Лекция 2
по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.09.15

Введение в дифференциальные и разностные уравнения

Примеры разностных уравнений

$$\left.\begin{cases} P(t) & \text{– численность омёб в момент } t \\ P(t) = 2\cdot P(t) \\ P(0)=100 \end{cases}\right| \quad \text{разностное уравнение 1го порядка}$$

$$y(t) = 2-y(t-1)+0.5\cdot y(t-2) \quad \text{разностное уравнение 2го порядка}$$

Это было в школе (1):

$$y(k) = y(k-1)+b \quad \rightarrow \quad y(k) = y(0)+k\cdot b$$

$$y(k) = C+k\cdot b \quad \text{– общее решение разностного уравнения}$$

$$y(k) = 3+k\cdot b \quad \text{– частное решение, удовлетворяющее условию } y(0)=3$$

Это было в школе (2):

$$y(k) = a\cdot y(k-1) \quad \rightarrow \quad y(k) = a^k\cdot y(0)$$

$$y(k) = C\cdot a^k \quad \text{– общее решение разностного уравнения}$$

Этого в школе не было, но сводится:

$$y(k) = a\cdot y(k-1)+b \quad \rightarrow \quad y(k) = a^k\cdot y(0) + b\cdot\frac{a^k-1}{a-1}$$

$$y(k) = C\cdot a^k+b\cdot\frac{a^k-1}{a-1} \quad \text{– общее решение разностного уравнения}$$

При $|a|<0$:

$$a^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$y(k) \longrightarrow \frac{b}{1-a}$$

При $|a|>0$:

$$\nexists \lim_{k\to+\infty} y(k)$$

При $|a|=1$?

Стационарное решение:

$$y(k) = y(k-1) = y(k-2) = ...$$

Примеры дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = y+3$$

$$y\cdot\frac{dy}{dx} = 50\cdot x^3$$

$$x\cdot\frac{dy}{dx}-2y = 2\cdot x^4$$

Пример решения:

$$\frac{dy}{dx} = 2\cdot x$$

$$\int\frac{dy}{dx}\cdot dx = \int 2\cdot x\cdot dx+C$$

$$y = x^2+C \quad \text{– общее решение дифференциального уравнения}$$

Начальное условие $y(0)=12$:

$$y(0) = C \quad \to \quad C=12$$

$$y=x^2+12 \quad \text{– частное решение дифференциального уравнения}$$

Школьный пример:

$$\begin{cases} y(t) \quad \text{– высота шарика в момент } t \\ y(0) = 50 \\ \dot{y}(0) = 0 \\ \ddot{y} = -9.81 \end{cases}$$

Ищем скорость:

$$\dot{y} = \int\ddot{y}\cdot dt + C = \int(-9.81)\cdot dt + C = (-9.81)\cdot t + C$$

Из начальных условий:

$$0 = \dot{y}(0) = (-9.81)\cdot 0+C = C$$

Ищем высоту:

$$y = \int\dot{y}\cdot dt + C = \int(-9.81)\cdot t\cdot dt + C = \left(-\frac{9.81}{2}\right)\cdot t^2 + C$$

Из начальных условий:

$$50 = y(0) = \left(-\frac{9.81}{2}\right)\cdot 0^2 + C = C$$

Частное решение:

$$y(t) = \left(-\frac{9.81}{2}\right)\cdot t^2+50$$

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx}\cdot\varphi(y) = f(x)$$

Схема решения:

$$\varphi(y)\cdot dy = f(x)\cdot dx$$

$$\int\varphi(y)\cdot dy = \int f(x)\cdot dx + C$$

Линейное дифференциальное уравнение (метод вариации произвольной постоянной)

$$\frac{dy}{dx}+a(x)\cdot y = f(x)$$

Интегрирующий множитель:

$$u(x) = e^{\int a(x)\cdot dx}$$

Домножаем:

$$\frac{dy}{dx}\cdot u(x)+a(x)\cdot u(x)\cdot y = f(x)\cdot u(x)$$

Пусть $g(x) = y(x)\cdot u(x)$. Тогда:

$$\frac{dg}{dx} = f(x)\cdot u(x)$$

$$g(x) = \int dg = \int f(x)\cdot u(x)\cdot dx + C$$

$$y = \frac{g(x)}{u(x)}$$