решение*;
$y(t) = tb + 5$ это *частное решение* для заданного начального условия.

не вполне частное, потому что в точности b не известно.

Это было в школе (2)

А теперь геометрическая прогрессия:

$$y(t) = ay(t-1)$$

Разворачиваем:

$$y(t) = ay(t-1) = a\big(ay(t-2)\big) = a(a(ay(t-3))) = \cdots = a^t y(0)$$

Общее решение

$$y(t) = Ca^t$$

Вспомним задачу про амёб:

$$P(t) = 2P(t-1)$$
$$P(0) = 100$$

Общее решение: $P(t) = C \cdot 2^t$.
Частное решение: $P(t) = 100 \cdot 2^t$.

Линейное разностное уравнение первого порядка

Объединим два рассмотренных уравнения:

$$y(t) = ay(t-1) + b$$

Разворачиваем:

$$y(t) = ay(t-1) + b = a(ay(t-2) + b) + b = a(a(ay(t-3) + b) + b) + b =$$
$$\dots$$
$$= a^t y(0) + a^{t-1}b + a^{t-2}b + \dots + ab + b.$$

Используем формулу для суммы геометрической прогрессии:

$$y(t) = a^t y(0) + \frac{b(1-a^t)}{1-a}, \qquad a \neq 1.$$

Общее решение:

$$y(t) = Ca^t + \frac{b(1-a^t)}{1-a}.$$

Смотрите: $y(t)$ сходится к константе при $|a| < 1$:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{b}{1-a}$$

В пределе исчезло C – начальное условие не играет роли!

Вспомним прошлую лекцию

Заявки поступают каждые 20 минут (в точности).
Время обслуживания распределено равномерно от 12 до 22 минут.
Есть единственный канал обслуживания.
Нет очереди – если заявка приходит, а система занята, то заявка потеряна.

Найдём вероятность, что заявка *k* будет потеряна – обозначим $P_L(k)$.

В прошлый раз мы получили разностное уравнение:

$$P_L(k) = 0.2 - 0.2P_L(k-1)$$

Мы также знаем, что первая заявка точно обслуживается: $P_L(1) = 0$.

(внимание: начальное условие дано для $k = 1$, не для $k = 0$)

Общее решение:

$$P_L(k) = C \cdot (-0.2)^k + \frac{0.2 \cdot (1 - (-0.2)^k)}{1 - (-0.2)} = C \cdot (-0.2)^k + \frac{1 - (-0.2)^k}{6}.$$

$$\lim_{k \to \infty} P_L(k) = \frac{1}{1 - (0.2)} = \frac{1}{6}.$$

Общее решение:

$$P_L(k) = C \cdot (-0.2)^k + \frac{0.2 \cdot (1 - (-0.2)^k)}{1 - (-0.2)} = C \cdot (-0.2)^k + \frac{1 - (-0.2)^k}{6}.$$

$$\lim_{k \to \infty} P_L\,(k) = \frac{1}{1 - (0.2)} = \frac{1}{6}.$$

В долгосрочном периоде вероятность потери равна 1/6.

Найдём частное решение, соответствующее начальному условию $P_L(1) = 0$.

$$C \cdot (-0.2)^1 + \frac{1 - (-0.2)^1}{6} = 0$$
$$-0.2C = -0.2$$
$$C = 1$$

Итак,

$$P_L(k) = (-0.2)^k + \frac{1 - (-0.2)^k}{6}.$$

Стационарное (устойчивое) решение

Представим теперь, что по каким-то причинам первая заявка может получить отказ:

$$P_L(1) = \frac{1}{6}$$

Тогда для второй заявки $P_L(2) = 0.2 - 0.2P_L(1) = \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$.

Очевидно, так будет всегда: $P_L(k) = \frac{1}{6}\ \forall k \in N$.

$P_L(k) = \frac{1}{6}$ – *стационарное решение* разностного уравнения.

