Стата. Теор ДЗ №2

① $X_1 \ldots X_n \sim U(0, \theta)$. Будем проверять верные св-ва

(1.1) $\hat{\theta} = 2\bar{X}$

Несмещённость: $E\hat{\theta} = \left(E\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\cdot\frac{2}{n} =$

$= 2EX_1 = \theta$

Состоятельность:

Следует из сильн. сост.

Сильн. сост-ть: $\bar{X}_n \xrightarrow{п.н.} \frac{\theta}{2}$ по УЗБЧ.

$2\bar{X}_n \xrightarrow{п.н.} \theta$ при $n \to \infty$

(1.2) $\dfrac{\overline{X} + X_{(n)}}{2} = \hat{\Theta}$

× Несмещённость: $E\hat{\Theta} = E\overline{X} + E\dfrac{X_{(n)}}{2} = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{n\theta}{(n+1)\cdot 2} \neq \Theta$

Состоятельность: из сильн. сост.

Сильн. сост.: $\overline{X} \xrightarrow{п.н.} \dfrac{\theta}{2}$, $X_{(n)} \xrightarrow{п.н} \Theta$ $\Rightarrow \overline{X} + \dfrac{X_{(n)}}{2} \to \Theta$

Сходимость п.н. экв. $\sup\limits_{k \geq n} |X_{(k)} - \Theta| \xrightarrow{P} 0$

$= \sup\limits_{k \geq n} (\Theta - X_{(k)}) = \underbrace{\Theta - X_{(n)}}_{\xrightarrow{P} 0}$, док-во на паре

1.3 $\hat{\Theta} = (n+1) \cdot X_{(1)}$

Несмещённость: $E\hat{\Theta} = (n+1) \cdot \frac{\Theta}{n+1} = \Theta$

* Состоятельность:

$P\left(|(n+1) \cdot X_{(1)} - \Theta| \geq \varepsilon \right) = P\left((n+1) X_{(1)} < \Theta - \varepsilon\right)$

$= P\left(X_{(1)} < \frac{\Theta - \varepsilon}{n+1}\right) = \int\limits_0^{\frac{\Theta-\varepsilon}{n+1}} \frac{n}{\Theta} \left(\frac{\Theta - x}{\Theta}\right)^{n-1} dx =$

$= 1 - \left(1 - \frac{\Theta - \varepsilon}{(n+1)\Theta}\right)^n \to 1 - e^{-\left(1 - \frac{\varepsilon}{\Theta}\right)}$

* Сильн. сост (не следует из несостоятельности)

(14) $\hat{\Theta} = X_{(1)} + X_{(n)}$

Несмещённость $EX_{(1)} + EX_{(n)} = \frac{\Theta}{n+1} + n\frac{\Theta}{n+1} = \Theta$

Состоятельность: (из сильн. сост)

Сильн. сост-ть: $\hat{\Theta} = \underset{\substack{\downarrow \text{п.н.} \\ 0}}{X_{(1)}} + \underset{\substack{\downarrow \text{п.н.} \\ \Theta}}{X_{(n)}} \xrightarrow{\text{п.н.}} \Theta$

(1.5) $\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} X_{(n)}$

Несмещённость $E\hat{\theta} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} \theta = \theta$

Состоятельность

$$P\left(X_{(n)} \cdot \frac{n+1}{n} < \theta - \varepsilon\right) = P\left(X_n < \frac{n(\theta - \varepsilon)}{n+1}\right) =$$

$$= \left(\frac{n(\theta-\varepsilon)}{(n+1)\theta}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \cdot C^n \Rightarrow 0$$

$0 < C < 1$

Сильн. сост.: аналог-но (1.2)

4/3 sup и монотонность.

② $\hat{\Theta}_n$ – А.Н.О. Θ с А.Д. $\sigma^2(\Theta)$

Д/ТБ $\hat{\Theta}_n$ – сост. оц. Θ

По опред. А.Н.О. $\hat{\theta} - \theta \xrightarrow{d} \frac{Z}{\sqrt{n}}$, где $Z \sim N(0, \sigma^2(\theta))$

по л. Слуц. $\underset{\substack{\shortparallel \\ \text{const}}}{\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0} \Rightarrow \hat{\theta} - \theta \xrightarrow{d} 0 \Rightarrow$

$\hat{\theta} \xrightarrow{d} \theta \Rightarrow$

$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta \Rightarrow$ сост. оценка

③ $\begin{cases} \tau(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{x} \text{ – непр. ф-ия.} \\ (\overline{X})^{-1} \text{ – ас. норм. оц. } \theta \end{cases}$ // т.к. $\overline{X}$ – ас. норм. оц. θ^{-1} с А.Д. θ^{-2} по ЦПТ $\overset{\shortparallel}{EX_i}$

с А.Д. $\left(-\frac{1}{\theta^2}\right)\theta^{-2}\left(-\frac{1}{\theta^{-2}}\right) = \theta^2$

Тогда по теор. о дельта-методе:

$\overline{X} \ln \overline{X}$ – ас. норм. оц. $\frac{1}{\theta} \ln \frac{1}{\theta}$

с А.Д. $\theta^2 \cdot (\tau'(\theta))^2 = \theta^2 \cdot \left(-x^{-2} \ln \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot x \cdot (-x^{-2})\right)^2 =$

$= \theta^2 \left(-\theta^{-2} \ln \frac{1}{\theta} - \theta^{-2}\right)^2 = \theta^{-2}\left(1 + \ln \theta^{-1}\right)^2$

