Повторение ТерВера

1) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вер. пр-во

$(\Omega$ — мн-во элем. исходов

$\mathcal{F}$ — σ-алгебра над Ω

1) $\varnothing \in \mathcal{F}$

2) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{F}$

3) $A_1 \ldots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

$P)$ — σ-аддитивная вероятностная мера над $\mathcal{F}$

$P(\Omega) = 1$

$P\left(\bigcup\limits^{\infty} A_i\right) = \sum\limits^{\infty} P(A_i)$

Случайная величина ξ — измеримая ф-ция $: \Omega \to \mathbb{R}$

F — Функция распределения, если $F(x) = P(-\infty; x]$

Задача 1 $\xi \sim Exp(\theta)$

$F_\xi(x) - ?$ $= 1 - e^{-\theta x}$

если сюда подставить $y \sim U(0,1)$, то $x \sim Exp(\theta)$

$F_\xi^{-1}(y) - ?$ $= -\frac{1}{\theta}\ln(1-y)$ $\left(\text{т.к. } F_\xi(\xi) \sim U(0,1)\right)$

$$p(x) = \theta e^{-\theta x} \; I\{x \geq 0\}$$

$$F(y) = P(-\infty; y] = \int_0^y \theta e^{-\theta x}\, dx = -e^{-\theta x}\Big|_0^x = 1 - e^{-\theta x}$$

$$y = 1 - e^{-\theta x}$$

$$x = -\frac{1}{\theta}\ln(1-y)$$

2) События $A_1 \ldots \in \mathcal{F}$ наз-ся нез в совок, если

$$\forall k \ \forall i_1 \ldots i_k \quad P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$$

Случ величины $\xi_1 \ldots \xi_n$ нез в совок., если

$$\forall B_1 \ldots B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \hookrightarrow P(\xi_1 \in B_1 \cap \ldots \cap \xi_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(\xi_i \in B_i)$$

Задача 2 $\quad \xi, \eta \perp\!\!\!\perp$ сл. вел.

f, g — борелевские ф-ции

? $f(\xi) \perp\!\!\!\perp g(\eta)$

▲ $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$P(f(\xi) \in B_1, \; g(\eta) \in B_2) = P(\xi \in \overset{\mathcal{B}(\mathbb{R})}{\overset{\cup}{f^{-1}(B_1)}}, \; \eta \in \overset{\mathcal{B}(\mathbb{R})}{\overset{\cup}{g^{-1}(B_2)}}) =$$

$$= P(\xi \in f^{-1}(B_1)) \cdot P(\eta \in g^{-1}(B_2)) =$$

$$= P(f(\xi) \in B_1) \cdot P(g(\eta) \in B_2)$$

3) Матож:

1) Дискретное ξ (обл. знач. $\mathcal{X}$ конечное)

$$E f(\xi) = \sum_{x \in \mathcal{X}} f(x) P(\xi = x)$$

2) Абс непр.

$$E f(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) p_\xi(x) dx$$

Дисперсия: $D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$

Ковариация $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$

Задача 3 $\quad \xi \sim Exp(\theta) \qquad p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot I(x>0)$

$E\xi$ – ?

$$E\xi = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -\int_0^{+\infty} x\, d(e^{-\lambda x}) =$$

$$= x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\, dx = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_{+\infty}^{0} = \frac{1}{\lambda}$$

$y = \lambda x$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} y e^{-y}\, dy = \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} y e^{-y}\, dy = \frac{1}{\lambda} \Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}$$

Опр $\quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad ; \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$

Задача 4 $\quad p_\xi(1) = I\{0 \le \xi \le 1\}$

$$E e^\xi = \int_{\mathbb{R}} e^t p_\xi(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 e^t\, dt = e^t \Big|_0^1 = e - 1$$

