ДЗ 5

№1 $X_1 \dots X_n$ - выборка из d-мерного норм. распр.

с вектором средних a

и матр. ковариаций Σ

Найти ОМП a, Σ.

$$p(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x-a)^T \Sigma^{-1}(x-a)}$$

$$L_X(\theta) = -n \ln (2\pi)^{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} \ln |\Sigma| - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} (x_i - a)^T \Sigma^{-1} (x_i - a)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{2} a^T \Sigma^{-1} \left(\sum x_i\right) + \frac{1}{2} \left(\sum x_i\right)^T \Sigma^{-1} a - \frac{n}{2} a^T \Sigma^{-1} a \right)$$

$$= \Sigma^{-1} \left(\sum x_i\right) - \frac{n}{2} \cdot 2 \Sigma^{-1} a$$

$$\boxed{a = \frac{1}{n} \sum x_i = \overline{X}}$$

Будем искать ОМП для $\underbrace{\Sigma^{-1}}_{=Q}$, а потом обернём.

$$\frac{\partial L}{\partial Q_{11}} = \frac{\partial}{\partial Q_{11}} \left(\frac{n}{2} \ln |Q| - \frac{1}{2} \sum (x_i - a)^T Q (x_i - a) \right)$$

$$= \frac{n}{2} \frac{A_{11}}{|Q|} - \frac{1}{2} \sum_i (x_{i1} - a_1)(x_{i1} - a) = 0$$

где $|Q| = \sum_{i=1}^{n} Q_{i1} \cdot A_{i1}$

алг. дополн.

Вспоминаем $\Sigma^{-1} = Q$

$Q^{-1} = \Sigma$

Тогда $\Sigma_{ij} = \frac{A_{ij}}{|Q|}$

Приравн. $\frac{\partial L}{\partial Q_{ij}} = 0$, получим

$$\Sigma_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_{ki} - a_i)(x_{kj} - a_j) \Rightarrow \boxed{\Sigma = \frac{1}{n} (X - a)^T (X - a)}$$

$\boxed{№ 2}$ $X_1 \dots X_n$ — выборка из распр. с плотностью

$$p_\theta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$$

$$L_x(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + -|x_i - \theta| = -n\ln(2) - \sum_{i=1}^{n} |x_i - \theta|$$

$L_x \to max \Rightarrow \hat{\theta} = \hat{X}_{median}$ — выборочная медиана.

Притом, согласно преп. заданию, необх. указывать все возм. оценки:

$$\left[\begin{array}{l} n - \text{нечёт} \Rightarrow \theta = X_{(\frac{n+1}{2})} \\ n - \text{чёт} \Rightarrow \theta \in [X_{(\frac{n}{2})}, X_{(\frac{n}{2}+1)}] \end{array}\right.$$

- L_5 не выполн: $\frac{1}{2} e^{-|\theta|}$ — не дифф в $\theta = 0$.

~~Ок, но не ас. норм~~

- Докажем $\boxed{\hat{\theta} = \hat{X}_{med}}$ — ас. норм. оценка

По теореме [о/р]: $\sqrt{n}(\hat{X}_{med} - X_{med}) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4p^2(X_{med})}\right)$

В силу сим-сти распр. Лапласа $X_{med} = \theta$

$$\sqrt{n}(\hat{X}_{med} - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4}\right)$$

Откуда $\hat{X}_{med}$ — а.н.о. θ с а.д. $\underline{1}$

№ 3 $X_1 \dots X_n$ – выборка из смеси двух норм. распр.

т.е. $p_\theta(x) = \varepsilon p_{a_1,\sigma_1}(x) + (1-\varepsilon) p_{a_2,\sigma_2}(x)$

L_2 не выполнено, т.к. $P_{\theta_1} = P_{\theta_2}$

при $\theta_1 = (\varepsilon, a_1, \sigma_1, a_2, \sigma_2)$

$\theta_2 = (1-\varepsilon, a_2, \sigma_2, a_1, \sigma_1)$

$$p_\theta(x) = \varepsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + (1-\varepsilon)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

Сначала предположим что есть ОМП, тогда

$$\max L_x(\hat\theta) = \prod p_\theta(x_i) = \prod (a_i + b_i)$$

из перв. распр. — из второго распр.

