$\boxed{№1}$ $X_1 \dots X_n \sim U[0, \theta]$

$H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta < \theta_0$

$S = \{ X_{(n)} < \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \}$

$p(x^0) = P_{\theta_0}(X_{(n)} \leq X^0_{(n)}) = \left(\frac{X^0_{(n)}}{\theta}\right)^n$, или по-другому:

$p(X^0) = \inf\{ \alpha \in [0,1] \mid X^0_{(n)} < \theta_0 \sqrt[n]{\alpha} \}$

$$\boxed{p(\cancel{X}) = \left(\frac{X_{(n)}}{\theta_0}\right)^n}$$

$X_1 \sim P$ **Исправлено**

**№2** $H_0: P = U[0,1]$ vs $H_1: P = Exp(1)$

$S_\alpha = \{x < \alpha \cup x > 1\}$

Тогда ~~[illegible]~~

$p(x_1) = \inf\{\alpha \in [0,1] \mid x_1 < \alpha \cup x_1 > 1\}$

$p(x_1) = \begin{cases} 0, & x_1 > 1 \\ x_1, & x_1 \le 1 \end{cases}$

Наименьший уровень значимости, при котором $H_0$ можно отверг. для нашей реализации

№ 3   $X = (X_1 \dots X_n)$ – выборка из $Exp(\theta)$

$H_0: \theta = 1$ vs $H_1: \theta \neq 1$

Рассм. критерий $S = \{\sum x_i < u_{\alpha/3}\} \cup \{\sum x_i > u_{1-\frac{2\alpha}{3}}\}$

где $u_p$ – $p$-квантиль $\Gamma(1, n)$

Найти $p(x) = \inf\{\alpha \in [0,1] \mid \sum x_i < u_{\alpha/3} \vee \sum x_i > u_{1-\frac{2\alpha}{3}}\}$

- Случай 1. $\sum x_i \leq u_{\frac{1}{3}} \Rightarrow$ Выберем $\alpha_0$ т.ч. $\sum x_i = u_{\frac{\alpha_0}{3}}$

$$\frac{\alpha_0}{3} = \Phi\left(\sum x_i\right), \quad \alpha_0 = 3 \cdot \Phi\left(\sum x_i\right)$$

функц. распр. $\Gamma(1, n)$

- Случай 2

$\sum x_i > u_{\frac{1}{3}} \Rightarrow$ Выберем $\alpha_0$ т.ч. $\sum x_i = u_{1-\frac{2\alpha}{3}}$

$$1 - \frac{2\alpha_0}{3} = \Phi\left(\sum x_i\right)$$

$$1 - \Phi\left(\sum x_i\right) = \frac{2\alpha_0}{3}$$

$$\alpha_0 = \frac{3}{2}\left(1 - \Phi\left(\sum x_i\right)\right)$$

$$p(x) = \begin{cases} 3 \cdot \Phi\left(\sum x_i\right), & \text{если } \Phi\left(\sum x_i\right) \leq \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2}\left(1 - \Phi\left(\sum x_i\right)\right), & \text{если } \Phi\left(\sum x_i\right) > \frac{1}{3} \end{cases}$$

№4 $X_j = (X_{j1} \dots X_{jn_j})$, $j \in \{1, 2\}$

$H_j$ vs $H_j'$ — соотв-ет крит $S_j$

Уров значимости всех крит: $\alpha$

$$FWER = P(\underbrace{V_{P,S}}_{\text{кол-во ошибок ответ.}} > 0) = P\left(\bigcup_{j=1}^{2} \{X_j \in S_j\}\right) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{2} P(X_j \in S_j) = 2\alpha$$

$$FWER \ge P(X_1 \in S_1) = \alpha$$

$$\boxed{FWER \in [\alpha, 2\alpha]}$$

- В случае независимости выборок.

$$FWER = P(X_1 \in S_1 \cup X_2 \in S_2) = P(X_1 \in S_1) + P(X_2 \in S_2) - P(X_1 \in S_1 \cap X_2 \in S_2) = \boxed{2\alpha - \alpha^2}$$

- $FWER = \alpha \iff X_1 \in S_1 \iff X_2 \in S_2$

  В частном случае: $X_1 = X_2$ и соотв $S_1 = S_2$

- $FWER = 2\alpha \iff \begin{cases} X_1 \in S_1 \Rightarrow X_2 \notin S_2 \\ X_2 \in S_2 \Rightarrow X_1 \notin S_1 \end{cases}$

  В частном случ: $X_1 = X_2$ и $S_1 \cap S_2 = \varnothing$

$\boxed{№5}$ $X_j = (X_{j1} \ldots X_{jn})$ $j \in \{1, 2\}$

$X_1 = X_2$ из $\Gamma(\theta, \beta)$ причем

$\beta$ - известно. Зафикс нек $\alpha$.

