

Семинар 4

по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.10.27

Задание 1

Условие

Сигналы от лунного зонда поступают на станцию с интервалами ровно в 1 секунду. Станция обрабатывает каждый сигнал экспоненциально распределённое время со средним 0.4 сек. Если на момент поступления сигнала станция занята обработкой предыдущего, новый сигнал теряется.

- а) Рассчитайте вероятность потери (для всех сигналов после первого).
- б) 0.2 секунды назад станция не смогла принять очередной сигнал и до сих пор занята. С какой вероятностью она закончит обработку до поступления следующего сигнала?

Решение

- а) Пусть T – время между сигналами. Тогда:

$$\lambda = \frac{1}{E[T]} = \frac{1}{0.4} = 2.5$$

$$T \sim \text{Exp}(\lambda) \sim \text{Exp}(2.5)$$

Рассмотрим очередной момент времени, кратный секунде, т.е. момент времени поступления очередного сигнала. Если предыдущий непотерянный сигнал поступил секунду назад, то вероятность потери рассматриваемого сигнала равна $\mathbf{P}\{T > 1\}$. Если предыдущий непотерянный сигнал поступил 2 секунды назад, то вероятность потери рассматриваемого сигнала равна $\mathbf{P}\left(\{T > 2\} | \{T > 1\}\right) = \mathbf{P}\{T > 1\}$... Если предыдущий непотерянный сигнал поступил $k \geq 1$ секунд назад, то вероятность потери рассматриваемого сигнала равна $\mathbf{P}\left(\{T > k\} | \{T > (k-1)\}\right) = \mathbf{P}\{T > 1\}$.

$$\mathbf{P}\{T > 1\} = G(1) = e^{-\lambda \cdot 1} = e^{-2.5} \approx 0.08$$

- б) Пусть T – время от поступления последнего сигнала (отвергнутого) до завершения обработки текущего сигнала.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\{T < 1\} | \{T > 0.2\}\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(\{T \geq 1\} | \{T > 0.2\}\right) = 1 - \frac{\mathbf{P}\left(\{T \geq 1\} \cap \{T > 0.2\}\right)}{\mathbf{P}\{T > 0.2\}} = \\ &= 1 - \frac{\mathbf{P}\{T \geq 1\}}{\mathbf{P}\{T > 0.2\}} = 1 - \frac{G(1)}{G(0.2)} = 1 - \frac{e^{-\lambda \cdot 1}}{e^{-\lambda \cdot 0.2}} = 1 - e^{-\lambda \cdot 0.8} \approx 0.86 \end{aligned}$$

Ответ

- а) $e^{-2.5} \approx 0.08$
- б) $1 - e^{-2} \approx 0.86$

Задание 2

Условие

Беспокойный медведь Михаил, лёжа в берлоге, ворочается с боку на бок. Время, которое он проводит на одном боку, имеет показательное распределение, в среднем равно 2 суткам и не зависит от того, сколько он лежал на том или ином боку раньше. Какова вероятность того, что за 140 дней зимы Миша перевернётся с боку на бок не менее 64 раз?

Решение

По условию, время на одном боку T описывается независимыми случайными величинами, показательно распределёнными с одним и тем же параметром $\lambda = \frac{1}{E[T]} = 0.5$. Значит, переворачивания с боку на бок происходят в пуассоновском потоке. Тогда, пусть X – количество переворачиваний за время $t=140$.

$$X \sim Pois(\lambda \cdot t) \sim Pois(70)$$

$$\mathbf{P}\{X \geq 64\} = 1 - \mathbf{P}\{X < 64\} = 1 - \sum_{k=0}^{63} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \approx 0.81$$

