КДЗ 3 по Дискретной Математике

Татаринов Никита, БПИ196

2020
апрель, 10

Задача №1

Разложим 1224 на простые множители: $1224 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 17^1$. Тогда количество различных натуральных делителей 1224 равно $(3+1) \cdot (2+1) \cdot (1+1) = 24$.
Ответ: 24 натуральных делителя.

Задача №2

Каждую монету можно положить в один из трёх карманов.
Ответ: $3^7 = 2187$ способов.

Задача №3

Для решения задачи докажем лемму.

Лемма (3.1)**.** *Мощность множества слов, начинающихся с символа σ и имеющих длину не большую $n \in \mathbb{N}$, равна $\frac{26^n-1}{25}$.*

$\square$. Рассмотрим слова каждой возможной длины.

- Слов, начинающихся с σ и имеющих длину 1, всего 1.
- Слов, начинающихся с σ и имеющих длину 2, всего $1 \cdot 26 = 26$.
- Слов, начинающихся с σ и имеющих длину 3, всего $1 \cdot 26 \cdot 26 = 26^2$
- $\cdots$
- Слов, начинающихся с σ и имеющих длину n, всего $1 \cdot \underbrace{26 \cdot ... \cdot 26}_{n-1} = 26^{n-1}$.

Слов, начинающихся с σ и имеющих длину не большую n, $(1 + 26 + 26^2 + ... + 26^{n-1})^{\setminus \times (26-1)} = \frac{26^n-1}{25}$, чтд. $\square$

Приступим к решению задачи.

1. Все слова, начинающиеся с символов a и b, находятся в словаре выше α. По лемме 3.1 таких слов $2 \cdot \frac{26^5-1}{25} = 950510$.
2. Все слова, начинающиеся с символа d и следующих, находятся в словаре ниже α.
3. Количество слов, начинающихся с c и находящихся в словаре выше $\alpha = cbcad$ (слово c не учитывается), равно количеству слов, находящихся в словаре выше $bcad$, так как первые символы слов совпадают. Речь идёт о словах, длина которых не больше 4.

   3.1. Все слова, начинающиеся с символа a, находятся в словаре выше $bcad$. По лемме 3.1 таких слов $\frac{26^4-1}{25} = 18279$.

   3.2 Все слова, начинающиеся с символа c и следующих, находятся в словаре ниже $bcad$.

3.3 Количество слов, начинающихся с b и находящихся в словаре выше $bcad$ (слово b не учитывается), равно количеству слов, находящихся в словаре выше cad, так как первые символы слов совпадают. Речь идёт о словах, длина которых не больше 3.

3.3.1. Все слова, начинающиеся с символов a и b, находятся в словаре выше cad. По лемме 3.1 таких слов $2 \cdot \frac{26^3-1}{25} = 1406$.

3.3.2 Все слова, начинающиеся с символа d и следующих, находятся в словаре ниже cad.

3.3.3 Количество слов, начинающихся с c и находящихся в словаре выше cad (слово c не учитывается), равно количеству слов, находящихся в словаре выше ad, так как первые символы слов совпадают. Речь идёт о словах, длина которых не больше 2.

3.3.3.1. Нет символов, таких что множество слов, начинающихся с этих символов, полностью бы лежало выше ad в словаре.

3.3.3.2 Все слова, начинающиеся с символа b и следующих, находятся в словаре ниже ad.

3.3.3.3 Количество слов, начинающихся с a и находящихся в словаре выше ad, (слово a не учитывается) равно количеству слов, находящихся в словаре выше d, так как первые символы слов совпадают. Речь идёт о словах, длина которых не больше 1. Таких слов 3: a, b и c.

Сложим все учтённые числа: $950510 + 18279 + 1406 + 3 = 970198$. При этом, не учитывались слова c, cb, cbc и $cbca$. Таким образом, обшее количество таких слов равно 970202.
Ответ: 970202 слова.

Задача №4

Формула бинома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{(n-k)}$$

.

а) Если $n = 0$, то $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot C_n^k = C_0^0 = 1$. В противном случае, по формуле бинома Ньютона $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot (-1)^k \cdot 1^{(n-k)} = (-1+1)^n = 0$.

