Домашнее задание 1
по майнору "Прикладная экономика"

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ196

к 17.10.2020.

Задача 1

a) В общем виде уравнение бюджетной линии имеет вид $p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = m$, где x_1 и x_2 - количества единиц товаров 1 и 2 соответственно; p_1 и p_2 - цены за единицу товаров 1 и 2 соответственно; m - денежный доход потребителя. Тогда, в данном случае уравнение бюджетной линии будет иметь вид $\$10 \cdot x_1 + \$5 \cdot x_2 = \$40$.

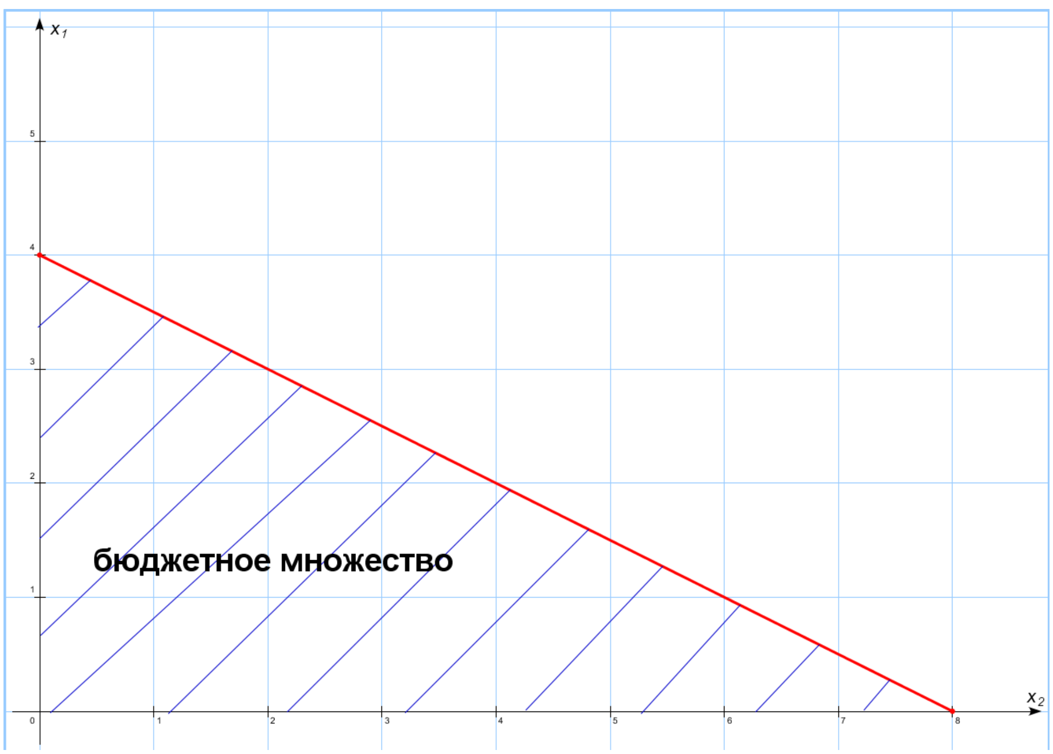

Рис. 1.1: уравнение бюджетной линии без налогов и купонов

б) При делении бюджетного множества на любое ненулевое число уравнение линии этого бюджетного множества не изменится, так как это эквивалентно деноминации - и цены на товары и услуги, и доход людей изменился в одно и то же количество раз, как будто изменился номинал денежных единиц.

в) Рассмотрим изменения бюджетных множеств.

(i) За первые 2-е единицы товара 1 налог не взимается, поэтому уравнение бюджетной линии будет иметь исходный вид ($x_1 \leqslant 2$): $\$10 \cdot x_1 + \$5 \cdot x_2 = \$40$. За последующие единицы товара 1 взимается налог в размере 50% от цены, то есть стоимостной налог. В таком случае, уравнение бюджетной линии имеет вид ($x_1 > 2$) $\$10 \cdot (1 + \frac{50\%}{100\%}) \cdot (x_1 - 2) + \$5 \cdot x_2 = \$40 - 2 \cdot \$10 \Leftrightarrow \$3 \cdot x_1 + \$1 \cdot x_2 = \$10$.