Аппроксимация нормальным распределением:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X \geq 64\} &= 1 - \mathbf{P}\{X < 64\} = 1 - \mathbf{P}\left\{\frac{X - E[X]}{\sqrt{D[X]}} < \frac{64 - E[X]}{\sqrt{D[X]}}\right\} = 1 - \mathbf{P}\{Z < -0.72\} = \\ &= 1 - \mathbf{P}\{Z > 0.72\} = \mathbf{P}\{Z < 0.72\} \approx 0.76 \end{aligned}$$

Ответ

$$1 - \sum_{k=0}^{63} \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} \approx 0.81$$

или

$$\mathbf{P}\{Z < 0.72\} \approx 0.76$$

Задание 3

Условие

Завод выпускает телевизоры, доля брака в продукции составляет $\alpha = 5\%$. И для качественной, и для бракованной продукции время жизни имеет показательное (экспоненциальное) распределение с параметром $\lambda_1 = 0.2$ для качественных телевизоров и $\lambda_2 = 2$ для бракованных (время измеряется в годах).

- Только что покупатель приобрёл телевизор с этого завода. Какова вероятность того, что он проработает два года?
- Телевизор проработал год, не сломавшись. Какова вероятность того, что он проработает ещё два года?
- Телевизор проработал год, не сломавшись. Какова вероятность того, что он бракованный?

Решение

- а) Пусть $T_{\text{брак}}$ – время работы бракованного телевизора; $T_{\text{небрак}}$ – время работы небракованного телевизора; T – время работы произвольного телевизора с завода. Тогда:

$$\begin{cases} T_{\text{брак}} \sim Exp(\lambda_2) \\ T_{\text{небрак}} \sim Exp(\lambda_1) \\ \mathbf{P}\{T > t\} = \alpha \cdot \mathbf{P}\{T_{\text{брак}} > t\} + (1 - \alpha) \cdot \mathbf{P}\{T_{\text{небрак}} > t\} = \alpha \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} + (1 - \alpha) \cdot e^{-\lambda_1 \cdot t} \end{cases}$$

Для двух лет вероятность равна:

$$\mathbf{P}\{T > 2\} = 0.05 \cdot e^{-4} + 0.95 \cdot e^{-0.4} \approx 0.638$$

б)

$$\mathbf{P}\left(\{T > 3\} | \{T > 1\}\right) = \frac{\mathbf{P}\left(\{T > 3\} \cap \{T > 1\}\right)}{\mathbf{P}\{T > 1\}} = \frac{\mathbf{P}\{T > 3\}}{\mathbf{P}\{T > 1\}} = \frac{0.05 \cdot e^{-6} + 0.95 \cdot e^{-0.6}}{0.05 \cdot e^{-2} + 0.95 \cdot e^{-0.2}} = 0.665$$

в) Введём гипотезы (попарно несовместны и образуют пространство элементарных событий):

$$\begin{cases} H_1 - \text{телевизор бракованный} \\ H_2 - \text{телевизор небракованный} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(H_1 | \{T > 1\}\right) &= \frac{\mathbf{P}\left(H_1 \cap \{T > 1\}\right)}{\mathbf{P}\{T > 1\}} = \frac{\mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}\left(\{T > 1\} | H_1\right)}{\mathbf{P}\{T > 1\}} = \frac{\mathbf{P}(H_1) \cdot \mathbf{P}\{T_{\text{брак}} > 1\}}{\mathbf{P}\{T > 1\}} = \\ &= \frac{0.05 \cdot e^{-2}}{0.05 \cdot e^{-2} + 0.95 \cdot e^{-0.2}} \approx 0.0086 \end{aligned}$$

Ответ

а) 0.638

б) 0.665

в) 0.0086

Задание 4

Условие

Покажите, что геометрическое распределение обладает свойством отсутствия последействия, т.е.