б) Если $n = 0$, то $\sum_{k=0,2|k}^{n} C_n^k = C_0^0 = 1$. Рассмотрим оставшиеся случаи.
Из пункта (а) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$, то есть $\sum_{k=0,2|k}^{n} C_n^k = \sum_{k=1,2\nmid k}^{n} C_n^k$. При этом по формуле биинома Ньютона $(\sum_{k=0,2|k}^{n} C_n^k) + (\sum_{k=1,2\nmid k}^{n} C_n^k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot 1^k \cdot 1^{(n-k)} = (1+1)^n = 2^n$, значит, $\sum_{k=0,2|k}^{n} C_n^k = 2^{(n-1)}$.

в) Для решения задачи рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^n$. Возьмём неопределённый интеграл от данной функции.
С одной стороны, $\int f(x)dx = \int (1+x)^n dx = \int (1+x)^n d(1+x) = \frac{(1+x)^{n+1}}{(n+1)} + const$. Воспользуемся биномом Ньютона: $\int f(x)dx = \frac{C_{n+1}^0}{n+1} + \frac{C_{n+1}^1}{n+1} \cdot x + ... + \frac{C_{n+1}^n}{n+1} \cdot x^n + \frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+1} \cdot x^{n+1} + const$.
С другой стороны, вновь воспользуемся биномом Ньютона: $\int f(x)dx = \int (1+x)^n dx =$

$\int(C_n^0 + C_n^1 \cdot x + C_n^2 \cdot x^2 + ... + C_n^{n-1} \cdot x^{n-1} + C_n^n \cdot x^n)dx = (\int C_n^0 \cdot dx) + (\int C_n^1 \cdot x \cdot dx) + ... + (\int C_n^{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot dx) + (\int C_n^n \cdot x^n \cdot dx) = C_n^0 \cdot x + \frac{C_n^1}{2} \cdot x^2 + ... + \frac{C_n^{n-1}}{n} \cdot x^n + \frac{C_n^n}{n+1} \cdot x^{n+1} + const.$
Тогда, $\frac{C_{n+1}^0}{n+1} + \frac{C_{n+1}^1}{n+1} \cdot x + ... + \frac{C_{n+1}^n}{n+1} \cdot x^n + \frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+1} \cdot x^{n+1} = C_n^0 \cdot x + \frac{C_n^1}{2} \cdot x^2 + ... + \frac{C_n^{n-1}}{n} \cdot x^n + \frac{C_n^n}{n+1} \cdot x^{n+1} + const.$
Рассмотрим разность k-ых степеней при x с разных сторон (k меняется от 1 до $(n+1)$ включительно): $\frac{C_n^{k-1}}{k} \cdot x^k - \frac{C_{n+1}^k}{n+1} \cdot x^k = x^k \cdot (\frac{1}{k} \cdot \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n-k+1)!}) = x^k \cdot (\frac{n!}{k! \cdot (n-k+1)!} - \frac{n!}{k! \cdot (n-k+1)!} = 0$. Значит, $const = \frac{C_n^0}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.
Тогда, $\frac{C_{n+1}^0}{n+1} + \frac{C_{n+1}^1}{n+1} \cdot x + ... + \frac{C_{n+1}^n}{n+1} \cdot x^n + \frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+1} \cdot x^{n+1} = C_n^0 \cdot x + \frac{C_n^1}{2} \cdot x^2 + ... + \frac{C_n^{n-1}}{n} \cdot x^n + \frac{C_n^n}{n+1} \cdot x^{n+1} + \frac{1}{n+1}$, то есть
$C_n^0 \cdot x + \frac{C_n^1}{2} \cdot x^2 + ... + \frac{C_n^{n-1}}{n} \cdot x^n + \frac{C_n^n}{n+1} \cdot x^{n+1} = \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$.
Возьмём x = 1. Тогда,
$C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + ... + \frac{C_n^{n-1}}{n} + \frac{C_n^n}{n+1} = \frac{(1+1)^{n+1}-1}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$, то есть мы нашли ответ на искомую задачу.

