№1 $X = (X_1 \ldots X_n)$ - выборка из распр $P \in \{P_\theta, \theta \in \Theta\}$

$H_0: \theta \in [-1, 1]$ vs $H_1: \theta \notin [-1, 1]$

использ критерий $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid T(x) > 1\}$

Притом $T(x) \sim N(\theta, 1)$

S - используется для отверж. гипотезы H_0

Если для кон. реализации $T(x) > 1 \Rightarrow$ H_0 отверг

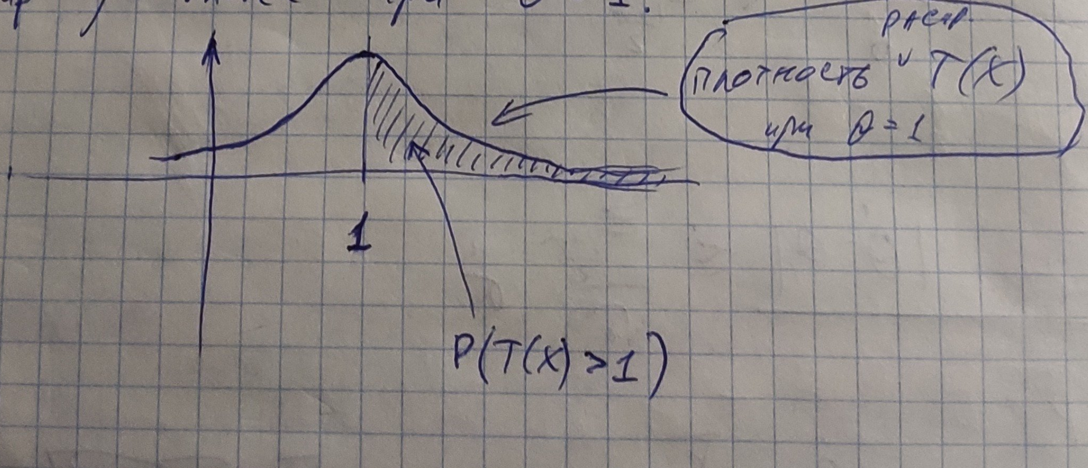
Иначе H_0 не отвергается (рез-т статист. незначим)

Учитывая распр $T(x)$ возможны оба рез-та.

Вер-ть ошибки первого рода

$$P(I_S) = \sup_{\theta \in [-1,1]} P_\theta(X \in S) = \sup_{\theta \in [1,1]} P(T_\theta(x) > 1) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

Притом sup достигается при $\theta = 1$:



[№3] $X \sim P \in \{U[0,1], Exp(1)\} \cup Others$

$H_0: P = U[0,1]$ vs $H_1: P = Exp(1)$

$\alpha = 0,05$

$$\Lambda(X) = \frac{L_X(Exp(1))}{L_X(U[0,1])} = \begin{cases} e^{-X}, & X \in [0,1] \\ \infty, & X > 1 \end{cases}$$

$$P_{U[0,1]}(\Lambda(X) > C_\alpha) = 0,05$$

$$P(e^{-X} > C_\alpha) = 0,05$$

$$P(-X > \ln(C_\alpha)) = 0,05$$

$$P(X < -\ln(C_\alpha)) = 0,05$$

$$-\ln(C_\alpha) = 0,05$$

$$C_\alpha = e^{-\alpha} = e^{-0,05} \approx 0,95$$

$$S = \{\Lambda(X) > 0,95\} = \{e^{-X} > 0,95 \cup X > 1\} =$$

$$= \{-X > 0,05 \cup X > 1\} =$$

$$\boxed{= \{X < 0,05 \cup X > 1\}}$$

Мощность $\beta_S = P_{Exp(1)}(X < 0,05) + P_{Exp}(X > 1) =$

= sps.expon().cdf(0,05) + 1 - sps.expon().cdf(0,95) ≈ $\boxed{0,42}$

$\boxed{\text{п.4}}$ Гипотезы $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$