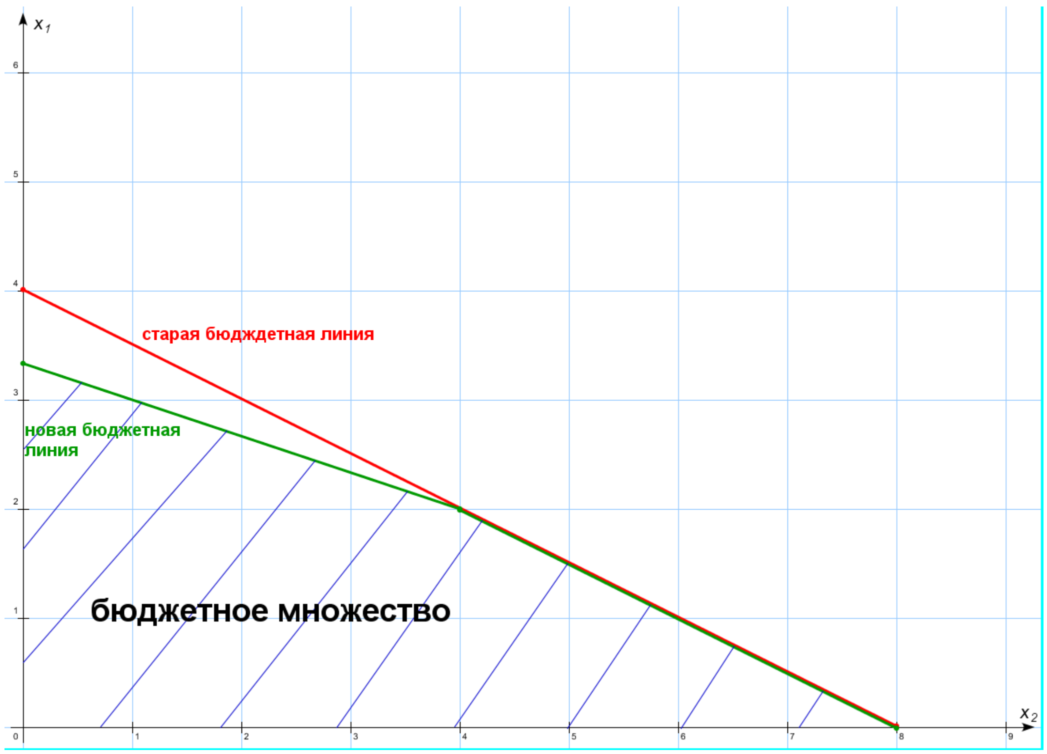

Рис. 1.2: уравнение бюджетной линии со стоимостным налогом на товар 1 при покупке больше 2-х единиц

(ii) Потребитель получает купон на 6 беслпатных единиц товара 2, то есть субсидию в натуральной форме на товар 2. Это эквивалентно тому, что если б потребитель купил 6 или больше единиц товара 2, 6 из них достались бы ему бесплатно, то есть $\forall x_2 \geqslant 6$ уравнение бюджетной линии имело бы вид $\$10 \cdot x_1 + \$5 \cdot (x_2 - 6) = \$40 \Leftrightarrow \$2 \cdot x_1 + \$1 \cdot x_2 = \$14$. Если же суммарное количество единиц товара 2 меньше 6, то все единицы товара 2 достались потребителю бесплатно и на свой денежный доход потребитель мог бы купить не больше, чем $\frac{m}{p_1}$ единиц товара 1, то есть уравнение бюджетной линии имеет вид $\$10 \cdot x_1 = \$40$.