и $\hat\theta = (\varepsilon, a_1, \sigma_1, a_2, \sigma_2)$

без огр. общности $\varepsilon > 0$ (иначе $\Rightarrow$ расcм $N(a_2, \sigma_2^2)$ $\varepsilon = 0 \neq 1$

Рассм $N(a_1, \sigma_1^2)$. Поменяем его на $N(x_n, small^2)$, т.е. сделаем горб на $x = x_n$.

Тогда $L_x(\hat\theta_{new}) \geqslant \prod_{i=1}^{n-1} b_i \cdot (a_{huge} + b_n)$

Причем высота горба, регулируемая величиной дисперсии $small$, a_{huge}

может $\to +\inf$ при $small \to 0$.

Тогда $L_x(\hat\theta_{new}) > L_x(\hat\theta)$ – упс, мы можем найти оценку с большим правдоподобием.

$\boxed{№ 4}$ $X_1 \ldots X_n$ - выборка из расп. с плотн.

$$p_\theta(x) = \frac{(\ln\theta + 1)(\ln\ln\ln x)^{\ln\theta}}{x \cdot \ln x \ln\ln x}$$

// $\theta > 0$

$$L_x(\theta) = n \cdot \ln(\ln\theta + 1) + \ln\theta\left(\sum_{i=1}^{n} \ln\ln\ln x_i\right) + C$$

$$L_x'(\theta) = \frac{n}{\ln\theta + 1} \cdot \frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta}\left(\sum \ln\ln\ln x_i\right)$$

$$L_x'(\hat\theta) = 0 \Rightarrow \ln\hat\theta = \frac{n}{\sum \ln\ln\ln x_i} - 1, \quad \boxed{\hat\theta = e^{\frac{n}{\sum \ln\ln\ln x_i} - 1}}$$

Заметим при $\theta = 1$ носитель плотности $[e^e, e^{e^e}]$

при $\theta \neq 1$ $\ln\ln\ln e^e = \ln\ln e = \ln 1 = 0$

и носитель будет $(e^e, e^{e^e}]$

Оценка L_2 не выполняется.

$\boxed{№5}$ $X_1 \dots X_n$ – выборка из $U[0, \theta]$

Сравнить оценки θ в с/к порядке $2\overline{X}$

$(n+1)X_{(1)}$

$\frac{n+1}{n} X_{(n)}$

$$MSE_{\hat\theta}(\theta) = E_\theta(\hat\theta - \theta)^2 = (E\hat\theta - \theta)^2 + D\hat\theta$$

Все оценки несмещ $\Rightarrow$ достаточно сравн. $D\hat\theta$

1) $D(2\overline{X}) = 4D\overline{X} = 4\frac{DX_1}{n} = \frac{4}{n} \cdot \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n}$

2) $D X_{(1)} \cdot (n+1) = (n+1)^2 \cdot DX_{(1)} = \cancel{(n+1)^2} \cdot \theta^2 \cdot \frac{1(n-1+1)}{\cancel{(n+1)^2}(n+2)} = \theta^2 \cdot \frac{n}{n+2}$

3) $D\frac{n+1}{n} X_{(n)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \cdot D X_{(n)} = \frac{\cancel{(n+1)^2}}{n^2} \cdot \theta^2 \cdot \frac{n \cdot (\cancel{n} - n + 1)}{\cancel{(n+1)^2}(n+2)} = \theta^2 \cdot \frac{1}{n(n+2)}$

$\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ – наилучшая оценка.

$X_{(1)} \cdot (n+1)$ – наихудшая

$2\overline{X}$ – между ними

№6 $X_1 \dots X_8$ — выборка из $N(\theta, 1)$

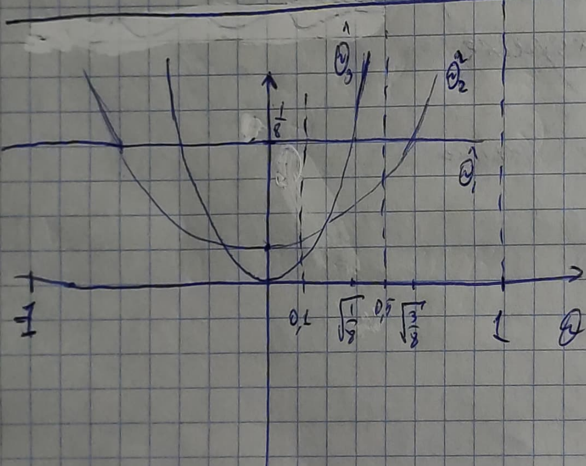
а) $\hat\theta_1 = \bar X$, б) $\hat\theta_2 = \frac{\bar X}{2}$, в) $\hat\theta_3 = 0$.

