Лекция 1

Случайная выборка

Точечные оценки

Кое-какие организационные вопросы

Фурманов К.К.,
кафедра математической экономики и эконометрики НИУ ВШЭ

Зачем нужна статистика?

Типичное статистическое исследование:

Для изучения некоторой генеральной совокупности объектов была сделана случайная выборка из этой совокупности, состоящая из *n* объектов. У каждого обследованного объекта был измерен некий признак, так что имеется ряд результатов измерения:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n .$$

Задачи:

> представление данных в удобном для восприятия виде (сведение к осмысленным характеристикам: среднее, стандартное отклонение и т. п.; таблицы, графики);

> распространение результатов выборочного обследования на генеральную совокупность (оценивание параметров генеральной совокупности, проверка гипотез об этих параметрах).

статистические признаки

количественные

определены арифметические операции

качественные

порядковые (ординальные)

определено отношение порядка: можно сравнивать «больше-равно-меньше»

номинальные

можно сравнивать «равно-не равно»

Основной приём математической статистики

Мы считаем, что располагаемые данные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ суть реализации (значения) случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ будем называть *случайной выборкой*.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *реализация* случайной выборки.

Что даёт нам право так считать?

Простейший случай: величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены (обозначается $X_i \sim i.i.d.$ - independent identically distributed).

Когда эта предпосылка выполняется? Когда нарушается?

Замечание. На практике и числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, и случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называют выборкой.

Точечные оценки

Пусть распределение признака в генеральной совокупности известно нам с точностью до параметра θ (возможно — с точностью до нескольких параметров $\theta_1, ..., \theta_p$).

Например, мы знаем, что $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, но значения параметров μ и σ^2 нам неизвестны.

Оценкой для параметра θ по выборке $X_1, \ldots, X_n$ называется случайная величина, определённая на том же пространстве элементарных исходов, что и случайные величины $X_1, \ldots, X_n$, и являющаяся функцией от $X_1, \ldots, X_n$.

«Данное определение удивляет своей широтой, переходящей в бессмысленность»
(А.С. Шведов, «Теория вероятностей и математическая статистика», с. 114)

Итак, $\hat{\theta} = f(X_1, ..., X_n)$ - оценка для θ.

Помните: *оценка — случайная величина, оцениваемый параметр — нет!*

А почему?

Свойства оценок

Пусть Θ — множество допустимых значений параметра θ.

I. Несмещённость

Оценка $\hat{\theta}$ для параметра θ называется *несмещённой*, если

$$E(\hat{\theta}) = \theta \quad \forall\, \theta \in \Theta.$$

Что это значит?

Смещение оценки $\hat{\theta}$ для параметра θ:

$$\mathrm{Bias}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta) = E(\hat{\theta}) - \theta.$$

несмещённая оценка — unbiased estimator

Пример

Имеется случайная выборка

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

такая что

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu.$$

Проверьте на несмещённость оценки для μ:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n};$$

$$\hat{\mu}_2 = X_1;$$

$$\hat{\mu}_3 = X_1 - 3X_2.$$

Пример

Имеется случайная выборка

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

такая что

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu.$$

Проверьте на несмещённость оценки для μ:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n};$$
$$\hat{\mu}_2 = X_1;$$
$$\hat{\mu}_3 = X_1 - 3X_2.$$

Решение.

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}_1) = \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\mathrm{E}(X_1) + \ldots + \mathrm{E}(X_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$ => несмещённая.

Пример

Имеется случайная выборка

$$X_1, X_2, \dots, X_n,$$

такая что

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu.$$

Проверьте на несмещённость оценки для μ:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n};$$
$$\hat{\mu}_2 = X_1;$$
$$\hat{\mu}_3 = X_1 - 3X_2.$$

Решение.

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}_1) = \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{\mathrm{E}(X_1) + \dots + \mathrm{E}(X_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$ => несмещённая.

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}_2) = \mathrm{E}(X_1) = \mu$$ => несмещённая.

Пример

Имеется случайная выборка

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

такая что

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu.$$

Проверьте на несмещённость оценки для μ:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n};$$
$$\hat{\mu}_2 = X_1;$$
$$\hat{\mu}_3 = X_1 - 3X_2.$$

Решение.