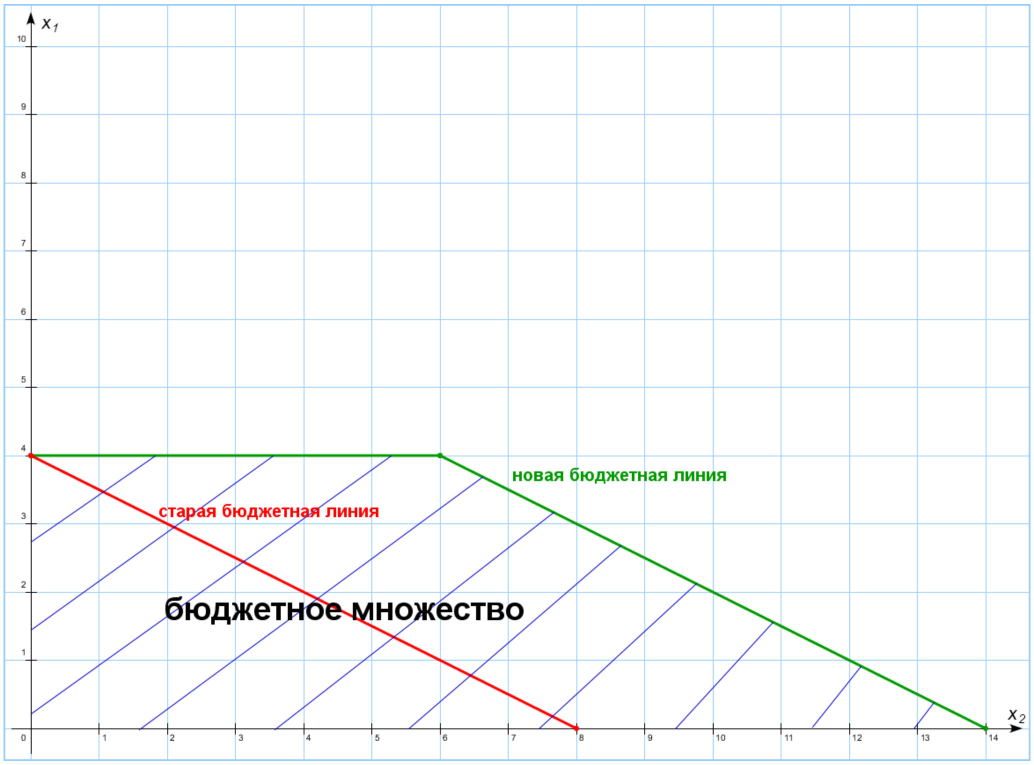

Рис. 1.3: уравнение бюджетной линии с субсидией в натуральной форме на 6 единиц товара 2

Задача 2

а) Так как $U(x_1, x_2)$ - функция полезности, любая функция $W(x_1, x_2) = f(U(x_1, x_2))$, где $f(x)$ - монотонно возрастающая функция, будет отражать те же предпочтения, что и $U(x_1, x_2)$.

Возьмём $f(x) = e^x$. В таком случае, $W(x_1, x_2) = e^{U(x_1,x_2)} = e^{ln(x_1-10)-2\cdot ln(10-x_2)} = \frac{e^{ln(x_1-10)}}{e^{2\cdot ln(10-x_2)}} = \frac{x_1-10}{(10-x_2)^2}$. До преобразования, кривые безразличия имели вид $U(x_1, x_2) = c_1$, то есть после преобразования они стали иметь вид $W(x_1, x_2) = f(c_1) = e^{c_1} \Leftrightarrow x_1 = e^{c_1} \cdot {x_2}^2 - 20 \cdot e^{c_1} \cdot x_2 + 100 \cdot e^{c_1} + 10$ - параболы с ветвями вверх (так как $e^{c_1} > 0 \quad \forall c_1$). Причём X-координата вершины равна $x_\text{в} = \frac{-(-20\cdot e^{c_1})}{2\cdot e^{c_1}} = 10$, а Y-координата вершины равна $e^{c_1} \cdot 100 - 20 \cdot e^{c_1} \cdot 10 + 100 \cdot e^{c_1} + 10 = 10$. Таким образом, кривые безразличия - участки парабол вида $x_1 = e^{c_1} \cdot {x_2}^2 - 20 \cdot e^{c_1} \cdot x_2 + 100 \cdot e^{c_1} + 10, \qquad \forall(x_1 > 10) \quad \forall(0 \leqslant x_2 < 10)$.