$$G_X(x+s | X > s) = G_X(x) \quad \text{если } X \sim Geo(p)$$

Решение

$$\begin{aligned} G_X(x+s | X > s) &= \mathbf{P}\left(\{X > x+s\} | \{X > s\}\right) = \frac{\mathbf{P}\left(\{X > x+s\} \cap \{X > s\}\right)}{\mathbf{P}\{X > s\}} = \\ &= \frac{\mathbf{P}\{X > x+s\}}{\mathbf{P}\{X > s\}} = \frac{\sum_{i=x+s}^{\infty} (1-p)^i \cdot p}{\sum_{i=s}^{\infty} (1-p)^i \cdot p} = \frac{(1-p)^{x+s} \cdot 1/p}{(1-p)^s \cdot 1/p} = (1-p)^x \\ G_X(x) &= \mathbf{P}\{X > x\} = \sum_{i=x}^{\infty} (1-p)^i \cdot p = p \cdot (1-p)^x \cdot 1/p = (1-p)^x = G_X(x+s | X > s) \end{aligned}$$

Задание 5

Условие

Число звёзд в случайно взятом пространстве объёма V распределено по закону Пуассона с параметром $\lambda \cdot V$. Найдите закон распределения величины, равной расстоянию от случайно отобранной звезды до соседней к ней.

Решение

Пусть Y – количество звёзд в шаре радиуса x .

$$Y \sim Pois(\lambda \cdot V) \sim Pois\left(\lambda \cdot \frac{4\pi x^3}{3}\right)$$

Пусть X – расстояние от определённой звезды до ближайшей звезды.

$$\begin{aligned} G_X(x) &= \mathbf{P}\{X > x\} = \mathbf{P}\{\text{в шаре радиуса } x \text{ нет ни одной звезды}\} = \mathbf{P}\{Y=0\} = \\ &= \frac{(\lambda \cdot \pi \cdot x^3 \cdot 4/3)^0}{0!} \cdot e^{-\lambda \pi x^3 \cdot 4/3} \end{aligned}$$

Ответ

$$G(x) = \exp\left(\lambda \cdot \frac{4\pi x^3}{3}\right)$$

Задание 6

Условие

Клиенты приходят в столовую неоднородным пуассоновским потоком. В обеденное время (13:00-14:00) интенсивность потока составляет 0.5 посетителей в минуту, а в остальное время - 0.1 посетитель в минуту. Сейчас 13:58.

- а) С какой вероятностью в следующие 7 минут никто не придёт?
- б) Выпишите дополнительную функцию распределения для времени ожидания следующего посетителя.
- в) С какой вероятностью за следующие 7 минут придёт ровно один посетитель?

Решение

а) Пусть:

$$\begin{cases} T_1 \sim \text{Exp}(\lambda_1) \sim \text{Exp}(0.5) & \text{– время ожидания клиента в обеденное время} \\ T_2 \sim \text{Exp}(\lambda_2) \sim \text{Exp}(0.1) & \text{– время ожидания клиента в другое время} \\ T & \text{– время ожидания клиента с 13:58} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}\{T > 7\} = \mathbf{P}\left(\{T_1 > 2\} \cap \{T_2 > 5\}\right) = \mathbf{P}\{T_1 > 2\} \cdot \mathbf{P}\{T_2 > 5\} = e^{-\lambda_1 \cdot 2} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot 5} \approx 0.22$$

б) Для $t \in [0; 2)$:

$$G(t) = \mathbf{P}\{T > t\} = \mathbf{P}\{T_1 > t\} = e^{-\lambda_1 \cdot t}$$

Для $T \in [2; +\infty)$:

$$G(t) = \mathbf{P}\{T > t\} = \mathbf{P}\left(\{T_1 > 2\} \cap \{T_2 > t-2\}\right) = e^{-\lambda_1 \cdot 2} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot (t-2)} = e^{-\lambda_1 \cdot 2 - \lambda_2 \cdot (t-2)}$$