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}_1) = \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\mathrm{E}(X_1) + \ldots + \mathrm{E}(X_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$ => несмещённая.

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}_2) = \mathrm{E}(X_1) = \mu$$ => несмещённая.

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}_3) = \mathrm{E}(X_1) - 3\,\mathrm{E}(X_2) = \mu - 3\mu = -2\mu$$ => смещённая.

Пример

Имеется случайная выборка

$$X_1, X_2, \ldots, X_n,$$

такая что

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu.$$

Проверьте на несмещённость оценки для μ:

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n};$$
$$\hat{\mu}_2 = X_1;$$
$$\hat{\mu}_3 = X_1 - 3X_2.$$

Решение.

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}_1) = \mathrm{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{\mathrm{E}(X_1) + \ldots + \mathrm{E}(X_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu$$ => несмещённая.

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}_2) = \mathrm{E}(X_1) = \mu$$ => несмещённая.

$$\mathrm{E}(\hat{\mu}_3) = \mathrm{E}(X_1) - 3\,\mathrm{E}(X_2) = \mu - 3\mu = -2\mu$$ => смещённая.

$$\mathrm{Bias}(\hat{\mu}_3) = \mathrm{E}(\hat{\mu}_3) - \mu = -2\mu - \mu = -3\mu.$$

Ещё пример

Разведчик Антон обследовал 25 вражеских танков и передаёт в штаб информацию об их состоянии: 1 — хорошее состояние, 0 — плохое. Из-за помех при передаче возникают ошибки, так что с вероятностью 0.8 штаб получает то, что передаёт Антон, а иначе — либо 0, либо 1 равновероятно.

Пусть p — доля вражеских танков в хорошем состоянии. Для оценивания этого параметра связист Зоя использует величину

$$\tilde{p} = \frac{X_1 + \ldots + X_{25}}{20} + c,$$

где X_i — принятое штабом число, характеризующее состояние танка i (или зашумление), c — придуманная Зоей поправка на шум.

Каким должно быть число c, чтобы $\tilde{p}$ была несмещённой оценкой для p?

Ещё пример

Разведчик Антон обследовал 25 вражеских танков и передаёт в штаб информацию об их состоянии: 1 — хорошее состояние, 0 — плохое. Из-за помех при передаче возникают ошибки, так что с вероятностью 0.8 штаб получает то, что передаёт Антон, а иначе — либо 0, либо 1 равновероятно.

Пусть p — доля вражеских танков в хорошем состоянии. Для оценивания этого параметра связист Зоя использует величину

$$\tilde{p} = \frac{X_1 + \ldots + X_{25}}{20} + c,$$

где X_i — принятое штабом число, характеризующее состояние танка i (или зашумление), c — придуманная Зоей поправка на шум.

Каким должно быть число c, чтобы $\tilde{p}$ была несмещённой оценкой для p?

Решение. Для начала поймём, как распределение X_i связано с параметром p.

$$\mathrm{P}(X_i = 1) = 0.8\,p + 0.2 \cdot 0.5 = 0.8\,p + 0.1.$$

$$\mathrm{P}(X_i = 0) = 0.8(1 - p) + 0.2 \cdot 0.5 = 0.9 - 0.8\,p.$$

$$X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.9 - 0.8\,p & 0.1 + 0.8\,p \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{E}(X_i) = 0 \times (0.9 - 0.8\,p) + 1 \times (0.1 + 0.8\,p) = 0.1 + 0.8\,p.$$

Ещё пример (2)

Разведчик Антон обследовал 25 вражеских танков и передаёт в штаб информацию об их состоянии: 1 — хорошее состояние, 0 — плохое. Из-за помех при передаче возникают ошибки, так что с вероятностью 0.8 штаб получает то, что передаёт Антон, а иначе — либо 0, либо 1 равновероятно.

Пусть p — доля вражеских танков в хорошем состоянии. Для оценивания этого параметра связист Зоя использует величину

$$\widetilde{p} = \frac{X_1 + \ldots + X_{25}}{20} + c,$$

где X_i — принятое штабом число, характеризующее состояние танка i (или зашумление), c — придуманная Зоей поправка на шум.

Каким должно быть число c, чтобы $\widetilde{p}$ была несмещённой оценкой для p?

Решение. Итак, $\mathrm{E}(X_i) = 0.1 + 0.8\,p$.

