КДЗ 4 по Дискретной Математике

Татаринов Никита, БПИ196

2020
май, 15

Задача №1

A - некое множество, $R \subseteq A^2$ - некое бинарное отношение на этом множжестве A. Для решения задачи выпишем ряд определений.
R рефлексивно тогда и только тогда, когда $\forall x \in A \quad xRx$, и антирефлексивно тогда и только тогда, когда $\forall x \in A \quad \neg(xRx)$.
R симметрично тогда и только тогда, когда $\forall x, y \in A \quad xRy \Rightarrow yRx$, и антисимметрично тогда и только тогда, когда $\forall x, y \in A \quad xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.
R транзитивно тогда и только тогда, когда $\forall x, y, z \in A \quad (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$, и антитранзитивно если $\forall x, y, z \in A \quad (xRy \wedge yRz) \Rightarrow \neg(xRz)$.

Замечание (1.1)**.** *Нерефлексивность не то же самое, что антирефлексивность! R нерефлексивно тогда и только тогда, когда $\neg\forall x \in A \quad xRx$ (т.е. антирефлексивность - частный случай нерефлексивности). Аналогично и для несимметричности, нетранзитивности.*

Теперь вернёмся к решению задачи. Необходимо привести пример для A и R, таких что R:

а) рефлексивно, симметрично, не транзитивно.
Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$. Тогда явно видно, что R рефлексивно и симметрично. Проверим нетранзитивность. Для тройки чисел $x = 1, y = 1, z = 1$ транзитивность выполняется $(1R1,\ 1R1,\ 1R1)$, а для тройки чисел $x = 2, y = 1, z = 3$ не выполняется $(2R1,\ 1R3,\ \neg(2R3))$, значит, нетразитивность выполняется, чтд.

б) антисимметрично, транзитивно, не рефлексивно.
Пусть $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$. Тогда явно видно, что R не рефлексивно и антисимметрично (более того, R антирефлексивно, но это, как было сказано ранее, частный случай нерефлексивности), причём данные 3 пары чисел зациклены по круг, то есть транзитивны, значит, и R транзитивно, чтд.

в) симметрично, транзитивно, не рефлексивно.
Пусть $A = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 1)\}$. Тогда, явно видно, что R симметрично, транзитивно и не рефлексивно, чтд.

Ответ:

а) $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)\}$;

б) $A = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$;

в) $A = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 1)\}$.

Задача №2

P и Q антирефлексивны, то есть, $\forall x$ из множества, на котором заданы данные бинарные отношения (пусть A), выполняется $\neg(xPx)$ и $\neg(xQx)$.

1. $P \cup Q = \{(x, y) \;\; x \in A \;\; y \in A \mid xPy \vee xQy\}$, т.е. $P \cup Q$ не может содержать такие $x \in A$, что $x(P \cup Q)x$, так как P и Q не содержат таких пар.

2. $P \cap Q = \{(x,y) \;\; x\in A \;\; y\in A \mid xPy \wedge xQy\}$, т.е. $P \cap Q$ не может содержать такие $x \in A$, что $x(P\cap Q)x$, так как P и Q не содержат таких пар.

3. $P^{-1} = \{(x,y) \;\; x\in A \;\; y\in A \mid yPx\}$, т.е. P^{-1} не может содержать такие $x\in A$, что $x(P^{-1})x$, так как P не содержит таких пар.

Задача №3

Необходимо доказать, что $\forall$ ч.у.м. $\mathcal{A} = (A, \leqslant)$ найдётся множество $S \subseteq \mathcal{P}(A)$, такое что $\mathcal{A} \cong (S, \subseteq)$.
Пусть $\varphi(a \in A) = \{b \in A \mid b \leqslant a\}$ вспомогательное множество. Во-первых, заметим, что $\varphi(a) \in \mathcal{P}(A)$, т.е. $\{\varphi(a) a \in A\} \subseteq \mathcal{P}(A)$. Во-вторых, докажем, что $\{\varphi(a) \quad \forall a \in A\}$ - пример искомного S.
Докажем, что $f : (a \in A) \to \varphi(a)$ - биекция.

1. Докажем, что f - суръекция. $\varphi(a)$ всегда задаётся через a, т.е. $\forall \varphi(a) \quad a$ всегда прообраз, т.е. f - суръекция, чтд.

2. Докажем, что f - инъекция. Рассмотрим $a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2$. Заметим, что $\varphi(a_1) \ni a_1, \varphi(a_2) \ni a_2$. Значит, $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$, т.е. f - инъекция, чтд.

Значит, f - биекция. Тогда, $\{\varphi(a) \quad \forall a \in A\}$ действительно является примером для S, чтд.

