ДЗ 2-3
по Теории Массового Обслуживания

от Татаринова Никиты Алексеевича, БПИ193

2022.10.19

Задание 1

Условие

Найдите частные решения разностных уравнений.

а) $y(t) = 0.4 \cdot y(t-1) - 2 \qquad y(0) = 1$

б) $y(k) = \dfrac{\lambda}{k} \cdot y(k-1) \qquad y(0) = e^{-\lambda}$

Решение

а)

$$y(t) = 0.4 \cdot y(t-1) - 2 = 0.4^t \cdot y(0) - 2 \cdot \frac{0.4^t - 1}{0.4 - 1} = 0.4^t + \frac{10}{3} \cdot (0.4^t - 1)$$

$$y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\frac{10}{3}$$

б)

$$y(k) = \frac{\lambda}{k} \cdot y(k-1) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot y(0) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$y(k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Ответ

а)

$$y(t) = 0.4^t + \frac{10}{3} \cdot (0.4^t - 1)$$

$$y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\frac{10}{3}$$

б)

$$y(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

$$y(k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$$

Задание 2

Условие

Найдите частные решения дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.

а)

$$y - x\cdot\frac{dy}{dx} \;=\; 0 \qquad y(2)=6$$

б)

$$x\cdot\frac{dy}{dx} + 3\cdot y \;=\; x^2 \qquad y(0)=0$$

Решение

а)

$$y - x\cdot\frac{dy}{dx} \;=\; 0$$

$$y \;=\; x\cdot\frac{dy}{dx}$$

Обособленное решение:

$$y(t) \;=\; 0$$

Не подходит из-за начальных условий. Отбросим это решение:

$$\frac{dy}{y} \;=\; \frac{dx}{x}$$

$$\int\frac{dy}{y} \;=\; \int\frac{dx}{x} \;+\; C$$

$$ln|y| \;=\; ln|x| \;+\; C$$

$$|y| \;=\; e^C\cdot|x|$$

Общее решение:

$$\left[\begin{aligned} &y \;=\; \pm e^C\cdot|x| \\ &y \;=\; \pm e^C\cdot x \end{aligned}\right.$$

Из начальных условий:

$$\left[\begin{aligned} &6 \;=\; y(2) \;=\; e^C\cdot|2| \\ &6 \;=\; y(2) \;=\; e^C\cdot 2 \end{aligned}\right. \quad\rightarrow\quad \left[\begin{aligned} &C \;=\; ln(3) \\ &C \;=\; ln(3) \end{aligned}\right.$$

Частные решения:

$$\left[\begin{aligned} &y \;=\; 3\cdot|x| \\ &y \;=\; 3\cdot x \end{aligned}\right.$$

б)

$$x\cdot\frac{dy}{dx} + 3\cdot y \;=\; x^2$$

$$\frac{dy}{dx} + \underbrace{\left(\frac{3}{x}\right)}_{a(x)}\cdot y \;=\; \underbrace{x}_{f(x)}$$

Интегрирующий множитель:

$$u(x) \;=\; exp\left(\int a(x)\cdot dx\right) \;=\; exp\left(\int\frac{3}{x}\cdot dx\right) \;=\; exp\Big(3\cdot ln|x|\Big) \;=\; |x|^3$$

Общее решение:

$$y(x) = \frac{\int f(x)\cdot u(x)\cdot dx + C}{u(x)} = \frac{\int x\cdot |x|^3\cdot dx + C}{|x|^3} = \frac{\frac{1}{5}\cdot |x|^5 + C}{|x|^3} = \frac{1}{5}\cdot x^2 + \frac{C}{|x|^3}$$

Из начальных условий:

$$0 = y(0) = \frac{1}{5}\cdot 0^2 + \frac{C}{|0|^3}$$

$$C = 0$$

Частное решение:

$$y = \frac{1}{5}\cdot x^2$$

Ответ

а)

$$\left[\begin{array}{l} y = 3\cdot |x| \\ y = 3\cdot x \end{array}\right.$$

б)

$$y = \frac{1}{5}\cdot x^2$$

Задание 3

Условие

Компания, занимающаяся страхованием автомобилей, выплачивает 500 у.е. при наступлении страхового случая. Страховые случаи происходят пуассоновским потоком, в среднем 10 случаев в месяц. Пусть X — объём страховых выплат за год. Найдите:

а) $E[X]$ и $D[X]$;

б) $\mathbf{P}\{X < 65000\}$;

в) сумму, которую нужно выделить, чтобы покрыть годовые выплаты с вероятностью 95%.