Пусть $\hat{\theta}$ - а.н.о. θ с а.д. $\sigma^2(\theta)$
$\hat{\sigma}$ - с.о. $\sigma(\theta)$

$$W(X) = \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{\sigma}} \xrightarrow[\theta_0]{d} N(0,1)$$

Критерий $S = \{W(X) > z_{1-\alpha}\}$

отн. к. $N(0,1)$

Проверка: $P(I_S) = P_{\theta_0}(W(X) > z_{1-\alpha}) \to 1 - \Phi(z_{1-\alpha})$

$= 1 - (1-\alpha) = \alpha$

Мощность:

$$\beta_S(\theta) = P_\theta(W(X) > z_{1-\alpha}) = P_\theta\left(\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{\sigma}} > z_{1-\alpha}\right) =$$

$$= P\Big(\underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}}}_{\xrightarrow{d} N(0,1)} > z_{1-\alpha} - \underbrace{\frac{\theta - \theta_0}{\hat{\sigma}}\sqrt{n}}_{w(\theta)}\Big) = 1 - \Phi(z_{1-\alpha} + w(\theta))$$

Если $w(\theta) \to -\infty$, то $\forall c$ $\Phi(c + w(\theta)) \to 0$ $\Rightarrow$ $\beta_S(\theta) \to 1$

• Дов. интервал

$$P_\theta\left(\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{\sigma}} < z_{1-\alpha}\right) \to 1 - \alpha$$

$$P_\theta\left(\theta_0 > \hat{\theta} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}\right) \to 1 - \alpha$$

H_0 - отверг $\Leftrightarrow$ $\theta_0 > \hat{\theta} - \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha}$

с коэфф. доверия $(1-\alpha)$

$\boxed{№5}$ $X_1 \ldots X_n$ – выборка из $\Gamma(\theta, \beta)$ причём β известно.

Постр. крит. область ур-ня α для проверки

$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \; ? \; \theta_0$

$\{<, \neq, >\}$

$\hat{\theta} = \dfrac{\overline{X}}{S^2}$ – АНО с $\hat{\sigma} = \dfrac{\overline{X}}{S^2}\sqrt{2 + 3\dfrac{S^2}{\overline{X}^2}}$

Стат-ка $T(X) = \dfrac{\dfrac{\overline{X}}{S^2} - \theta_0}{\dfrac{\overline{X}}{S^2}\sqrt{2 + 3\dfrac{S^2}{(\overline{X})^2}}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\boxed{1}$ $? = \text{“}\neq\text{”}$

$S = \{ |T(X)| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \}$

$\boxed{2}$ $? = \text{“}>\text{”}$

$S = \{ T(X) > z_{1-\alpha} \}$

$\boxed{3}$ $? = \text{“}<\text{”}$

$S = \{ T(X) < z_{\alpha} \}$

$\beta_S(\theta) = P_\theta(T(X) > z_{1-\frac{\alpha}{2}}) + P_\theta(T(X) < z_{\frac{\alpha}{2}})$

$= P_\theta\left(\sqrt{n}\dfrac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{n}\dfrac{\theta - \theta_0}{\hat{\sigma}}\right) +$

$+ P_\theta\left(\sqrt{n}\dfrac{\hat{\theta} - \theta}{\hat{\sigma}} > z_{\frac{\alpha}{2}} - \sqrt{n}\dfrac{\theta - \theta_0}{\hat{\sigma}}\right) \approx$

$1 - \varphi(z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \omega(\theta)) + \varphi(z_{\frac{\alpha}{2}} - \omega(\theta))$

это для $\boxed{1}$

$\beta_S = 1 - \varphi(z_{1-\alpha} - \omega(\theta))$

это для $\boxed{2}$

$\beta_S = \varphi(z_\alpha - \omega(\theta)$

это для $\boxed{3}$

Причём $\omega(\theta) = \dfrac{\theta - \theta_0}{\hat{\sigma}}\sqrt{n}$

Формулировки

$H_0: P \in \mathcal{P}_0$ - основн. гипотеза

$H_1: P \in \mathcal{P}_1$ - альтерн. гипотеза

$$\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \varnothing$$

$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ правостор. альтерн.

