# Лекция 4

## Снова пуассоновский поток
## и связанные с ним распределения

## Напоминалка

Нам нужна модель поступления заявок, которая позволит отвечать на вопросы:

- Когда придёт следующая заявка?
- Сколько заявок поступит за определённое время?

Мы разобрали *простейший*, или *пуассоновский*, *поток событий* – модель, которая даёт распределение числа заявок за любой период времени времени.

Это распределение зависит от единственного параметра – *интенсивности* потока $\lambda > 0$.

Интенсивность входящего потока заявок – среднее число заявок, поступающих за единицу времени.

## Свойства (однородного) пуассоновского потока

Нужно: получить выражение для вероятности наступления $k$ событий за время $[T; T + t]$.
Выдвинем предпосылки:

- *Однородность.* Вероятность $k$ событий за время $[T; T + t]$ не зависит от $T$ для любого $k$.
(она такая же, как и для промежутка $[0; t]$)

- *Отсутствие последействия*. Вероятность $k$ событий за время $[T; T + t]$ не зависит от времени наступления предыдущих событий (до момента $T$).

- *Ординарность*. Вероятность более одного события за время $[T; T + t]$ равна $o(t)$. Можно сказать, она пренебрежимо мала.

Также предположим (но это не обязательно), что вероятность ровно одного события на временном промежутке примерно пропорциональна длине этого промежутка с коэффициентом пропорциональности $\lambda$ :

$$P(1 \text{ событие за время } [T; T + t]) = \lambda t + o(t).$$

Следовательно,

$$P(0 \text{ событий за время } [T; T + t]) = 1 - \lambda t + o(t).$$

Заметьте: здесь $[1 - \lambda t + o(t)] + [\lambda t + o(t)] + o(t) = 1$.

## Число событий (заявок) в простейшем потоке

Был получен важный результат.

Пусть заявки поступают простейшим потоком с интенсивностью $\lambda$, а $X$ – число заявок, поступивших за время $[T, T + t]$. Тогда:

$$X \sim Pois(\lambda t);$$

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$E(X) = D(X) = \lambda.$$

*А время между заявками?*

# Время между заявками

Начнём со времени поступления первой заявки.

Сейчас момент $t = 0$. Интенсивность потока $\lambda > 0$.
Сколько ждать первую заявку?

Пусть $T$ – время ожидания. Дополнительная функция распределения:

$$G(t) = P(T > t) = P(\text{нет заявок за } [0; t]) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

Функция распределения:

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

А для $t < 0$?

## Время между заявками

А если мы начинаем ждать в момент $t = 10$?

Всё то же, потому что поток заявок *однородный*.

А если только что пришла заявка и мы ждём следующую?

Неважно, потому что нет *последействия*: вероятность, что за время $t$ не поступит заявка не зависит от того, когда заявки поступали ранее.

Время ожидания распределено одинаково, не зависимо от момента начала ожидания и того, фиксированный это момент или он приурочен к поступлению какой-либо заявки.

Таким образом, если случайная величина $T$ – время между последовательными событиями в пуассоновском потоке, её дополнительная функция распределения такова:

$$G(t) = e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

Это знакомая штука: *экспоненциальное* (*показательное*) распределение. $T \sim Exp(\lambda)$.

Время ожидания ближайшего события от произвольного фиксированного момента времени имеет то же распределение.

# Напоминалка: экспоненциальное распределение

Случайная величина $T$ распределена по экспоненциальному (показательному) закону с параметром масштаба $\lambda > 0$, если её функция распределения имеет вид

$$F(t) = P(T \le t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Дополнительная функция распределения:

$$G(t) = P(T > t) = e^{-\lambda t}, t \ge 0.$$

Функция плотности:

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \ge 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Среднее:

