Семинар 3
по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.09.22

Задание 1

Условие

Пусть X - число событий за время $[0;1]$ в пуассоновском потоке с интенсивностью λ, а Y – число событий в том же потоке за время $[0;10]$. Найдите $Cov(X;Y)$ и $Corr(X,Y)$.

Решение

Так как X и Y находятся в одном потоке, а интервалы времени равны 1 и 10 соответственно, то величины имеют распределения:

$$\begin{cases} X \sim Pois(\lambda) \\ Y \sim Pois(10 \cdot \lambda) \end{cases}$$

Пусть Z – число событий за время $[1;10]$ в том же потоке. Тогда:

$$Y = X + Z$$

, причём X и Z независимы в силу предпосылки об отсутствии последействия. Значит:

$$Cov(X;Y) = Cov(X;X+Z) = Cov(X;X) + Cov(X;Z) = D[X] + 0 = \lambda$$

$$Corr(X;Y) = \frac{Cov(X;Y)}{\sqrt{D[X] \cdot D[Y]}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda \cdot 10\lambda}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Ответ

$$Cov(X;Y) = \lambda$$

$$Corr(X;Y) = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Задание 2

Условие

Пусть $X \sim Pois(0.8)$.

а) Найдите $\mathbf{P}\{X \geqslant 1\}$.

б) Что больше – $\mathbf{P}\{\text{чётные } X\}$ или $\mathbf{P}\{\text{нечётные } X\}$?

Решение

а)

$$\mathbf{P}\{X\geqslant 1\} = 1-\mathbf{P}\{X=0\} = 1-\frac{0.8^0}{0!}\cdot e^{-0.8} = 1-e^{-0.8}$$

б)

$$\mathbf{P}\{X=2\cdot k\}-\mathbf{P}\{X=2\cdot k+1\} = \frac{\lambda^{2\cdot k}}{(2\cdot k)!}\cdot e^{-\lambda}-\frac{\lambda^{2\cdot k+1}}{(2\cdot k+1)!}\cdot e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{2\cdot k}\cdot(2\cdot k+1-\lambda)}{(2\cdot k+1)!} > 0 \quad \forall k\geqslant 0$$

Ответ

а) $\mathbf{P}\{X\geqslant 1\} = 1-e^{-0.8}$

б) $\mathbf{P}\{\text{чётные } X\} > \mathbf{P}\{\text{нечётные } X\}$

Задание 3

Условие

Запросы поступают пуассоновским потоком с интенсивностью 3 в секунду. Обработка каждого запроса занимает ровно секунду.

а) Какова вероятность, что к моменту $t=2$ ни один запрос не будет обработан?

б) За время $[0;2]$ поступило 5 запросов. Какова вероятность, что не один из них не будет обработан?

Решение

а) Вероятность того, что за t минут ни один запрос не будет обработан, равна вероятности того, что ни один запрос не поступит за $(t-1)$ минут.

$$X \sim Pois(\lambda\cdot t)$$

$$\mathbf{P}\{X=0\} = e^{-\lambda\cdot t} = e^{-3}$$

б) Вероятность того, что ни один из n запросов, поступивших в систему в течение t минут, не будет обработан, равна вероятности того, что за $(t-1)$ минут в систему не поступил ни один запрос, при условии, что за t минут в систему поступило 5 запросов.

$$\begin{cases} X \sim Pois\big(\lambda\cdot(t-1)\big) & \text{– количество запросов в системе в промежутке [0;t-1]} \\ Y \sim Pois\big(\lambda\cdot t\big) & \text{– количество запросов в системе в промежутке [0;t]} \\ Z \sim Pois\big(\lambda\big) & \text{– количество запросов в системе в промежутке [t-1;t]} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}\Big(\{X=0\}\big|\{Y=n\}\Big) = \frac{\mathbf{P}\Big(\{X=0\}\cap\{Y=n\}\Big)}{\mathbf{P}\{Y=n\}} = \begin{matrix}\text{по предпосылке об}\\ \text{отсутствии последействия}\end{matrix} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{X=0\}\cdot\mathbf{P}\{Z=n\}}{\mathbf{P}\{Y=n\}} = \frac{e^{-\lambda\cdot(t-1)}\cdot{}^{\lambda^n}/_{n!}\cdot e^{-\lambda}}{{}^{(\lambda\cdot t)^n}/_{n!}\cdot e^{-\lambda\cdot t}} = \frac{1}{t^n} = \frac{1}{2^5}$$

Ответ

а) $e^{-\lambda\cdot t}=e^{-3}$

б) $\dfrac{1}{t^n}=\dfrac{1}{2^5}$

Задание 4

Условие

В некоторой местности число детей в семье распределено по закону Пуассона. Найдите среднее число детей в семье, если доля бездетных семей составляет 20%.