Его можно получить из условия $P_L(k+1) = P_L(k)$:

$$P_L(k) = 0.2 - 0.2P_L(k)\ \rightarrow P_L(k) = \frac{1}{6}.$$

Заметьте: оно совпадает с вероятностью в долгосрочном периоде!

Немного о стационарных решениях и сходимости

Если вы чуть подумаете, то придёте к выводам:

- разностное уравнение $y(t) = ay(t-1) + b$ имеет стационарное решение $y(t) = \frac{b}{1-a}$, если $a \neq 1$;

- все нестационарные решения сходятся к стационарному тогда и только тогда, когда $|a| < 1$.

А что если $a = 1$?

Дифференциальные уравнения

Уравнения, в которых фигурируют производные искомой функции, называются *дифференциальными*.

Примеры: (тут $y = y(x)$ – искомая функция):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dy}{dx} = y + 3 \\[2ex] \dfrac{dy}{dx} = 2x(x^2 + y) \end{array}\right\} \text{дифференциальные уравнения первого порядка}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2y}{dx^2} = 7 + x \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 2y = 0 \end{array}\right\} \text{дифференциальные уравнения второго порядка}$$

Иногда их записывают иначе:

$$y'' + y' - 2y = 0 \qquad \text{или} \qquad \ddot{y} + \dot{y} - 2y = 0.$$

Опять же, решение дифференциального уравнения – функция или множество функций, которые обращают уравнения в тождество.

Простейший пример

Решим такое:

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Нужно просто первообразную:

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int 2x dx\,.$$

$$y = x^2 + C$$

Если хотим частное решение, нужно взять начальное условие.
Пусть это будет $y(0) = 7$.

$$y(0) = 0^2 + C \ \to C = 7.$$

Частное решение: $y = x^2 + 7$.

Вы уже встречались с дифференциальными уравнениями, даже если этого не заметили.
Это было в школьном курсе физики.

Пример: свободное падение

Галилео Галилей стоит на Пизанской башне, на высоте 50 метров и держит шарик. В момент $t = 0$ он отпускает шарик, и тот начинает падать с ускорением $g = 9.81$. Найдите $y(t)$ – высоту шарика в момент t.

Пример: свободное падение

Галилео Галилей стоит на Пизанской башне, на высоте 50 метров и держит шарик. В момент $t = 0$ он отпускает шарик, и тот начинает падать с ускорением $g = 9.81$. Найдите $y(t)$ – высоту шарика в момент t.

Решение.
Из условия $y(0) = 50$.

Первая производная высоты – скорость. В момент $t = 0$ у шарика нет скорости, так что

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \dot{y}(0) = 0.$$

Пример: свободное падение

Галилео Галилей стоит на Пизанской башне, на высоте 50 метров и держит шарик. В момент $t = 0$ он отпускает шарик, и тот начинает падать с ускорением $g = 9.81$. Найдите $y(t)$ – высоту шарика в момент t.

Решение.
Из условия $y(0) = 50$.

Первая производная высоты – скорость. В момент $t = 0$ у шарика нет скорости, так что

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \dot{y}(0) = 0.$$

Вторая производная высоты (и первая производная скорости) – ускорение.

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}(t) = -g.$$

Имеем дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} = -g$$

с начальными условиями

$$y(0) = 50$$
$$\dot{y}(0) = 0$$

Имеем дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} = -g$$

с начальными условиями

$$y(0) = 50$$
$$\dot{y}(0) = 0$$

Интегрируем обе стороны и получаем скорость::

$$\int \ddot{y} dt = \int -g dt$$

$$\dot{y} = -gt + C_1$$

Имеем дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} = -g$$

с начальными условиями

$$y(0) = 50$$
$$\dot{y}(0) = 0$$

Интегрируем обе стороны и получаем скорость::

$$\int \ddot{y}dt = \int -gdt$$

$$\dot{y} = -gt + C_1$$

Снова интегрируем и получаем общее решение для высоты:

$$\int \dot{y}dt = \int (-gt + C_1)dt$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Имеем дифференциальное уравнение

$$\ddot{y} = -g$$

с начальными условиями

$$y(0) = 50$$
$$\dot{y}(0) = 0$$

Интегрируем обе стороны и получаем скорость::

$$\int \ddot{y} dt = \int -g dt$$

$$\dot{y} = -gt + C_1$$

Снова интегрируем и получаем общее решение для высоты:

$$\int \dot{y} dt = \int (-gt + C_1) dt$$

$$y = -\frac{gt^2}{2} + C_1 t + C_2$$

Ищем частное решение:

$\dot{y}(0) = 0$, so $C_1 = 0$.

