ДЗ 1
по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.09.07

Задание 1

Условие

В столовой посетители обслуживаются на двух кассах, время обслуживания каждого посетителя распределено по закону Эрланга второго порядка и составляет в среднем одну минуту. Покупатели подходят с интенсивностью два человека в минуту, время между покупателями распределено экспоненциально. Очередь к кассам может быть сколь угодно большой. Опишите систему нотацией Кендалла.

Решение

Нотация Кендалла имеет вид:

$$A/B/X/Y/Z$$

, где

- A – закон распределения времени между поступлением заявок, то есть $A = M$ (экспоненциальное);
- B – закон распределения времени обслуживания, то есть $B = E_2$ (Эрланга второго порядка);
- X – число каналов обслуживания, то есть $X = 2$ (две кассы);
- Y – ёмкость системы (максимальное число заявок в системе единовременно), то есть $Y = \infty$ (очередь к кассам может быть сколь угодно большой);
- Z – дисциплина обслуживания, то есть $Z = GD$ (произвольная дисциплина, так как иное не оговорено условием).

Ответ

$$M/E_2/2/\infty/GD \quad \sim \quad M/E_2/2$$

Задание 2

Условие

Опираясь на геометрическую интерпретацию, найдите математическое ожидание случайной величины X, если

а) эта величина имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0;1)$, то есть принимает значения $0, 1, 2...$ с вероятностями $\mathbf{P}\{X = x\} = (1-p)^x \cdot p$

б) эта величина имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - 0.8 \cdot e^{-x} & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Решение

Дополнительная функция распределения:

$$G_X(x) \;=\; \mathbf{P}\big\{X > x\big\} \;=\; 1 - F_X(x)$$

Тогда для неотрицательных X:

$$E\big[X\big] \;=\; \int\limits_0^{+\infty} G_X(x)\cdot dx$$

а)

$$E\big[X\big] \;=\; \sum_{i=1}^{+\infty} i\cdot p\cdot (1-p)^i \;=\; \sum_{i=1}^{+\infty}(i+1)\cdot p\cdot (1-p)^i \;-\; \sum_{i=1}^{+\infty} p\cdot (1-p)^i \;=\; p\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{dq^{i+1}}{dq} \;-\; (1-p) \;=$$

$$= p\cdot\frac{d}{dq}\left(\sum_{i=1}^{+\infty} q^{i+1}\right) \;-\; (1-p) \;=\; p\cdot\frac{d}{dq}\left(\frac{q^2}{1-q}\right) \;-\; (1-p) \;=\; p\cdot\frac{2\cdot q\cdot(1-q) - q^2\cdot(-1)}{(1-q)^2} \;-\; (1-p) \;=$$

$$= p\cdot\frac{(2-q)\cdot q}{(1-q)^2} \;-\; (1-p) \;=\; p\cdot\frac{(1+p)(1-p)}{p^2} - (1-p) \;=\; \frac{1-p^2}{p} + p - 1 \;=\; \frac{1}{p} - 1$$

б)

$$E\big[X\big] \;=\; \int\limits_0^{+\infty} 0.8\cdot e^{-x}\cdot dx \;=\; -0.8\cdot e^{-x}\Big|_0^{+\infty} \;=\; 0 - (-0.8) \;=\; 0.8$$

Ответ

а) $E\big[X\big] \;=\; \dfrac{1}{p} - 1$

б) $E\big[X\big] \;=\; 0.8$

Задание 3

Условие

Consider a system with a single server at which customers arrive with interval times distributed uniformly from 0.7 to 1.2 minutes. Each customer needs exactly 1 min to be serviced. If a customer finds the server busy upon arrival, it leaves without being serviced (it is lost). Let $\mathbf{P}(k)$ denote the probability that k-th customer is lost. The server is initially unoccupied, so that $\mathbf{P}(1) = 0$.

Calculate $\mathbf{P}(k)$ for $k = 2, 3, 4$ and find $\mathbf{P}(k)$.

Решение

Из условия, 1-я заявка точно не будет потеряна. Поскольку каждая заявка обслуживается ровно 1 минуту, 2-я заявка будет потеряна, если придёт через $[0.7; 1]$ минуту после 1й, то есть:

$$\mathbf{P}(2) = \frac{1-0.7}{1.2-0.7} \;=\; 0.6$$

Далее рассмотрим произвольную k-ю заявку $\forall k \geqslant 3$. Если $(k-1)$-я заявка потеряна, то k-я заявка точно не будет потеряна, так как она придёт минимум через 0.7 минут после $(k-1)$-й, а $(k-1)$-я заявка пришла минимум через 0.7 минут после $(k-2)$-й, то есть k-я заявка придёт минимум через 1.4 минуты после $(k-2)$, в то время как обслуживание любой заявки занимает ровно минуту. Если же $(k-1)$-я заявка не потеряна, то вероятность потери kй рассчитывается так же, как и для 2й. Таким образом, вероятность потери k-й заявки равна

$$\mathbf{P}(k) \;=\; \Big(1 - \mathbf{P}(k-1)\Big)\cdot\mathbf{P}(2)$$

Для 3-й заявки:

$$\mathbf{P}(3)\ =\ (1-0.6)\cdot 0.6\ =\ 0.24$$

Для 2-й заявки:

$$\mathbf{P}(4)\ =\ (1-0.24)\cdot 0.6\ =\ 0.456$$

Ответ

$$\begin{cases}\mathbf{P}(2)=0.6\\ \mathbf{P}(3)=0.24\\ \mathbf{P}(4)=0.456\\ \mathbf{P}(k)=\Big(1-\mathbf{P}(k-1)\Big)\cdot\mathbf{P}(2) \quad \forall k\geqslant 3\end{cases}$$