Теперь найдём математическое ожидание оценки:

$$\mathrm{E}(\widetilde{p}) = \frac{\mathrm{E}(X_1) + \ldots + \mathrm{E}(X_{25})}{20} + c = \frac{25 \times (0.1 + 0.8\,p)}{20} + c = \frac{2.5 + 20\,p}{20} + c = 0.125 + p + c.$$

Чтобы оценка была несмещённой, нужно чтобы $\mathrm{E}(\widetilde{p}) = p$, так что $c = -0.125$.

Ответ. $c = -0.125$.

Свойства оценок

II. Состоятельность

Последовательность оценок $\{\hat{\theta}_n\}$ для параметра θ называется *состоятельной*, если

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|>\epsilon\right)=0 \quad \forall\, \epsilon>0,\ \ \forall\, \theta\in\Theta\,.$$

Индекс *n* означает объём выборки:

$$\hat{\theta}_1=f\left(X_1\right),\ \ \hat{\theta}_2=f\left(X_1,X_2\right),\ldots$$

Слово «последовательность» в дальнейшем будем опускать.

Что это значит?

состоятельность - consistency

Достаточное условие состоятельности

Пусть для оценки $\hat{\theta}_n$ при любом $\theta \in \Theta$ выполняются равенства:

$$1.\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}\left(\hat{\theta}_n\right) = \theta;$$ (асимптотическая несмещённость)

$$2.\ \lim_{n\to\infty} \mathrm{D}\left(\hat{\theta}_n\right) = 0.$$

Тогда $\hat{\theta}_n$ - состоятельная оценка для параметра θ.

А зачем нам всё это нужно?

Что мы хотим от оценки?

Пример

Пусть $X_i \sim$ i.i.d., $E(X_i) = \mu$, $D(X_i) = \sigma^2 < \infty$.

Рассмотрим оценку для параметра μ:

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$$ (выборочное среднее).

Оценка несмещённая: $$E(\bar{X}) = \frac{E(X_1) + ... + E(X_n)}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu.$$

Найдём дисперсию:

$$D(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} D(X_1 + ... + X_n) = [\text{в силу независимости } X_i] =$$

$$= \frac{D(X_1) + ... + D(X_n)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Значит, $\bar{X}$ - состоятельная оценка для μ .

(Закон Больших Чисел в форме Чебышёва)

Свойства оценок

III. Эффективность.

Несмещённая оценка $\hat{\theta}$ для параметра θ называется *эффективной*, если для любой другой несмещённой оценки $\tilde{\theta}$ параметра θ по той же выборке выполняется неравенство:

$$\mathrm{D}\left(\hat{\theta}\right) \le \mathrm{D}\left(\tilde{\theta}\right) \quad \forall\, \theta \in \Theta.$$

Почему нам не нравится дисперсия?

Относительная эффективность несмещённых оценок $\hat{\theta}_1$ и $\hat{\theta}_2$:

$$\mathrm{RE}\left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2\right) = \frac{\mathrm{D}\left(\hat{\theta}_2\right)}{\mathrm{D}\left(\hat{\theta}_1\right)}.$$

эффективность — efficiency

относительная эффективность — relative efficiency

Свойства оценок

III. Эффективность.

Несмещённая оценка $\hat{\theta}$ для параметра θ называется *эффективной*, если для любой другой несмещённой оценки $\tilde{\theta}$ параметра θ по той же выборке выполняется неравенство:

$$D(\hat{\theta}) \leq D(\widetilde{\theta}) \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Почему нам не нравится дисперсия?

Как измерить точность оценки?

MSE (Mean Squared Error, средний квадрат ошибки):

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2].$$

У несмещённых оценок $E(\hat{\theta}) = \theta$, так что

$$\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = E[(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2] = D(\hat{\theta}).$$

Пример

Имеются независимые случайные величины

$$X_1, \ldots, X_n,$$

такие что

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu, \ \ \mathrm{D}(X_i) = \sigma^2 < \infty$$

Сравните эффективность двух несмещённых оценок для μ :

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n};$$

$$\hat{\mu}_2 = X_1.$$

Пример

Имеются независимые случайные величины

$$X_1, \ldots, X_n,$$

такие что

$$\mathrm{E}(X_i) = \mu, \ \ \mathrm{D}(X_i) = \sigma^2 < \infty.$$

Сравните эффективность двух несмещённых оценок для μ :