Ответ:

а)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

б)

$$\sum_{\substack{k=0 \\ 2|k}}^{n} C_n^k = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 2^{n-1} & n > 0 \end{cases}$$

в)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

Задача №5

Рассмотрим данный путь из $(0,0)$ в (m,n) как $m+n$ шагов, каждый из которых может быть либо вверх, либо вправо. Тогда, задача сводится к тому, чтобы из $m+n$ позиций выбрать n, в которых робот отправлялся вправо. Тогда в оставшихся позициях робот отправлялся вверх. Чтобы каждый из путей был уникальным, нужно воспользоваться формулой количества сочетаний $C_{m+n}^n = \frac{(m+n)!}{n! \cdot m!}$.

Замечание (3.1)**.** *Можно было выбрать m позиций, в которых робот бы отправлялся вверх - путь однозначно задаётся позициями одного направления. Ответ был бы $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n$.*

Ответ: $C_{m+n}^m = C_{m+n}^n = \frac{(m+n)!}{n! \cdot m!}$ пути.

Задача №6

$C_{a+n-1}^{a-1} = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!\cdot n!} = \frac{a\cdot(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1)}{n!}$. Так как число сочетаний - целое число, произведение чисел $(n!) \mid (a\cdot(a+1)\cdot\ldots\cdot(a+n-1))$, чтд.

Задача №7

1. Пусть первая цифра - нечётная. Тогда, её можно выбрать 5 способами. При этом, нужно выбрать 3 позиции из 5 (со 2 по 6), на которых будут чётные числа (или выбрать 2 позиции для нечёнтных - одно и то же): $C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$. В любой позиции будет 5 вариантов чисел, значит, искомых чисел в данной ветке будет $5\cdot 10\cdot 5^5$.

2. Пусть первая цифра - чётная. Тогда, её можно выбрать 4 способами. При этом, нужно выбрать 2 позиции из 5 (со 2 по 6), на которых будут чётные числа (или выбрать 3 позиции для нечёнтных - одно и то же): $C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$. В любой позиции будет 5 вариантов чисел, значит, искомых чисел в данной ветке будет $4\cdot 10\cdot 5^5$.

Таким образом, искомых чисел будет $5\cdot 10\cdot 5^5 + 4\cdot 10\cdot 5^5 = 9\cdot 10\cdot 5^5 = 281250$.
Ответ: 281250 вариантов.

Задача №8

Будем распределять каждый фрукт отдельно и воспользуемся для этого методом перегородок.
Пусть у нас есть n фруктов одного вида, которые надо распределить между k людьми. Тогда, поставим $(k-1)$ перегородку: фрукты, попавшие слева от первой перегородки, попадут к первому человеку; фрукты, попавшие между первой и второй перегородками, попадут к второму человеку; $\cdots$; фрукты, попавшие справа от $(k-1)$ перегородки, попадут к k-ому человеку. Заметим, что любое распределение n фрутов между $k-1$ перегородками эквивалентно уникальному распределению фруктов между людьми. Рассмотрим такое распределение как строку одинаковых элементов длины $n+k-1$, из которой нужно выделить $k-1$, которые будут перегородкам (или n элементов, которые будут фруктами). При этом, порядок расположения перегородок (фруктов), не важен. Значит, количество возможных распределений n фруктов одного вида между k людьми равно $C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!\cdot(k-1)!}$. Тогда, распределить 6 яблок между 4 людьми можно $C_{6+4-1}^{4-1} = \frac{9!}{6!\cdot 3!} = 84$ способами; распределить 3 груши между 4 людьми можно $C_{3+4-1}^{4-1} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ способами; распределить 2 сливы между 4 людьми можно $C_{2+4-1}^{4-1} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ способами. Тогда, распределить все эти фрукты между 4 людьми можно $C_{6+4-1}^{4-1}\cdot C_{3+4-1}^{4-1}\cdot C_{2+4-1}^{4-1} = 84\cdot 20\cdot 10 = 16800$ способами.
Ответ: 16800 способов.

