Лекция 3

Простейший поток событий

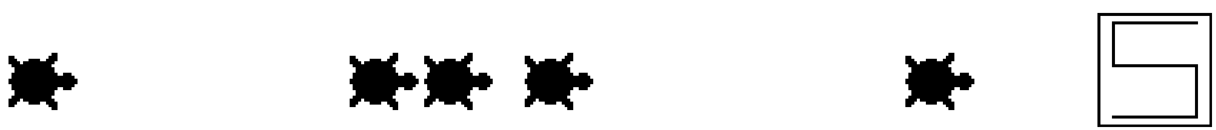
Как поступают заявки?

Типичные вопросы:

- Когда придёт следующая заявка?
- Сколько заявок поступит за определённое время?

И так и так имеем дело со случайной величиной.
Значит, ответы на эти вопросы – либо некая характеристика распределения (среднее), либо весь закон распределения этих величин.

В любом случае, надо придумать какую-то модель поступления заявок.



отряд черепашек, поступающих в СМО в случайные моменты

Напоминалка

Что-то такое было в теории вероятностей…

Припомните задачи в духе:

Подбрасываем кость 10 раз.
С какой вероятностью шестёрка выпадет ровно два раза?
Каково математическое ожидание числа выпавших шестёрок?
Сколько в среднем нужно бросать кость, чтобы выпала шестёрка?

Нужно только заменить броски на время, а выпадение шестёрки – на поступление заявки.

Заявки поступают по схеме Бернулли

Пусть нам известна интенсивность входящего потока заявок λ – среднее число заявок, поступающих за единицу времени.

Для удобства будем считать, что $0<\lambda<1$.   *(Это только для начала)*

Начнём с такой модели:

Заявка поступает за время [0; 1] с вероятностью <u>*p* = λ</u>.

Нет заявок с вероятность. 1 – *p*.

>1 заявки с вероятностью 0.

Только ради этого была оговорка, что λ<1. На практике λ может быть любым положительным числом.

Если *X* – число поступивших заявок, то

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix};$$

$$E(X) = p;$$
$$D(X) = p(1-p).$$

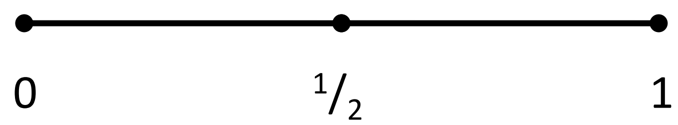
Отлично.

А что если за время [0; 1] захотят поступить *две* заявки?

Заявки поступают по схеме Бернулли

Что если *две* заявки могут поступить за время [0; 1]?

Не беда. Разобьём отрезок [0; 1] на два:



Чтобы среднее число заявок за единицу времени не поменялось

Теперь в каждой половинке:

одна заявка поступает с вероятностью $\underline{p = \lambda/2}$;
ни одной не поступает с вероятностью $1 - p$.
>1 заявки с вероятностью 0.

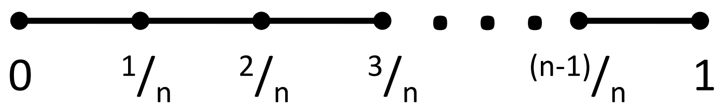
Поступление заявок в подпериодах (половинках) независимы.

Можем и на три части поделить.

Даже на четыре.

Заявки поступают по схеме Бернулли

Пусть n – число периодов, на которое мы разбиваем единицу времени:



На каждом отрезочке вероятность поступления $p = \frac{\lambda}{n}$. Поступления независимы.

Тогда число заявок $X \sim Bin\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}, \qquad k = 1, \dots, n$$

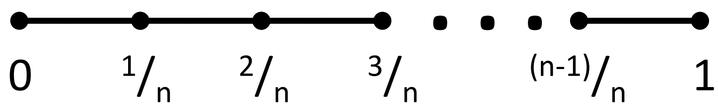
$$E(X) = np = \lambda$$

$$D(X) = np(1 - p)$$

А каково распределение времени между заявками?

Заявки поступают по схеме Бернулли

Пусть n – число периодов, на которое мы разбиваем единицу времени:



На каждом отрезочке вероятность поступления $p = \frac{\lambda}{n}$. Поступления независимы.

Тогда число заявок $X \sim Bin\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$.

