Статистические св-ва лин. моделей 6

Гауссовская линейная модель 6.1

Пред. зависимость $y(x) = x^T\theta$

Наблюдения $Y = X\theta + \varepsilon$ $\quad Y \in \mathbb{R}^n \quad X \in \mathbb{R}^{n\times d}$

$\theta \in \mathbb{R}^d \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^n$

Предположения:

1) $E\varepsilon = 0$
2) $D\varepsilon = \sigma^2 I_n$
3) ε – норм. вектор

$\left.\right\} \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$

лин. мод. гаусс.

Обозначим $e_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - x_i^T \hat{\theta}$ остатки

$e = (e_1 \ldots e_n)$ вектор остатков

$RSS(\theta) = \| y - X\theta \|^2$ — ост. сумма квадратов

$RSS(\hat{\theta}) = \| e \|^2$

Утв. $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{RSS(\hat{\theta})}{n-d}$ — несмещ. оц. для σ^2 (п. 3 не требуется)

док-во было раньше

$$\boxed{\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y}$$

Утв. В гаусс. лин. модели:

1) $\hat{\theta}$ и e нез.

2) $\dfrac{1}{\sigma^2} \| X\hat{\theta} - X\theta \|^2 \sim \chi^2_d$ $\quad \dfrac{1}{\sigma^2} \| e \|^2 \sim \chi^2_{n-d}$

▲ $y = X\theta + \varepsilon \sim N(X\theta, \sigma^2 I_n)$

Рассмотрим пр-ва $\mathbb{R}^n = L(X) \oplus L^{\perp}(X)$

где $L(X) = \{X\theta \mid \theta \in \mathbb{R}^d\}$ – подпр-во, образованное столбцами X

$$\mathrm{proj}_{L(X)}\, y = \underset{A \in L(X)}{\mathrm{argmin}} \| y - A \|^2 = X\hat{\theta}$$

$$\mathrm{proj}_{L^{\perp}(X)}\, y = y - \mathrm{proj}_{L(X)}\, y = y - X\hat{\theta} = e$$

1) По т. о разл. гаус. вектора: $X\hat{\theta}$ и e нез.

$\hat{\theta} = [(X^T X)^{-1} X^T] X\hat{\theta}$ – лин. комб. $X\hat{\theta}$ $\Rightarrow$ $\hat{\theta}$ и e нез.

2) $\frac{1}{\sigma^2} \| X\hat{\theta} - E X\hat{\theta} \|^2 = \frac{1}{\sigma^2} \| X\hat{\theta} - X\theta \|^2 \sim \chi^2_{\dim L(X)} = \chi^2_d$

$$\frac{1}{\sigma^2}\| e - \underbrace{Ee}_{=0} \|^2 \sim \chi^2_{\dim L^{\perp}(X)} = \chi^2_{n-d}$$

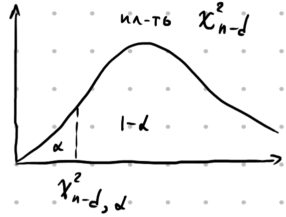
т.к. $Ey = X\theta$

$EX\hat{\theta} = X\theta$

$\blacksquare$

① Дов. инт. для σ^2

$$\hat\sigma^2 = \frac{\|e\|^2}{n-d}, \qquad \frac{1}{\sigma^2}\|e\|^2 \sim \chi^2_{n-d} \quad \Rightarrow \quad \frac{(n-d)\hat\sigma^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-d}$$



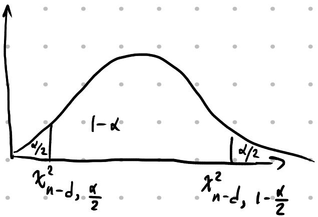
$$P\left(\frac{(n-d)\hat\sigma^2}{\sigma^2} \geqslant \chi^2_{n-d,\alpha}\right) = 1-\alpha$$

$$P\left(\sigma^2 \leqslant \frac{(n-d)\hat\sigma^2}{\chi^2_{n-d,\alpha}}\right) = 1-\alpha$$

$$\sigma^2 \in \left(0;\ \frac{(n-d)\hat\sigma^2}{\chi^2_{n-d,\alpha}}\right)$$ — ур. дов. $1-\alpha$ для σ^2