$y(0) = 50$, so $C_2 = 50$.

$$y(t) = 50 - \frac{gt^2}{2}.$$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Перейдём к не столь тривиальным задачам.

Дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} \cdot \varphi(y) = f(x)$$

называют *уравнением с разделяющимися переменными*.

Схема решения. Сначала, собираем все *y* на одной стороне, а *x* – на другой:

$$\varphi(y)dy = f(x)dx$$

А смысл? $\frac{dy}{dx}$ *– это ведь не дробь.*

Затем интегрируем:

$$\int \varphi(y)dy = \int f(x)dx \ + C$$

Так получаем обычное, не дифференциальное, уравнение, из которого нужно выразить *y* через *x*.

Почему можно отделить *dy* от *dx*?

$$\frac{dy}{dx} \cdot \varphi(y) = f(x) \ \rightarrow \varphi(y)dy = f(x)dx$$

Выглядит бредово.

Но вспомним метод замены переменной:

$$\int \varphi(y)dy = \int \varphi(y)\frac{dy}{dx}dx$$

Если интегрировать по-честному, получается ровно то же!

Пример

Решите уравнение $6y\frac{dy}{dx} = x^2$ и найдите частное решение, соответствующее начальному условию $y(0) = 2$.

Пример

Решите уравнение $6y\frac{dy}{dx} = x^2$ и найдите частное решение, соответствующее начальному условию $y(0) = 2$.

Решение.

Разделяем:

$$6ydy = x^2dx.$$

Пример

Решите уравнение $6y\frac{dy}{dx} = x^2$ и найдите частное решение, соответствующее начальному условию $y(0) = 2$.

Решение.

Разделяем:

$$6ydy = x^2dx.$$

Интегрируем:

$$\int 6ydy = \int x^2dx + C.$$

$$3y^2 = \frac{x^3}{3} + C.$$

$$y^2 = \frac{x^3}{9} + \frac{C}{3}.$$

Пример

Решите уравнение $6y\frac{dy}{dx} = x^2$ и найдите частное решение, соответствующее начальному условию $y(0) = 2$.

Решение.

Разделяем:

$$6ydy = x^2dx.$$

Интегрируем:

$$\int 6ydy = \int x^2dx + C.$$

$$3y^2 = \frac{x^3}{3} + C.$$

$$y^2 = \frac{x^3}{9} + \frac{C}{3}.$$

Общее решение:

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{x^3}{9} + A}.$$

Проверим, правда ли функция $y(x) = \sqrt{\frac{x^3}{9} + A}$ есть решение уравнения $6y\frac{dy}{dx} = x^2$.

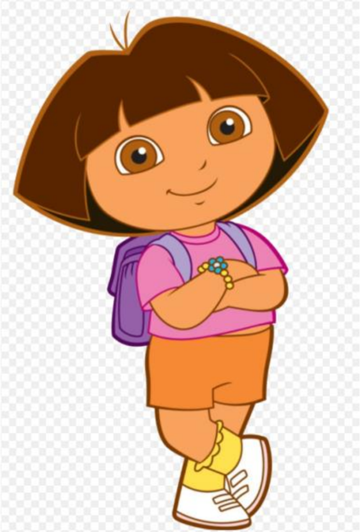
Найдём производную:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{9} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{9} + A}} = \frac{x^2}{6\sqrt{\frac{x^3}{9} + A}}.$$

Подставим в исходное уравнение:

$$6y\frac{dy}{dx} = 6\sqrt{\frac{x^3}{9} + A} \cdot \frac{x^2}{6\sqrt{\frac{x^3}{9} + A}} = x^2.$$

То же получится и с функцией $y(x) = -\sqrt{\frac{x^3}{9} + A}$.