$H_1: \theta = \theta_0$ vs $H_1': \theta < \theta_0$

$S_1$ - критерий (РНМК)

$$\{\underbrace{T(x)}_{\sum x_i} > \underbrace{C_{1-\alpha}}_{\Gamma(\theta_0,\, n\beta)\text{ квантиль}}\}$$

$H_2: \theta = \theta_0$ vs $H_2': \theta > \theta_0$

$S_2$ - критерий (РНМК)

$$\{\underbrace{T(x)}_{\sum x_i} < \underbrace{C_{\alpha}}_{\Gamma(\theta_0,\, n\beta)\text{ квантиль}}\}$$

$$\alpha \leq \frac{1}{2} \Rightarrow FWER = P\left(\bigcup_{j=1}^{2} \{X_j \in S_j\}\right) = 2\alpha$$

$$= P\left(\sqcup \{X_2 \in S_j\}\right)$$

$$S = \left(\{T(x) > C_{1-\frac{\alpha}{2}}\},\ \{T(x) < C_{\frac{\alpha}{2}}\}\right)$$

$S_1$, ур. знач. $\frac{\alpha}{2}$ $\qquad$ $S_2$, ур. знач. $\frac{\alpha}{2}$

Критерий отверж осн. гипотезы методом Бонферрони.

Пусть $j$ – номер послед.

$j = \max\{i \mid p_i \le \tilde{\alpha}_i\}$

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{\alpha_j}{m} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}}$$

ИСПРАВЛЕНО

$\boxed{№6}$ Метод Бенджамини – Иекутиели.

Уровни значимости: $\alpha_i = \frac{\alpha \cdot i}{m \cdot c}$, где $c = \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{j}$

Отсортируем гипотезы и критерии т.ч. $p_1 \le \dots \le p_m$

Отвергаем только $H_1 \dots H_{j-1}$, где $j = \min\{j \mid p_j > \alpha_j\}$

Перепишем условие: $\frac{\alpha \cdot j}{m \cdot c} < p_j$

Примем: $\boxed{\tilde{p}_j = \frac{p_j \cdot m \cdot c}{j}} > \alpha$

При условии $p_1 \le \dots \le p_m$

А значит, чтобы начиная с плохого $j$ мы приняли все гипотезы:

$$\tilde{p}_j = \min\left(\tilde{p}_m \dots \tilde{p}_{j+1}, \frac{p_j \cdot m \cdot c}{j}\right)$$

Итог: $\boxed{\tilde{p}_j = \min\left(1, \min\left(\tilde{p}_{j+1}, \frac{p_j \cdot m \cdot c}{j}\right)\right)}$

Исправлено

№ 7  $X_1 \dots X_n$ - выборка из неизв. расп. $P$

$H_0$ vs $H_1$

$S_1$, $S_2$, $S_3$ — критерии

$p_1$, $p_2$, $p_3$ — соотв $p$-value

$p_1 = 0{,}00001$, $p_2 = 0{,}7362$, $p_3 = 0{,}0482$

При $\alpha = 0{,}05$, какое решение принять?

~~Ответ: отвергнуть $H_0$~~

~~Если бы мы ограничились рассмотрением $S_1$~~

~~то сразу бы отвергли $H_0$ ибо~~

~~$H_0$ отверг $\Leftrightarrow$ $p$-value $\le \alpha$.~~

~~Этого критерия дост-но.~~

Воспользуемся методом Холма.

Сортируем $p_1 \le p_3 \le p_2$

Считаем $\alpha_1 = \frac{\alpha}{3} = 0{,}01(6)$ $\alpha_2 = \frac{\alpha}{2} = 0{,}025$ $\alpha_3 = \frac{\alpha}{1} = 0{,}05$

Гипотеза $H_0$ отвергается в первом индексе.

$p_1 \le \alpha_1$

$0{,}00001 \le 0{,}01(6)$

Ответ: $H_0$ - отвергаем

$\boxed{№8}$ $H_1$ vs $H_1'$ $H_2$ vs $H_2'$

$S_1$ $S_2$

$$FWER_2 = P_{H_1,H_2}\left(\bigcup_{j=1}^{2} \{X_j \in S_j\}\right) < P_{H_1}(X_1 \in S_1) = FWER_1$$

---

Положим $X_1 = X_2 \in \mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$

$P \in \{ Custom(a, b) \}$

Т.е. $P(X=1) = a$

$P(X=2) = b$

$P(X=3) = 1-a-b$

$S_1 = \{3\}$ $S_2 = \{3\}$

Тогда $H_1 : a = a_0$ $H_2 : b = b_0$

$$P_{H_1 H_2}\left(\cup \{X_i \in S_i\}\right) < P_{H_1}(X_1 \in S_1)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$P_{H_1 H_2}(X_1 \in S_1) \qquad \sup_{P \in H_1} P(X_1 \in S_1)$$

$$\| \qquad\qquad \|$$

$$1 - a_0 - b_0 \qquad 1 - a_0$$

№9 $X_1 \dots X_n \sim Bern(p)$

$S_n = \{\sum_{i=1}^n X_i > C_{n,\alpha}\}$ — РНМК ур. зн. $\alpha$.

для $H_0: p = \frac{1}{2}$ vs $H_1: p > \frac{1}{2}$

Притом $C_{n,\alpha}$ — $(1-\alpha)$ квантиль $Bin(n, \frac{1}{2})$

Предположим $H_0$ верна.

Заметим

$$P_{\frac{1}{2}}\left(\bigcup_{i=1}^n \left\{\sum_{j=1}^i X_j > C_{i,\alpha}\right\}\right) > \underbrace{P_{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^n X_j > C_{n,\alpha}\right)}_{=\alpha}$$

Поскольку, очевидно, $P\left(\sum_{j=1}^{n-1} X_j > C_{n-1,\alpha} \cap \sum_{j=1}^n X_j \le C_{n,\alpha}\right) \neq 0$

Однако явно посчитать искомую сложно.