Другой интервал:

$$\left(\frac{(n-d)\,\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-d,\,1-\frac{\alpha}{2}}} \;;\; \frac{(n-d)\,\hat{\sigma}^2}{\chi^2_{n-d,\,\frac{\alpha}{2}}} \right)$$



② Дов. инт. для θ_j и $\underbrace{\text{критерий для } H_0: \theta_j = 0}_{}$

гипотеза о незначимости коэф-та

Утв. $\forall c \in \mathbb{R}^d$ $\quad \dfrac{c^T(\hat\theta - \theta)}{\hat\sigma\sqrt{c^T(X^TX)^{-1}c}} \sim T_{n-d}$ – распр. Стьюдента

$\blacktriangle$ $\hat\theta \sim N(\theta, \sigma^2(X^TX)^{-1})$

$\boxed{\begin{aligned} &E\hat\theta = \theta \\ &D\hat\theta = \sigma^2(X^TX)^{-1} \\ &\text{когда-то было}\end{aligned}}$

нормальность, т.к. лин. комб. нормальных

$$c^T\hat\theta \sim N(c^T\theta, c^T(X^TX)^{-1}c\,\sigma^2)$$

$$\frac{c^T(\hat\theta - \theta)}{\sigma\sqrt{c^T(X^TX)^{-1}c}} \sim N(0,1)$$

Пред. пункт: $\quad \dfrac{(n-d)\hat\sigma^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-d}$

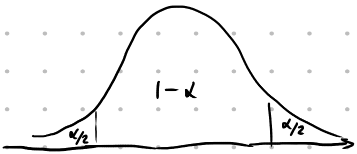
$$T(X,Y) = \frac{c^T(\hat\theta - \theta)}{\sigma\sqrt{c^T(X^TX)c}} \frac{\sqrt{n-d}}{\sqrt{\frac{(n-d)\,\hat\sigma^2}{\sigma^2}}} = \frac{c^T(\hat\theta-\theta)}{\hat\sigma\sqrt{c^T(X^TX)^{-1}c}} \sim T_{n-d}$$

по опр. Стьюдент

∎

Возьмём $c = \begin{array}{c} \\ \end{array}\!\!\begin{array}{ccccc} & & j & & \\ (0 & \ldots & 1 & \ldots & 0) \end{array}$

$$\Rightarrow \frac{\hat\theta_j - \theta_j}{\hat\sigma\sqrt{(X^TX)^{-1}_{jj}}} \sim T_{n-d}$$



$$P\left(\frac{|\hat\theta_j - \theta_j|}{\hat\sigma\sqrt{(X^TX)^{-1}_{jj}}} \leq T_{n-d,\,1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1-\alpha$$

$$\left(\hat\theta_j \pm T_{n-d,\,1-\frac{\alpha}{2}}\,\hat\sigma\sqrt{(X^TX)^{-1}_{jj}}\right)$$ дов. инт. для θ_j ур. дов. $1-\alpha$

При $H_0: \theta_j = 0$ выполнено $\dfrac{\hat{\theta}_j}{\hat{\sigma}\sqrt{(X^T X)^{-1}_{jj}}} \sim T_{n-d}$

Критерий: $S = \left\{ |\hat{\theta}_j| \geqslant T_{n-d,\, 1-\frac{\alpha}{2}}\, \hat{\sigma} \sqrt{(X^T X)^{-1}_{jj}} \right\}$

③ Дов. область для θ

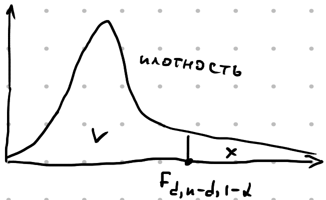
$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sigma^2}\|X\hat\theta - X\theta\|^2 \sim \chi^2_d \\ &\frac{1}{\sigma^2}\|e\|^2 \sim \chi^2_{n-d} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F(X,Y) = \frac{\|X\hat\theta - X\theta\|^2}{\|e\|^2} \cdot \frac{n-d}{d} \sim F_{d,\, n-d}$$

расп. Фишера

Опр. $\xi \sim \chi^2_{k_1}$ $\quad y \sim \chi^2_{k_2}$ — нез.

