Семинар 4
по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.10.19

Задание 1

Условие

Сигналы от лунного зонда поступают на станцию с интервалами ровно в 1 секунду. Станция обрабатывает каждый сигнал экспоненциально распределённое время со средним 0.4 сек. Если на момент поступления сигнала станция занята обработкой предыдущего, новый сигнал теряется.

а) Рассчитайте вероятность потери (для всех сигналов после первого).

б) 0.2 секунды назад станция не смогла принять очередной сигнал и до сих пор занята. С какой вероятностью она закончит обработку до поступления следующего сигнала?

Решение

а) Пусть T – время между сигналами. Тогда:

$$\lambda = \frac{1}{E[T]} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$T \sim Exp(\lambda) \sim Exp(2.5)$$

Рассмотрим очередной момент времени, кратный секунде, т.е. момент времени поступления очередного сигнала. Если предыдущий непотерянный сигнал поступил секунду назад, то вероятность потери рассматриваемого сигнала равна $\mathbf{P}\{T>1\}$. Если предыдущий непотерянный сигнал поступил 2 секунды назад, то вероятность потери рассматриваемого сигнала равна $\mathbf{P}\Big(\{T>2\}\big|\{T>1\}\Big) = \mathbf{P}\{T>1\}$... Если предыдущий непотерянный сигнал поступил $k \geqslant 1$ секунд назад, то вероятность потери рассматриваемого сигнала равна $\mathbf{P}\Big(\{T>k\}\big|\{T>(k-1)\}\Big) = \mathbf{P}\{T>1\}$.

$$\mathbf{P}\{T>1\} = G(1) = e^{-\lambda \cdot 1} = e^{-2.5} \approx 0.08$$

б) Пусть T – время от поступления последнего сигнала (отвергнутого) до завершения обработки текущего сигнала.

$$\mathbf{P}\Big(\{T<1\}\big|\{T>0.2\}\Big) = 1-\mathbf{P}\Big(\{T\geqslant 1\}\big|\{T>0.2\}\Big) = 1-\frac{\mathbf{P}\Big(\{T\geqslant 1\}\cap\{T>0.2\}\Big)}{\mathbf{P}\{T>0.2\}} =$$

$$= 1-\frac{\mathbf{P}\{T\geqslant 1\}}{\mathbf{P}\{T>0.2\}} = 1-\frac{G(1)}{G(0.2)} = 1-\frac{e^{-\lambda\cdot 1}}{e^{-\lambda\cdot 0.2}} = 1-e^{-\lambda\cdot 0.8} \approx 0.86$$

Ответ

а) $e^{-2.5}\approx 0.08$

б) $1-e^{-2}\approx 0.86$

Задание 2

Условие

Беспокойный медведь Михаил, лёжа в берлоге, ворочается с боку на бок. Время, которое он проводит на одном боку, имеет показательное распределение, в среднем равно 2 суткам и не зависит от того, сколько он лежал на том или ином боку раньше. Какова вероятность того, что за 140 дней зимы Миша перевернётся с боку на бок не менее 64 раз?

Решение

По условию, время на одном боку T описывается независимыми случайными величинами, показательно распределённми с одним и тем же параметром $\lambda = \dfrac{1}{E\big[T\big]} = 0.5$. Значит, переворачивания с боку на бок происходят в пуассоновском потоке. Тогда, пусть X – количество переворачиваний за время $t=140$.

$$X \sim Pois(\lambda\cdot t) \sim Pois(70)$$

$$\mathbf{P}\big\{X \geqslant 64\big\} = 1-\mathbf{P}\big\{X<64\big\} = 1-\sum_{k=0}^{63}\frac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda\cdot t} \approx 0.81$$

Ответ

$1-\sum\limits_{k=0}^{63}\dfrac{(\lambda\cdot t)^k}{k!}\cdot e^{-\lambda\cdot t} \approx 0.81$

Задание 3

Условие

Завод выпускает телевизоры, доля брака в продукции составляет $\alpha = 5\%$. И для качественной, и для бракованной продукции время жизни имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda_1=0.2$ для качественных телевизоров и $\lambda_2=2$ для бракованных (время измеряется в годах).

а) Только что покупатель приобрёл телевизор с этого завода. Какова вероятность того, что он проработает два года?

б) Телевизор проработал год, не сломавшись. Какова вероятность того, что он проработает ещё два года?

в) Телевизор проработал год, не сломавшись. Какова вероятность того, что он бракованный?