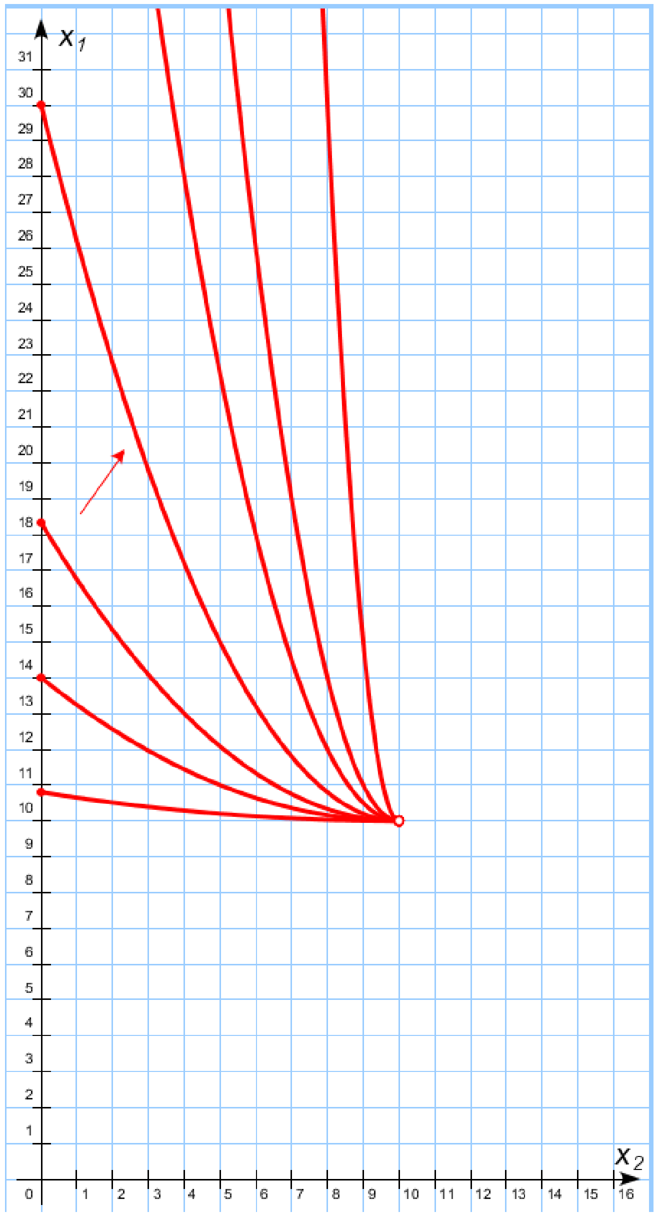

Рис. 2.1: карта кривых безразличия Юрия

б) Для нахождения функции спроса решим задачу макимизации полезности: $\max\limits_{s.t.\ p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 = m} ln(x_1 - 10) - 2 \cdot ln(10 - x_2)$. Так как дано m и сказано, что p_1 и p_2 подобраны так, что максимизированная полезность находится в диапазоне $x_1 > 10,\ x_2 < 10$, то бюджетная линия будет касаться одной из кривых безразлия из пункта а. Решим задачу аналитически.

Из бюджетного ограничения получаем $x_1 = \frac{m-p_2 \cdot x_2}{p_1}$, то есть задача сводится к $\max\limits_{0 \leqslant x_2 < 10} ln(\frac{m-p_2 \cdot x_2 - 10 \cdot p_1}{p_1}) - 2 \cdot ln(10 - x_2)$. Возьмём первую производную: $\left[ln(\frac{m-p_2 \cdot x_2 - 10 \cdot p_1}{p_1}) - 2 \cdot ln(10 - x_2)\right]'_{x_2} = \frac{p_1}{m-p_2 \cdot x_2 - 10 \cdot p_1} \cdot (\frac{-p_2}{p_1}) - 2 \cdot \frac{1}{10-x_2} \cdot (-1) = \frac{p_2}{p_2 \cdot x_2 + 10 \cdot p_1 - m} + \frac{2}{10-x_2} = \frac{10 \cdot p_2 - p_2 \cdot x_2 + 2 \cdot p_2 \cdot x_2 + 20 \cdot p_1 - 2 \cdot m}{(p_2 \cdot x_2 + 10 \cdot p_1 - m) \cdot (10 - x_2)}^{\backslash : p_2} = -\frac{(x_2 + 2 \cdot \frac{10 \cdot p_1 - m}{p_2} + 10)}{(x_2 + \frac{10 \cdot p_1 - m}{p_2}) \cdot (x_2 - 10)}$. При максимизации функции полезности первая производная должна быть равна 0, то есть $x_2^0 = 2 \cdot \frac{m - 10 \cdot p_1}{p_2} - 10$.