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 1, \dots, n$$

$$E(X) = np = \lambda$$

$$D(X) = np(1-p)$$

Допустим. А как выбрать n?

Заявки поступают по схеме Бернулли

Посмотрим, что будет если увеличивать *n* (дробить время всё мельче).

Итак,

$$n \to \infty$$
$$p = \frac{\lambda}{n} \to 0$$

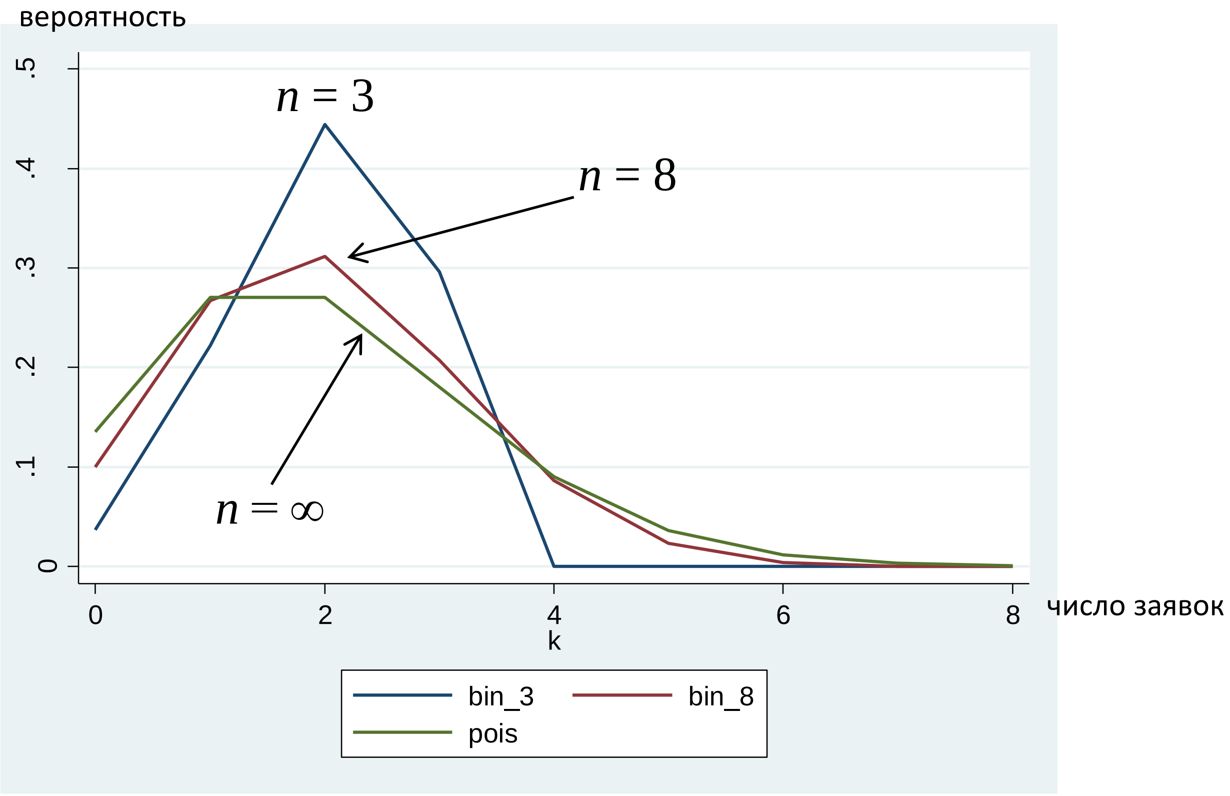
$$E(X) = np = \lambda$$
$$D(X) = np(1-p) = \lambda\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \to \lambda$$

$$\lim_{n\to\infty} P(X=k) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ p=\lambda/n}} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \lim_{n\to\infty} C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Припомните-ка, откуда
такое взялось

Заявки поступают по схеме Бернулли: пример

Допустим, за минуту в среднем поступают $\lambda = 2$ заявки.
Вот распределение числа заявок за минуту при разных n:



Можно поворчать, что точки соединять не стоило…

Я пробовал без линий, получается не лучше.

Пуассоновский поток

Итог: можно не выбирать число периодов. Пусть оно будет бесконечным.
Этот предельный случай схемы Бернулли называют *простейшим* (или *однородным пуассоновским*) *потоком событий*.

