ДЗ 1
по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.10.27

Задание 1

Условие

В столовой посетители обслуживаются на двух кассах, время обслуживания каждого посетителя распределено по закону Эрланга второго порядка и составляет в среднем одну минуту. Покупатели подходят с интенсивностью два человека в минуту, время между покупателями распределено экспоненциально. Очередь к кассам может быть сколь угодно большой. Опишите систему нотацией Кендалла.

Решение

Нотация Кендалла имеет вид:

$$A/B/X/Y/Z$$

, где

- A – закон распределения времени между поступлением заявок, то есть $A = M$ (экспоненциальное);
- B – закон распределения времени обслуживания, то есть $B = E_2$ (Эрланга второго порядка);
- X – число каналов обслуживания, то есть $X = 2$ (две кассы);
- Y – ёмкость системы (максимальное число заявок в системе единовременно), то есть $Y = \infty$ (очередь к кассам может быть сколь угодно большой);
- Z – дисциплина обслуживания, то есть $Z = GD$ (произвольная дисциплина, так как иное не оговорено условием).

Ответ

$$M/E_2/2/\infty/GD \quad \sim \quad M/E_2/2$$

Задание 2

Условие

Опираясь на геометрическую интерпретацию, найдите математическое ожидание случайной величины X, если

а) эта величина имеет геометрическое распределение с параметром $p \in (0;1)$, то есть принимает значения $0, 1, 2...$ с вероятностями $\mathbf{P}\{X = x\} = (1-p)^x \cdot p$

б) эта величина имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - 0.8 \cdot e^{-x} & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Решение

Дополнительная функция распределения:

$$G_X(x) = \mathbf{P}\{X > x\} = 1 - F_X(x)$$

Тогда для неотрицательных X:

$$E[X] = \int\limits_0^{+\infty} G_X(x) \cdot dx$$

а)

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty}\left[\Big((i+1)-i\Big)\cdot\left(1-\sum_{j=0}^{i} p\cdot(1-p)^i\right)\right] = \sum_{i=0}^{\infty}\left[1-p\cdot\frac{1-(1-p)^{i+1}}{1-(1-p)}\right] = \sum_{i=0}^{\infty}(1-p)^{i+1} =$$

б)

$$E[X] = \int\limits_0^{+\infty} 0.8\cdot e^{-x}\cdot dx = -0.8\cdot e^{-x}\Big|_0^{+\infty} = 0-(-0.8) = 0.8$$

Ответ

а) $E[X] = \dfrac{1}{p} - 1$

б) $E[X] = 0.8$

Задание 3

Условие

Consider a system with a single server at which customers arrive with interval times distributed uniformly from 0.7 to 1.2 minutes. Each customer needs exactly 1 min to be serviced. If a customer finds the server busy upon arrival, it leaves without being serviced (it is lost). Let $\mathbf{P}(k)$ denote the probability that k-th customer is lost. The server is initially unoccupied, so that $\mathbf{P}(1)=0$.

Calculate $\mathbf{P}(k)$ for $k=2,3,4$ and find $\mathbf{P}(k)$.

Решение

Из условия, 1-я заявка точно не будет потеряна. Поскольку каждая заявка обслуживается ровно 1 минуту, 2-я заявка будет потеряна, если придёт через $[0.7;1]$ минуту после 1й, то есть:

$$\mathbf{P}(2) = \frac{1-0.7}{1.2-0.7} = 0.6$$

Далее рассмотрим произвольную k-ю заявку $\forall k \geqslant 3$. Если $(k-1)$-я заявка потеряна, то k-я заявка точно не будет потеряна, так как она придёт минимум через 0.7 минут после $(k-1)$-й, а $(k-1)$-я заявка пришла минимум через 0.7 минут после $(k-2)$-й, то есть k-я заявка придёт минимум через 1.4 минуты после $(k-2)$, в то время как обслуживание любой заявки занимает ровно минуту. Если же $(k-1)$-я заявка не потеряна, то вероятность потери kй рассчитывается так же, как и для 2й. Таким образом, вероятность потери k-й заявки равна

$$\mathbf{P}(k) = \Big(1-\mathbf{P}(k-1)\Big)\cdot\mathbf{P}(2) = -\mathbf{P}(2)\cdot\mathbf{P}(k-1)+\mathbf{P}(2) = \Big(-\mathbf{P}(2)\Big)^{k-2}\cdot\mathbf{P}(2)+$$

$$+\mathbf{P}(2)\cdot\frac{1-\Big(-\mathbf{P}(2)\Big)^{k-2}}{1-\Big(-\mathbf{P}(2)\Big)} = -\Big(-\mathbf{P}(2)\Big)^{k-1}+\mathbf{P}(2)\cdot\frac{1-\Big(-\mathbf{P}(2)\Big)^{k-2}}{1+\mathbf{P}(2)} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{\mathbf{P}(2)}{1+\mathbf{P}(2)}$$

Для 3-й заявки:

$$\mathbf{P}(3) = (1-0.6)\cdot 0.6 = 0.24$$

Для 4-й заявки:

$$\mathbf{P}(4) = (1-0.24)\cdot 0.6 = 0.456$$

Ответ

$$\begin{cases}
\mathbf{P}(2)=0.6\\
\mathbf{P}(3)=0.24\\
\mathbf{P}(4)=0.456\\
\mathbf{P}(k)=\Big(1-\mathbf{P}(k-1)\Big)\cdot\mathbf{P}(2)\;=\;-\Big(-\mathbf{P}(2)\Big)^{k-1}+\mathbf{P}(2)\cdot\dfrac{1-\Big(-\mathbf{P}(2)\Big)^{k-2}}{1+\mathbf{P}(2)} \quad \forall k\geqslant 3\\
\mathbf{P}(\infty)\;=\;\dfrac{\mathbf{P}(2)}{1+\mathbf{P}(2)}\;=\;0.375
\end{cases}$$