Поскольку, во-первых, кривые безразличия - участки парабол (из пункта а) с вершиной в точке $(10;10)$ и ветвями вверх, а, во-вторых, p_1 и p_2 из условия подобраны так, что максимизация происходит при $x_1 > 10$ и $x_2 < 10$, то касание происходит либо в нужном нам дипазоне, то есть $0 \leqslant x_2 < 10$, либо при $x_2 < 0$. На рисунке 2.2 продемонстрированно, как это возможно.

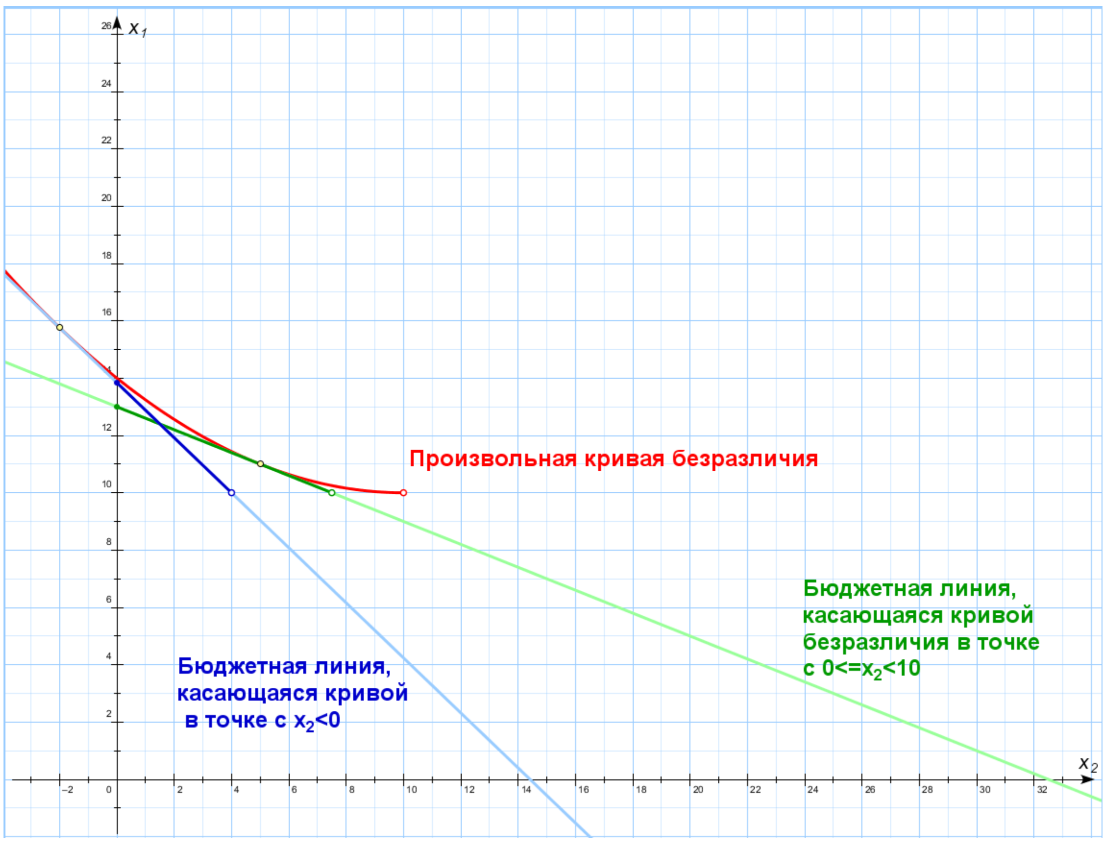

Рис. 2.2: возможные вариации касания бюджетных линий произвольной кривой безразличия

