$\boxed{Д/з \quad № 3}$

$\boxed{№ 1}$ $X_1 \ldots X_n$ - выборка из $U[0,\theta]$

$G(X,\theta) = \frac{X_{(n)}}{\theta}$ - центр. функц., т.к.

$$F(x) = P\left(\frac{X_{(n)}}{\theta} \leq x\right) =$$

$$= P\left(\frac{X_1}{\theta} \leq x \wedge \ldots \wedge \frac{X_n}{\theta} \leq x\right) =$$

$$= P^n\left(\frac{X_1}{\theta} \leq x\right) = \left\{ \text{Заметим } \frac{X_1}{\theta} \sim U[0,\theta] \right\} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^n, & x \in [0,1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$P\left(z_{1-\alpha} \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq z_1\right) = \alpha$$

$$P\left(\sqrt[n]{1-\alpha} \leq \frac{X_{(n)}}{\theta} \leq \cancel{1}\right) = \alpha$$

$$\boxed{X_{(n)} \leq \theta \leq \frac{X_{(n)}}{\sqrt[n]{1-\alpha}}}$$

№2 $X_1 \ldots X_n$ - выборка из $Exp(\theta)$

Тогда $\theta X_1 \ldots \theta X_n$ - выборка из $Exp(1)$

$$G(X,\theta) = \sum_{i=1}^{n} \theta X_i \sim \Gamma(1,n)$$

$$P_\theta\left(z_{\frac{1-\alpha}{2}} \le \theta \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i \le z_{\frac{1+\alpha}{2}} \right) = \alpha$$

$$\boxed{\theta \in \left[\frac{z_{\frac{1-\alpha}{2}}}{\sum_{i=1}^{n} X_i} ; \frac{z_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sum_{i=1}^{n} X_i} \right]}$$

Где z_α - α квантиль $\Gamma(1,n)$

№3 Пусть θ - кол-во котов в городе

$X_1 \ldots X_n$ - выборка из $Bern\left(\frac{100}{\theta}\right)$

Положим $p = \frac{100}{\theta}$

$Y = X_1 + \ldots + X_n \sim Bin(n, p)$

По т. Муавра - Лапласа

$$\frac{Y - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$\frac{Y - np}{\sqrt{n \cdot \frac{Y}{n}\left(1 - \frac{Y}{n}\right)}} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{\frac{Y}{n}}{p}}}_{\xrightarrow{P} 1} \cdot \underbrace{\sqrt{\frac{1 - \frac{Y}{n}}{1 - p}}}_{\xrightarrow{P} 1} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

$$P\left(-z_{\frac{1+\alpha}{2}} \leq \frac{Y - np}{\sqrt{Y\left(1 - \frac{Y}{n}\right)}} \leq z_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) = \alpha$$

$$P\left(\frac{-z_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{Y\left(1-\frac{Y}{n}\right)}}{n} \overset{-Y}{\le} -p \overset{-Y}{\le} \frac{z^{*}_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{Y\left(1-\frac{Y}{n}\right)}}{n}\right) \approx \alpha$$

$$p \in \left[\frac{Y - z_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{Y\left(1-\frac{Y}{n}\right)}}{n} ; \frac{Y + z_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{Y\left(1-\frac{Y}{n}\right)}}{n}\right]$$

$$\parallel$$

$$\frac{100}{\theta}$$

$$\theta \in \left[\frac{100n}{Y + z_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{Y\left(1-\frac{Y}{n}\right)}} ; \frac{100n}{Y - z_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{Y\left(1-\frac{Y}{n}\right)}}\right]$$

$$\alpha = 0.95 \Rightarrow z_{\frac{1+\alpha}{2}} \approx 1.96$$

$$\theta \in \left[\frac{100 \cdot 100}{20 + 1.96\sqrt{20 \cdot (1-0.2)}} ; \frac{10000}{20 - 1.96\sqrt{20 \cdot (1-0.2)}}\right]$$

$\underline{\underline{\theta \in [359{,}2 ; 822{,}4]}}$ – дов. интервал.

$\boxed{№4}$ α - ур. доверие

$X_1 \dots X_n$ - выборка из $\Gamma(\theta, \beta)$

(a) Найти ас. дов. инт. θ

$$EX_1 = \frac{\beta}{\theta}, \quad DX_1 = \frac{\beta}{\theta^2}$$

По Вальду:

$$\sqrt{n}\,\frac{\left|\overline{X} - \frac{\beta}{\theta}\right|}{\sqrt{\frac{\beta}{\theta^2}}} \leq z_{\frac{1+\alpha}{2}} \quad - \alpha \text{ интервал}$$

$$\sqrt{n}\,\frac{|\overline{X}\cdot\theta - \beta|}{\sqrt{\beta}} \leq z_{\frac{1+\alpha}{2}}$$

Интервал: $\left(\dfrac{\beta}{\overline{X}} \pm \dfrac{z_{\frac{1+\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\beta}}{\overline{X}\sqrt{n}}\right)$

Где z_p - квантиль $N(0,1)$

(b) Довер. интервал Θ если β неизв

$\overline{X}$ - $\underset{\text{сост.}}{\text{оценка}}$ $\frac{\beta}{\Theta}$

S^2 - $\underset{\text{сост.}}{\text{оценка}}$ $\frac{\beta}{\Theta^2}$ // S^2 - сост. оценка σ^2

$\frac{\overline{X}^2}{S^2}$ - сост. оценка β

По Вальду: $\sqrt{n}\,\frac{\left|\overline{X} - \frac{1}{\Theta}\cdot\frac{\overline{X}^2}{S^2}\right|}{S} \leq z_{\frac{1+\alpha}{2}}$

$$\frac{\sqrt{n}}{S^3}\left|\overline{X}\cdot S^2 - \frac{1}{\Theta}\overline{X}^2\right| \leq z_{\frac{1+\alpha}{2}}$$

$$\frac{1}{\Theta} \in \left(\frac{S^2}{\overline{X}} \pm z_{\frac{1+\alpha}{2}}\cdot\frac{S^3}{\overline{X}^2\sqrt{n}}\right)$$

$$\boxed{\Theta \in \left(\frac{1}{\frac{S^2}{\overline{X}} \mp z_{\frac{1+\alpha}{2}}\frac{S^3}{\overline{X}^2\sqrt{n}}}\right)}$$

№5. X_n имеет распр. Стьюдента с n степ. свободы

$$X_n = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{n}}}$$, где $\xi_i \sim N(0,1)$

$$\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 1$$ по ЗБЧ

из $E\xi_i^2 = 1$

По т. Слуцкого $X_n \xrightarrow{d} \xi \sim N(0,1)$