Семинар 3
по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.10.19

Задание 1

Условие

Пусть X - число событий за время $[0;1]$ в пуассоновском потоке с интенсивностью λ, а Y – число событий в том же потоке за время $[0;10]$. Найдите $Cov(X;Y)$ и $Corr(X,Y)$.

Решение

Так как X и Y находятся в одном потоке, а интервалы времени равны 1 и 10 соответственно, то величины имеют распределения:

$$\begin{cases} X \sim Pois(\lambda) \\ Y \sim Pois(10 \cdot \lambda) \end{cases}$$

Пусть Z – число событий за время $[1;10]$ в том же потоке. Тогда:

$$Y = X + Z$$

, причём X и Z независимы в силу предпосылки об отсутствии последействия. Значит:

$$Cov(X;Y) = Cov(X;X+Z) = Cov(X;X) + Cov(X;Z) = D[X] + 0 = \lambda$$

$$Corr(X;Y) = \frac{Cov(X;Y)}{\sqrt{D[X] \cdot D[Y]}} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda \cdot 10\lambda}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Ответ

$$Cov(X;Y) = \lambda$$

$$Corr(X;Y) = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Задание 2

Условие

Пусть $X \sim Pois(0.8)$.

а) Найдите $\mathbf{P}\{X \geqslant 1\}$.

б) Что больше – $\mathbf{P}\{\text{чётные } X\}$ или $\mathbf{P}\{\text{нечётные } X\}$?

Решение

а)

$$\mathbf{P}\big\{X \geqslant 1\big\} \;=\; 1-\mathbf{P}\big\{X=0\big\} \;=\; 1-\frac{0.8^0}{0!}\cdot e^{-0.8} \;=\; 1-e^{-0.8}$$

б)

Ответ

а) $\mathbf{P}\big\{X \geqslant 1\big\} \;=\; 1-e^{-0.8}$

б)

Задание 3

Условие

Запросы поступают пуассоновским потоком с интенсивностью 3 в секунду. Обработка каждого запроса занимает ровно секунду.

а) Какова вероятность, что к моменту $t=2$ ни один запрос не будет обработан?

б) За время $[0;2]$ поступило 5 запросов. Какова вероятность, что не один из них не будет обработан?

Решение

а) Вероятность того, что за t минут ни один запрос не будет обработан, равна вероятности того, что ни один запрос не поступит за $(t-1)$ минут.

$$X \;\sim\; Pois(\lambda\cdot t)$$

$$\mathbf{P}\big\{X=0\big\} \;=\; e^{-\lambda\cdot t} \;=\; e^{-3}$$

б) Вероятность того, что ни один из n запросов, поступивших в систему в течение t минут, не будет обработан, равна вероятности того, что за $(t-1)$ минут в систему не поступил ни один запрос, при условии, что за t минут в систему поступило 5 запросов.

$$\begin{cases} X \;\sim\; Pois\big(\lambda\cdot(t-1)\big) & \text{– количество запросов в системе в промежутке [0;t-1]} \\ Y \;\sim\; Pois\big(\lambda\cdot t\big) & \text{– количество запросов в системе в промежутке [0;t]} \\ Z \;\sim\; Pois\big(\lambda\big) & \text{– количество запросов в системе в промежутке [t-1;t]} \end{cases}$$

$$\mathbf{P}\Big(\big\{X=0\big\}\big|\big\{Y=n\big\}\Big) \;=\; \frac{\mathbf{P}\Big(\big\{X=0\big\}\cap\big\{Y=n\big\}\Big)}{\mathbf{P}\big\{Y=n\big\}} \;=\; \begin{matrix}\text{по предпосылке об}\\ \text{отсутствии последействия}\end{matrix} \;=$$

$$=\; \frac{\mathbf{P}\big\{X=0\big\}\cdot\mathbf{P}\big\{Z=n\big\}}{\mathbf{P}\big\{Y=n\big\}} \;=\; \frac{e^{-\lambda\cdot(t-1)}\,\cdot\,{\lambda^n}/{n!}\,\cdot e^{-\lambda}}{{(\lambda\cdot t)^n}/{n!}\,\cdot e^{-\lambda\cdot t}} \;=\; \frac{1}{t^n} \;=\; \frac{1}{2^5}$$

Ответ

а) $e^{-\lambda\cdot t}=e^{-3}$

б) $\dfrac{1}{t^n}=\dfrac{1}{2^5}$

Задание 4

Условие

В некоторой местности число детей в семье распределено по закону Пуассона. Найдите среднее число детей в семье, если доля бездетных семей составляет 20%.

