№1 $Y = X\Theta + \varepsilon$, где $Y \in \mathbb{R}^n$, $X \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $\Theta \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$

1

$$l_\varepsilon(\Theta) = \ln p_\varepsilon(Y - X\Theta) \overset{\text{по незав. } \varepsilon_i}{=} \sum_{i=1}^n \ln p_{\varepsilon_i}(Y_i - X_i\Theta) =$$

$$= n \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \sum \frac{(Y_i - X_i\Theta)^2}{2\sigma^2} \to \max$$

Экв-но $\sum_{i=1}^n (Y_i - X_i\Theta)^2 \to \min$ — так это МНК

$$\boxed{\hat\Theta = (X^T X)^{-1} X^T Y}$$ — оценка методом макс правдоподобия.

<u>Несмещ:</u> $E\hat\Theta = (X^TX)^{-1}X^T(X\Theta + \varepsilon) = E_n\Theta + 0 = \Theta$

2 $$l_\varepsilon(\sigma^2) = n \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - X_i\hat\Theta)^2}{2\sigma^2} \to \max$$

$$= -\frac{1}{2} n \ln(\sigma^2 2\pi) - \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - X_i\hat\Theta)^2}{2\sigma^2} \to \max$$

$$l'_\varepsilon = -\frac{1}{2}n \frac{1}{\sigma^2 2\pi}\cdot 2\pi - \sum_{i=1}^n (-1)\cdot\frac{1}{2}\frac{(Y_i - X_i\hat\Theta)^2}{\sigma^4} =$$

$$= -\frac{1}{2}n\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - X_i\hat\Theta)^2}{\sigma^4} = 0.$$

$$\frac{1}{2}n\sigma^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (Y_i - X_i\hat\Theta)^2$$

$$\boxed{\hat\sigma^2 = \frac{\sum (Y_i - X_i\hat\Theta)^2}{n}}$$

<u>Смещён:</u> $E\hat\sigma^2 = \frac{E\sum(Y_i - X_i\hat\Theta)^2}{n} = \frac{1}{n}E(Y - X\hat\Theta)^T(Y - X_i\hat\Theta) \circledequal$

$$Y - X\hat\Theta = (X\Theta + \varepsilon) - X((X^TX)^{-1}X^T(X\Theta + \varepsilon)) = X\Theta + \varepsilon - X\Theta - X(X^TX)^{-1}X^T\varepsilon$$

$$= (E_n - X(X^TX)^{-1}X^T)\varepsilon = C\varepsilon.$$ Заметим $C^T = C$

$$\circledequal \frac{1}{n}E\,\varepsilon^T C^T C \varepsilon = \frac{1}{n}E\,\varepsilon^T(E_n - 2X(X^TX)^{-1}X^T + (X(X^TX)^{-1}X^T)^2)\varepsilon =$$

$$= \frac{1}{n}E\,\varepsilon^T(E_n - X(X^TX)^{-1}X^T)\varepsilon = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(E_n - X(X^TX)^{-1}X^T)\cdot\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}[\mathrm{tr}(E_n) - \mathrm{tr}(E_d)] = \frac{n-d}{n}\sigma^2$$

(№2) $Y = X\theta + \varepsilon$, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$

По утв. с лекции:

$$\forall c \in \mathbb{R}^d \quad \frac{c^T(\hat{\theta} - \theta)}{\hat{\sigma}\sqrt{c^T(X^TX)^{-1}c}} \sim T_{n-d}$$ - распр. Стьюдента

Полагая $c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dfrac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 - \theta_1 + \theta_2}{\hat{\sigma}\sqrt{Q_{11} + Q_{22} - Q_{12} - Q_{21}}} \sim T_{n-d}$

Проверяя гипотезу $H_0: \theta_1 = \theta_2$ получим

$$\frac{\hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2}{\hat{\sigma}\sqrt{Q_{11} + Q_{22} - Q_{12} - Q_{21}}} \sim T_{n-d}$$

Критерий:

$$\left\{ \left| \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2 \right| \leq T_{n-d, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \hat{\sigma}\sqrt{Q_{11} - Q_{12} - Q_{21} + Q_{22}} \right\}$$

где $Q = (X^TX)^{-1}$

№3 $Y = X\theta + \varepsilon$, x_{new} – новый объект.