Задача 5 $X_1, \dots X_n$ нез од распр сл. вел $EX_1 = a$ $DX_1 = \sigma^2$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

$$E\overline{X} = E\frac{\sum X_i}{n} = \frac{\sum EX_i}{n} = a$$

$$D\overline{X} = \frac{1}{n^2} D\sum X_i = \frac{\sigma^2}{n}$$

Задача 6 Кто-то съел

Задача 7 n человек вирус — шанс выпадения p

k человек в группе

Найти k, чтобы минимизировать кол-во проб

ξ_i — кол-во проверок в группе

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & p = (1-p)^k \\ k+1, & p = 1-(1-p)^k \end{cases}$$

$$E\xi_i = (1-p)^k + (k+1)(1-(1-p)^k) = -k(1-p)^k + (k+1)$$

$$E = \frac{n}{k}\left(k+1-k(1-p)^k\right) = n + \frac{n}{k} - n(1-p)^k \underset{\text{тейлор}}{\approx} n + \frac{n}{k} - n(1-pk) =$$

$$= f(k)\, n$$

$$f'(k) = p - \frac{1}{k^2}$$

$$k = \sqrt{\frac{1}{p}}$$

Пример $p = 0{,}01$

$$k = 10$$

$E = \frac{n}{5} \Rightarrow$ выгодно

4) $\xi_1 \ldots \xi_n$ — сл. вел. $\to \xi$

$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ $\qquad P(\xi_n \not\to \xi) = 0$

$\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ $\qquad \forall \varepsilon > 0 \quad P(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ $\qquad \forall f$ — непр. огр. $\quad E f(\xi_n) \to E f(\xi)$

$\Updownarrow$ Т. Александрова

$\forall x$ — точки непр F_ξ $\quad \hookrightarrow \quad F_{\xi_n}(x) \to F_\xi(x)$

$$\begin{tikzcd}
\text{п.н.} \arrow[r, Rightarrow] & P \arrow[r, Rightarrow] \arrow[l, bend left, "\text{т. Риса}"] & d \arrow[l, bend left, "\xi_n \to C"]
\end{tikzcd}$$

Задача 8 $\quad \xi_n \sim N(0, 1/n)$

$$\xi_n \xrightarrow{P} ?$$

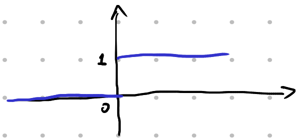
▲ $\quad \eta \sim N(0, 1)$

$$\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\eta$$

$$x > 0: \quad F_{\xi_n}(x) = P(\xi_n \le x) = P\left(\eta/\sqrt{n} \le x\right) = P(\eta \le \sqrt{n}\,x) =$$

$$= F_\eta(\sqrt{n}\,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$x < 0: \quad F_{\xi_n}(x) = \ldots = F_\eta(\sqrt{n}\,x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$



$$\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} 0 \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} 0$$

5) УЗБЧ

ξ_n, $n \in \mathbb{N}$ норсв $E|\xi_n| < +\infty$ $E\xi_n^2 < +\infty$

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{п.н.}} E\xi_1$$

Задача 9 $\xi_n \sim Bern(1/2)$

$n - ?$ $P\left(0{,}4 \le \frac{S_n}{n} \le 0{,}6\right) \ge 0{,}7$

Нер-во Чебышева $P(|X - EX| \ge \varepsilon) < \frac{DX}{\varepsilon^2}$

Δ $x = \frac{S_n}{n}$ $Ex = 0.5$ $Dx = \frac{1}{4n}$ $\varepsilon = 0.1$

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| < 0.1\right) \ge 1 - \frac{1}{4n \cdot 0.1^2}$$

$$P\left(0{,}4 \le \frac{S_n}{n} \le 0{,}6\right) \ge 1 - \frac{25}{n} \ge 0.7$$

$n \ge 84$

6) ЦПТ $\xi_n,\ n \in \mathbb{N}$ норсв $E|\xi_n| < +\infty$ $E\xi_n^2 < \infty$

$$\hookrightarrow \sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - E\xi_1\right) \xrightarrow{d} N(0, D\xi_1)$$

Задача 10 $\xi_1 \dots \xi_{125} \sim Pois(5)$ $E = \lambda$ $D = \lambda$

$$P\left(\frac{S_n}{n} < 5.5\right) - ?$$

$$P\left(\underbrace{\left(\frac{S_n}{n} - E\xi_1\right)\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_1}}}_{\eta \sim N(0,1)} < \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{D\xi_1}}\left(5.5 - E\xi_1\right)\right) \overset{d}{\approx} P\left(\eta < \sqrt{\frac{n}{D\xi_1}}\left(5.5 - E\xi_1\right)\right) =$$

$$= P(\eta < 25) = \int_{-\infty}^{25} \dots \approx 0.99$$