В этом случае число заявок, поступающих за время [0; 1] имеет распределение Пуассона:

$X \sim Pois(\lambda)$

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Некоторые свойства:

1. $X \sim Pois(\lambda)$ => $E(X) = D(X) = \lambda$.

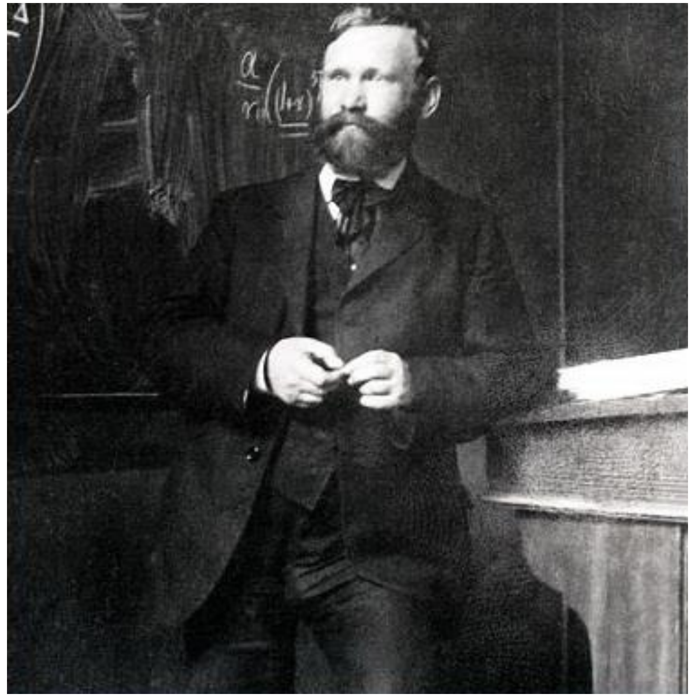
2. Если $X \sim Pois(\lambda_X)$ и $Y \sim Pois(\lambda_Y)$ независимы, то

$$(X + Y) \sim Pois(\lambda_X + \lambda_Y) .$$

Симеон Дени Пуассон

Он был талантлив, но пуассоновский поток изобрёл не он…

Вот кто изобрёл пуассоновский поток



Точнее, он был одним из многих, кто пришёл к этой модели независимо от других.

А.К. Эрланг придумал пуассоновский поток как модель поступления телефонных звонков в 1909.

Он не был знаком с распределением Пуассона.

Вернёмся к теме.

Пуассоновский поток: произвольный период времени

Мы поняли, что происходит за время [0; 1].

А в другом промежутке?

Ясно, что период [1; 2] ничем не отличается. А вот так: [0; 3.5]?

Рассмотрим промежуток длиной t (например, $[0; t]$).

Заметьте: среднее число заявок за время $[0; t]$ равно λt.

Почему?! Требует пояснения!

Мы можем повторить все те же рассуждения, но для периода $[0; t]$ со средним числом заявок λt. Получится вот что:

Пусть X – число заявок, поступающих пуассоновским потоком за t единиц времени. Тогда

$$X \sim Pois(\lambda t).$$

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

К слову

Интенсивность потока заявок λ – единственный параметр нашей модели. Все простейшие потоки отличаются только значением λ!

Пуассоновский поток широко применяется и за пределами ТМО. Везде, где нужно моделировать наступление событий во времени. Поэтому его называет пуассоновским потоком событий.

λ – интенсивность потока событий.

Смысл: λ – среднее число событий (заявок) за единицу времени.

А какие ещё бывают приложения?

Физика: подсчёт редких частиц, наблюдаемых в эксперименте.

Экономика: технологические сдвиги (появление новых технологий),
поступление предложений о работе ищущему работу индивиду.

Не знаю что: автомобили, проезжающие по незагруженному участку дороги.

о малое

Теперь мы посмотрим на пуассоновский поток с другой стороны.

Сначала придётся вспомнить матан.

Припомните, что это означает такая запись:

$$y(x) = x + o(x)$$

о малое

Теперь мы посмотрим на пуассоновский поток с другой стороны.

Сначала придётся вспомнить матан.

