№ 1.

$G = \langle a \rangle$, $|G| = 140$

а) $g^{28} = 1$, $g$ - ?

$G$ - циклическая группа, значит, $g = a^l$, $l = \overline{0, 139}$. $g^{28} = (a^l)^{28} = a^{28l} = 1$. Тогда $140 \mid 28l$, $5 \mid l$. Тогда $\boxed{\{ a^l : 5 \mid l, \ l = \overline{0, 139} \}}$ - искомое множество (состоит из $\boxed{28 \text{ элементов}}$)

б) $\operatorname{ord} g = 28$, $g$ - ?

$\operatorname{ord} g = 28$, значит, $g^{28} = 1$ и 28 - минимальная такая степень.

Множество из ~~[illegible]~~ пункта а - ~~[illegible]~~, подгруппа ~~[illegible]~~ $G$, значит, ~~[illegible]~~ порядок любого элемента будет меньше или равен 28. При этом по теореме ~~[illegible]~~ степень порождающего эл-та взаимнопроста с порядком подгруппы (только у порождающих эл-тов порядок равен порядку всей группы).

$\{ a^l : 5 \mid l, \ l = \overline{0, 139} \} \Leftrightarrow \{ b^l : l = \overline{0, 27}, \ b = a^5 \}$

Тогда исходя из теоремы подходят только следующие эл-ты: $\{ b, b^3, b^5, b^9, b^{11}, b^{13}, b^{15}, b^{17}, b^{19}, b^{23}, b^{25}, b^{27} \}$, т.е. $\boxed{\{ a, a^{15}, a^{25}, a^{45}, a^{55}, a^{65}, a^{75}, a^{85}, a^{95}, a^{115}, a^{125}, a^{135} \}}$ ($\varphi(28) = 12$ элементов)

№2

$D_4 \times S_4 \times \mathbb{Z}_2$

$(x, y, z) \in (D_4 \times S_4 \times \mathbb{Z}_2)$ : $\{ord\, x | 4,\ ord\, y | 4,\ ord\, z | 4,$
$НОК(ord\, x, ord\, y, ord\, z) = 4$ – ?

1. Рассмотрим эл-ты $x$ мн-ва $D_4$

1.1. $ord\, x = 1$

Только нейтральный $x = id$

1.2. $ord\, x = 2$

$x = (13)(24)$

$x = (12)(34)$

$x = (14)(23)$

$x = (24)$

$x = (13)$

1.3. $ord\, x = 4$

$x = (1234)$

$x = (1432)$

2. Рассмотрим эл-ты $y$ из $S_4$

1.1. $ord\, y = 1$

$y = id$

1.2. $ord\, y = 2$

$y = (12)$ $\quad$ $y = (12)(34)$

$y = (13)$ $\quad$ $y = (13)(24)$

$y = (14)$ $\quad$ $y = (14)(23)$

$y = (23)$

$y = (24)$

$y = (34)$

2.3. $\operatorname{ord} y = 4$

$s = (1234)$

$s = (1243)$

$s = (1324)$

$s = (1342)$

$s = (1423)$

$s = (1432)$

3. Рассмотрим $z$ из $\mathbb{Z}_2$

3.1. $\operatorname{ord} z = 1$

$z = 0$

3.2. $\operatorname{ord} z = 2$

$z = 1$

4. Рассмотрим условие $НОК(\operatorname{ord} x, \operatorname{ord} y, \operatorname{ord} z) = 1$

~~4.1. ord x =~~ Когда 1 из порядков 4.

~~4.1. 4 - 1 - 1 : 2 · 1 · 1 = 2~~

~~4.2. 4 - 1 - 2 :~~

4.1. $4 - 1 - 1$ : $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ варианта

4.2. $4 - 1 - 2$ : $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ вар

4.3. $4 - 2 - 1$ : $2 \cdot 9 \cdot 1 = 18$

4.4. $4 - 2 - 2$ : $2 \cdot 9 \cdot 1 = 18$

4.5 $4 - 4 - 1$ : $2 \cdot 6 \cdot 1 = 12$

4.6. $4 - 4 - 2$ : $2 \cdot 6 \cdot 1 = 12$

4.7. $1 - 4 - 1$ : $1 \cdot 6 \cdot 1 = 6$

4.8. $1 - 4 - 2$ : $1 \cdot 6 \cdot 1 = 6$

4.9. $2 - 4 - 1$ : $5 \cdot 6 \cdot 1 = 30$

4.10. $2 - 4 - 2$ : $5 \cdot 6 \cdot 1 = 30$

$\boxed{\text{Ответ: 136 элементов}}$

## №3

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & 5 & 2 \\ 10 & 10 & 9 & 3 & 5 \\ 2 & 10 & 10 & 8 & 7 \\ 5 & 10 & 0 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{(2)-9(1)\to(2) \\ (3)-10(1)\to(3)}]{(x_1)\leftrightarrow(x_3)} \begin{array}{cccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & -17 & -42 & -13 \\ 0 & 10 & -28 & -42 & -13 \\ 0 & 10 & 5 & 2 & 9 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\overset{\mathbb{Z}_{11}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & 10 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & 10 & 5 & 2 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[(4)-(2)\to(4)]{(3)-(2)\to(3)} \begin{array}{cccc|c} x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 10 & 5 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