Таким образом, функции спроса имеют вид:

$$\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x_1^*(p_1,p_2,m)=\dfrac{10\cdot p_2-m}{p_1}+20\\ x_2^*(p_1,p_2,m)=2\cdot\dfrac{m-10\cdot p_1}{p_2}-10\end{cases} & \text{при } x_2^0\geqslant 0\\ \begin{cases}x_1^*(p_1,p_2,m)=\dfrac{m}{p_1}\\ x_2^*(p_1,p_2,m)=0\end{cases} & \text{при } x_2^0<0\end{array}\right.$$

в) В пункте б были найдены функции спроса. При этом, количество спагетти должно быть больше 10, а количество салата - меньше 10.

$$\begin{cases}\dfrac{10\cdot p_2-m}{p_1}+20>10\\ 2\cdot\dfrac{m-10\cdot p_1}{p_2}-10<10\\ 2\cdot\dfrac{m-10\cdot p_1}{p_2}-10\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<10\cdot p_1+10\cdot p_2\\ m<10\cdot p_1+10\cdot p_2\\ m\geqslant 10\cdot p_1+5\cdot p_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<10\cdot p_1+10\cdot p_2\\ m\geqslant 10\cdot p_1+5\cdot p_2\end{cases}$$

В таком случае, выражение для точечной эластичности спроса на салата по доходу имеет вид $\varepsilon_M^{D_{\text{салат}}}=(x_2^*)'_m\cdot\frac{m}{x_2^*}=\frac{2}{p_2}\cdot m\cdot\frac{p_2}{2\cdot m-20\cdot p_1-10\cdot p_2}=\frac{2\cdot m}{2\cdot m-20\cdot p_1-10\cdot p_2}=\frac{m}{m-10\cdot p_1-5\cdot p_2}$. Получается, и числитель, и знаменатель больше 0 (знаменатель равен 0 - предельный случай), при этом знаменатель всегда меньше числителя. Значит, значение спроса на салат по доходу всегда больше 1, то есть салат - товар роскоши.

Выражение для точечной эластичности спроса на спагетти по доходу имеет вид $\varepsilon_M^{D_{\text{спагетти}}}=(x_1^*)'_m\cdot\frac{m}{x_1^*}=(-\frac{1}{p_1})\cdot m\cdot\frac{p_1}{10\cdot p_2+20\cdot p_1-m}=\frac{m}{m-20\cdot p_1-10\cdot p_2}$. Получается, числитель всегда больше 0, а знаменатель всегда меньше 0 ($m-20\cdot p_1-10\cdot p_2<m-10\cdot p_1-10\cdot p_2<0$). Значит, значение спроса на спагетти по доходу всегда меньше 0, то есть спагетти - инфериорное благо.

Задача 3

а) Если инвестор решит не вкладываться в рисковый проект, то ожидаемая полезность составит $\mathbb{E}U_{\text{не вложится}}=1\cdot v(5)=ln(6)$. Если же инвестор решит вложиться в рисковый проект, то ожидаемая полезность составит $\mathbb{E}U_{\text{вложится}}=\frac{2}{3}\cdot v(5+3)+\frac{1}{3}\cdot v(5+\alpha)=\frac{2\cdot ln(9)+ln(6+\alpha)}{3}$.

Для того, чтобы инвестор принял не решение не вкладываться в проект, необходимо и достаточно, чтобы ожидаемая полезность от вложения была строго меньше ожидаемой полезности без вложения (если ожидаемые полезности равны, то инвестор может как вложиться, так и нет - невозможно гарантированно определить), т.е. $\mathbb{E}U_{\text{вложится}}<\mathbb{E}U_{\text{не вложится}}\Leftrightarrow\frac{2\cdot ln(9)+ln(6+\alpha)}{3}<ln(6)\Leftrightarrow ln(81\cdot(6+\alpha))<ln(216)\Leftrightarrow\alpha<\frac{8}{3}-6\Leftrightarrow\alpha<-3\frac{1}{3}$.

