№1 $\quad X_1 \dots X_n \sim Bin(m, \theta)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\uparrow$ изв.

$$I_X(\theta) = -E_\theta \frac{\partial^2 L_x(\theta)}{\partial \theta^2}$$

$$L_x(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(C_m^{x_i} \cdot \theta^{x_i} \cdot (1-\theta)^{m-x_i}\right) = \sum \log(C_m^{x_i}) + \sum x_i \log(\theta) + \sum (m-x_i) \cdot \log(1-\theta)$$

$$\frac{\partial L_x}{\partial \theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{\sum (m-x_i)}{1-\theta}$$

$$\frac{\partial^2 L_x}{\partial \theta^2} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} - \frac{\sum (m-x_i)}{(1-\theta)^2}$$

$$E_\theta \frac{\partial^2 L_x}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\theta^2} \cdot n \cdot (m \cdot \theta) - \frac{1}{(1-\theta)^2}(nm - n \cdot m \cdot \theta) =$$

$$= n \cdot m \left(-\frac{1}{\theta} - \frac{1}{(1-\theta)}\right) = n \cdot m \left(-\frac{1-\theta}{\theta(1-\theta)} - \frac{\theta}{\theta(1-\theta)}\right) =$$

$$= n \cdot m \cdot \frac{(-1)}{\theta(1-\theta)} \Rightarrow I(\theta) = n \cdot m \cdot \frac{1}{\theta(1-\theta)}; \quad i(\theta) = \frac{m}{\theta(1-\theta)}$$

Ас. расп. ОМП $\hat{\theta}$: $\frac{\theta(1-\theta)}{n \cdot m}$

№2 $X_1 \dots X_n \sim Exp(\theta)$

$$i(\theta) = -E_\theta \frac{\partial^2 L_{x_1}(\theta)}{\partial\theta^2}$$

$$L_{x_1}(\theta) = \log(\theta e^{-\theta x_1}) = \log(\theta) - \theta x_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial\theta} = \frac{1}{\theta} - \theta$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$E\frac{\partial^2 L}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{\theta^2} \Rightarrow i(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$$

№3 $\mathcal{P} = \{\Gamma(\alpha,\beta) \mid \alpha>0,\ \beta>0\}$

Посчитаем ас. м. ков. ОМП. (α,β)

$$L_x(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{n} \log\left(\frac{\alpha^{\beta}\cdot x_i^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\cdot e^{-\alpha x}\right) =$$

$$= n\cdot\log\left(\frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\right) + (\beta-1)\cdot\sum\log(x_i) - \alpha\sum x_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial\alpha} = n\cdot\beta\cdot\frac{1}{\alpha} - \sum x_i$$

$$\frac{\partial L}{\partial\beta} = n\cdot\log(\alpha) - n\cdot\underbrace{\Gamma'(\beta)\cdot\frac{1}{\Gamma(\beta)}}_{=\psi(\beta)} + \sum\log(x_i)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha^2} = -\frac{n\beta}{\alpha^2}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\beta^2} = -n\,\psi'(\beta) = -n\,\psi^{(1)}(\beta)$$

полигамма функция

тригамма функция

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{n}{\alpha}$$

$$I(\alpha,\beta) = -E_{\alpha,\beta}\begin{pmatrix} -\frac{n\beta}{\alpha^2} & \frac{n}{\alpha} \\ \frac{n}{\alpha} & -n\psi^{(1)}(\beta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n\beta}{\alpha^2} & -\frac{n}{\alpha} \\ -\frac{n}{\alpha} & n\psi^{(1)}(\beta)\end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha^2} & -\frac{1}{\alpha} \\ -\frac{1}{\alpha} & \psi^{(1)}(\beta)\end{pmatrix}$$

Ас. матр. ков: $$i^{-1}(\theta) = \frac{1}{\frac{\psi^{(1)}(\beta)\cdot\beta-1}{\alpha^2}}\cdot\begin{pmatrix}\psi^{(1)}(\beta) & \frac{1}{\alpha} \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{\beta}{\alpha^2}\end{pmatrix} = \left(\psi^{(1)}(\beta)\cdot\beta-1\right)^{-1}\begin{pmatrix}\alpha^2\psi^{(1)}(\beta) & \alpha \\ \alpha & \beta\end{pmatrix}$$

№4 ~~[illegible]~~ Лог. регр.