Решение

а) Пусть $T_{\text{брак}}$ – время работы бракованного телевизора; $T_{\text{небрак}}$ – время работы небракованного телевизора; T – время работы произвольного телевизора с завода. Тогда:

$$\begin{cases} T_{\text{брак}} \sim Exp(\lambda_2) \\ T_{\text{небрак}} \sim Exp(\lambda_1) \\ \mathbf{P}\big\{T>t\big\} = \alpha\cdot\mathbf{P}\big\{T_{\text{брак}}>t\big\}+(1-\alpha)\cdot\mathbf{P}\big\{T_{\text{небрак}}>t\big\} = \alpha\cdot e^{-\lambda_2\cdot t}+(1-\alpha)\cdot e^{-\lambda_1\cdot t} \end{cases}$$

Для двух лет вероятность равна:

$$\mathbf{P}\big\{T>2\big\} = 0.05\cdot e^{-4}+0.95\cdot e^{-0.4} \approx 0.638$$

б)

$$\mathbf{P}\Big(\big\{T>3\big\}\big|\big\{T>1\big\}\Big) = \frac{\mathbf{P}\Big(\big\{T>3\big\}\cap\big\{T>1\big\}\Big)}{\mathbf{P}\big\{T>1\big\}} = \frac{\mathbf{P}\big\{T>3\big\}}{\mathbf{P}\big\{T>1\big\}} = \frac{0.05\cdot e^{-6}+0.95\cdot e^{-0.6}}{0.05\cdot e^{-2}+0.95\cdot e^{-0.2}} = 0.665$$

в) Введём гипотезы (попарно несовместны и образуют пространство элементарных событий):

$$\begin{cases} H_1 \text{ – телевизор бракованный} \\ H_2 \text{ – телевизор небракованный} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}\Big(H_1 \big| \{T > 1\}\Big) = \frac{\mathbf{P}\Big(H_1 \cap \{T > 1\}\Big)}{\mathbf{P}\{T > 1\}} = \frac{\mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}\Big(\{T > 1\} \big| H_1\Big)}{\mathbf{P}\{T > 1\}} = \frac{\mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}\{T_{\text{брак}} > 1\}}{\mathbf{P}\{T > 1\}} =$$

$$= \frac{0.05 \cdot e^{-2}}{0.05 \cdot e^{-2} + 0.95 \cdot e^{-0.2}} \approx 0.0086$$

Ответ

а) 0.638

б) 0.665

в) 0.0086

Задание 4

Условие

Покажите, что геометрическое распределение обладает свойством отсутствия последействия, т.е.

$$G_X\Big(x + s \big| X > s\Big) = G_X(x) \quad \text{если } X \sim Geo(p)$$

Решение

$$G_X\Big(x + s \big| X > s\Big) = \mathbf{P}\Big(\{X > x + s\} \big| \{X > s\}\Big) = \frac{\mathbf{P}\Big(\{X > x + s\} \cap \{X > s\}\Big)}{\mathbf{P}\{X > s\}} =$$

$$= \frac{\mathbf{P}\{X > x + s\}}{\mathbf{P}\{X > s\}} = \frac{\sum\limits_{i=x+s}^{\infty} (1-p)^i \cdot p}{\sum\limits_{i=s}^{\infty} (1-p)^i \cdot p} = \frac{(1-p)^{x+s} \cdot {}^1\!/_p}{(1-p)^s \cdot {}^1\!/_p} = (1-p)^x$$

$$G_X(x) = \mathbf{P}\{X > x\} = \sum_{i=x}^{\infty} (1-p)^i \cdot p = p \cdot (1-p)^x \cdot {}^1\!/_p = (1-p)^x = G_X\Big(x + s \big| X > s\Big)$$

Задание 5

Условие

Число звёзд в случайно взятом пространстве объёма V распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda \cdot V$. Найдите закон распределения величины, равной расстоянию от случайно отобранной звезды до соседней к ней.

Решение

Пусть Y – количество звёзд в шаре радиуса x.

$$Y \sim Pois\,(\lambda \cdot V) \sim Pois\left(\lambda \cdot \frac{4\pi x^3}{3}\right)$$

Пусть X – расстояние от определённой звезды до ближайшей звезды.

$$G_X(x) = \mathbf{P}\{X > x\} = \mathbf{P}\{\text{в шаре радиуса } x \text{ нет ни одной звезды}\} = \mathbf{P}\{Y = 0\} =$$

$$= \frac{\left(\lambda \cdot \pi \cdot x^3 \cdot {}^4/_3\right)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda \pi x^3 \cdot {}^4/_3}$$

Ответ

$$G(x) = exp\left(\lambda \cdot \frac{4\pi x^3}{3}\right)$$

Задание 6

Условие

Клиенты приходят в столовую неоднородным пуассоновским потоком. В обеденное время (13:00-14:00) интенсивность потока составляет 0.5 посетителей в минуту, а в остальное время - 0.1 посетитель в минуту. Сейчас 13:58.

а) С какой вероятностью в следующие 7 минут никто не придёт?

б) Выпишите дополнительную функцию распределения для времени ожидания следующего посетителя.

в) С какой вероятностью за следующие 7 минут придёт ровно один посетитель?

