Задача 1 $X_1 \ldots X_n \sim Exp(\theta)$

1) Метод моментов $\underset{1/\theta}{\overset{\parallel}{E_\theta X_1}} = \overline{X}$ $\hat{\theta}_1(X) = \dfrac{1}{\overline{X}}$

2) Обобщённый метод моментов с ф-цией $g(x) = I\{x > 1\}$

$$\underset{e^{-\theta}}{\overset{\parallel}{E_\theta I\{X_1 > 1\}}} = \overline{g(X)} = \overline{I\{X > 1\}}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\theta}_2 = -\ln \overline{I\{X>1\}}$$

ЗБЧ: $\dfrac{1}{\overline{X}} \xrightarrow{P_\theta \text{ п.н.}} \theta \Rightarrow \hat{\theta}_1(X)$ – сильно сост. оц. θ

$\overline{I\{X>1\}} \xrightarrow{P_\theta \text{ п.н.}} e^{-\theta} \Rightarrow$ по т. о насл. сх. $\hat{\theta}_2(X)$ – сильносост оц. θ

ЦПТ: [в прошлые разы $\hat{\theta}_1(X)$ – ас. норм. оц. θ с а.д. $\theta^2 = \sigma_1^2(\theta)$]

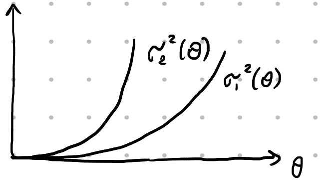
$\overline{I\{X>1\}}$ – ас. норм. оц. $e^{-\theta}$ с а.д. $D_\theta I\{X_1>1\} =$

$= E_\theta I\{X>1\} - (E_\theta I\{X_1>1\})^2 = e^{-\theta} - e^{-2\theta}$

$\Rightarrow$ по δ-методу $\tau(x) = -\ln(x)$

$$\hat{\theta}_2(X) \text{ – а.н.о. } \theta \text{ с ас. д. } \sigma_2^2(\theta) = (e^{-\theta} - e^{-2\theta})\left([-\ln x]'\Big|_{x=e^{-\theta}}\right)^2 =$$

$$= e^{\theta} - 1$$



Видимо $\hat{\theta}_1$ лучше $\hat{\theta}_2$, т.к. $\sigma_1^2(\theta) < \sigma_2^2(\theta)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нужно научиться сравнивать оценки

Методы поиска и сравнения оценок

3

Метод максимального правдоподобия

3.1

Пусть $X = (X_1 \ldots X_n)$ — выборка из неизв. распр. $P \in \mathcal{P} = \{P_\theta \mid \theta \in \Theta\}$,

причём

1) либо все распр P_θ абс. непр. и $p_\theta(x)$ — плотн. P_θ

2) либо все P_θ дискретны и $p_\theta(x)$ — дискр. плотн. P_θ

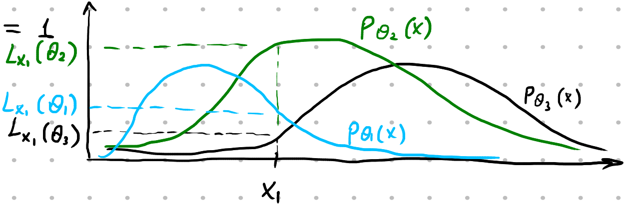
($\mathcal{P}$ — доминируемое семейство распределений)

Опр $L_X(\theta) = \prod\limits_{i=1}^{n} p_\theta(x_i)$ наз-ся **функцией правдоподобия**

(в англ. лит. likelihood, ф-ция от θ)

$\mathcal{L}_X(\theta) = \ln L_X(\theta)$ **логарифмическая ф-ция правдоподобия**

Пример $|X| = 1$



Смысл: $L_X(\theta)$ — степень правдоподобия θ для выборки X

$\Rightarrow$ в качестве оценки логично брать $\arg\max\limits_{\theta} L_X(\theta)$

Опр $\hat{\theta} = \arg\max\limits_{\theta \in \Theta} L_x(\theta)$ наз-ся оценкой макс. правдоподобия (ОМП / MLE)

? Существует ли максимум

? Единственный ли максимум

Параметризация $U[l, r]$

$U[mid, len]$

Утв Пусть $\hat{\theta}$ — ОМП для θ, $\tau : \Theta \to \Psi$ — биекция, тогда

$\tau(\hat{\theta})$ — ОМП для $\tau(\theta)$

т.е. ОМП не зависит от параметризации

Теорема Пусть $\forall n$ $\forall X_1 \ldots X_n$ ур-е правдоподобия $\frac{\partial L_x(\theta)}{\partial \theta} = 0$ имеет единственное решение, тогда