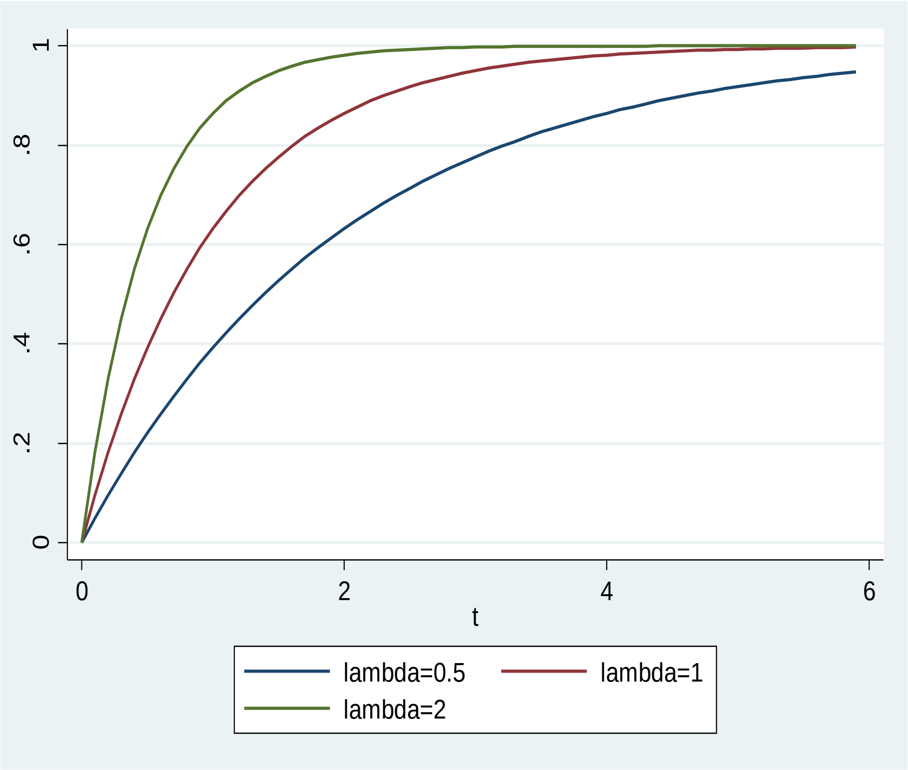
$$E(T) = \int_0^\infty G(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\,dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^\infty = 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия:

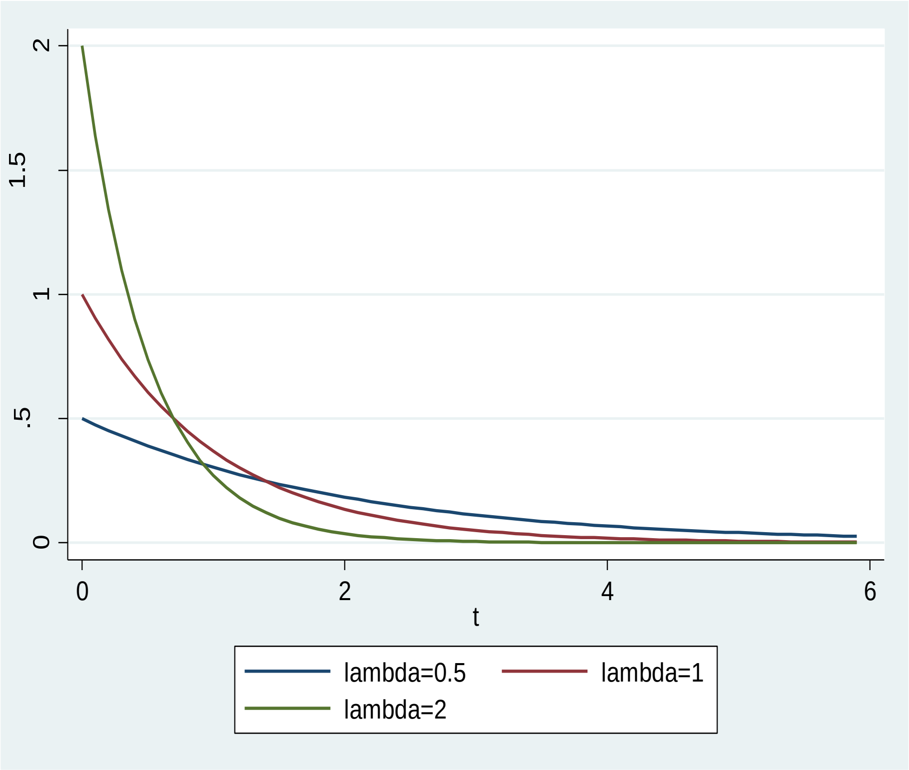
$$D(T) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

# Напоминалка: экспоненциальное распределение

## Функция распределения




## Функция плотности



# Пример

Экспоненциальное распределение удобно использовать и для времени обслуживания.

**Задача.** В мастерской чинят мобильные телефоны. Время исполнения заказа распределено экспоненциально, в среднем – 4 часа.

a) Только что поступил новый заказ. С какой вероятностью работа над ним продлится более рабочего дня (8 часов)?
b) Прошло 8 часов, а мобильник всё не починен. С какой вероятностью его исправят за следующие 8 часов?

# Пример

Экспоненциальное распределение удобно использовать и для времени обслуживания.

**Задача.** В мастерской чинят мобильные телефоны. Время исполнения заказа распределено экспоненциально, в среднем – 4 часа.

a) Только что поступил новый заказ. С какой вероятностью работа над ним продлится более рабочего дня (8 часов)?
b) Прошло 8 часов, а мобильник всё не починен. С какой вероятностью его исправят за следующие 8 часов?

