Вопросы

1) $P_\theta(T_1(x) \le \theta \le T_2(x)) = \alpha$

$\alpha = 0.95$

В 95 из 100 случаях θ лежит в реализации

2) Зачем делать инт. более узким? имхо очев же

$\alpha = 0.95$

из 100 людей : 50 ± 49

95% — [1; 99] ← дов. инт. не информативный

50 ± 1

95% — [49; 51] ← класс

3) Выводы в практике:

писать что-то из разряда

„в теории было такое-то св-во,

на графике видно, что оно работает"

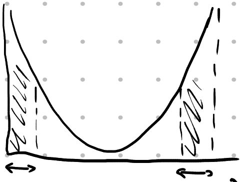
4) Читаем документацию ф-ций

$N(a, \text{sigma})$ norm(loc = a, scale = σ)

! в нашей таблице по распределениям некоторые

распределения отличаются от интернета

5) Если распр. вида



Beta

$P(\quad + \quad) = \alpha$

то не имеет смысла брать разрывный дов. интервал,

т.к. это не практично

> нет, мы же строим интервал и хотим какой-то непрерывный кусок, т.к. если бы мы дали ответ "выздоровеют 0, 55 или 98 человек (из 100)", то это как-то не очень хорошо интерпретируется с точки зрения "и что с этим дальше делать?"
> edited 17:25

по идее мой ответ в бот норм

Напоминание

$\ldots \to X_1 \ldots X_n \in P \qquad P \in \mathcal{P} = \{ P_\theta \mid \theta \in \Theta \}$ (парам подход)

оценки (состоят., а.н.о)

состоят. — не говорит ничего про отклонения

а.н.о — говорит -II-

доверительные интервалы сложно строить

асимпт. дов инт. (Вальда) просто строить

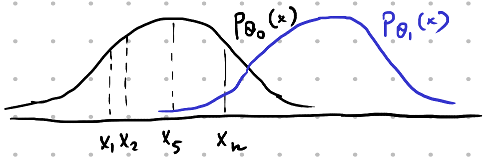
$\frac{1}{\sqrt{n}}$ — скорость сходимости

Проблема: мы всегда брали оценки из головы
а можно ли большую скорость сходимости?

Метод макс. правдоподобия

Методы поиска и сравнения оценок 3

Метод макс. правдоподобия 3.1



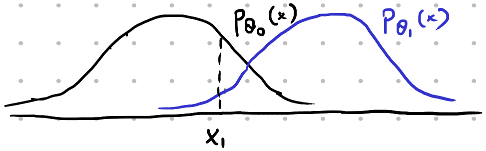
очев., что шанс выпадения X из θ_0 больше, чем из θ_1

Опр $L_X(\theta) = p_\theta(X) = \prod\limits_{i=1}^{n} p_\theta(x_i)$ функция правдоподобности (Likelihood)

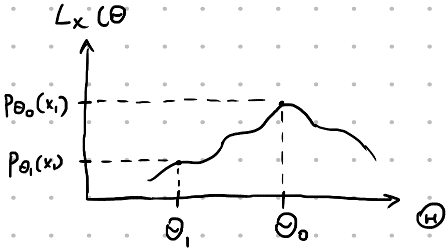
$\mathcal{L}_X(\theta) = \ln L_X(\theta)$ логарифм. функция правдоподобия (loglikelihood)

Замечание $L_X(\theta)$ — не плотность, т.к. $\int L_X(\theta)$ не всегда $= 1$.

Пример $x = x_1$



$\to$



Опр $\hat{\theta} = \underset{\theta \in \Theta}{\arg\max}\, L_x(\theta)$ — ОМП

оценка макс. правдоподобия

Задача 1 $\quad X = (X_1 \ldots X_n) \sim N(a, \sigma^2)$

Найти ОМП

1) $\theta = (a, \sigma^2)$

2) $\theta = a$, если σ – изв.

3) $\theta = \sigma^2$, если a – изв

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

(константы не нужны для метода)

$$L_x(\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} e^{-\frac{\sum (X_i - a)^2}{2\sigma^2}} \qquad L_x(\theta) = -n \ln \sigma - \frac{\sum (X_i - a)^2}{2\sigma^2}$$

1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial L_x(\theta)}{\partial a} = 0 \Rightarrow \dfrac{\Sigma(x_i - a)}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow \hat{a} = \overline{X} \\ \dfrac{\partial L_x(\theta)}{\partial \sigma} = 0 \Rightarrow -\dfrac{n}{\sigma} + \dfrac{\Sigma(x_i - a)^2}{\sigma^3} = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n} = S^2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{\sigma}^2 = S^2$$