1) [L1 – L5] ОМП – состоят оц. θ

2) [L1 – L9] ОМП – а. н. о. θ с а. м. к. $i^{-1}(\theta)$

$i(\theta)$ – инф. матр. Фишера

$$i(\theta)_{jk} = E_\theta \frac{\partial L_{x_1}(\theta)}{\partial \theta_j} \frac{\partial L_{x_1}(\theta)}{\partial \theta_k}$$

▲ на посл. лекции

Пример $X_1 \ldots X_n \sim Exp(\theta)$

Найти ОМП для θ, $\frac{1}{\theta}$ и их ас. д.

$$p_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}$$

$$L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum x_i}$$

$$\mathcal{L}_X(\theta) = n \ln \theta - \theta \sum X_i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_X(\theta)}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta} - \sum X_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X}} \text{ — ОМП для } \theta$$

По св-ву нез. от параметризации $\overline{X}$ — ОМП для $\frac{1}{\theta}$

$$i(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial L_{x_1}(\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = E_\theta\Big(\underset{\underset{E_\theta X_1}{\shortparallel}}{\frac{1}{\theta}} - X_1\Big)^2 = D_\theta X_1 = \frac{1}{\theta^2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{ac. g.} \quad i^{-1}(\theta) = \theta^2$$

Пример $X_1 \ldots X_n \sim Bern(\theta)$ Найти ОМП для θ и $\ln \frac{\theta}{1-\theta}$

логит-функция

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \theta, & x = 1 \\ 1-\theta, & x = 0 \end{cases} = \theta^x (1-\theta)^{1-x} \quad x \in \{0, 1\}$$

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(X_i) = \theta^{\sum x_i} (1-\theta)^{n - \sum x_i}$$

$$L_x(\theta) = \sum x_i \ln \theta + (n - \sum x_i) \ln 1-\theta$$

$$\frac{\partial L_x(\theta)}{\partial \theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n - \sum x_i}{1-\theta} = 0$$

$$\sum x_i - \cancel{\theta \sum x_i} - n\theta + \cancel{\theta \sum x_i} = 0$$

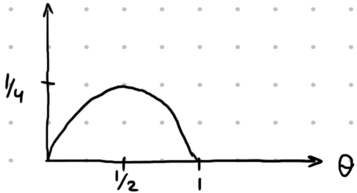
$$\hat{\theta} = \overline{X} \quad \text{— ОМП для } \theta$$

По св-ву нез-ти ОМП от парам-ции

$$\ln \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} \text{ — ОМП для } \ln \frac{\theta}{1-\theta}$$

$$i(\theta) = E_\theta \left(\frac{\partial L_{X_1}(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 = E_\theta \left(\frac{X_1}{\theta} - \frac{1-X_1}{1-\theta} \right)^2 = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2} E_\theta \Big(X_1 - \cancel{\theta X_1} - \underbrace{\theta}_{= E_\theta X_1} + \cancel{\theta X_1} \Big)^2 =$$

$$= \frac{1}{\theta^2(1-\theta)^2} D_\theta X_1 = \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

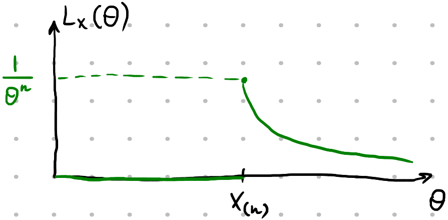


$$i^{-1}(\theta) = \theta(1-\theta)$$

Пример $X_1 \dots X_n \sim U[0, \theta]$

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} I\{x \in [0, \theta]\}$$

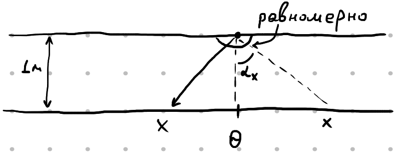
$$L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i) = \frac{1}{\theta^n} I\{\forall i \ \ x_i \in [0, \theta]\} = \frac{1}{\theta^n} I\{X_{(1)} \geq 0, \ X_{(n)} \leq \theta\}$$