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n};$$
$$\hat{\mu}_2 = X_1.$$

Решение. Дисперсии оценок:

$$\mathrm{D}(\hat{\mu}_1) = \frac{\sigma^2}{n}; \quad \mathrm{D}(\hat{\mu}_2) = \mathrm{D}(X_1) = \sigma^2.$$

$\mathrm{D}(\hat{\mu}_1) < \mathrm{D}(\hat{\mu}_2)$ при $n > 0$ => $\hat{\mu}_1$ эффективнее $\hat{\mu}_2$.

Относительная эффективность $\hat{\mu}_1$ по сравнению с $\hat{\mu}_2$:

$$\mathrm{RE}(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2) = \frac{\mathrm{D}(\hat{\mu}_2)}{\mathrm{D}(\hat{\mu}_1)} = n.$$

Упражнение. Докажите полезную формулу:

$$\mathrm{MSE}\left(\hat{\theta}\right) = \mathrm{Bias}^2\left(\hat{\theta}\right) + \mathrm{D}\left(\hat{\theta}\right).$$

Ещё упражнение. Попробуйте доказать, что оценка $\bar{X}$ - эффективная в классе линейных несмещённых оценок для μ .

Иначе говоря, покажите, что оценка $\bar{X}$ имеет наименьшую дисперсию

среди всех оценок вида $\widetilde{X} = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n$,

удовлетворяющих условию $\mathrm{E}\left(\widetilde{X}\right) = \mu$.

Предполагается, что $X_i \sim \mathrm{i.i.d}$, $\mathrm{E}\left(X_i\right) = \mu$, $\mathrm{D}\left(X_i\right) = \sigma^2 < \infty$.

Пример: сравнение смещённой и несмещённой оценки

Случайные величины $X_1, \ldots, X_9$ независимы, $\mathrm{E}(X_i) = \theta$, $\mathrm{D}(X_i) = \theta^2$.

Сравните по MSE оценки для θ:

(1) $\bar{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_9}{9}$, (2) $\hat{\theta} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_9}{10}$.

Пример: сравнение смещённой и несмещённой оценки

Случайные величины $X_1, \ldots, X_9$ независимы, $\mathrm{E}(X_i) = \theta$, $\mathrm{D}(X_i) = \theta^2$.

Сравните по MSE оценки для θ:

(1) $\bar{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_9}{9}$, (2) $\hat{\theta} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_9}{10}$.

Решение. Воспользуемся формулой $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathrm{Bias}^2(\hat{\theta}) + \mathrm{D}(\hat{\theta})$.

Найдём смещения оценок:

$$\mathrm{Bias}(\bar{X}) = \mathrm{E}(\bar{X}) - \theta = 0, \qquad \mathrm{Bias}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}(\hat{\theta}) - \theta = \frac{9\theta}{10} - \theta = -\frac{\theta}{10}.$$

Пример: сравнение смещённой и несмещённой оценки

Случайные величины $X_1, \ldots, X_9$ независимы, $\mathrm{E}(X_i) = \theta$, $\mathrm{D}(X_i) = \theta^2$.

Сравните по MSE оценки для θ:

(1) $\bar{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_9}{9}$, (2) $\hat{\theta} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_9}{10}$.

Решение. Воспользуемся формулой $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathrm{Bias}^2(\hat{\theta}) + \mathrm{D}(\hat{\theta})$.

Найдём смещения оценок:

$$\mathrm{Bias}(\bar{X}) = \mathrm{E}(\bar{X}) - \theta = 0, \qquad \mathrm{Bias}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}(\hat{\theta}) - \theta = \frac{9\theta}{10} - \theta = -\frac{\theta}{10}.$$

Теперь дисперсии:

$$\mathrm{D}(\bar{X}) = \frac{9\theta^2}{9^2} = \frac{\theta^2}{9}, \qquad \mathrm{D}(\hat{\theta}) = \frac{9\theta^2}{10^2} = \frac{9\theta^2}{100}.$$

Пример: сравнение смещённой и несмещённой оценки

Случайные величины $X_1, \ldots, X_9$ независимы, $\mathrm{E}(X_i) = \theta$, $\mathrm{D}(X_i) = \theta^2$.