We did it!

Теперь – частное решение.

Нужно найти A, удовлетворяющее начальному условию.

$$y(x) = \sqrt{\frac{x^3}{9} + A};$$

почему не $\sqrt{\frac{x^3}{9}} + A$ *?*

$$y(0) = 2.$$

$$\sqrt{A} = 2 \ \rightarrow A = 4.$$

Частное решение:

$$y(x) = \sqrt{\frac{x^3}{9} + 4}.$$

Задача решена.

Ещё пример

Вернёмся к амёбам. Разработаем модель размножения амёб в непрерывном времени, предположив, что *скорость изменения численности пропорциональна численности популяции*:

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

Поделим на P:

$$\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = k.$$

Теперь видно, что это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{1}{P} dP = kdt.$$

$$\int \frac{1}{P} dP = \int kdt + C.$$

$$\ln|P| = kt + C.$$

Естественно считать, что численность неотрицательна, так что $\ln|P| = \ln P$.
Общее решение:

$$P(t) = e^{kt+C} = Ae^{kt}, A > 0.$$

Исходное уравнение:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Наше решение:

$$P(t) = e^{kt+C} = Ae^{kt}, A > 0.$$

А единственное ли оно?

Мы ведь поделили исходное уравнение на P. Что если $P(t) = 0$?

Исходное уравнение:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

Наше решение:

$$P(t) = e^{kt+C} = Ae^{kt}, A > 0.$$

А единственное ли оно?

Мы ведь поделили исходное уравнение на *P*. Что если *P*(*t*) = 0?

Тогда $\frac{dP}{dt} = 0.$

Уравнение выполнено: $\frac{dP}{dt} = kP.$

$P(t) = 0$ – тоже решение! Такое решение называют *стационарным*.

Надо подправить ответ. Было:

$$P(t) = e^{kt+C} = Ae^{kt}, A > 0.$$

Стало:

$$P(t) = Ae^{kt}, A \geq 0.$$

Если мы дерзнём рассматривать отрицательные популяции, можно даже отбросить ограничение $A \geq 0$.

Линейные дифференциальные уравнения

имеют вид

$$\frac{dy}{dx} + a(x)y(x) = f(x),$$

где $a(x)$ и $f(x)$ – непрерывные функции.

Линейные уравнения превращаются в разделяющиеся с помощью *интегрирующего множителя*:

$$u(x) = e^{\int a(x)dx}.$$

Посмотрите: $\frac{du}{dx} = a(x)u(x)$.

Домножим уравнение на $u(x)$:

$$\frac{dy}{dx}u(x) + y(x)[a(x)u(x)] = f(x)u(x).$$

Что стало лучше?

Линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{dy}{dx}u(x) + y(x)[a(x)u(x)] = f(x)u(x). \qquad (*)$$

Пусть $g(x) = y(x)u(x)$. Тогда

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dy}{dx}u(x) + y(x)\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}u(x) + y(x)[a(x)u(x)].$$

Перепишем (*) в таком виде:

$$\frac{dg}{dx} = f(x)u(x).$$

Линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{dy}{dx}u(x) + y(x)[a(x)u(x)] = f(x)u(x). \qquad (*)$$

Пусть $g(x) = y(x)u(x)$. Тогда

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dy}{dx}u(x) + y(x)\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}u(x) + y(x)[a(x)u(x)].$$

Перепишем (*) в таком виде:

$$\frac{dg}{dx} = f(x)u(x).$$

Теперь можно разделить g и x:

$$dg = f(x)u(x)dx$$

$$\int dg = \int f(x)u(x)dx + C$$

$$g(x) = y(x)u(x) = \int f(x)u(x)dx + C$$

Линейные дифференциальные уравнения

$$\frac{dy}{dx}u(x) + y(x)[a(x)u(x)] = f(x)u(x). \qquad (*)$$

Пусть $g(x) = y(x)u(x)$. Тогда

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dy}{dx}u(x) + y(x)\frac{du}{dx} = \frac{dy}{dx}u(x) + y(x)[a(x)u(x)].$$