2) $\hat{a} = \overline{X}$

3) $\sigma^2 = \dfrac{\Sigma(x_i - a)^2}{n}$

Задача 2 $\quad X = (X_1 \dots X_n) \sim Geom(\theta)$

Найти ОМП

▲ $p_\theta(x) = (1-\theta)^{x-1}\theta$

$$L_x(\theta) = p_\theta(X) = \theta^n (1-\theta)^{\Sigma x_i - n}$$

$$L_x(\theta) = n \ln \theta + (\Sigma X_i - n) \ln(1-\theta)$$

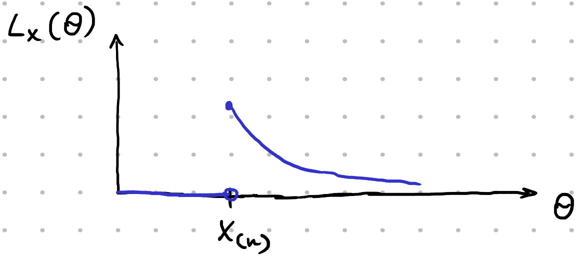
$$\frac{\partial L_x(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \frac{\Sigma X_i - n}{1-\theta} = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}}$$

Задача 3 $\quad X = (X_1, \dots, X_n) \sim U[0, \theta]$

Найти ОМП для θ

▲ $p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} I\{x \in [0; \theta]\}$

$$L_x(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \prod I\{x_i \in [0; \theta]\} = I\{X_{(1)} \geq 0\} \cdot I\{X_{(n)} \leq \theta\} \frac{1}{\theta^n}$$



$$L_x(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta < X_{(n)} \\ \frac{1}{\theta^n}, & \theta \geq X_{(n)} \end{cases}$$

Хотим наименьший ас. дов. инт.

$\Downarrow$

ас. оценка с мин. ас. дисп.

MLE иногда даёт

Условия регулярности:

1) $\mathcal{P}$ – доминирующее семейство $p_{\theta_1} \neq p_{\theta_2}$ при $\theta_1 \neq \theta_2$

(либо все абс. непр. / либо все дискр.) с $p_\theta(x)$ – плотностью

2) Носитель плотности не зависит от θ

3) Θ – открытое связное мн-во с $\mathbb{R}^d$ [что-то там может быть не конечным]

(остальные обычно никто не проверяет)

Св-ва ОМП

1) Пусть $\hat{\theta}$ – ОМП θ

$\tau : \Theta \to \Psi$ – биекция

тогда $\tau(\hat{\theta})$ – ОМП $\tau(\theta)$

2) [L1 – L5] $\Rightarrow$

С вероятностью $\to 1$ одно из решений

ур-я правдоподобности $\left(\frac{\partial l_x(\theta)}{\partial \theta} = 0 \right)$

является состоятельным

3) [L1 – L9] $\Rightarrow$ ← вроде это надо

$\hat{\theta}$ – ОМП θ а.н.о. с а.д. $\sigma^2 = i(\theta)^{-1}$

$$[i(\theta)]_{jk} = E_\theta \frac{\partial L_{x_1}(\theta)}{\partial \theta_j} \frac{\partial L_{x_1}(\theta)}{\partial \theta_k}$$

информационная матрица Фишера

Задача 4 $X = (X_1 \ldots X_n) \sim U[a, b]$

Найти ОМП для $\frac{a+b}{2}$

▲ $\hat{a} = X_{(1)}$

$\hat{b} = X_{(n)}$

эта коорд. нужна для биекции

$$\tau(x, y) = \left(\frac{x+y}{2},\ x-y\right)$$

$$\tau(\hat{a}, \hat{b}) = \left(\frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2},\ X_{(1)} - X_{(n)}\right)$$

т.е. $\frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$ — ОМП для $\frac{a+b}{2}$

Задача 5 Для задачи 1. 2) и 3. 2) найти а.д.

▲ 1. $X = (X_1 \dots X_n) \sim N(a, \sigma^2)$

2) $\theta = a$, если σ – изв.

$$L_x(\theta) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{\sum (X_i - a)^2}{2\sigma^2}$$

$$L_{x_1}(\theta) = -\frac{\ln 2\pi\sigma^2}{2} - \frac{(X_1 - a)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial L_{x_1}(\theta)}{\partial a} = \frac{X_1 - a}{\sigma^2}$$

$$i(\theta) = E_\theta \left(\frac{\partial L_{x_1}(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 = E \left(\frac{X_1 - a}{\sigma^2} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{\sigma^4} \underbrace{E_\theta (X_1 - a)^2}_{= D_\theta X_1} = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\sigma^2_{ac.} = i^{-1} = \sigma^2$$

2 $\quad X = (X_1 \ldots X_n) \sim \text{Geom}\,(\theta)$

$$L_x(\theta) = n \ln \theta + (\Sigma x_i - n) \ln (1 - \theta)$$

$$L_{x_1}(\theta) = \ln \theta + (x_1 - 1) \ln (1 - \theta)$$

$$\frac{\partial L_{x_1}(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{\theta} = \frac{x_1 - 1}{1 - \theta}$$

$$i(\theta) = E\left(\frac{\partial L_{x_1}(\theta)}{\partial \theta}\right)^2 = E_\theta\left(\frac{x_1 \theta - 1}{\theta(1-\theta)}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2} E_\theta (x_1\theta - 1)^2 =$$

$$= \frac{1}{(1-\theta)^2} E_\theta \left(X_1 - \frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{(1-\theta)^2} D_\theta X_1 = \frac{1}{(1-\theta)\,\theta^2}$$

$$\Rightarrow \sigma^2_{ac} = (1-\theta)\,\theta^2$$