Исправлено

№4 По ЦПТ $\begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{X^2} \end{pmatrix}$ - а.н.о $\begin{pmatrix} EX_1 \\ EX_1^2 \end{pmatrix}$

Применим дельта-метод $\tau\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_1^2$

$\tau\begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{X^2} \end{pmatrix} = \overline{X^2} - (\overline{X})^2 = \underline{S^2}$ - $\underline{\text{а.н.о.}}$ $EX_1^2 - (EX_1)^2 = \underline{\sigma^2}$

Притом $\Sigma(\theta) = \begin{pmatrix} DX_1 & cov(X_1, X_1^2) \\ cov(X_1, X_1^2) & DX_1^2 \end{pmatrix}$ - ~~[illegible]~~ сущ-от, т.к. EX_1^k - конечна (при $k \le 4$.)

$DX_1^2 = EX_1^4 - (EX_1^2)^2$

с а.ф. $= (-2EX_1 \quad 1)\ \Sigma \begin{pmatrix} -2EX_1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\ominus\ 4E^2X_1(EX_1^2 - E^2X_1) - 4EX_1(EX_1^3 - EX_1EX_1^2) + (EX_1^4 - E^2X_1^2) =$

$\ominus\ 8E^2X_1EX_1^2 - 4E^4X_1 - 4EX_1EX_1^3 + EX_1^4 - E^2X_1^2$

<u>Дельта метод</u> <u>применим</u>, т.к τ - непр. дифф-ма

№5 $T = \frac{\left(\overline{x^2}\right)^2}{4\,\overline{|x|}^3} = f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\Bigg|_{\substack{a=\overline{|x|} \\ b=\overline{x^2}}}$

ИСПРАВЛЕНО

ДЕЛЬТА-МЕТОД ПРИМЕНИМ, т.к НЕпр. дифф. при $a>0$

ЭТОГО ДОСТАТОЧНО, т.к $\overline{|x|}>0$

$$f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{b^2}{4a^3}$$

Заметим $E|X_1| = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{2\theta} e^{-\frac{|x|}{\theta}} dx =$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\cancel{x}}{\theta} e^{-\frac{\cancel{x}}{\theta}} dx = +\theta \int_0^{\infty} \frac{x}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \left(+\frac{1}{\theta} dx\right) =$$

$$= \theta \int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \theta \cdot x \cdot -e^{-x}\Big|_0^{\infty} - \theta \int_0^{\infty} 1(-e^{-x})\, dx =$$

$$= \theta \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \theta\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^{\infty} = \theta e^{-x}\Big|_{\infty}^{0} = \theta$$

$EX_1^2 = 2\theta^2$, по общей формуле $E|X_1|^k = k!\,\theta^k$

(Ан-ное рас-во)

Тогда поскольку $\begin{pmatrix} \overline{|x|} \\ \overline{x^2} \end{pmatrix}$ - А.Н.О. $\begin{pmatrix} E|x| \\ Ex^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ 2\theta^2 \end{pmatrix}$, то

$f\begin{pmatrix} \overline{|x|} \\ \overline{x^2} \end{pmatrix} = \underline{T}$ $\underline{\text{- А.Н.О.}}$ $f\begin{pmatrix} \theta \\ 2\theta^2 \end{pmatrix} = \frac{4\theta^4}{4\theta^3} = \underline{\theta}$, ч.т.д

ЭТО БЫЛО ЗДЕСЬ ДАВНО

I

$$\Sigma(\theta) = \begin{pmatrix} E|x_1|^2 - (E|x_1|)^2 & E(|x_1| - E|x_1|)(x_1^2 - Ex_1^2) \\ \text{equals} & Ex_1^4 - (Ex_1^2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} E|x_1| = \theta \\ E|x_1|^2 = Ex_1^2 = 2\theta^2 \end{cases} \Rightarrow D|x_1| = \theta^2$$

$$\text{cov} \begin{cases} E|x_1|x_1^2 = E|x_1|^3 = 3!\,\theta^3 = 6\theta^3 \\ -2E|x_1|\,E|x_1|^2 = -2\theta \cdot 2\theta^2 = -4\theta^3 \\ +E|x_1|\,E|x_1|^2 = \theta \cdot 2\theta^2 = 2\theta^3 \end{cases} \Rightarrow \text{cov} = 4\theta^3$$

$$\begin{cases} E|x_1|^4 = 24\theta^4 \\ E|x_1|^2 = 2\theta^2 \end{cases} \Rightarrow D|x_1|^2 = 20 \cdot \theta^4$$

II

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{b}{2a^3} \qquad \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{b^2}{4} \cdot (-3)\,a^{-4}$$

Подставляем $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ 2\theta^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a} = -3$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{1}{\theta}$$

Итого А. дисперсия:

$$\begin{pmatrix} -3 & \frac{1}{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^2 & 4\theta^3 \\ 4\theta^3 & 20\theta^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{1}{\theta} \end{pmatrix} = 9 \cdot \theta^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4\theta^3 \cdot \frac{1}{\theta} + 20\theta^2$$

$$= 5\theta^2$$

Acronis

№ 7 (a) По ЦПТ

$$\sqrt{n}\,(\xi - E\xi) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

Положим $\xi = 2\bar{x}$, $E\xi = \theta$

$$\sqrt{n}\,(2\bar{x} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, \sigma^2)$$

$\Rightarrow$ по опр. А.Н.О. : $2\bar{x}$ – А.Н.О. θ