КДЗ 2 по Дискретной Математике

Татаринов Никита

2020
март, 23

Задача №1

а) P = { (x, y) | (x = |r|) & (y = r) $\forall r \in \mathbb{R}$ }

- Не функционально, т.к. ∀x>0 существуют 2 пары: (x, x) и (x, -x).
- Инъективно, т.к. $\forall(x1 \neq x2) \in \mathbb{R}$ $(y1 \neq y2)$.
- Не тотально, т.к. у отрицательных x нет пар в множестве P.
- Суръективно, т.к. $\forall y \in \mathbb{R}$ существует пара в множестве P.

б) P = { (x, y) | (x = r) & (y = r^2) $\forall r \in \mathbb{R}$ }

- Функционально, т.к. $\forall x \in \mathbb{R}$ существует ровно одна пара в множестве P.
- Не инъективно, т.к. $\forall x \in \mathbb{R}$ в парах (x, y_1) и (-x, y_2) $y_1 = y_2$.
- Тотально, т.к. $\forall x \in \mathbb{R}$ существует хотя бы (ровно) одна пара в множестве P.
- Не суръективно, т.к. ∀y<0 не существует пар в множестве P.

Задача №2

1)
- (a = b) ⇒ (f(a) = f(b)) ∀(a,b)∈A по определению отображения.
- (g(f(a)) = g(f(b))) ⇔ (g ∘ f (a) = g ∘ f (b)) ⇒ (a = b) ∀(a,b)∈A, т.к. g ∘ f - инъективное отображение.
- (g(f(a)) = g(f(b))) ⇒ (a = b) ⇒ (f(a) = f(b)). Значит, g - инъективное отображение.

2) Предположим, что f - не инъективное отображение. Тогда ∃(a_0, b_0)∈A : ($a_0 \neq b_0$) & (f(a_0) = f(b_0)).

- (f(a_0) = f(b_0)) ⇒ (g(f(a_0)) = g(f(b_0)) по определению отображения.
- (g(f(a_0)) = g(f(b_0)) ⇒ ($a_0 = b_0$), т.к. g - инъективное отображение (пункт 1).
- ($a_0 \neq b_0$) ⇒ (f(a_0) = f(b_0)) ⇒ (g(f(a_0)) = g(f(b_0)) ⇒ ($a_0 = b_0$). Противоречие. Значит, f - инъективное отображение, чтд.

Задача №3

1. *Необходимость*
   Пусть (f ∘ g = f ∘ h) ⇒ (g = h) ∀C и ∀ (g,h): C → A.
   Тогда (f(g(x)) = f(h(x))) ⇒ (g(x) = h(x)) $\forall x \in$ C. Значит, f - инъективное отображение, чтд.

2. *Достаточность*
   Пусть f - инъективное отображение. Тогда (f(g(x)) = f(h(x))) ⇒ (g(x) = h(x)) ∀C и ∀ (g,h): C → A, т.е. (f ∘ g = f ∘ h) ⇒ (g = h), чтд.

Задача №4

а) $\mathbb{Q}^{\underline{3}} = \{$ f | f: $\underline{3} \to \mathbb{Q}$ $\}$.
Пример: f = id, тк $\underline{3} \subset \mathbb{Q}$.

б) $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} = \{$ f | f: $\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ $\}$.
Пример: f = id, тк $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

с) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}\times\mathbb{Z}} = \{$ f | f: $\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ $\}$.
Пример: f = f: (r, z) $\to$ r.

Задача №5

а) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$
На лекциях было доказано, что $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$ и что $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Тогда $\mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Q}} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$, чтд.

б) $\underline{5}^{\mathbb{N}} \sim \underline{3}^{\mathbb{N}}$

- Отображение f: $\underline{3}^{\mathbb{N}} \to \underline{5}^{\mathbb{N}}$ = id инъективно.
- Придумаем инъективное отображение g: $\underline{5}^{\mathbb{N}} \to \underline{3}^{\mathbb{N}}$. Для этого введём вспомогательное отображение g': $\underline{5_{10}}^{\mathbb{N}} \to \underline{5_3}^{\mathbb{N}}$, т.е. (n, 0)$\to$(n, 00), (n, 1)$\to$(n, 01), $\cdots$, (n, 4)$\to$(n, 11) $\forall n \in \mathbb{N}$. Оно биективно, а значит, инъективно. При этом отображение g' можно представить в виде отображения последовательности чисел от 0 до 4 в последоовательность чисел от 0 до 2:
$((1,k_1),(2,k_2),(3,k_3),\cdots \sim (1,\underline{l_{11}l_{12}}),(2,\underline{l_{21}l_{22}}),\ (3,l_{31}l_{32})) \Leftrightarrow ((k_1k_2k_3\cdots) \sim (l_{11}l_{12}l_{21}l_{22}l_{31}l_{32}\cdots))$, где $k_i = \overline{0,4}, l_{ij} = \overline{0,2}$. Значит, мы можем сопоставить k_i не только пару, но и число от 0 до 2. При этом отображение останется инъективным.
g = (n, k_i) $\to$ (n, $l_{(idiv2)(imod2)}$).
- По теореме Кантора-Бернштейна-Шрёдера $\underline{5}^{\mathbb{N}} \sim \underline{3}^{\mathbb{N}}$, чтд.