Тогда $\zeta = \dfrac{\xi\, k_2}{y\, k_1} \sim F_{k_1, k_2}$ — расп. Фишера с k_1, k_2 ст. св.

$F_{k_1, k_2, \alpha}$ — α-квантиль Фишера



$\{\theta \in \mathbb{R}^d \mid F(X, Y) \leq F_{d, n-d, 1-\alpha}\}$ — дов. эллипсоид для θ ур. дов. $1-\alpha$

④ Общий случай линейных гипотез

Опр. Линейная гипотеза — $H_0: T\theta = \tau$

где $T \in \mathbb{R}^{k \times d}$

$\tau \in \mathbb{R}^k$

Пример $H_0: \theta_1 = 0, \quad \theta_2 = \theta_3$

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ сводим $T\theta = \tau$

Вспомним: $\hat{\theta} \sim N(\theta, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$

$$\hat{\tau} := T\hat{\theta} \sim N(\underbrace{T\theta}_{=0 \text{ при } H_0}, \overbrace{T(X^T X)^{-1} T^T \sigma^2}^{B})$$

При H_0 получ. $\frac{1}{\sigma} B^{-1/2} (\hat{\tau} - \tau) \sim N(0, I_k)$

Скалярный квадрат $\frac{1}{\sigma^2} (\hat{\tau} - \tau)^T B^{-1} (\hat{\tau} - \tau) \sim \chi^2_k$

и зависит только от $\hat{\theta}$

Знаем, что $\frac{1}{\sigma^2} \|e\|^2 \sim \chi^2_{n-d}$ и нез. с $\hat{\theta}$

По опр. распр. Фишера: $F(X, Y) = \frac{(\hat{\tau} - \tau)^T B^{-1} (\hat{\tau} - \tau)}{\|e\|} \frac{n-d}{k} \sim F_{k, n-d}$

Крит. $\left\{ F(X,Y) \geq F_{k,\, n-d,\, 1-\alpha} \right\}$

(5) Дов. инт. для θ_j и крит. для $H_0: \theta_j = 0$

при гетероскедастичности $D\varepsilon = \mathrm{diag}(\sigma_1^2 \dots \sigma_n^2)$

$$\sqrt{n}\,(\hat\theta - \theta) \xrightarrow{d} N(0, B)$$

Домножим на $c \in \mathbb{R}^d$

$$\sqrt{n}\, c^T(\hat\theta - \theta) \xrightarrow{d} N(0, c^T B c)$$

$$\frac{\sqrt{n}\, c^T(\hat\theta - \theta)}{\sqrt{c^T B c}} \to N(0,1)$$

$\hat\Sigma = (X^TX)^{-1}X^T \cdot \mathrm{diag}(\sigma_1^2 - \sigma_n^2)\, X\, (X^TX)^{-1}$

устойчивая оц. дисп.

Из утв $n\hat\Sigma \xrightarrow{P} B$ получ., что $\sqrt{\dfrac{c^T B c}{c^T n \hat\Sigma c}} \xrightarrow{P} 1$

по т. о насл. сх.

По лемме Слуцкого

$$\sqrt{n}\,\frac{c^T(\hat\theta-\theta)}{\sqrt{c^T B c}}\cdot\sqrt{\frac{c^T B c}{c^T n\hat\Sigma c}}=\sqrt{n}\,\frac{c^T(\hat\theta-\theta)}{\sqrt{c^T n\hat\Sigma c}}=\frac{c^T(\hat\theta-\theta)}{\sqrt{c^T\hat\Sigma c}}\xrightarrow{d}N(0,1)$$

Берем $c=(0\ \ldots\ \overset{j}{1}\ \ldots\ 0)$

$$\frac{\hat\theta_j-\theta_j}{\sqrt{\hat\Sigma_{jj}}}\to N(0,1)$$

дов. инт. $\left(\hat\theta_j\pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat\Sigma_{jj}}\right)$

Критерий: при H_0 $\dfrac{\hat\theta_j}{\sqrt{\hat\Sigma_{jj}}}\xrightarrow{d}N(0,1)$ $\left\{|\hat\theta_j|\geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\hat\Sigma_{jj}}\right\}$