По теореме Кронекера-Капелли $\boxed{\text{СЛАУ совместна}}$

$$\cancel{\begin{cases} x_4 = a \\ x_1 = b \\ x_2 = 9 - 2a - 5b \\ x_1 = 2 - 5a - 3b \end{cases}} \Leftarrow \cancel{\begin{cases} x_2 = 9 - 2x_4 - 5x_3 \\ x_1 = 2 - 5x_4 - 3x_3 \end{cases}}$$

$$\begin{cases} 10x_2 = 9 - 5x_1 - 2x_4 = 9 + 6x_1 + 9x_4 \\ x_3 = 2 - 5x_4 - 3x_1 = 2 + 8x_1 + 6x_4 \end{cases}$$

По теореме Эйлера $10^{10} = 1$. Тогда $10^{-1} = 10^{-1} \cdot 1 = 10^{-1} \cdot 10^{10} = 10^9 = (-1)^9 = -1 = 10$.

Тогда

$$\begin{cases} x_2 = 10^{-1}(9 + 6x_1 + 9x_4) = 2 + 5x_1 + 2x_4 \\ x_3 = 2 + 8x_1 + 6x_4 \end{cases}$$

$$\overline{X} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix} + x_1\begin{pmatrix}0\\5\\0\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix} +$$

$$+ x_1\begin{pmatrix}0\\0\\8\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\0\\6\\0\end{pmatrix} = \boxed{x_1\begin{pmatrix}1\\5\\8\\0\end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix}0\\2\\6\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\mathcal{P} : \quad \bar{X} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

№4

$a = g^k$, $b = y^k \cdot M = g^{kx} \cdot M$ — Схема Эль-Гамаля

$b \cdot a^{p-x-1} = g^{kx} \cdot M \cdot g^{kp-kx-k} = M \cdot g^{kp-k} = M\left(g^{p-1}\right)^k = M e^k =$
$= M$

$M \equiv$

Длинные преобразования.

$M \equiv 51 \pmod{127}$

$\boxed{\text{Ответ: } 51.}$

№ 5

1) $m = c^{d} \bmod N$

$m = 369^{4793} \bmod 36863 = 114$ *

2) $c = m^{e} \bmod N$

$m^{193} \equiv 369 \bmod 21209$

$m = 13582$

Ответ: 1) 114 – "r"

2) 13582 – "♫"

№6

$f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 9x$

$g(x) = x^4 + 8x^3 + x + 6$

1. $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 9x \;|\; x^4 + 8x^3 + x + 6$

$-\; x^4 + 8x^3 + x + 6 \;|\; 1$

$-4x^3 + 6x^2 + 8x - 6$

$7x^3 + 6x^2 + 8x + 5$

$f(x) = g(x) + (7x^3 + 6x^2 + 8x + 5)$

2. $x^4 + 8x^3 + x + 6 \;|\; 7x^3 + 6x^2 + 8x + 5$

$-\; x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 7x \;|\; 8x + 10$

$4x^3 + 2x^2 + 5x + 6$

$-\; 4x^3 + 5x^2 + 3x + 6$

$8x^2 + 2x$

$g(x) = (7x^3 + 6x^2 + 8x + 5) \cdot (8x + 10) + (8x^2 + 2x)$

3. $7x^3 + 6x^2 + 8x + 5 \;|\; 8x^2 + 2x$

$-\; 7x^3 + 10x^2 \;|\; 5x + 5$

$7x^2 + 8x + 5$

$-\; 7x^2 + 10x$

$9x + 5$

$(7x^3 + 6x^2 + 8x + 5) = (8x^2 + 2x) \cdot (5x + 5) + (9x + 5)$

4. $8x^2 + 2x \;|\; 9x + 5$

$-\; 8x^2 + 2x \;|\; 7x$

$0$

$8x^2 + 2x = 7x(9x + 5)$

$\boxed{НОД(f, g) = 9x + 5}$

$НОД(f, g) = (9x + 5) = (7x^3 + 6x^2 + 8x + 5) - (8x^2 + 2x)(5x + 5) = (7x^3 + 6x^2 + 8x + 5) - (g(x) - (8x + 10)(7x^3 + 6x^2 + 8x + 5))(5x + 5) =$

$$= f(x) - g(x) + \left[ \left(f(x) - g(x)\right) \cdot (8x+10) - g(x) \right] (5x+5) =$$

$$= f(x) - g(x) + \left[ (8x+10) f - (8x) g \right] (5x+5) =$$

$$= f - g + (8x+10)(5x+5) f - (8x)(5x+5) g =$$

$$= f - g + (7x^2 + 7x + 6x + 6) f - (7x^2 + 7x) g =$$

$$= \boxed{(7x^2 + 2x + 7) f + (4x^2 + 4x + 10) g}$$

№ 8

$$\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

(матрицы, +, ·) – кольцо!