$$MSE_{\hat\theta}(\theta) = E(\hat\theta-\theta)^2 = (E\hat\theta - \theta)^2 + D\hat\theta$$

а) $= 0 + D\frac{X_1+\dots+X_8}{8} = \frac18 DX_1 = \boxed{\frac18}$

б) $= \left(\frac\theta2 - \theta\right)^2 + D\left(\frac{X_1+\dots+X_8}{2\cdot 8}\right) = \frac14\cdot\frac18 DX_1 + \frac{\theta^2}{4} = \boxed{\frac1{32}+\frac{\theta^2}{4}}$

в) $= (0-\theta)^2 + 0 = \boxed{\theta^2}$



$\frac18 = \frac1{32} + \frac{\theta^2}{4}$

$4 = 1 + 8\theta^2$

$\theta^2 = \frac38$

$\theta = \sqrt{\frac38} \approx 0{,}6$

$\frac18 = \theta^2$

$\theta = \sqrt{\frac18} \approx 0{,}35$

а) $\Theta = [-1, 1]$

В равномерном несравнимы

В минимаксном победила $\bar X$, за ней $\frac{\bar X}{2}$, затем 0

В байесовском $E\frac18 = \frac18$, $E\left(\frac1{32}+\frac{\theta^2}{4}\right) = \frac12\int_{-1}^{1} \frac1{32}+\frac{\theta^2}{4}\,d\theta = \frac12\left(\frac1{16}+\frac16\right) = \frac{11}{96}$

$E\theta^2 = \frac12\int_{-1}^{1}\theta^2\, d\theta = \frac12\left(\frac13+\frac13\right) = \frac13$;

$\hat\theta_2$ лучше $\hat\theta_1$, которая лучше $\hat\theta_3$

б) $\Theta = [-0{,}5,\ 0{,}5]$

В равномерном $\hat{\theta}_2$ лучше $\hat{\theta}_1$

В минимаксном снова $\hat{\theta}_2$ лучше $\hat{\theta}_1$, кот. лучше $\hat{\theta}_3$

В байесовск.

$E\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$

$E\left(\frac{1}{32} + \frac{\theta^2}{4}\right) = 1 \cdot \int_{-0,5}^{0,5} \frac{1}{32} + \frac{\theta^2}{4}\, d\theta = \frac{1}{32} + \frac{1}{96} + \frac{1}{96} = \frac{5}{96}$

$E\theta^2 = 1 \cdot \int_{-0,5}^{0,5} \theta^2\, d\theta = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$

$\hat{\theta}_2$ лучше $\hat{\theta}_3$ лучше $\hat{\theta}_1$

в) $\Theta = [0{,}1,\ 0.1]$

В равном. $\hat{\theta}_3$ лучше $\hat{\theta}_2$ лучше θ

В минимаксном и байесовск. ан-но, т.к. равном. самый сильный.

$\boxed{\text{Формулировки}}$

• Опр: Функция потерь : $R \times R \to R_+$

характеризует степень откл. оценки $\hat{\theta}$ от предсказываемой $\tau(\theta)$

• Опр Функция риска

$$R_{\hat{\theta}, \tau(\theta)}(\theta) = E_\theta L(\hat{\theta}, \tau(\theta)) \text{ — функция от } \theta$$

В нашем случае $L(x,y) = (x-y)^2$

Функция риска $MSE_{\hat{\theta},\theta} = E_\theta (\hat{\theta} - \theta)^2$

- Равном подход

$\hat{\theta}_1$ не хуже (лучше) $\hat{\theta}_2$, если

$$R_{\hat{\theta}_1}(\theta) \underset{(<)}{\leq} R_{\hat{\theta}_2}(\theta), \quad \forall \theta \in \Theta$$

- Байес. подход

$\hat{\theta}_1$ не хуже (лучше) $\hat{\theta}_2$, если

$$E_Q R_{\hat{\theta}_1}(\theta) \underset{(<)}{\leq} E_Q R_{\hat{\theta}_2}(\theta)$$

где Q – распр. пар-ра θ на Θ

- Минимакс подход

$\hat{\theta}_1$ не хуже (лучше) $\hat{\theta}_2$, если

$$\sup_{\theta} R_{\hat{\theta}_1}(\theta) \underset{(<)}{\leq} \sup_{\theta} R_{\hat{\theta}_2}(\theta)$$

Утв из равном. подхода следуют два других.