Задача №9

$(x^2+x^7+x^9)^{20} = x^{40}\cdot(1+x^5+x^7)^{20}$, значит, нам необходимо найти коэффициент при x^{17} в многочлене $(1+x^5+x^7)^{20}$, так как x^{40} не повлияет на коэффициент.

По формуле бинома Ньютона $(1+x^5+x^7)^{20} = ((x^5+x^7)+1)^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot (x^5+x^7)^k \cdot 1^{(20-k)} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot \left(\sum_{m=0}^{k} C_k^m \cdot x^{5m} \cdot x^{7(k-m)}\right) = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k \cdot \left(\sum_{m=0}^{k} C_k^m \cdot x^{(7k-2m)}\right)$. Нам необходимо найти коэффициент при x^{17}, значит, нам необходимо решить в целых числах следующую систему уравнений.

$$\begin{cases} 7k-2m=17 \\ 0 \leqslant k \leqslant 20 \\ 0 \leqslant m \leqslant k \end{cases}$$

Для начала решим в общем виде диафантово уравнение.
Так как НОД$(7,-2)=1 \mid 17$, уравнение разрешимо в целых числах. $(k=3, m=2)$ - частное решение. Значит, общее решение диафантова уравнения имеет следуюший вид.

$$\begin{cases} k=3+n\cdot(-2) & n \in \mathbb{Z} \\ m=2-n\cdot 7 & n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Теперь расмотрим частные решения, при которых выполняется условие $0 \leqslant k \leqslant 20$.

- $(k=1, m=(-5))$ - не подходит, так как $m \geqslant 0$.
- $(k=3, m=2)$ подходит под условие $0 \leqslant m \leqslant k$, значит, является решением всей системы.
- Остальные решения не подходят, так как $k < m$.

Таким образом, $(k=3, m=2)$ - единственное решение системы. То есть, коэффициент при x^{17} в многочлене $(1+x^5+x^7)^{20}$ равен $C_{20}^3 \cdot C_3^2 = \frac{20!}{3!\cdot 17!} \cdot \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{18\cdot 19\cdot 20}{6} \cdot 3 = 3\cdot 19\cdot 20\cdot 3 = 3420$.
Значит, коэффициент при x^{57} в многочлене $(x^2+x^7+x^9)^{20}$ равен 3420.
Ответ: 3420.

Задача №10

Из задачи 3, существует $3^7 = 2187$ способов распределить 7 монет по 3 карманам. Тогда, вычислив количество способов, в которых есть хотя бы 1 пустой карман, мы решим задачу.

1. Рассмотрим сначала случаи, в которых пуст только 1 карман. Пусть пуст первый карман. Тогда, распределить 7 монет по 2 карманам можно 2^7 способами, среди которых будут 2, в которых будет ещё 1 пустой карман (второй или третий). В таком случае, способов, в которых будет пуст только первый карман, 2^7-2. Тогда, всего способов, в которых будет ровно 1 пустой карман - $3\cdot(2^7-2)$.
2. Случаев, когда пусты 2 кармана - 3 (когда в первом 7 монет, или когда во втором 7 монет, или когда в третьем 7 монет).
3. Случаев, когда пусты все 3, нет, так как в таком случае монеты не будут распределены.

Значит, всего случаев, когда пуст хотя бы 1 карман, $3\cdot 2^7 - 6 + 3 = 2^7 - 3$. Значит, способов, в которых ни один карман не будет пуст, всего $2187 - 2^7 + 3 = 2190 - 128 = 2062$.
Ответ: 2062 способа.

Задача №11

Зафиксируем любые 4 книги, которые должны остаться на своём месте. Тогда, нам необходимо вычислить количество перестановок оставшихся 6 книг, в которых ни одна книга не останется на своём месте, а это по определению количество беспорядков.
Количество всех беспорядков порядка n может быть вычислено с помощью принципа включения-исключения: $!n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k!}$. Тогда, количество перестановок 6-и книг, каждая из которых не должна остаться на своём месте, равно $!6 = 6! - \frac{6!}{1!} + \frac{6!}{2!} - \frac{6!}{3!} + \frac{6!}{4!} - \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{6!} = 360 - 120 + 30 - 6 + 1 = 265$. При этом, выбрать 4 книги, которые должны остаться на своём месте, можно $C_{10}^4 = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 10 = 210$ способами. Значит, всего искомых способов $210 \cdot 265 = 55650$.
Ответ: 55650 способа.

