

# ДЗ 1

## по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.09.01

### Задание 1

#### Условие

В столовой посетители обслуживаются на двух кассах, время обслуживания каждого посетителя распределено по закону Эрланга второго порядка и составляет в среднем одну минуту. Покупатели подходят с интенсивностью два человека в минуту, время между покупателями распределено экспоненциально. Очередь к кассам может быть сколь угодно большой. Опишите систему нотацией Кендалла.

#### Решение

Нотация Кендалла имеет вид:

$$A/B/X/Y/Z$$

, где

- $A$  – закон распределения времени между поступлением заявок, то есть  $A=M$  (экспоненциальное);
- $B$  – закон распределения времени обслуживания, то есть  $B=E_2$  (Эрланга второго порядка);
- $X$  – число каналов обслуживания, то есть  $X=2$  (две кассы);
- $Y$  – ёмкость системы (максимальное число заявок в системе одновременно), то есть  $Y=\infty$  (очередь к кассам может быть сколь угодно большой);
- $Z$  – дисциплина обслуживания, то есть  $Z=GD$  (произвольная дисциплина, так как иное не оговорено условием).

#### Ответ

$$M/E_2/2/\infty/GD \sim M/E_2/2$$

### Задание 2

#### Условие

Опираясь на геометрическую интерпретацию, найдите математическое ожидание случайной величины  $X$ , если

- эта величина имеет геометрическое распределение с параметром  $p \in (0; 1)$ , то есть принимает значения  $0, 1, 2, \dots$  с вероятностями  $\mathbf{P}\{X=x\} = (1-p)^x \cdot p$
- эта величина имеет функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - 0.8 \cdot e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$$

## Решение

Дополнительная функция распределения:

$$G_X(x) = \mathbf{P}\{X > x\} = 1 - F_X(x)$$

Тогда для неотрицательных  $X$ :

$$E[X] = \int_0^{+\infty} G_X(x) \cdot dx$$

а)

$$E[X] = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ ((i+1)-i) \cdot \left( 1 - \sum_{j=0}^i p \cdot (1-p)^j \right) \right] = \sum_{i=0}^{\infty} \left[ 1 - p \cdot \frac{1 - (1-p)^{i+1}}{1 - (1-p)} \right] = \sum_{i=0}^{\infty} (1-p)^{i+1} =$$

б)

$$E[X] = \int_0^{+\infty} 0.8 \cdot e^{-x} \cdot dx = -0.8 \cdot e^{-x} \Big|_0^{+\infty} = 0 - (-0.8) = 0.8$$

## Ответ

а)  $E[X] = \frac{1}{p} - 1$

б)  $E[X] = 0.8$

## Задание 3

### Условие

Consider a system with a single server at which customers arrive with interval times distributed uniformly from 0.7 to 1.2 minutes. Each customer needs exactly 1 min to be serviced. If a customer finds the server busy upon arrival, it leaves without being serviced (it is lost). Let  $\mathbf{P}(k)$  denote the probability that  $k$ -th customer is lost. The server is initially unoccupied, so that  $\mathbf{P}(1)=0$ .

Calculate  $\mathbf{P}(k)$  for  $k=2, 3, 4$  and find  $\mathbf{P}(k)$ .

### Решение

Из условия, 1-я заявка точно не будет потеряна. Поскольку каждая заявка обслуживается ровно 1 минуту, 2-я заявка будет потеряна, если придёт через  $[0.7; 1]$  минуту после 1й, то есть:

$$\mathbf{P}(2) = \frac{1-0.7}{1.2-0.7} = 0.6$$

Далее рассмотрим произвольную  $k$ -ю заявку  $\forall k \geq 3$ . Если  $(k-1)$ -я заявка потеряна, то  $k$ -я заявка точно не будет потеряна, так как она придёт минимум через 0.7 минут после  $(k-1)$ -й, а  $(k-1)$ -я заявка пришла минимум через 0.7 минут после  $(k-2)$ -й, то есть  $k$ -я заявка придёт минимум через 1.4 минуты после  $(k-2)$ , в то время как обслуживание любой заявки занимает ровно минуту. Если же  $(k-1)$ -я заявка не потеряна, то вероятность потери  $k$ -й рассчитывается так же, как и для 2й. Таким образом, вероятность потери  $k$ -й заявки равна

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k) &= (1 - \mathbf{P}(k-1)) \cdot \mathbf{P}(2) = -\mathbf{P}(2) \cdot \mathbf{P}(k-1) + \mathbf{P}(2) = (-\mathbf{P}(2))^{k-2} \cdot \mathbf{P}(2) + \\ &+ \mathbf{P}(2) \cdot \frac{1 - (-\mathbf{P}(2))^{k-2}}{1 - (-\mathbf{P}(2))} = -(-\mathbf{P}(2))^{k-1} + \mathbf{P}(2) \cdot \frac{1 - (-\mathbf{P}(2))^{k-2}}{1 + \mathbf{P}(2)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{P}(2)}{1 + \mathbf{P}(2)} \end{aligned}$$

Для 3-й заявки:

$$\mathbf{P}(3) = (1 - 0.6) \cdot 0.6 = 0.24$$

Для 4-й заявки:

$$\mathbf{P}(4) = (1 - 0.24) \cdot 0.6 = 0.456$$

Ответ

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}(2)=0.6 \\ \mathbf{P}(3)=0.24 \\ \mathbf{P}(4)=0.456 \\ \mathbf{P}(k)=\left(1-\mathbf{P}(k-1)\right) \cdot \mathbf{P}(2)=-\left(-\mathbf{P}(2)\right)^{k-1}+\mathbf{P}(2) \cdot \frac{1-\left(-\mathbf{P}(2)\right)^{k-2}}{1+\mathbf{P}(2)} \quad \forall k \geqslant 3 \\ \mathbf{P}(\infty)=\frac{\mathbf{P}(2)}{1+\mathbf{P}(2)}=0.375 \end{array} \right.$$