Решение

Пусть X – число детей в семье:

$$X \sim Pois(\lambda)$$

Доля бездетных составляет 20%, то есть если из всех семей случайно выбрать одну, то вероятность, что она будет бездетная, будет равна 0.2:

$$\mathbf{P}\left\{X=0\right\} = 0.2$$

$$e^{-\lambda} = 0.2$$

$$\lambda = -ln(0.2)$$

Среднее число детей в семье равно:

$$E[X] = \lambda = -ln(0.2)$$

Ответ

$-ln(0.2)$

Задание 5

Условие

Рассмотрим когорту новорождённых, которые со временем взрослеют и умирают. Пусть $S(t)$ – доля доживших до возраста t, $S(0)=1$. Функция $\lambda(t) = -\frac{dS/dt}{S(t)}$ называется силой (или интенсивностью) смертности. Бенджамин Гомперц предположил, что она экспоненциально растёт:

$$\lambda(t) = a\cdot e^{b\cdot t}$$

Выведите функцию должития $S(t)$, соответствующую указанной силе смертности $\lambda(t)$.

Решение

$$-\frac{dS/dt}{S(t)} = a\cdot e^{b\cdot t}$$

$$-\frac{dS}{S(t)} = a\cdot e^{b\cdot t}\cdot dt$$

$$\int -\frac{dS}{S(t)} = \int a\cdot e^{b\cdot t}\cdot dt + C$$

$$-ln\,|S(t)| = \frac{a}{b}\cdot e^{b\cdot t} + C$$

$$S(t) = |S(t)| = exp\left(-{}^{a}/_{b}\cdot e^{b\cdot t} + C\right) \quad \text{– общее решение}$$

Из начальных условий:

$$1 = S(0) = exp\left(-{}^{a}/_{b}\cdot e^{b\cdot 0} + C\right)$$

$$0 = -{}^{a}/_{b}+C$$

$$C = {}^{a}/_{b}$$

Частное решение:

$$S(t) = exp\left((1-e^{b\cdot t})\cdot {}^{a}/_{b}\right)$$

Ответ

$$S(t) \;=\; exp\left((1-e^{b\cdot t})\cdot {}^{a}\!/_{b}\right)$$

Задание 6

Условие

Решите дифференциальное уравнение:

$$x\cdot\frac{dy}{dx}-2\cdot y \;=\; 2\cdot x^4$$

Решение

$$\frac{dy}{dx}+\underbrace{\left(-\frac{2}{x}\right)}_{a(x)}\cdot y \;=\; \underbrace{2\cdot x^3}_{f(x)}$$

Интегрирующий множитель:

$$u(x) \;=\; e^{\int a(x)\cdot dx} \;=\; e^{\int\left(-\frac{2}{x}\right)\cdot dx} \;=\; e^{-2\cdot ln|x|} \;=\; \frac{1}{x^2}$$

Тогда:

$$y \;=\; \frac{\int f(x)\cdot u(x)\cdot dx \;+\; C}{u(x)} \;=\; \frac{\int 2\cdot x^3\cdot({}^{1}\!/_{x^2})\cdot dx \;+\; C}{({}^{1}\!/_{x^2})} \;=\; \frac{\int 2\cdot x\cdot dx \;+\; C}{({}^{1}\!/_{x^2})} \;=\; x^2\cdot\left(x^2+C\right)$$

Ответ

$$y \;=\; x^2\left(x^2+C\right)$$

Задание 7

Условие

Решите дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} \;=\; \frac{y^2}{3t}$$

Найдите стационарное решение. Сходятся ли нестационарные решения к стационарному?

Решение

Сначала найдём стационарное решение ($y(t)\!=\!C$):

$$0 \;=\; \frac{C^2}{3t}$$

Уравнение обращается в тождество только при $C\!=\!0$, то есть стационарное решение имеет вид:

$$y(t) \;=\; 0$$

Теперь найдём общее решение. Обособленное решение:

$$y(t) \;=\; 0$$

Отбросим это решение:

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dt}{3t}$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dt}{3t} + C$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{ln|t|}{3} + C$$

$$y = -\frac{1}{{}^{ln|t|}\!/_{3} + C} \quad \xrightarrow[t \to +\infty]{} \quad 0$$

Ответ

Стационарное решение:

$$y(t) = 0$$

Решение в общем виде (сходится к стационарному):

$$y(t) = \left[\begin{array}{l} 0 \\ -\dfrac{1}{{}^{ln|t|}\!/_{3} + C} \end{array}\right.$$