Решение

Пусть X – число детей в семье:

$$X \sim Pois(\lambda)$$

Доля бездетных составляет 20%, то есть если из всех семей случайно выбрать одну, то вероятность, что она будет бездетная, будет равна 0.2:

$$\mathbf{P}\{X=0\} = 0.2$$

$$e^{-\lambda} = 0.2$$

$$\lambda = -ln(0.2)$$

Среднее число детей в семье равно:

$$E[X] = \lambda = -ln(0.2)$$

Ответ

$-ln(0.2)$

Задание 5

Условие

Рассмотрим когорту новорождённых, которые со временем взрослеют и умирают. Пусть $S(t)$ – доля доживших до возраста t, $S(0)=1$. Функция $\lambda(t) = -\frac{dS/dt}{S(t)}$ называется силой (или интенсивностью) смертности. Бенджамин Гомперц предположил, что она экспоненциально растёт:

$$\lambda(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$$

Выведите функцию должития $S(t)$, соответствующую указанной силе смертности $\lambda(t)$.

Решение

$$-\frac{dS/dt}{S(t)} = a \cdot e^{b \cdot t}$$

$$-\frac{dS}{S(t)} = a \cdot e^{b \cdot t} \cdot dt$$

$$\int -\frac{dS}{S(t)} = \int a \cdot e^{b \cdot t} \cdot dt + C$$

$$-ln\,|S(t)| = \frac{a}{b} \cdot e^{b \cdot t} + C$$

$$S(t) = |S(t)| = exp\left(-{}^{a}/_{b} \cdot e^{b \cdot t} + C\right) \quad \text{– общее решение}$$

Из начальных условий:

$$1 = S(0) = exp\left(-{}^{a}/_{b} \cdot e^{b \cdot 0} + C\right)$$

$$0 = -{}^{a}/_{b} + C$$

$$C = {}^{a}/_{b}$$

Частное решение:

$$S(t) = exp\left((1-e^{b \cdot t}) \cdot {}^{a}/_{b}\right)$$

Ответ

$$S(t) = exp\left((1-e^{b \cdot t}) \cdot {}^{a}/_{b}\right)$$

Задание 6

Условие

Решите дифференциальное уравнение:

$$x \cdot \frac{dy}{dx} - 2 \cdot y \;=\; 2 \cdot x^4$$

Решение

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\left(-\frac{2}{x}\right)}_{a(x)} \cdot y \;=\; \underbrace{2 \cdot x^3}_{f(x)}$$

Интегрирующий множитель:

$$u(x) \;=\; e^{\int a(x) \cdot dx} \;=\; e^{\int \left(-\frac{2}{x}\right) \cdot dx} \;=\; e^{-2 \cdot ln|x|} \;=\; \frac{1}{x^2}$$

Тогда:

$$y \;=\; \frac{\int f(x) \cdot u(x) \cdot dx \;+\; C}{u(x)} \;=\; \frac{\int 2 \cdot x^3 \cdot ({}^1/_{x^2}) \cdot dx \;+\; C}{({}^1/_{x^2})} \;=\; \frac{\int 2 \cdot x \cdot dx \;+\; C}{({}^1/_{x^2})} \;=\; x^2 \cdot \left(x^2 + C\right)$$

Ответ

$$y \;=\; x^2 \left(x^2 + C\right)$$

Задание 7

Условие

Решите дифференциальное уравнение:

$$\frac{dy}{dt} \;=\; \frac{y^2}{3t}$$

Найдите стационарное решение. Сходятся ли нестационарные решения к стационарному?

Решение

Обособленное решение:

$$y(t) \;=\; 0$$

Отбросим это решение:

$$\frac{dy}{y^2} \;=\; \frac{dt}{3t}$$

$$\int \frac{dy}{y^2} \;=\; \int \frac{dt}{3t} \;+\; C$$

$$-\frac{1}{y} \;=\; \frac{ln|t|}{3} \;+\; C$$

$$y \;=\; -\frac{1}{{}^{ln|t|}/_3 \;+\; C} \quad \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \quad 0$$

Ответ

Стационарное решение:

$$y(t) = 0$$

Решение в общем виде (сходится к стационарному):

$$y(t) = -\frac{1}{{}^{ln|t|}/_{3} + C}$$