**Решение.** Пусть $T$ – время починки. $E(T) = 4$, так что $\lambda = \frac{1}{4}$.

a)

$$P(T > 8) = e^{-8\lambda} = e^{-2} \approx 0.135.$$

# Пример

Экспоненциальное распределение удобно использовать и для времени обслуживания.

**Задача.** В мастерской чинят мобильные телефоны. Время исполнения заказа распределено экспоненциально, в среднем – 4 часа.

a) Только что поступил новый заказ. С какой вероятностью работа над ним продлится более рабочего дня (8 часов)?
b) Прошло 8 часов, а мобильник всё не починен. С какой вероятностью его исправят за следующие 8 часов?

**Решение.** Пусть $T$ – время починки. $E(T) = 4$, так что $\lambda = \frac{1}{4}$.

a)

$$P(T > 8) = e^{-8\lambda} = e^{-2} \approx 0.135.$$

b)

$$P(T > 16 | T > 8) = \frac{P(\{T > 16\} \cap \{T > 8\})}{P(T > 8)} = \frac{P(T > 16)}{P(T > 8)} = \frac{e^{-16\lambda}}{e^{-8\lambda}} = e^{-8\lambda} = e^{-2} \approx 0.135.$$

Вероятности совпадают. И это не совпадение!

# Отсутствие последействия

Экспоненциальное распределение обладает свойством *отсутствия последействия*:

Если $T \sim Exp(\lambda)$, то $\forall t, t_0 > 0$

$$P(T > t_0 + t | T > t_0) = P(T > t).$$

Это свойство следует из одноимённого свойства пуассоновского потока.

*Почему мы используем его для времени обслуживания? Оно правдоподобно?*

По-английски говорят, что экспоненциальное распределение *беспамятное* (memoryless). Можно считать, что поэтому мы и обозначаем его *M* в нотации Кендалла.

## Отсутствие последействия

Экспоненциальное распределение обладает свойством *отсутствия последействия*:

Если $T \sim Exp(\lambda)$, то $\forall t, t_0 > 0$

$$P(T > t_0 + t | T > t_0) = P(T > t).$$

Это свойство следует из одноимённого свойства пуассоновского потока.

*Почему мы используем его для времени обслуживания? Оно правдоподобно?*

Обычно нет. Но оно очень удобно.

Иногда возникают вопросы вроде: «В системе пять заявок, сколько потребуется времени, чтобы все их обработать?» В экспоненциальном случае ответ не зависит от того, сколько времени уже обслуживается текущая заявка.

## Ещё несколько слов о пуассоновском потоке и экспоненциальном распределении

Если время между последовательными заявками описывается независимыми случайными величинами, экспоненциально распределёнными с одним и тем же параметром λ, то заявки поступают пуассоновским потоком.

=> Так можно симулировать пуассоновский поток!

Экспоненциальное распределения может появиться и без пуассоновского потока.

Отсутствие последействия экспоненциального распределения и о.п. простейшего потока – разные свойства!
Время между заявками может быть экспоненциальным, а поток заявок не обладать свойством отсутствия последействия (=> не быть пуассоновским).

## Ожидание *k*-й заявки: пример

Пассажиры приходят на автовокзал пуассоновским потоком, 1.5 пассажира в минуту. На вокзале всегда стоит маршрутка вместимостью 12 пассажиров, которая отправляется, когда заполнится. Уехавшую маршрутку тут же сменяет новая.

Только что отъехала маршрутка. Обозначим за $T$ время до следующего отъезда.

Найдите:

a) $E(T)$, b) $D(T)$, c) $P(T > 10)$.

## Ожидание *k*-й заявки: пример

Пассажиры приходят на автовокзал пуассоновским потоком, 1.5 пассажира в минуту. На вокзале всегда стоит маршрутка вместимостью 12 пассажиров, которая отправляется, когда заполнится. Уехавшую маршрутку тут же сменяет новая.

Только что отъехала маршрутка. Обозначим за $T$ время до следующего отъезда.

Найдите:

а) $E(T)$, b) $D(T)$, c)$P(T > 10)$.

*Решение.* Пусть $T_i$ - время между прибытием пассажира $i - 1$ и пассажира $i$.

Тогда $T = T_1 + \cdots + T_{10}$, $T_i$ независимы и $Exp(1.5)$.

## Ожидание *k*-й заявки: пример

Пассажиры приходят на автовокзал пуассоновским потоком, 1.5 пассажира в минуту. На вокзале всегда стоит маршрутка вместимостью 12 пассажиров, которая отправляется, когда заполнится. Уехавшую маршрутку тут же сменяет новая.
Только что отъехала маршрутка. Обозначим за $T$ время до следующего отъезда.
Найдите:
a) $E(T)$, b) $D(T)$, c) $P(T > 10)$.

*Решение.* Пусть $T_i$ - время между прибытием пассажира $i-1$ и пассажира $i$.
Тогда $T = T_1 + \cdots + T_{10}$, $T_i$ независимы и $Exp(1.5)$.