Задача №4

Дано ч.у.м. $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$. Необходимо найти непустую цепь, в которой нет ни минимального, ни максимального элемента.
Возьмём множество нечётных чисел $\{n \in \mathbb{N} \mid n \equiv 1 (mod\, 2)\}$ (обозначим за A).
Тогда $\{\; ... \; A\backslash\{1,3,5,...,2n+1\} \; ... \; A\backslash\{1,3\}, \; A\backslash\{1\}, \; A, \; A\cup\{0\}, \; A\cup\{0,2\}, \; ... \; A\cup\{0,2,4...2n\} \; ... \;\}$ - искомая цепь, так как все элементы данного множества принадлежат $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ и каждый элемент является подмножеством всех последующих, что говорит, во-первых, о сравнимости всех элементов по операции $\subseteq$, а во-вторых, об отсутствии минимального и максимального элемента (так как множество уходит на бесконечность в обе стороны).
Ответ: $\{\; ... \; A\backslash\{1,3,5, \; ... \; , 2n+1\} \; ... \; A\backslash\{1,3\}, \; A\backslash\{1\}, \; A, \; A\cup\{0\}, \; A\cup\{0,2\}, \; ... \; A\cup\{0,2,4 \; ... \; 2n\} \; ... \;\}$, где A - множество нечётных чисел.

Задача №5

A - некоторое конечное множество, $\mathcal{A} = (A, <)$ - ч.у.м., $max_< \, A = \{x\}$. Необходимо доказать, что элемент x - наибольший в A.

Задача №6

Необходимо явно определить какой-либо линейный порядок на $\mathbb{R}^2$.
Тогда, зададим линейный порядок $\mathcal{A} = (\mathbb{R}^2, \preccurlyeq)$, в котором $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ((x_1, y_1) \preccurlyeq$

$(x_2, y_2)) \Leftrightarrow (x_1 + y_1 \leqslant x_2 + y_2)$. В таком случая, операция сравнения $\preccurlyeq$ определена для любых пар из $\mathbb{R}^2$, т.е. мы нашли пример линейного порядка.
Ответ: $\mathcal{A} = (\mathbb{R}^2, \preccurlyeq)$: $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad ((x_1, y_1) \preccurlyeq (x_2, y_2)) \Leftrightarrow (x_1 + y_1 \leqslant x_2 + y_2)$.

Задача №7

Задача №8

S - бинарное отношение на множестве $\mathbb{N}^2$, обладающее свойством $(a,b)S(c,d) \Leftrightarrow ((ad = bc) \wedge (b \neq 0 \neq d) \ \vee \ (a = c) \wedge (b = 0 = d)), \quad (a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$. Требуется проверить, является ли S отношением эквивалентности.
Отношение эквивалентности - рефлексивное симметрично транзитивное бинарное отношение. Вспомним определения из задачи №1 и проверим данные свойства.

1. Проверим рефлексивность, рассмотрев $(a,b)S(a,b) \ \forall (a,b) \in \mathbb{N}^2$. $(a,b)S(a,b \Leftrightarrow ((ab = ba) \wedge (b \neq 0 \neq b) \ \vee \ (a = a) \wedge (b = 0 = b)) \Leftrightarrow (b \neq 0) \ \vee \ (b = 0)$, что всегда является верным, то есть рефлексивность выполняется.

2. Проверим симметричность, рассмотрев произвольный элемент $(a,b)S(c,d)$. $(a,b)S(c,d) \Leftrightarrow ((ad = bc) \wedge (b \neq 0 \neq d) \ \vee \ (a = c) \wedge (b = 0 = d))$, при этом $(c,d)S(a,b) \Leftrightarrow ((cb = da) \wedge (d \neq 0 \neq b) \ \vee \ (c = a) \wedge (d = 0 = b))$, что является тем же самым, что и $(a,b)S(c,d)$, то есть симметричность выполняется.

3. Проверим транзитивность, рассмотрев произвольные элементы $(a,b)S(c,d)$ и $(c,d)S(e,f)$ (если такие существуют одновременно в S; если не существуют - транзитивность гарантированно выполняется). $(a,b)S(c,d) \Leftrightarrow ((ad = bc) \wedge (b \neq 0 \neq d) \ \vee \ (a = c) \wedge (b = 0 = d))$. $(c,d)S(e,f) \Leftrightarrow ((cf = de) \wedge (d \neq 0 \neq f) \ \vee \ (c = e) \wedge (d = 0 = f))$.
Тогда, $(a,b)S(c,d) \wedge (c,d)S(e,f) \Leftrightarrow (((ad = bc) \wedge (b \neq 0 \neq d) \ \vee \ (a = c) \wedge (b = 0 = d)) \wedge ((cf = de) \wedge (d \neq 0 \neq f) \ \vee \ (c = e) \wedge (d = 0 = f))) \Leftrightarrow ((ad = bc) \wedge (b \neq 0 \neq d) \wedge (cf = de) \wedge (d \neq 0 \neq f) \ \vee \ (ad = bc) \wedge (b \neq 0 \neq d) \wedge (c = e) \wedge (d = 0 = f) \ \vee \ (a = c) \wedge (b = 0 = d) \wedge (cf = de) \wedge (d \neq 0 \neq f) \ \vee \ (a = c) \wedge (b = 0 = d) \wedge (c = e) \wedge (d = 0 = f)) \Leftrightarrow ((ad = bc) \wedge (cf = de) \wedge (b \neq 0 \neq d \neq f) \ \vee \ (a = c = e) \wedge (b = 0 = d = f))$.
При этом $(a,b)S(e,f) \Leftrightarrow ((af = be) \wedge (b \neq 0 \neq f) \ \vee \ (a = e) \wedge (b = 0 = f))$.
Заметим, что: из $(ad = bc) \wedge (cf = de)$ следует $ad \cdot cf = bc \cdot de$, т.е. $af = be$; из $(b \neq 0 \neq d \neq f)$ следует $b \neq 0 \neq f$; из $(a = c = e)$ следует $(a = e)$; из $b = 0 = d = f$ следует $b = 0 = f$. Значит,$(a,b)S(c,d) \wedge (c,d)S(e,f) \Rightarrow (a,b)S(e,f)$, то есть транзитивность выполняется.