1. Рассмотрим (матрицы, +)

1.1. Операция ассоциативна

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}\right] +$$

$$+ \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1+c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2+b_2+c_2 & a_1+b_1+c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3+b_3+c_3 & a_4+b_4+c_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3+b_3+c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} + \left[ \quad - - - \quad \right]$$

1.2. Нейтральный элемент – $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$

1.3. Для любого элемента $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$

обратным будет $\begin{pmatrix} -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ -a_2 & -a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & -a_3 \end{pmatrix}$

1.4. Операция коммутативна

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2+b_2 & a_1+b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3+b_3 & a_4+b_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3+b_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, (матрицы, +) – абелева группа

2. Рассмотрим (матрицы, ·)

2.1. Операция ассоциативна

$$\left[\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}\right] \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} a_1b_1c_1 & 0 \\ a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+a_2b_1b_1 & 0 \\ 0 & a_1b_1c_1 \\ 0 & \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1b_1c_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+a_2b_1c_1 & a_1b_1c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3b_3c_3 & a_3b_3c_4+a_3b_4c_3+a_4b_3c_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_3b_3c_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \left[\ \cdot\ \cdot\ \right]$$

Значит, (мат., ·) – полугруппа

Тогда, (мат., +, ·) – кольцо.

Найдем ~~все~~ ~~других~~ делители 0.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1b_2+a_2b_1 & a_1b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3b_3 & a_3b_4+b_3a_4 \\ 0 & 0 & 0 & a_3b_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 b_1 = 0 \\ a_3 b_3 = 0 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0 \\ a_3 b_4 + a_4 b_3 = 0 \end{cases}$$

$a_1 b_1 = 0$, $a_3 b_3 = 0$ — независимы – рассмотрим по ним (4 случая)

1\. $a_1 = 0$

$$\begin{cases} a_3 b_3 = 0 \\ a_2 b_1 = 0 \\ a_3 b_4 + a_4 b_3 = 0 \end{cases}$$

1.1. $a_3 = 0$

$$\begin{cases} a_2 b_1 = 0 \\ a_4 b_3 = 0 \end{cases}$$ не зависимы, т.е. 4 случая

1.1.1. $b_1 = 0$

$a_4 b_3 = 0$

1.1.1.1. $\cancel{a_4 = 0}$ $b_3 = 0$

Система решена

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – делители 0

1.1.1.2. $a_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$$

1.1.2. $a_2 = 0$

$a_4 b_3 = 0$

1.1.2.1. $b_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.1.2.2. $a_4 = 0$ – не подходит

1.2. $b_3 = 0$

$\begin{cases} a_2 b_1 = 0 \\ a_3 b_4 = 0 \end{cases}$ ⇒ независимы

• $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad a_2 = 0,\ b_3 = 0$

• $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad a_2 = 0,\ b_4 = 0$

• $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_1 = 0,\ a_3 = 0$

• $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b_1 = 0,\ b_4 = 0$

2. $b_1 = 0$

По аналогии

Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}$

№9

$S_2 \times Q_8$

| | |
|---|---|
| 1. $(id, 1)$ | 9. $((12), 1)$ |
| 2. $(id, -1)$ | 10. $((12), -1)$ |
| 3. $(id, i)$ | 11. $((12), i)$ |
| 4. $(id, -i)$ | 12. $((12), -i)$ |
| 5. $(id, j)$ | 13. $((12), j)$ |
| 6. $(id, -j)$ | 14. $((12), -j)$ |
| 7. $(id, k)$ | 15. $((12), k)$ |
| 8. $(id, -k)$ | 16. $((12), -k)$ |

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 14 & 13 & 16 & 15 & 9 & 10 & 11 & 12 & 6 & 5 & 8 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$(id, 1) \cdot ((12), -j) = ((12), -j)$ $\quad 1 \to 14$

$(id, -1) \cdot (a, -j) = (a, j)$ $\quad 2 \to 13$

$(id, i) \cdot (a, -j) = (a, -k)$ $\quad 3 \to 16$

$(id, -i) \cdot (a, -j) = (a, k)$ $\quad 4 \to 15$

$(id, j) \cdot (a, -j) = (a, 1)$ $\quad 5 \to 9$

$(id, -j) \cdot (a, -j) = (a, -1)$ $\quad 6 \to 10$

$(id, k)\,(a, -j) = (a, i)$ $\quad 7 \to 11$

$(id, -k) \cdot (a, -j) = (a, -i)$ $\quad 8 \to 12$

$(a, 1) \cdot (a, -j) = (id, -j)$ $\quad 9 \to 6$

$(a, -1) \cdot (a, -j) = (id, j)$ $\quad 10 \to 5$

$(a, i) \cdot (a, -j) = (id, -k)$ $\quad 11 \to 8$

$(a, -i)\,(a, -j) = (id, k)$ $\quad 12 \to 7$

$(a, j)\,(a, -j) = (id, 1)$ $\quad 13 \to 1$

$(a, -j)\,(a, -j) = (id, -1)$ $\quad 14 \to 2$

$(a, k)\,(a, -j) = (id, i)$ $\quad 15 \to 3$

$(a, -k)\,(a, -j) = (id, -i)$ $\quad 16 \to 4$