$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$ левостор. альтерн.

$H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \neq \theta_0$ двустор. альтерн.

Пусть $X = (X_1 \dots X_n)$ - выборка из нек. $P \in \mathcal{P}$

$S \subset \mathcal{X}$ - критерий для проверки H_0 vs H_1,

если правило отверж H_0 выгл. так:

$$H_0 \text{ отверг} \Leftrightarrow X \in S$$

Пример: $S = \{x \in X \mid T(x) > c\}$

статистика критерия

критич. значение

Ошибка I рода: H_0 - отверж., но $P \in H_0$

$$P(I_S) = \sup_{P \in \mathcal{P}_0} P(X \in S)$$

α - ур. знач. критерия S, если $P(I_S) \leq \alpha$

Функция мощности (критерия S): $\beta_S(P) = P(X \in S)$ для $P \in \mathcal{P}_1$

• Критерий S назыв. <u>асимпт. крит.</u> ур. знач. α, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sup P(I_S) \le \alpha$

при n-разм. выборки

• Пусть $\hat{\theta}$ – а.н.о. θ с а.д. $\sigma^2(\theta)$

$\hat{\sigma}$ – с.о. $\sigma(\theta)$

Тогда $W(X) = \sqrt{n}\, \dfrac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{\sigma}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$

<u>Крит. Вальда</u>: $S = \left\{ \sqrt{n}\, \dfrac{|\hat{\theta} - \theta_0|}{\hat{\sigma}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$

для задачи $H_0: \theta = \theta_0$ vs $H_1: \theta \ne \theta_0$

$\boxed{№6}$ $X_1 \dots X_n$ из распр $\mathcal{N}(\theta, 1)$

а) РМНК для $H_0: \theta \geq \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$

$$\Lambda(x) = \frac{L_x(\theta_2)}{L_x(\theta_1)} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{(x_1-\theta_2)^2}{2} - \dots - \frac{(x_n-\theta_2)^2}{2}}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{(x_1-\theta_1)^2}{2} - \dots - \frac{(x_n-\theta_1)^2}{2}}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)^2 - (x_i-\theta_2)^2} = e^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(-2x_i\theta_1 + \theta_1^2 + 2x_i\theta_2 - \theta_2^2\right)}$$

$$= e^{\frac{1}{2}\left(n(\theta_1^2-\theta_2^2) + 2(\theta_2-\theta_1)\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} = C \cdot e^{(\theta_2-\theta_1)\underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i}_{T(X)}}$$

$\theta_2 > \theta_1$

$\Rightarrow \Lambda(x)$ возр. при $T(x)$ возр

$$\boxed{\text{Критерий} \quad S = \left\{ \sum x_i < C_\alpha \right\}}$$

$T(X) = \sum x_i \sim \mathcal{N}(n\theta, n)$

где $P_{\theta_0}(T(X) < C_\alpha) = \alpha$

т.е. $\boxed{C_\alpha - \alpha \text{ квант. } \mathcal{N}(n\theta_0, n)}$

$\beta(\theta) = P_\theta(T(X) < C_\alpha) = \Phi(C_\alpha)$

функц. распр $\mathcal{N}(n\theta, n)$

б) РМНК для $H_0: \theta \leq \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$

Критерий $S = \left\{ \sum x_i > C_\alpha \right\}$, где $\boxed{C_\alpha - (1-\alpha) \text{ квант. } \mathcal{N}(n\theta_0, n)}$

$\beta(\theta) = 1 - \Phi(C_\alpha)$

$\boxed{№7}$ $X_1 \dots X_n$ - выборка из $\Gamma(\theta, \beta)$, β - изв.