Указание. В пунктах (б) и (в) используйте нормальное приближение.

Решение

а) Стаховые случаи происходят в пуассоновском потоке с средним значением $\lambda = 10$ случаев в месяц; за каждый страховой случай выплачивается $m = 500$ у.е.; интересует объём страховых выплат X за $t = 12$ месяцев (год). В таком случае:

$$X \sim Pois(m\cdot\lambda\cdot t) \sim Pois(60000)$$

$$E[X] = D[X] = \lambda\cdot t = 60000$$

б)

$$\mathbf{P}\{X < 65000\} = \mathbf{P}\left\{\frac{X - E[X]}{\sqrt{D[X]}} < \frac{65000 - E[X]}{\sqrt{D[X]}}\right\} = \mathbf{P}\{Z < 20.4124\} \approx 1$$

в)

$$0.95 = \mathbf{P}\{X \leqslant n\}$$

$$\mathbf{P}\left\{Z \leqslant \frac{n - E[X]}{\sqrt{D[X]}}\right\} = 0.95$$

$$\frac{n-E[X]}{\sqrt{D[X]}} = 1.65$$

$$n = 60405$$

Ответ

а) $E[X] = D[X] = \lambda \cdot t = 60000$;

б) $\mathbf{P}\{X < 65000\} \approx 1$;

в) 60405.

Задание 4

Условие

Suppose that customers may arrive only at discrete moments of time:

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, ..., \frac{n-1}{n}, 1, \frac{n+1}{n}, ... \quad n \in \mathbb{N}$$

An arrival occurs with the probability p at each of these moments regardless of the history (the process is memoryless). Let T be a random variable denoting the time of the first arrival.

a) Derive the complementary cdf for $T: G(t) = \mathbf{P}\{T > t\}$.

b) Find the mean waiting time $E[T]$. You can use the alternative expectation formula:

$$E[T] = \int_0^{+\infty} G(t) \cdot dt = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} G\left(\frac{k}{n}\right)$$

c) Consider the marginal case: $n \to +\infty$ and $p = n$, so that is the mean number of arrivals per unit of time (the arrival rate). Find $G(t)$ and $E(T)$.

Решение

a) Обозначим:

$$\mathbf{P}(k) = \mathbf{P}\left\{T \leqslant \frac{k}{n}\right\} \quad k \geqslant 0$$

Тогда:

$$\begin{cases} \mathbf{P}(0) = p \\ \mathbf{P}(k) - \mathbf{P}(k-1) = \big(1 - \mathbf{P}(k-1)\big) \cdot p \end{cases}$$

$$\mathbf{P}(k) = (1-p) \cdot \mathbf{P}(k-1) + p = (1-p)^k \cdot \mathbf{P}(0) + p \cdot \frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^{k+1}$$

$$G_{\mathbb{N}}(k) = 1 - \mathbf{P}(k) = (1-p)^{k+1}$$

$$G(t) \approx (1-p)^{n \cdot t + 1}$$

b)

$$E[T] = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} G\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} G_{\mathbb{N}}(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot (1-p) \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{p} - 1\right)$$

c)

$$E[T] = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{\lambda}-1\right) = \frac{1}{\lambda}-\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda}$$

$$G(t) = \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n\cdot t+1} = \left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\right)^{t}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda\cdot t}$$

Ответ

a)

$$G_{\mathbb{N}}(k) = 1-\mathbf{P}(k) = (1-p)^{k+1}$$

$$G(t) \approx (1-p)^{n\cdot t+1}$$

b)

$$E[T] = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{p}-1\right)$$

c)

$$E[T] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda}$$

$$G(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda\cdot t}$$