Решение

а) Пусть:

$$\begin{cases} T_1 \sim Exp(\lambda_1) \sim Exp(0.5) & \text{– время ожидания клиента в обеденное время} \\ T_2 \sim Exp(\lambda_2) \sim Exp(0.1) & \text{– время ожидания клиента в другое время время} \\ T & \text{– время ожилания клиента с 13:58} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}\{T > 7\} = \mathbf{P}\Big(\{T_1 > 2\} \cap \{T_2 > 5\}\Big) = \mathbf{P}\{T_1 > 2\} \cdot \mathbf{P}\{T_2 > 5\} = e^{-\lambda_1 \cdot 2} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot 5} \approx 0.22$$

б) Для $t \in [0; 2)$:

$$G(t) = \mathbf{P}\{T > t\} = \mathbf{P}\{T_1 > t\} = e^{-\lambda_1 \cdot t}$$

Для $T \in [2; +\infty)$:

$$G(t) = \mathbf{P}\{T > t\} = \mathbf{P}\Big(\{T_1 > 2\} \cap \{T_2 > t-2\}\Big) = e^{-\lambda_1 \cdot 2} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot (t-2)} = e^{-\lambda_1 \cdot 2 - \lambda_2 \cdot (t-2)}$$

в) Пусть:

$$\begin{cases} X_1 \sim Pois(\lambda_1 \cdot 2) \sim Pois(1) & \text{– количество клиентов в промежутке (13:58-14:00)} \\ X_2 \sim Pois(\lambda_2 \cdot 5) \sim Pois(0.5) & \text{– количество клиентов в промежутке (14:00-14:05)} \\ X & \text{– количество клиентов в промежутке (13:58-14:05)} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(x) = \mathbf{P}\Big(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 0\}\Big) + \mathbf{P}\Big(\{X_1 = 0\} \cap \{X_2 = 1\}\Big) =$$

$$= \frac{\lambda_1 \cdot 2}{1!} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot 2} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot 5} + e^{-\lambda_1 \cdot 2} \cdot \frac{\lambda_2 \cdot 5}{1!} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot 5} \approx 0.33$$

Ответ

а) $e^{-1.5} \approx 0.22$

б)

$$G(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_1 \cdot t} & t \in [0;2) \\ e^{-\lambda_1 \cdot 2 - \lambda_2 \cdot (t-2)} & t \in [2;+\infty) \end{cases}$$

в) $1.5 \cdot e^{-1.5} \approx 0.33$

Задание 7

Условие

Паша, Саша и Маша приобрели Машину Наивысшего Блаженства, которая доставляет пользователю Наивысшее Блаженство за экспоненциально распределённое время со средним 5 мин. Паша, Саша и Маша используют машину по очереди, причём каждый обслуженный пользователь незамедлительно снова встаёт в очередь к Машине. Времена обслуживания независимы.

а) Саша только что забрался в Машину. С какой вероятностью он (или она) достигнет Наивысшего Блаженства в течение 4 минут?

б) Прошло уже 5 минут, а Машина всё продолжает обрабатывать Сашу. С какой вероятностью обслуживание завершится в течение следующих 4 минут?

в) Только что обслуживание Саши завершилось. С какой вероятностью ему удастся снова залезть в Машину в течение следующих 10 минут?

Решение

а) Пусть T – время обслуживания человека.

$$T \sim Exp(\lambda) \sim Exp\left(\frac{1}{E[T]}\right) \sim Exp(0.2)$$

$$\mathbf{P}\{T < 4\} = 1 - e^{-\lambda \cdot 4} \approx 0.55$$

б)

$$\mathbf{P}\Big(\{T<9\} \big| \{T>5\}\Big) = 1 - \mathbf{P}\Big(\{T \geqslant 9\} \big| \{T>5\}\Big) \underset{\text{отсутствии последействия}}{\overset{\text{по предпосылке об}}{=}} =$$

$$= 1 - \mathbf{P}\{T \geqslant 4\} \approx 0.55$$

в) Пусть:

$$\begin{cases} T_\text{П} \sim Exp(\lambda) & \text{– время обслуживания Паши} \\ T_\text{М} \sim Exp(\lambda) & \text{– время обслуживания Маши} \\ S & \text{– время ожилания Саши} \end{cases}$$

Времена обслуживания Паши и Маши независимы и экспоненциально распределены с параметром λ. Значит, время ожидания Саши S имеет распределение Эрланга (по определению этого распределения):

$$S = T_\text{П} + T_\text{М} \sim Erlang(2, \lambda)$$

Тогда:

$$\mathbf{P}\{S < 10\} = F_S(10) = 1 - \sum_{i=0}^{2-1} \frac{(\lambda \cdot 10)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda \cdot 10} = 1 - e^{-\lambda \cdot 10} - \frac{\lambda \cdot 10}{1!} \cdot e^{-\lambda \cdot 10} \approx 0.59$$

Ответ

а) $1-e^{-0.8} \approx 0.55$

б) $1-e^{-0.8} \approx 0.55$

в) $1-3 \cdot e^{-2} \approx 0.59$