*a)* $E(T_i) = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$, $E(T) = E(T_1 + \cdots + T_{12}) = 12 \times \frac{2}{3} = \frac{24}{3} = 8.$

## Ожидание *k*-й заявки: пример

Пассажиры приходят на автовокзал пуассоновским потоком, 1.5 пассажира в минуту. На вокзале всегда стоит маршрутка вместимостью 12 пассажиров, которая отправляется, когда заполнится. Уехавшую маршрутку тут же сменяет новая.
Только что отъехала маршрутка. Обозначим за $T$ время до следующего отъезда.
Найдите:
a) $E(T)$, b) $D(T)$, c)$P(T > 10)$.

*Решение.* Пусть $T_i$ - время между прибытием пассажира $i-1$ и пассажира $i$.
Тогда $T = T_1 + \cdots + T_{10}$, $T_i$ независимы и $Exp(1.5)$.

*a)* $E(T_i) = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$, $E(T) = E(T_1 + \cdots + T_{12}) = 12 \times \frac{2}{3} = \frac{24}{3} = 8.$

*b)* $D(T_i) = \frac{1}{1.5^2} = \frac{4}{9}$, $D(T) = D(T_1 + \cdots + T_{12}) = 12 \times \frac{4}{9} = \frac{48}{9} = 5\,\frac{3}{9}.$

## Ожидание *k*-й заявки: пример

Пассажиры приходят на автовокзал пуассоновским потоком, 1.5 пассажира в минуту. На вокзале всегда стоит маршрутка вместимостью 12 пассажиров, которая отправляется, когда заполнится. Уехавшую маршрутку тут же сменяет новая.
Только что отъехала маршрутка. Обозначим за $T$ время до следующего отъезда.
Найдите:
a) $E(T)$, b) $D(T)$, c) $P(T > 10)$.

*Решение.* Пусть $T_i$ - время между прибытием пассажира $i-1$ и пассажира $i$.
Тогда $T = T_1 + \cdots + T_{10}$, $T_i$ независимы и $Exp(1.5)$.

*a)* $E(T_i) = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$, $E(T) = E(T_1 + \cdots + T_{12}) = 12 \times \frac{2}{3} = \frac{24}{3} = 8.$

*b)* $D(T_i) = \frac{1}{1.5^2} = \frac{4}{9}$, $D(T) = D(T_1 + \cdots + T_{12}) = 12 \times \frac{4}{9} = \frac{48}{9} = 5\,\frac{3}{9}.$

*c)* $P(T > 10) = P(< 12 \text{ прибытий за } 10 \text{ мин}) =$

$$= \sum_{k=0}^{11} \frac{(1.5 \times 10)^k}{k!} e^{-1.5\times 10} = e^{-15} \sum_{k=0}^{11} \frac{15^k}{k!} = 0.185.$$

Распределение времени ожидания *k*-го события в пуассоновском потоке называется *распределением Эрланга порядка k*.

# Распределение Эрланга

Пусть случайные величины $T_1, \dots, T_k$ независимы и экспоненциально распределены с параметром масштаба $\lambda > 0$. Распределение случайной величины $T = T_1 + \cdots + T_k$ называют распределением Эрланга порядка $k$ с параметром масштаба $\lambda$.

Обозначение: $T \sim Erlang\ (k, \lambda)$. В нотации Кендалла: $E_k$ или $Er_k$.

Дополнительная функция распределения:

$$G_T(t) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

Функция распределения:

$$F_T(t) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Плотность:

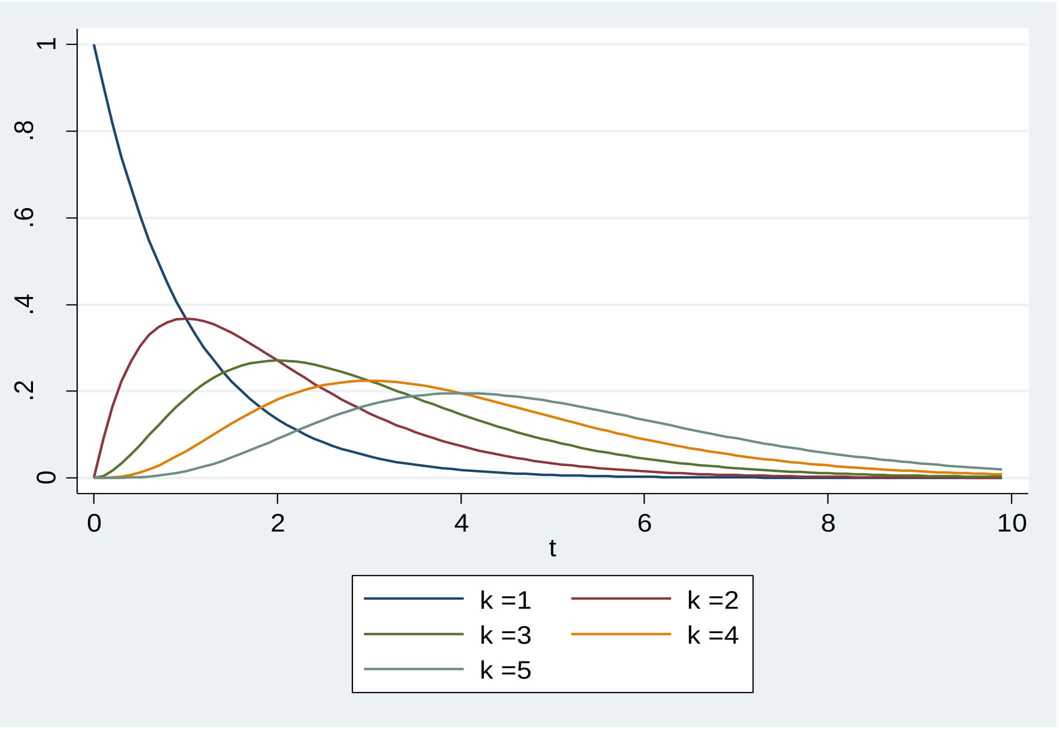
$$f_T(t) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda t}, \qquad t \geq 0.$$

*(Почему? Это не очевидно)*

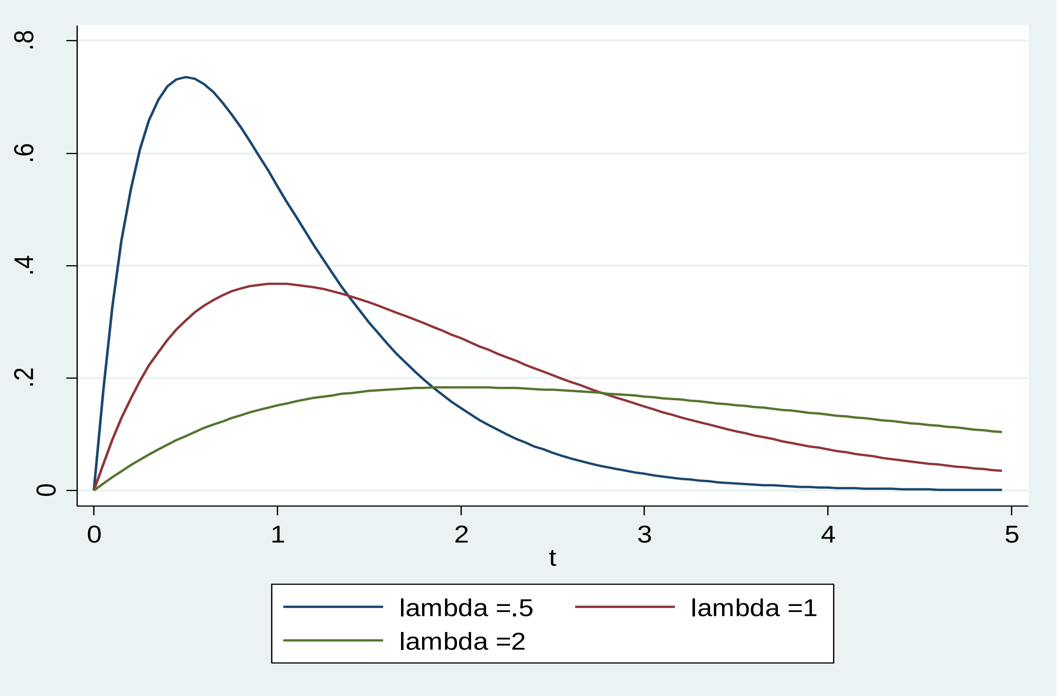
Среднее и дисперсия:

$$E(T) = \frac{k}{\lambda}; D(T) = \frac{k}{\lambda^2}.$$

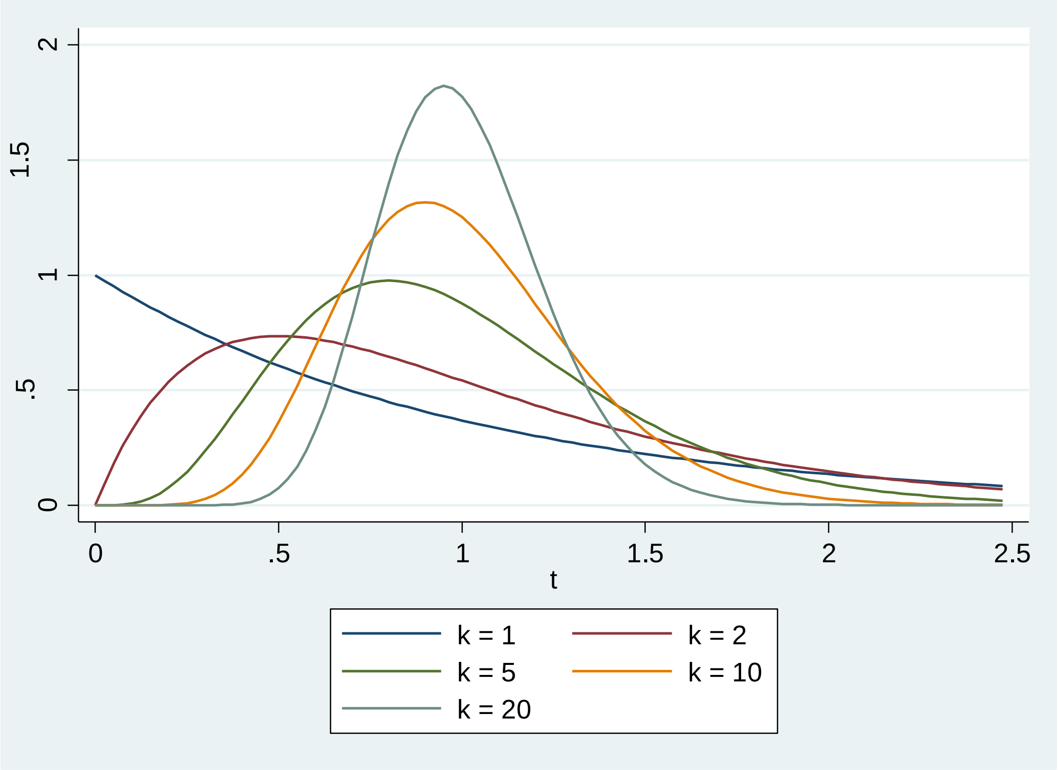
Плотность расп. Эрланга,
$\lambda = 1, \qquad k = 1, \ldots, 5$:




Плотность расп. Эрланга
$\lambda = -0.5, 1, 2, \qquad k = 2$:



Плотность распределения Эрланга: одно математическое ожидание при разных $k$.




$$\lambda = \frac{1}{k}$$

# Erlang pdf: derivation (1)

Let $T$ be the time until the $k$-th arrival. Its cdf is $F(t) = P(< k \text{ arrivals within } [0; t])$.

It increases during the next infinitesimal period of length Δ:

$$F(t+\Delta) - F(t) = P\big(k^{\text{th}} \text{ arrival within } [t; t+\Delta]\big).$$

That's how $k$-th arrival may occur within $[t; t+\Delta]$ :

$k-1$ arrivals within $[0; t]$ and an arrival within $[t; t+\Delta]$

*prob.*: $P_{k-1}(t)P_1(\Delta)$

$k-2$ arrivals within $[0; t]$ and two arrivals within $[t; t+\Delta]$

*prob.*: $P_{k-2}(t)P_2(\Delta) = P_{k-2}(t)o(\Delta) = o(\Delta)$

…

no arrivals within $[0; t]$ and $k$ arrivals within $[t; t+\Delta]$

*prob.*: $o(\Delta)$

$k$-th arrival within $[t; t+\Delta]$.

Hence,

$$F(t+\Delta) - F(t) = P\big(k^{\text{th}} \text{ arrival within } [t; t+\Delta]\big) = P_{k-1}(t)P_1(\Delta) + o(\Delta).$$

# Erlang pdf: derivation (2)

Let $T$ be the time until the $k$-th arrival. Its cdf is $F(t) = P(< k \text{ arrivals within } [0; t])$.

$$F(t+\Delta) - F(t) = P\big(k^{\text{th}} \text{ arrival within } [t; t+\Delta]\big) = P_{k-1}(t)P_1(\Delta) + o(\Delta) =$$

$$= \underbrace{\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}}_{P_{k-1}(t)} \cdot \underbrace{\frac{(\lambda\Delta)^1}{1!}e^{-\lambda\Delta}}_{P_1(\Delta)} \frac{(\lambda\Delta)^1}{1!}e^{-\lambda\Delta} + o(\Delta) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t} \cdot \lambda\Delta e^{-\lambda\Delta} + o(\Delta) =$$

$$= \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda\Delta e^{-\lambda(t+\Delta)} + o(\Delta).$$

Now let's turn it into a derivative:

$$\frac{F(t+\Delta) - F(t)}{\Delta} = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda e^{-\lambda(t+\Delta)} + \frac{o(\Delta)}{\Delta}.$$

$$f(t) = \lim_{\substack{\Delta\to 0\\ \Delta>0}} \frac{F(t+\Delta) - F(t)}{\Delta} = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}\lambda e^{-\lambda t}.$$

# Потоки восстановления
# Теорема Пальма-Хинчина

*Конрад Пальм*

*Александр Яковлевич Хинчин*

А.Я. Хинчин, “Математические методы в теории массового обслуживания”:

давно уже известен целый ряд принципиальных соображений, заставляющих сомневаться в том, что предпосылки, которые составляют собой определение простейшего потока, с достаточной степенью точности выполняются в большинстве практически встречающихся случаев (в особенности это относится к требованию отсутствия последействия). Если поэтому наблюдения и опыт констатируют некоторое небольшое отклонение реально встречающихся потоков от простейших, то этому не следует удивляться; более того, удивление может вызвать тот факт, что отклонения такого рода в большинстве случаев бывают менее значительными, чем этого можно было бы ожидать из теоретических соображений.