Таким образом, индивид не станет инвестировать в данный проект при $\alpha\in[-5;-3\frac{1}{3})$.

б) Предположим, что данный инвестор решил разделить риски с n соинвесторами. Поскольку, во-первых, в условии сказано, что соинвесторы делят с данным инвестором прибыли и убытки, но не сказано, что они делят поровну первоначальные вложения, а, во-вторых, неизвестно, какова будет прибыль от проекта, если вложить сумму, отличную от \$5, будем считать, что соинвесторы не принимают участие во вложении в проект, и в итоге делят с данным инвестором только чистую прибыль (чистые расходы). Тогда, ожидаемая полезность от проекта составит $\mathbb{E}U_{\text{вложится}} = \frac{2}{3} \cdot v(5 + \frac{3}{n+1}) + \frac{1}{3} \cdot v(5 + \frac{\alpha}{n+1}) = \frac{2}{3} \cdot ln(6 + \frac{3}{n+1}) + \frac{1}{3} \cdot ln(6 - \frac{4}{n+1})$.

Во-первых, выпишем ОДЗ:

$$\begin{cases} 6 + \dfrac{3}{n+1} > 0 \\ 6 - \dfrac{4}{n+1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in (-\infty; -\dfrac{3}{2}) \cup (-1; +\infty) \\ n \in (-\infty; -1) \cup (-\dfrac{1}{3}; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow n \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{1}{3}; +\infty)$$

При этом, при стремлении слева к $-\frac{3}{2}$, как и при стремлении справа к $-\frac{1}{3}$, значение внутри одного из логарифмов стремится к 0, то есть значение функции стремится к $-\infty$.

Во-вторых, возьмём первую производную: $(\mathbb{E}U_{\text{вложится}})'_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{n+1}{6 \cdot n+9} \cdot \frac{(-3)}{(n+1)^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{n+1}{6 \cdot n+2} \cdot \frac{4}{(n+1)^2} = \frac{1}{3 \cdot (n+1)} \cdot (\frac{4}{6 \cdot n+2} - \frac{6}{6 \cdot n+9}) = \frac{24 \cdot n+36-36 \cdot n-12}{3 \cdot (n+1) \cdot (6 \cdot n+2) \cdot (6 \cdot n+9)} = \frac{-4 \cdot n+8}{6 \cdot 6 \cdot (n+1) \cdot (n+\frac{1}{3}) \cdot (n+\frac{3}{2})} = (-\frac{1}{9}) \cdot \frac{n-2}{(n+1) \cdot (n+\frac{1}{3}) \cdot (n+\frac{3}{2})} \vee 0$.

- При $n \in (-\infty; -\frac{3}{2})$ значение первой производной отрицательное $\left((-) \cdot \frac{(-)}{(-) \cdot (-) \cdot (-)}\right)$, то есть полезность убывает. Как было сказано ранее, она стремится к $-\infty$.
- При $n \in [-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}]$ значение полезности неопределено.
- При $n \in (-\frac{1}{3}; 2)$ значение первой производной положительное $\left((-) \cdot \frac{(-)}{(+) \cdot (+) \cdot (+)}\right)$, то есть полезность возрастает (от $-\infty$).
- При $n \in (2; +\infty)$ значение первой производной отрицательное $\left((-) \cdot \frac{(+)}{(+) \cdot (+) \cdot (+)}\right)$, то есть значение полезности убывает.

Таким образом, если при $n = 2$ полезность конечна, то эта точка будет являться локальным максимумом, а для положительных чисел - наивысшей точкой. Подставим: $\mathbb{E}U_{\text{вложит}}(2) = \frac{2}{3} \cdot ln(6 + \frac{3}{2+1}) + ln(6 - \frac{4}{2+1}) \approx 1,81$. Стоит заметить, что вместе с 2-мя соинвесторами данный индивид вложился бы в проект, так как ожидаемая полезность от вложения в проект с 2мя соинвесторами выше, чем ожидаемая полезность от бездействия, которая в свою очередь равна $1 \cdot v(5) = ln(6) \approx 1,79$.

Таким образом, оптимальное количество соинвесторов при $\alpha = -4$ для данного индивида равно 2.