Припомните, что это означает такая запись:

$$y(x) = x + o(x)$$

$o(x)$ – это обозначение для любой функции, такой что $\lim\limits_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$.

$$\left.\begin{aligned} y(x) &= x + x^2 \\ y(x) &= x + x^5 \cos(x) \end{aligned}\right\} \quad \text{и тут и там } y(x) = x + o(x)$$

Когда x бесконечно мал, $o(x)$ – это что-то ещё меньше.

Свойства (однородного) пуассоновского потока

Нужно: получить выражение для вероятности наступления k событий за время $[T; T+t]$.
Выдвинем предпосылки:

- *Однородность.* Вероятность k событий за время $[T; T+t]$ не зависит от T для любого k.
  (она такая же, как и для промежутка $[0; t]$)

- *Отсутствие последействия*. Вероятность k событий за время $[T; T+t]$ не зависит от времени наступления предыдущих событий (до момента T).

- *Ординарность*. Вероятность более одного события за время $[T; T+t]$ равна $o(t)$. Можно сказать, она пренебрежимо мала.

Также предположим (но это не обязательно), что вероятность ровно одного события на временном промежутке примерно пропорциональна длине этого промежутка с коэффициентом пропорциональности λ :

$$P(1 \text{ событие за время } [T; T+t]) = \lambda t + o(t).$$

Следовательно,

$$P(0 \text{ событий за время } [T; T+t]) = 1 - \lambda t + o(t).$$

Заметьте: здесь $[1 - \lambda t + o(t)] + [\lambda t + o(t)] + o(t) = 1$.

Пуассоновский поток: вывод с помощью дифференциальных уравнений

Обозначим $P_k(t)$ вероятность ровно k событий за время $[T; T + t]$
(для удобства будем рассматривать промежуток $[0; t]$).

Выведем $P_0(t)$.

Возьмём интервал $[0; t + \Delta]$, Δ>0 и разобьём его на два: $[0; t]$ и $[t; t + \Delta]$.

Найдём $P_0(t + \Delta)$ из уравнения:

$$P_0(t + \Delta) = P(0 \text{ событий за } [t; t + \Delta]) \times P(0 \text{ событий за } [0; t]) =$$

$$= \big(1 - \lambda\Delta + o(\Delta)\big)P_0\,(t) = P_0(t) - \lambda\Delta P_0(t) + o(\Delta).$$

$o(\Delta)P_0(t)$

Перегруппируем:

$$P_0(t + \Delta) - P_0(t) = -\lambda\Delta P_0(t) + o(\Delta).$$

Поделим на Δ :

$$\frac{P_0(t + \Delta) - P_0(t)}{\Delta} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta}.$$

Что будет на следующем шаге?

Пуассоновский поток: вывод с помощью дифференциальных уравнений

$$\frac{P_0(t+\Delta) - P_0(t)}{\Delta} = -\lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta}.$$

Берём предел, чтобы левая часть превратилась в производную:

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{P_0(t+\Delta) - P_0(t)}{\Delta} = -\lambda P_0(t)$$

Или так:

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

Вероятность 0 событий

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$$

Делим на $P_0(t)$:

$$\frac{1}{P_0(t)} \cdot \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda.$$

Разделяем:

$$\frac{1}{P_0(t)}\, dP_0(t) = -\lambda dt.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{1}{P_0(t)}\, dP_0(t) = -\int \lambda dt + C.$$

$$\ln|P_0(t)| = -\lambda t + C.$$

(модуль лишний)

Потенцируем:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t + C}.$$

(общее решение)

Вероятность 0 событий

Общее решение:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t + C}.$$

На интервале нулевой длины почти наверное ни одного события не наступит.
Это будет наше начальное условие:

$$P_0(0) = 1.$$

$$e^{-\lambda \cdot 0 + C} = e^{C} = 1 \Rightarrow C = 0.$$

Частное решение:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}.$$

До цели ещё далеко, но это уже победа.

We did it!

Вероятность 1 события

Вернёмся к интервалу $[0; t + \Delta]$, разбитому на $[0; t]$ и $[t; t + \Delta]$.

Два пути наступления ровно одного события:

1) Ни одного события за $[0; t]$ и одно за $[t; t + \Delta]$.
2) Одно событие за $[0; t]$ и ни одного за $[t; t + \Delta]$.