а) РНМК ур. зн. α для $H_0: \theta \geq \theta_0$ vs $H_1: \theta < \theta_0$

$\theta_2 > \theta_1$ $\quad \Lambda(X) = \dfrac{L_x(\theta_2)}{L_x(\theta_1)} = \prod \dfrac{\cancel{\Gamma(\beta)}\, \theta_2^{\beta}\, \cancel{x_i^{\beta-1}}\, e^{\theta_1 x_i}}{\cancel{\Gamma(\beta)}\, \theta_1^{\beta}\, \cancel{x_i^{\beta-1}}\, e^{\theta_2 x_i}} =$

$$= \left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right)^{n\beta} \cdot e^{(\theta_1 - \theta_2)\sum x_i}$$

$T(X)$

$\Lambda(X)$ убывает при $T(X)$ - возр.

$$P(T(X) > C_\alpha) = \alpha$$

$$T(X) = \sum X_i \sim \Gamma(\theta, n\beta)$$

C_α - $(1-\alpha)$ квантиль расп. $\Gamma(\theta_0, n\beta)$

Критерий $S = \{T(X) > C_\alpha\}$

$$\beta(\theta) = P_\theta(X \in S) = P_\theta(T(X) > C_\alpha) = 1 - F(C_\alpha)$$

функц. расп. $\Gamma(\theta, n\beta)$

б) РНМК для $H_0: \theta \leq \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$

$S = \{T(x) < C_\alpha\}$ $\quad C_\alpha$ - α квантиль расп. $\Gamma(\theta_0, n\beta)$

$\beta(\theta) = F(C_\alpha)$

$\boxed{№9}$ $X_1 \dots X_n$ из $U[0;\theta]$

РНМК уровня α для

$H_0: \theta = \theta_0$ vs $\theta < \theta_0$

Посчитаем

$$\theta_2 > \theta_1: \ \Lambda(X) = \frac{L_X(\theta_2)}{L_X(\theta_1)} = \frac{\theta_2^{n} \cdot I\{0 \le X_i \le \theta_2 \ \forall i\}}{\theta_1^{n} \cdot I\{0 \le X_i \le \theta_1 \ \forall i\}}$$

$$= \begin{cases} \frac{\theta_2^{n}}{\theta_1^{n}}, & 0 \le X_{(n)} \le \theta_1 \\ +\infty, & \theta_1 < X_{(n)} \le \theta_2 \end{cases} \quad \text{при усл } X_{(1)} \ge 0$$

Теорема о монотонн. отнош. ~~применима~~

~~потому что критерий вида $S = \{T(X) > c_\alpha\}$ применим для~~

~~потому что при $X_{(n)} > \theta_2 > \theta_1$~~

~~они одинаково неопределен~~

~~а знач. $\Lambda(X)$ немонотонна.~~

~~(кроме $X_{(n)}$ нет полезных метрик)~~

~~г) Найдём РНМК иначе!~~

~~НЕ ПОЛУЧИЛОСЬ :(~~

$$\forall \theta_2 > \theta_1 \quad \Lambda(X) = f(X_{(n)}) = \begin{cases} \frac{\theta_2^{n}}{\theta_1^{n}}, & 0 \le X_{(n)} \le \theta_1 \\ +\infty, & \theta_1 < X_{(n)} \le \theta_2 \end{cases}$$

возрастающая функция (для функц $Y(x)$ ни один из $L_x(\theta_1)$ не конч)

$$\boxed{S = \{X_{(n)} < c_\alpha\}}, \text{ где } c_\alpha \text{ т.ч. } P_{\theta_0}(X_{(n)} < c_\alpha) = \alpha$$

$$\left(\frac{c_\alpha}{\theta_0}\right)^n = \alpha \Rightarrow \boxed{c_\alpha = \theta_0 \cdot \sqrt[n]{\alpha}}$$