## Потоки восстановления и их суперпозиции

Пусть времена между заявками независимы и одинаково распределены со средним $\mu, 0 < \mu < \infty$. Функция распределения – произвольная.

Такой поток заявок называют потоком восстановления с интенсивностью $\lambda = \frac{1}{\mu}$.

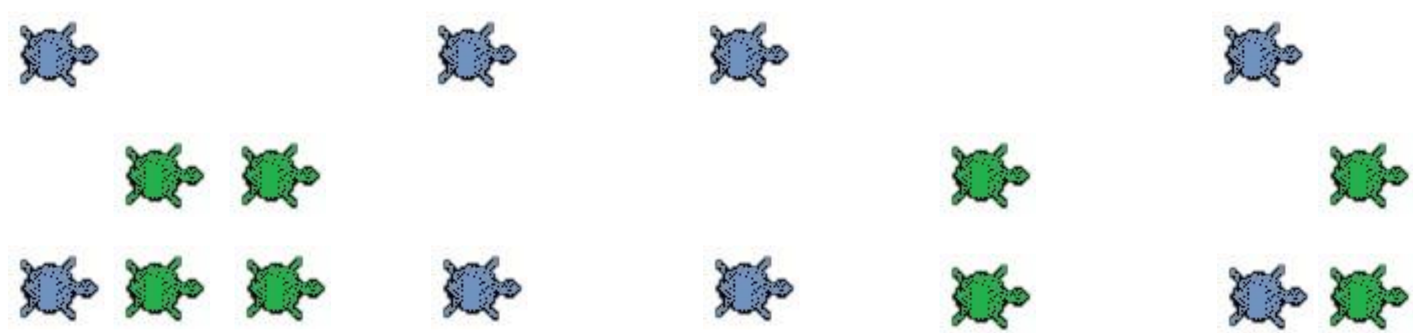
Пуассоновский поток – частный случай потока восстановления с экспоненциальным распределение между заявками.

### Суперпозиция потоков

Поток 1:

Поток 2:

Суперпозиция:



Интенсивность суперпозиции: $\Lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$

(интенсивности складываемых потоков)

Потоки восстановления различаются распределением времени между заявками.

# Теорема Пальма-Хинчина

(не строго)

Пусть есть *n* независимых потоков восстановления с интенсивностями $\lambda_i$ и функциями распределения времени между заявками $F_i(t), i = 1, \dots, n$.

Пусть при $n \to \infty$:

1) $\Lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = const, \lambda_i < \varepsilon,\ \ i = 1, \dots, n \qquad \forall\varepsilon > 0$, если $n$ достаточно велико.

2) $F_i(t) < \varepsilon,\ \ i = 1, \dots, n \qquad \forall\varepsilon > 0, t > 0$, если $n$ достаточно велико.

Тогда суперпозиция потоков восстановления стремится к пуассоновскому потоку с интенсивностью $\Lambda$.

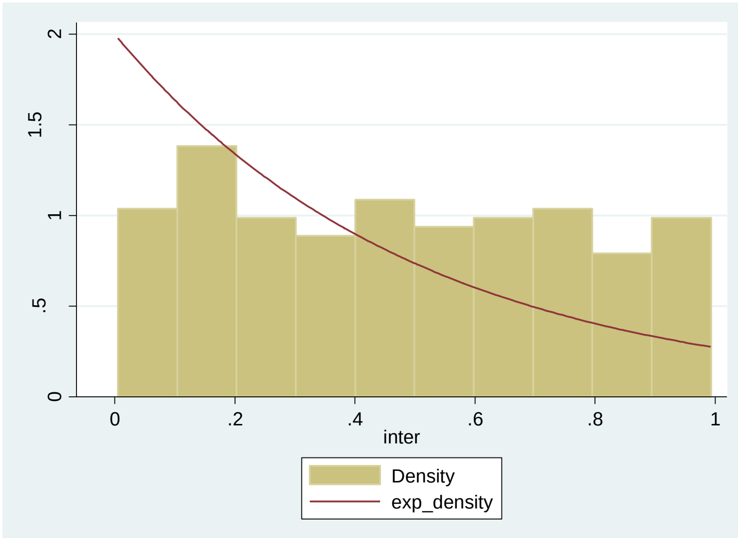
ЧТО ЭТО ЗНАЧИТ?