№7 $X_1 \dots X_n$ – выборка из $Exp(\theta)$

$$K = \left\{ \frac{c_n}{X_1 + \dots + X_n} \;\middle|\; c_n \in \mathbb{R} \right\}$$

① Найдём несмещ. оценки

$$E \frac{c_n}{x_1 + \dots + x_n} = c_n \cdot E\frac{1}{\sum x_n} = c_n \int_{R_+} \frac{1}{x} \frac{\theta^n x^{n-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(n)} dx = c_n \frac{\theta}{\Gamma(n)} \Gamma(n-1) =$$

$$= \frac{c_n}{n-1} \cdot \theta \overset{?}{=} \theta$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{c_n = n-1}$$

трюк с семинаров

$\sum x_i \sim \Gamma(\theta, n)$

② Найдём ОМП

$$L_x(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln(\theta e^{-x_i \theta}) = n \ln\theta - \theta \sum x_i$$

$$L_x(\hat\theta) = n \cdot \ln \frac{c_n}{\sum x_i} - \frac{c_n}{\sum x_i} \sum x_i = n \cdot \ln\frac{c_n}{\sum x_i} - c_n$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_n} = n \cdot \frac{1}{\sum x_i} \cdot \frac{\sum x_i}{c_n} - 1 = 0$$

$$\frac{n}{c_n} = 1 \Rightarrow \boxed{c_n = n}$$

③ $$MSE_{\hat\theta}(\theta) = (E\hat\theta - \theta)^2 + D\hat\theta$$

$$E\hat\theta^2 = c_n^2 \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{x^2} \frac{\theta^n x^{n-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(n)} dx = c_n^2 \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_{\mathbb{R}_+} x^{n-3} e^{-\theta x} dx =$$

$$= c_n^2 \frac{\theta^2}{\Gamma(n)} \int_{R_+} (\theta x)^{n-3} e^{-\theta x} d(\theta x) = c_n^2 \frac{\theta^2}{\Gamma(n)} \Gamma(n-2) = \frac{c_n^2 \theta^2}{(n-1)(n-2)}$$

$$MSE = \theta^2 \left(\frac{(c_n - n+1)^2}{(n-1)^2} + \frac{c_n^2}{(n-1)(n-2)} - \left(\frac{c_n}{n-1}\right)^2 \right) = \frac{(c_n - n+1)^2(n-2) + c_n^2(n-1) - c_n^2(n-2)}{(n-1)^2(n-2)} \theta^2$$

$$MSE = \frac{\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}\left(\left(c_n^2 - 2(n-1)c_n + (n-1)^2\right)(n-2) + c_n^2\right) =$$

$$= \frac{\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}\left(c_n^2 - 2c_n(n-2) + (n-1)(n-2)\right)$$

$$c_n = \frac{2(n-2)}{2} = \boxed{n-2}$$

минимизирует MSE

$\boxed{№8}$ $X_1 \ldots X_n$ - выборка из $Bern(\theta)$

Вычислить $MSE_{\hat\theta}(\theta)$, где $\hat\theta = \overline{X} + \frac{1}{1+\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2} - \overline{X}\right)$

$$MSE = (E\hat\theta - \theta)^2 + D\hat\theta = \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2} - \theta\right)\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n}}\right)^2 \cdot D\overline{X} =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^2\left(\theta^2 - \theta + \frac{1}{4} + DX_1\right) = \frac{1}{(1+\sqrt{n})^2}\cdot\left(\theta^2 - \theta + \frac{1}{4} + \theta(1-\theta)\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{1+\sqrt{n}}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{(2+2\sqrt{n})^2}$$