Таким образом, все 3 свойства выполняются, то есть S является отношением эквивалентности.
Ответ: да, верно.

Задача №9

R - некоторое бинарное отношение на некоем множестве A. Необходимо определить, когда R является одновременно частичным порядком и отношением эквивалентности. Вспомним определения.
Частичный порядок - рефлективное транзитивное антисимметричное бинарное отношение.

Отношение эквивалентности - рефлексивное симметрично транзитивное бинарное отношение. Различия заключаются только в симметричности и антисимметричности. Переделаем определения, данные в задаче №1, и запишем их словами.
Если бинарное отношение симметрично, то элементы xRy, где $x = y$, всегда могут принадлежать подмножеству, а элементы xRy могут принадлежать подмножеству, только если yRx.
Если бинарное отношение антисимметрично, то элементы xRy, где $x = y$, всегда могут принадлежать подмножеству, а элементы xRy могут принадлежать подмножеству, только если $\neg(yRx)$.
Условия yRx и $\neg(yRx)$ не могут выполняться одновременно, значит, R может одновременно являться частичным порядком и отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда R состоит из элементов вида xRx.
Ответ: когда R состоит из элементов вида $xRx, x \in A$.

Задача №10

E - бинарное отношение на множестве $\underline{2}^{\mathbb{N}}$. Каждый элемент в E (являющийся функцией из $\mathbb{N}$ в $\underline{2}$) представим в виде последовательности из 0 и 1, i-й элемент которой отражает, во что отражается натуральное число i, причём $fEg \Leftrightarrow f = g \circ \sigma$, где $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ - некоторая биекция (то есть f - некоторая перестановка g). Необходимо доказать, что:

а) E - отношение эквивалентности. Для этого, воспользовавшись определением из предыдущих задач, проверим свойства рефлексивности, симметричности и транзитивности.
$fEf \quad \forall f \in \underline{2}^{\mathbb{N}}$, так всегда существует $\sigma = id$, т.е. рефлексивность выполняется.
$fEg \Leftrightarrow f = g \circ \sigma$. При этом, $f = g \circ \sigma \Rightarrow g = f \circ \sigma^{-1}$, значит, $fEg \Rightarrow gEf$, т.е. симметричность выполняется.
$(fEg \wedge gEh) \Leftrightarrow (f = g \circ \sigma_1 \wedge g = h \circ \sigma_2)$. При этом, $(f = g \circ \sigma_1 \wedge g = h \circ \sigma_2) \Rightarrow (f = h \circ \sigma_2 \circ \sigma_1) \Rightarrow (\exists \sigma_3 = \sigma_2 \circ \sigma_1 : f = h \circ \sigma_3)$, т.е. $(fEg \wedge gEh) \Leftrightarrow fEh$, т.е. транзитивность выполняется. Таким образом, все 3 свойства выполняются, то есть E - отношение эквивалентности, чтд.

б) $\underline{2}^{\mathbb{N}}/E$ счётно. $\underline{2}^{\mathbb{N}}/E$ - множество классов эквивалентности. Так как все последовательности, между которыми есть некоторая биекция σ, эквивалентны (по определению же), они и образуют классы эквивалентности (так как $fEg \Leftrightarrow f = g \circ \sigma$, то есть $\neg(fEg) \Leftrightarrow \nexists \sigma : f = g \circ \sigma$). Значит, класс эквивалентности определяется количеством нулей и единиц в последовательности, что равнозначно определяется просто количеством нулей или единиц. Тогда, класс эквивалентности равномощен $\mathbb{N} \cup \{0\}$, так как количество 0 в последовательности - натуральное число или 0. Значит, $\underline{2}^{\mathbb{N}}/E$ счётно, чтд.