в) Обозначим множество точек куба за C, множество точек сечения за S.

- (0,1) $\lesssim$ C $\lesssim \mathbb{R}^3$
(0,1) $\sim \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^3 \sim \mathbb{R}$
Значит, C $\sim \mathbb{R}$.
- (0,1) $\lesssim$ S $\lesssim \mathbb{R}^2$
(0,1) $\sim \mathbb{R}$
$\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$
Значит, S $\sim \mathbb{R}$.
- C $\sim \mathbb{R}$ и S $\sim \mathbb{R}$, значит, C $\sim$ S, чтд.

Задача №6

На лекциях было доказано, что $P(\mathrm{X}) \sim 2^X \forall X$. Значит, необходимо доказать, что $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}}$.

- Отображение f: $2^{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ инъективно, т.е. $2^{\mathbb{R}} \lesssim \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
- Придумаем инъективное отображение g: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to 2^{\mathbb{R}}$. Из доказанного на лекциях $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \lesssim (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{R}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}\times\mathbb{R}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{R}}$. По аналогии с доказательством задачи 5б $\mathbb{N}^{\mathbb{R}} \lesssim 2^{\mathbb{R}}$. Значит, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \lesssim 2^{\mathbb{R}}$.
- По теореме Кантора-Бернштейна-Шрёдера $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim 2^{\mathbb{R}}$. Значит, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \sim P\ (\mathbb{R})$, чтд.

Задача №7

Внутри любой окружности можно будет нарисовать прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат. В таком случае, стороны квадрата буду отрезками, а значит, на них есть рациональные точки. Значит, внутри квадрата есть хотя бы 1 рациональная точка. Значит, и в любой окружности есть рациональная точка.
Рассмотрим одну из окружностей произвольной "восьмёрки". Найдём в ней рациональную точку и запомним её. Заметим, что если "восьмёрки"не пересекаются, то и окружности "восьмёрок"не пересекаются. В таком случая, найденная точка не будет лежать ни в одной другой окружности, кроме как в рассматриваемой. Значит, любая окружность "восьмёрки"задаётся двумя рациональными числами - координатами рациональной точки внутри окружности (как минимум 1 такая существует). Значит, каждая "восьмёрка"задаётся 4 рациональными числами. Тогда X$\lesssim \mathbb{Q}^4 \sim \mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$, чтд.

Задача №8

Задача №9

C = { f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ | f непрерывна }

1) C $\gtrsim \mathbb{R}$, т.к. C $\supseteq$ { f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ | f(x) = const }.
2) Осталось доказать, что C $\lesssim \mathbb{R}$.
   Рассмотрим произвольную точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Из определения непрерывной функции по Гейне $\forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, lim_{n\to\infty} x_n = x_0$: $lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Так как последовательности $\{x_n\}$ могут быть любыми, будем брать только те, в которых $x_n \in \mathbb{Q}$. В таком случае, любое число x будет задаваться последовательностью рациональных чисел, сходящейся к этому x. Значит, любая непрерывная функция однозначно определяется своими значениями в рациональных точках. Тогда, мощность множества непрерывных функций не больше, чем $\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$. Значит, C $\lesssim \mathbb{R}$. Учитывая пунтк 1, C $\sim \mathbb{R}$ по теореме Кантора-Бернштейна-Шрёдера, чтд.

Задача №10

Выделим в множестве A\B счётное подмножество C. Тогда C∪B тоже счётно, т.е. C$\sim$ (C∪B). Тогда, существует биективное отображение f: C $\to$ (C∪B). Тогда разделим множество A\B на 2 части: (A\B)\C и C. Первую часть биективно отобразим в себя, вторую часть отобразим в C∪B. Тогда получается, что множество ((A\B)\C)∪C = (A\B) биективно отобразится в ((A\B)\C)∪($C \cup B$) = A, т.е. A\B $\sim$A, чтд.

Задача №11

В году либо 365 дней, либо 366 дней (високосный). Тогда, по принципу Дирихле среди 367 человек найдётся хотя бы 2 человека с одинаковыми днями рождения.
Ответ: n = 367.

Задача №12

Рассмотрим следующие 2018 чисел: $\underbrace{11111}_{5}, \underbrace{111111}_{6}, \underbrace{1111111}_{7}, \cdots, \underbrace{111...11}_{2022}$.
Тогда, по принципу Дирихле хотя бы 2 различных числа имеют одинаковый остаток от деления на 2017. Модуль разности этих чисел будет иметь вид $\underbrace{11...1}_{m>0}\underbrace{00...0}_{n>4}$ и будет больше, чем 2017. Значит, $\underbrace{11...1}_{m}\underbrace{00...0}_{n} \equiv 0 \pmod{2017}$. Значит, т.к. НОД(2017, $1\underbrace{00...0}_{n}$) = 1, $\underbrace{11...1}_{m} \equiv 0 \pmod{2017}$.
Таким образом, среди чисел вида $\underbrace{11...1}_{4<k<2023}$ существует хотя бы одно число, делящееся на 2017, чтд.