Задача №12

$\underline{2020} = \{\, n \mid (n \in (\mathbb{N} \cup \{0\})) \wedge (n < 2020)\}$. Тогда, ответом на задачу будет $|\underline{2020}| - \varphi(2020)$.

- $\varphi(2020) = \varphi(101) \cdot \varphi(20)$, так как НОД$(101, 20) = 1$.
- $\varphi(101) = 100$, так как 101 - простое число.
- $\varphi(20) = \varphi(5) \cdot \varphi(4)$, так как НОД$(5, 4) = 1$.
- $\varphi(5) = 4$, т.к. 5 - простое число.
- $\varphi(4) = 2$ - числа 1 и 3.

Тогда, количество чисел, не взаимно простых с 2020, равно $2020 - 100 \cdot 4 \cdot 2 = 1220$.
Ответ: 1220 чисел.

Задача №13

Для решения задачи построим таблицу из 10 строк и 7 столбцов, причём:

- индекс строки i отражает, что числа в ячейках этой строки оканчиваются цифрой i;
- индекс столбца j отражеат, что числа в ячейках этого столбца j-значны.

	1	2	3	4	5	6	7
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							

При этом, в ячейке с координатой (i,j) будет хранитсья количество j-значных чисел $\overline{a_j a_{j-1}...a_2 a_1}$, оканчивающихся цифрой i (то есть $\overline{a_j a_{j-1}...a_2 a_1} = \overline{a_j a_{j-1}...a_2 i}$), для которых выполняется условие $a_{k+1} \geqslant a_k, k = \overline{1,(j-1)}$.

1. Числа, оканчивающиеся на 9, могут иметь единственный вид 9...9, так как цифр, больших 9, не существует. Тогда, вся строка с индексом 9 заполнена единицами.

	1	2	3	4	5	6	7
0							
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9	1	1	1	1	1	1	1

2. Однозначных чисел каждого по одному (кроме 0, так число не может состоять только из 0). Таблица приобретает следующий вид.

	1	2	3	4	5	6	7
0	0						
1	1						
2	1						
3	1						
4	1						
5	1						
6	1						
7	1						
8	1						
9	1	1	1	1	1	1	1

3. Теперь рассмотрим отсавшиеся ячейки на примере одной конкретной с координатами (i,j). Напомним, что в ней хранится количество чисел вида $\overline{a_j a_{j-1}...a_1 i}$, в которых $a_{k+1} \geqslant a_k, k = \overline{1,(j-1)}$. Из этого следуют 2 условия.
Во-первых, для числа $\overline{a_j a_{j-1}...a_2 a_1}$ выполняется то же самое условие.
Во-вторых, $a_j \geqslant i$.
Это означает, что количество j-значных чисел вида $\overline{a_j a_{j-1}...a_1 i}$ с условием $a_{k+1} \geqslant a_k, k = \overline{1,(j-1)}$ равно количеству $(j-1)$-значных чисел вида $a_j a_{j-1}...a_3 a_2$, в которых $a_2 \geqslant i$, то есть $(i,j) = \sum_{k=i}^{9}(k, j-1)$. Заполним таблицу до конца.

	1	2	3	4	5	6	7
0	0	9	54	219	714	2001	5004
1	1	9	45	165	495	1287	3003
2	1	8	36	120	330	792	1716
3	1	7	28	84	210	462	924
4	1	6	21	56	126	252	462
5	1	5	15	35	70	126	210
6	1	4	10	20	35	56	84
7	1	3	6	10	15	21	28
8	1	2	3	4	5	6	7
9	1	1	1	1	1	1	1

Таким образом, суммарное количество семизначных чисел вида $\overline{a_7a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$, в которых $a_{k+1} \geqslant a_k, k = \overline{1,6}$, равно $5004 + 3003 + 1716 + 924 + 462 + 210 + 84 + 28 + 7 + 1 = 11439$.
Ответ: 11439 чисел.