Мораль: суперпозиция большого числа потоков восстановления с низкой интенсивностью приближённо описывается пуассоновским потоком.

# Суперпозиция потоков восстановления: время между заявками

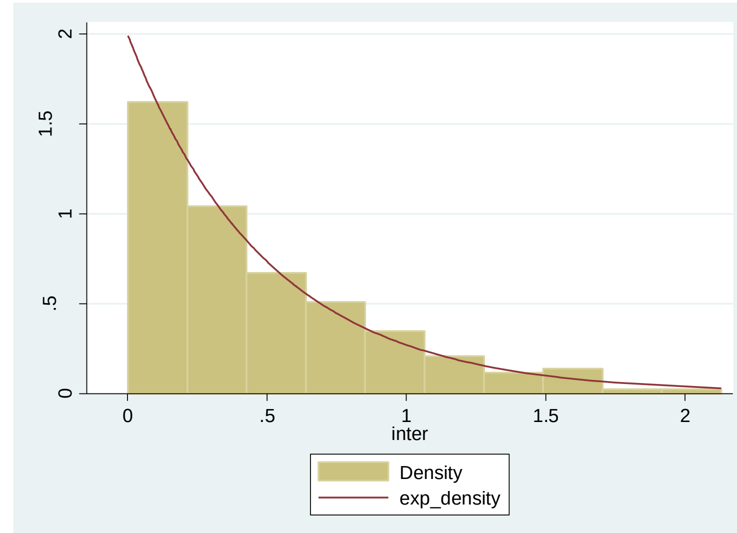
Один поток, время между заявками U[0; 1]

$\lambda_1 = 2$:



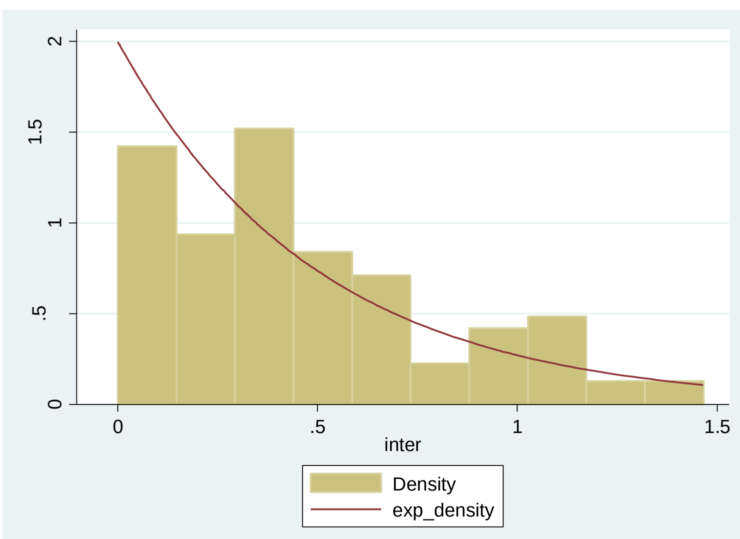

Четыре потока, время между заявками U[0; 4]

$\lambda_i = 0.5$:



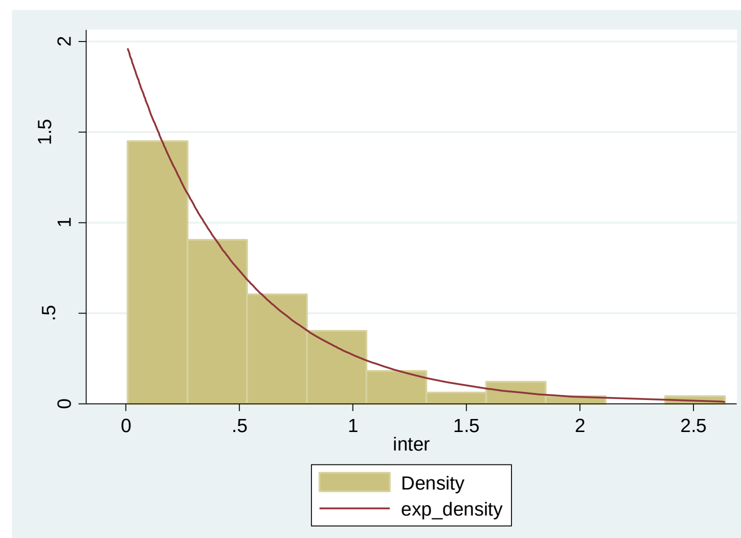

Два потока, время между заявками U[0; 2]

$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:




Двадцать потоков, U[0; 20],

$\lambda_i = 0.1$:



**В следующий раз**

Марковские цепи в дискретном времени