Значит,

$P_1(t + \Delta)$ удовлетворяет уравнению:

$$P_1(t + \Delta) = P(0 \text{ событий за } [t; t + \Delta]) \times P(1 \text{ событий за } [0; t]) +$$
$$+P(1 \text{ событий за } [t; t + \Delta]) \times P(0 \text{ событий за } [0; t]) =$$

$$= \big(1 - \lambda\Delta + o(\Delta)\big)P_1(t) + \big(\lambda\Delta + o(\Delta)\big)P_0(t) =$$

$$= P_1(t) - \lambda\Delta P_1(t) + \lambda\Delta P_0(t) + o(\Delta).$$

Перегруппируем и поделим на Δ :

$$\frac{P_1(t + \Delta) - P_1(t)}{\Delta} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta}.$$

Вероятность 1 события

$$\frac{P_1(t+\Delta) - P_1(t)}{\Delta} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta}.$$

Берём предел:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\lambda P_1(t) + \lambda P_0(t) = -\lambda P_1(t) + \lambda e^{-\lambda t}.$$

Получили линейное дифференциальное уравнение. В стандартной форме:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} + \lambda P_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Интегрирующий множитель:

$$u(t) = e^{\int \lambda dt} = e^{\lambda t}.$$

Умножаем:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} P_1(t) = \lambda.$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[P_1(t) e^{\lambda t}\right] = \lambda.$$

Теперь можно разделять переменные.

Вероятность 1 события

$$\frac{dg(t)}{dt} = \lambda,$$

где $g(t) = P_1(t)e^{\lambda t}$

Разделяем:

$$dg(t) = \lambda dt.$$

Интегрируем:

$$g(t) = \lambda t + C.$$

$$P_1(t)e^{\lambda t} = \lambda t + C.$$

$$P_1(t) = (\lambda t + C)e^{-\lambda t}.$$

Никаких событий за нулевое время:

$$P_1(0) = 0.$$

$$0 = P_1(0) = (0 + C)e^0 \Rightarrow C = 0.$$

Решение:

$$P_1(t) = \lambda t e^{-\lambda t}.$$

Вероятность *k* событий

Если продолжить, получим закономерность:

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = -\lambda P_k(t) + \lambda P_{k-1}(t),$$
$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

Решая эти диффуры, придём к соотношению:

$$P_k(t) = \frac{\lambda t}{k} P_{k-1}(t).$$

Это простое разностное уравнение относительно k. Его решение:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} P_0(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Победа.

Пример задачи

Профессор Ш. тратит своё время на консультации студентам, которые приходят простейшим потоком с интенсивностью 6 человек в час. Студенты встают в очередь и не уходят без консультации.

Ш. – сверхпрофессионал: он всегда уделяет ровно 10 минут каждому студенту.

Только что профессор завершил консультацию, а в очереди ожидают ещё три студента.

Найдите вероятность, что через полчаса:
1) очередь рассосётся;
2) снова будут ровно три человека в очереди;
3) очередь не сократится.

Пример задачи

Профессор Ш. тратит своё время на консультации студентам, которые приходят простейшим потоком с интенсивностью 6 человек в час. Студенты встают в очередь и не уходят без консультации.

Ш. – сверхпрофессионал: он всегда уделяет ровно 10 минут каждому студенту.

Только что профессор завершил консультацию, а в очереди ожидают ещё три студента.

Найдите вероятность, что через полчаса:
1) очередь рассосётся;
2) снова будут ровно три человека в очереди;
3) очередь не сократится.

Решение. Пусть X – число студентов, которые придут за 30 минут.
Среднее число заявок за полчаса: $\lambda t = 6 \cdot 0.5 = 3 \quad \Rightarrow \quad X \sim Pois(3)$.

1) $P(X=0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = \frac{3^0}{0!} e^{-3} = e^{-3} \approx 0.05$.
2) $P(X=3) = \frac{3^3}{3!} e^{-3} = \frac{9}{2} e^{-3} \approx 0.22$.
3) $P(X \geq 3) = 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) = 1 - e^{-3} - 3e^{-3} - 4.5e^{-3} \approx 0.58$.

В следующий раз

Снова пуассоновский поток:

- время между событиями;
- показательное распределение и распределение Эрланга;
- поток восстановления и теорема Пальма-Хинчина.