$$X_1 \dots X_n, \quad Y_i \sim Bern(p(x_i))$$

где $p(x_i) = \frac{1}{1+e^{x_i^T\theta}} = \sigma(x_i^T\theta)$

• Имея на руках X, Y найдём ОМП.

$$L_{XY}(\theta) = \sum y_i \log(\sigma(x_i^T\theta)) + (1-y_i)\log(1-\sigma(x^T\theta))$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{\sigma'(x_i^T\theta)}{\sigma(x_i^T\theta)} - (1-y_i)\frac{\sigma'(x_i^T\theta)}{1-\sigma(x^T\theta)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sigma'(x_i^T\theta)\frac{y_i(1-\sigma(x_i^T\theta)) - (1-y_i)\sigma(x_i^T\theta)}{\sigma(x_i^T\theta)(1-\sigma(x_i^T\theta))} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cancel{\sigma(x_i^T\theta)(1-\sigma(x_i^T\theta))} \frac{y_i - \sigma(x_i^T\theta)}{\cancel{\sigma(x_i^T\theta)(1-\sigma(x_i^T\theta))}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{ij}(y_i - \sigma(x_i^T\theta))$$

$$I_{jk} = -\frac{\partial^2 L}{\partial\theta_j \partial\theta_k} = + \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\sigma'(x_i^T\theta) = + \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\sigma(x_i^T\theta)(1-\sigma(x_i^T\theta)) \cdot x_{ik}$$

$$\Rightarrow I = X^T \operatorname{diag}(\sigma(x_i^T\theta)(1-\sigma(x_i^T\theta))) \cdot X = X^T D X$$

Где X — матрица: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \hline x_2 \\ \hline \dots \end{pmatrix}$ — сост. из строк x_i

- Напрямую найти $\hat{\theta}$ сложно, на ML мы решали это град. спуском. Пусть нашли $\hat{\theta}$, решив задачу $\nabla L_{x,y}(\theta) = 0$.

- Тогда рассм $i(\theta) = \frac{I(\theta)}{n}$

Утв-ся, что $\hat{\theta}$ — ас. норм. оценка с ас. матр. ковариаций $M = i^{-1}(\hat{\theta}) = n\, I^{-1}(\hat{\theta}) = n\,(X^T D X)^{-1}$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, M)$$

$$(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, I^{-1}(\hat{\theta}))$$

$$x_0^T(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, x_0^T I^{-1}(\hat{\theta})\, x_0)$$

$$\frac{x_0^T(\hat{\theta} - \theta)}{\sqrt{x_0^T I^{-1}(\hat{\theta})\, x_0}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

$$x_0^T \theta \in \left(x_0^T \hat{\theta} \mp z_{\frac{1+\alpha}{2}} \sqrt{x_0^T I^{-1}(\hat{\theta})\, x_0}\right)$$

• Дов интервал для ожид. отклика уровня α

$$p(x_0) \in \sigma\left(x_0^T\hat{\theta} \mp z_{\frac{1+\alpha}{2}}\sqrt{x_0^T I^{-1}(\hat{\theta})\, x_0}\right)$$

где $I = X^T D X$.

Формулировки:

• Опр GLM (generalized linear models).

• Ожид. отклик $y = \mu_\theta(x)$

причём $g(\mu_\theta(x)) = x^T\theta$ // предпол. модели

$g(z)$ — линейн. ожид. отклика

• Наблюд. отклик

$Y_i \sim P_{\mu_\theta(x_i)}$, где $\{P_\psi\}$ — сем. распр

• Оценка отклика $\hat{y} = g^{-1}(x^T\hat{\theta})$

где $\hat{\theta}$ — ОМП

• Опр Информация Фишера — матрица

$I_x(\theta)$, т.ч. $[I_x(\theta)]_{ij} = -\dfrac{\partial^2 L_x(\theta)}{\partial\theta_i\,\partial\theta_j}$.

где $l_x(\theta)$ — логарифм. функция правдоподобия

$$l_x(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \log(p_\theta(x_i))$$

• Утв $\hat{\theta}^n$ — ас. норм оценка с ас. матр.

ков. $i^{-1}(\hat{\theta}) = \left(\frac{I(\hat{\theta})}{n}\right)^{-1}$,

Если $\{P_\psi \mid \psi \in \Psi\}$ в эксп. класс распр