в) Пусть:

$$\begin{cases} X_1 \sim \text{Pois}(\lambda_1 \cdot 2) \sim \text{Pois}(1) & \text{– количество клиентов в промежутке (13:58-14:00)} \\ X_2 \sim \text{Pois}(\lambda_2 \cdot 5) \sim \text{Pois}(0.5) & \text{– количество клиентов в промежутке (14:00-14:05)} \\ X & \text{– количество клиентов в промежутке (13:58-14:05)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(x) &= \mathbf{P}\left(\{X_1=1\} \cap \{X_2=0\}\right) + \mathbf{P}\left(\{X_1=0\} \cap \{X_2=1\}\right) = \\ &= \frac{\lambda_1 \cdot 2}{1!} \cdot e^{-\lambda_1 \cdot 2} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot 5} + e^{-\lambda_1 \cdot 2} \cdot \frac{\lambda_2 \cdot 5}{1!} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot 5} \approx 0.33 \end{aligned}$$

Ответ

а) $e^{-1.5} \approx 0.22$

б)

$$G(t) = \begin{cases} e^{-\lambda_1 \cdot t} & t \in [0; 2) \\ e^{-\lambda_1 \cdot 2 - \lambda_2 \cdot (t-2)} & t \in [2; +\infty) \end{cases}$$

в) $1.5 \cdot e^{-1.5} \approx 0.33$

Задание 7

Условие

Паша, Саша и Маша приобрели Машину Наивысшего Блаженства, которая доставляет пользователю Наивысшее Блаженство за экспоненциально распределённое время со средним 5 мин. Паша, Саша и Маша используют машину по очереди, причём каждый обслуженный пользователь незамедлительно снова встаёт в очередь к Машине. Времена обслуживания независимы.

- а) Саша только что забрался в Машину. С какой вероятностью он (или она) достигнет Наивысшего Блаженства в течение 4 минут?
- б) Прошло уже 5 минут, а Машина всё продолжает обрабатывать Сашу. С какой вероятностью обслуживание завершится в течение следующих 4 минут?
- в) Только что обслуживание Саши завершилось. С какой вероятностью ему удастся снова залезть в Машину в течение следующих 10 минут?

Решение

- а) Пусть T – время обслуживания человека.

$$T \sim \text{Exp}(\lambda) \sim \text{Exp}\left(\frac{1}{E[T]}\right) \sim \text{Exp}(0.2)$$

$$\mathbf{P}\{T < 4\} = 1 - e^{-\lambda \cdot 4} \approx 0.55$$

б)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left(\{T < 9\} | \{T > 5\}\right) &= 1 - \mathbf{P}\left(\{T \geq 9\} | \{T > 5\}\right) = \overset{\text{по свойству об}}{\underset{\text{отсутствии последствия}}{=}} \\ &= 1 - \mathbf{P}\{T \geq 4\} \approx 0.55 \end{aligned}$$

- в) Пусть:

$$\begin{cases} T_{\Pi} \sim \text{Exp}(\lambda) & \text{– время обслуживания Паши} \\ T_{\text{М}} \sim \text{Exp}(\lambda) & \text{– время обслуживания Маши} \\ S & \text{– время ожидания Саши} \end{cases}$$

Времена обслуживания Паши и Маши независимы и экспоненциально распределены с параметром λ . Значит, время ожидания Саши S имеет распределение Эрланга (по определению этого распределения):

$$S = T_{\Pi} + T_{\text{М}} \sim \text{Erlang}(2, \lambda)$$

Тогда:

$$\mathbf{P}\{S < 10\} = F_S(10) = 1 - \sum_{i=0}^{2-1} \frac{(\lambda \cdot 10)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda \cdot 10} = 1 - e^{-\lambda \cdot 10} - \frac{\lambda \cdot 10}{1!} \cdot e^{-\lambda \cdot 10} \approx 0.59$$

Ответ

а) $1 - e^{-0.8} \approx 0.55$

б) $1 - e^{-0.8} \approx 0.55$

в) $1 - 3 \cdot e^{-2} \approx 0.59$