ОМП $\hat{\theta} = X_{(n)}$

$$n(X_{(n)} - \theta) \xrightarrow{d} Exp(1/\theta)$$

Задача γ-котики



Найдём распр. X, заметив, что оно симметрично от-но θ

$x \geq 0$

$$F_\theta(x) = P_\theta(X \leq x) = P_\theta(X \leq \theta) + P_\theta(\theta \leq X \leq x) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha_x}{\pi} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\,\mathrm{atan}\,(x-\theta)$$

Дифф-руем $\quad p_\theta(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}$ – плотность распр. Коши

Задача оценить θ

1) Метод моментов: моментов нет $\Rightarrow$ неприменим

2) Метод макс. правдоподобия

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\pi\left(1+(x_i-\theta)^2\right)}$$

$$L_x(\theta) = -n \ln \pi - \sum_{i=1}^{n} \ln\left(1+(x_i-\theta)^2\right)$$

$$\frac{\partial l_x(\theta)}{\partial \theta} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{2(\theta - x_i)}{1+(x_i-\theta)^2} = 0$$

подумать сколько максимумов

3) Рассмотрим $\hat{\theta} = \bar{X}$

Пусть $\theta = 0$, найдём распр $\bar{X}$

$\varphi_{\xi}(t) = E e^{it\xi}$ — х.ф.

Коши(0)

$\varphi_{\xi}(t) = e^{-|t|}$, если $\xi \sim Cauchy(0)$

$$\varphi_{\bar{X}}(t) = E e^{it(\frac{1}{n}\Sigma x_i)} = E e^{i(\frac{t}{n})\Sigma x_i} = E \prod_{i=1}^{n} e^{i(\frac{t}{n})x_i} = [\text{нез-ть}] =$$

$$= \prod_{i=1}^{n} E e^{i(\frac{t}{n})x_i} = \prod_{i=1}^{n} \varphi_{x_1}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi_{x_i}\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \left(e^{-|\frac{t}{n}|}\right)^n = e^{-|t|}$$

$$\Rightarrow \bar{X} \overset{d}{=} X_1 \quad (\text{по т. о ед-ти})$$

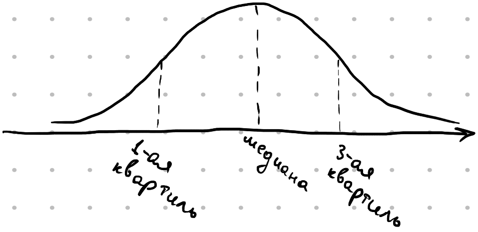
т.е. наших методов не хватает

Выборочные квантили

$$u_\alpha = \max \{ x : F(x) \geq \alpha \}$$

$\frac{1}{2}$ - квантиль — медиана

$\frac{1}{4}$ - квантиль — 1-ая квартиль



Опр. Мода = $\arg\max_x p(x)$

Опр. Выборочная α-квантиль $\hat{u}_\alpha = X_{(\lceil n\alpha \rceil)}$

Выборочная медиана $\hat{\mu} = \begin{cases} X_{(k+1)}, & n = 2k+1 \\ \dfrac{X_{(k)} + X_{(k+1)}}{2}, & n = 2k \end{cases}$

Теорема (б/д) Пусть $X_1 \ldots X_n \ldots$ — выборка неогр. разм из P

Теорема 2. *Если ф. р. $F(x)$ имеет положительную плотность $f(x)$ в окрестности квантили x_p, $0<p<1$, то выборочная квантиль $X_{[np],n}$ повторной выборки из $F(x)$ асимптотически нормальна $N(x_p,\ p(1-p)f(x_p)^{-2}n^{-1})$.*

с плотностью $f(x)$

$p \in (0,1)$, т.ч. $f(u_p) > 0$ $\leftarrow f(u_p) \neq 0$

Тогда $\sqrt{n}\left(\hat{u}_p - u_p\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \dfrac{p(1-p)}{f^2(u_p)}\right)$

Ан-но для $\hat{\mu}$: $\sqrt{n}\left(\hat{\mu} - \mu\right) \xrightarrow{d} N\left(0, \dfrac{1}{4f^2(\mu)}\right)$ (если $f(x)$ — непр. дифф. в μ и $f(\mu) > 0$)

Для γ - котиков

$\hat{\mu}$ - а.н.о θ с ас.д. $\frac{\pi^2}{4} \approx 2{,}47$

Но $i(\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow i^{-1}(\theta) = 2$ - лучшая ас.д.