Сравните по MSE оценки для θ:

(1) $\bar{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_9}{9}$, (2) $\hat{\theta} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_9}{10}$.

Решение. Воспользуемся формулой $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathrm{Bias}^2(\hat{\theta}) + \mathrm{D}(\hat{\theta})$.

Найдём смещения оценок:

$$\mathrm{Bias}(\bar{X}) = \mathrm{E}(\bar{X}) - \theta = 0, \qquad \mathrm{Bias}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}(\hat{\theta}) - \theta = \frac{9\theta}{10} - \theta = -\frac{\theta}{10}.$$

Теперь дисперсии:

$$\mathrm{D}(\bar{X}) = \frac{9\theta^2}{9^2} = \frac{\theta^2}{9}, \qquad \mathrm{D}(\hat{\theta}) = \frac{9\theta^2}{10^2} = \frac{9\theta^2}{100}.$$

Наконец, MSE:

$$\mathrm{MSE}(\bar{X}) = \mathrm{D}(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{9}, \qquad \mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \left(-\frac{\theta}{10}\right)^2 + \frac{9\theta^2}{100} = \frac{\theta^2 + 9\theta^2}{100} = \frac{\theta^2}{10}.$$

$\mathrm{MSE}(\bar{X}) \geq \mathrm{MSE}(\hat{\theta})$ => смещённая оценка оказалась точнее.

Пример: сравнение смещённой и несмещённой оценки

Случайные величины $X_1, \ldots, X_9$ независимы, $\mathrm{E}(X_i) = \theta,\ \mathrm{D}(X_i) = \theta^2.$

Сравните по MSE оценки для θ:

(1) $\bar{X} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_9}{9},$ (2) $\hat{\theta} = \dfrac{X_1 + \ldots + X_9}{10}.$

Решение. Воспользуемся формулой $\mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \mathrm{Bias}^2(\hat{\theta}) + \mathrm{D}(\hat{\theta}).$

Найдём смещения оценок:

$$\mathrm{Bias}(\bar{X}) = \mathrm{E}(\bar{X}) - \theta = 0, \qquad \mathrm{Bias}(\hat{\theta}) = \mathrm{E}(\hat{\theta}) - \theta = \frac{9\theta}{10} - \theta = -\frac{\theta}{10}.$$

Теперь дисперсии:

$$\mathrm{D}(\bar{X}) = \frac{9\theta^2}{9^2} = \frac{\theta^2}{9}, \qquad \mathrm{D}(\hat{\theta}) = \frac{9\theta^2}{10^2} = \frac{9\theta^2}{100}.$$

Наконец, MSE:

$$\mathrm{MSE}(\bar{X}) = \mathrm{D}(\bar{X}) = \frac{\theta^2}{9}, \qquad \mathrm{MSE}(\hat{\theta}) = \left(-\frac{\theta}{10}\right)^2 + \frac{9\theta^2}{100} = \frac{\theta^2 + 9\theta^2}{100} = \frac{\theta^2}{10}.$$

$\mathrm{MSE}(\bar{X}) \geq \mathrm{MSE}(\hat{\theta})$ => смещённая оценка оказалась точнее.

На сегодня хватит.

Теперь организационные вопросы.

Расчёт итоговой оценки

$$O_{итог} = 0.4 \cdot O_{д/з} + 0.2 \cdot O_{онлайн-курс} + 0.4 \cdot O_{экзамен}.$$

Домашнее задание — от 5 до 8 задач, которые сдаются постепенно в течение семестра
с устной защитой.

Онлайн-курс — дам ссылку и объяснения чуть позже.

Экзамен — письменный, не блокирующий.

Автоматы?

Учебники

Пока что рекомендую две основные книги:

J.L. Devore, K.N. Berk «Modern mathematical statistics with applications».

P. Newbold, «Statistics for business and economics».

При надобности буду давать другие источники или присылать подготовленные материалы.

Все лекции и семинары мы стараемся записывать, а потом давать на них ссылки.
Но иногда забываем.

Если видите, что занятие идёт без записи, напоминайте, пожалуйста.

В следующий раз:

некоторые часто используемые точечные оценки

оценки для распределения в целом

описательная статистика и наглядное представление данных