Перепишем (*) в таком виде:

$$\frac{dg}{dx} = f(x)u(x).$$

Теперь можно разделить *g* и *x*:

$$dg = f(x)u(x)dx$$

$$\int dg = \int f(x)u(x)dx + C$$

$$g(x) = y(x)u(x) = \int f(x)u(x)dx + C$$

Наконец, решение:

$$y(x) = \frac{1}{u(x)}\left(\int f(x)u(x)dx + C\right).$$

Пример

Решите уравнение $\frac{dy}{dx} - y - xe^x = 0$.

Решение.

Выразим в стандартном виде $\frac{dy}{dx} + a(x)y(x) = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} - y = xe^x.$$

Здесь $a(x) = -1$, $f(x) = xe^x$.

Пример

Решите уравнение $\frac{dy}{dx} - y - xe^x = 0$.

Решение.

Выразим в стандартном виде $\frac{dy}{dx} + a(x)y(x) = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} - y = xe^x.$$

Здесь $a(x) = -1$, $f(x) = xe^x$.

Интегрирующий множитель: $u(x) = e^{\int a(x)dx} = e^{-x}$ *(где константа? куда делась?)*

Умножаем:

$$\frac{dy}{dx}e^{-x} - ye^{-x} = x.$$

Пусть $g(x) = y(x)u(x) = ye^{-x}$. Тогда

$$\frac{dg}{dx} = x.$$

Пример

Решите уравнение $\frac{dy}{dx} - y - xe^x = 0$.

Решение.

Выразим в стандартном виде $\frac{dy}{dx} + a(x)y(x) = f(x)$:

$$\frac{dy}{dx} - y = xe^x.$$

Здесь $a(x) = -1$, $f(x) = xe^x$.

Интегрирующий множитель: $u(x) = e^{\int a(x)dx} = e^{-x}$ *(где константа? куда делась?)*

Умножаем:

$$\frac{dy}{dx}e^{-x} - ye^{-x} = x.$$

Пусть $g(x) = y(x)u(x) = ye^{-x}$. Тогда

$$\frac{dg}{dx} = x.$$

Разделяем:

$$dg = xdx.$$

Интегрируем:

$$\int dg = \int xdx + C.$$

Пусть $g(x) = y(x)u(x) = ye^{-x}$. Тогда

$$\frac{dg}{dx} = x.$$

Разделяем:

$$dg = xdx.$$

Интегрируем:

$$\int dg = \int xdx + C.$$

$$g = \frac{x^2}{2} + C.$$

Пусть $g(x) = y(x)u(x) = ye^{-x}$. Тогда

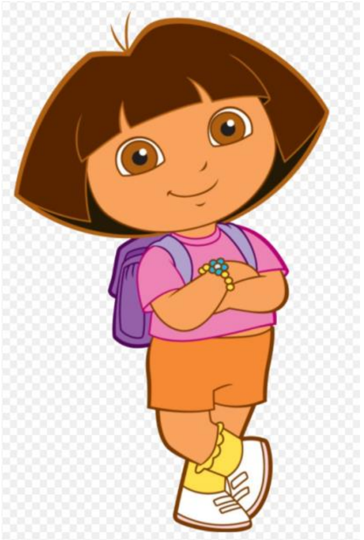
$$\frac{dg}{dx} = x.$$

Разделяем:

$$dg = xdx.$$

Интегрируем:

$$\int dg = \int xdx + C.$$



$$g = \frac{x^2}{2} + C.$$

Теперь вернёмся к $y(x)$:

$$ye^{-x} = \frac{x^2}{2} + C.$$

Общее решение:

$$y = e^x\left(\frac{x^2}{2} + C\right).$$

Будь даны начальные условия, мы бы нашли и частное решение.

ХВАТИТ.

В следующий раз – простейший (пуассоновский) поток событий.