Построить дов. интервал 1) для ожид. знач $x_{new}^T\theta$

предск. интерв. 2) для отклика $Y_{new} = x_{new}^T\theta + \varepsilon_{new}$

1) • Вновь исп. T-контраст: из док. с лекции:

$$\frac{x_{new}^T(\hat\theta - \theta)}{\hat\sigma\sqrt{x_{new}^T(X^TX)^{-1}x_{new}}} \sim T_{n-d}$$

$$P\left(\left|x_{new}^T(\hat\theta-\theta)\right| \le T_{n-d,\,1-\frac{\alpha}{2}}\,\hat\sigma\sqrt{x_{new}^T(X^TX)^{-1}x_{new}}\right) = 1-\alpha$$

ур. дов.

$$\boxed{x_{new}^T\theta \in \left(x_{new}^T\hat\theta \pm T_{n-d,\,1-\frac{\alpha}{2}}\,\hat\sigma\sqrt{x_{new}^T(X^TX)^{-1}x_{new}}\right)}$$

2) • Повторим рас-во с лекции (там было очень похоже)

$$c^T\hat\theta - \varepsilon \sim \mathcal{N}(c^T\theta,\ c^T(X^TX)^{-1}c\,\sigma^2 + \sigma^2)$$

$$\frac{c^T\hat\theta - \varepsilon - c^T\theta}{\sigma\sqrt{c^T(X^TX)^{-1}c+1}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\frac{(n-d)\hat\sigma^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-d}$$

$$\Rightarrow \frac{c^T\hat\theta - \varepsilon - c^T\theta}{\sigma\sqrt{c^T(X^TX)^{-1}c+1}}\cdot\frac{\sqrt{n-d}}{\sqrt{\frac{(n-d)\hat\sigma^2}{\sigma^2}}} \sim T_{n-d}$$

$$= \frac{c^T\hat\theta - (c^T\theta + \varepsilon)}{\hat\sigma\sqrt{c^T(X^TX)^{-1}c+1}} \sim T_{n-d}$$

Критерий: $\left|x_{new}^T\hat\theta - (x_{new}^T\theta + \varepsilon)\right| \le T_{n-d,\,1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat\sigma\sqrt{x_{new}^T(X^TX)^{-1}x_{new}+1}$

$$\boxed{(x_{new}^T\theta + \varepsilon) \in \left(x_{new}^T\hat\theta \pm T_{n-d,\,1-\frac{\alpha}{2}}\cdot\hat\sigma\cdot\sqrt{x_{new}^T(X^TX)^{-1}x_{new}+1}\right)}$$

Формулировки

- **Гауссовская лин модель**

$$Y = X\Theta + \varepsilon \quad , \quad Y \in \mathbb{R}^n, \; X \in \mathbb{R}^{n \times d}, \; \Theta \in \mathbb{R}^d,$$

ε - сл. n-мерн вектор

$\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I_n)$, а именно: $\begin{cases} E\varepsilon = 0 \\ D\varepsilon = \sigma^2 I_n \\ \varepsilon - \text{норм. вектор} \end{cases}$

- **Критерий Стьюдента (T-критерий)**

В нашем случае основан на утв:

$$\forall c \in \mathbb{R}^d: \quad \frac{c^T(\hat{\Theta} - \Theta)}{\hat{\sigma}\sqrt{c^T (X^T X)^{-1} c}} \sim T_{n-d}$$

T_{n-d} — распр Стьюдента

где $\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ - оценка методом МНК

$$E\hat{\Theta} = \Theta$$

$$D\hat{\Theta} = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$$

- **T_n - распр Стьюдента**, n - кол-во степеней свободы

1) $p(x) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$ - плотность

2) Симметричное

3) Пусть $t \sim T_k \Rightarrow t = Z\sqrt{\dfrac{k}{V}}$

где $Z \sim N(0,1)$

$V \sim \chi^2_k$

№5 $X = (X_1, \dots, X_n)$ выб. из $\mathcal{N}(a_1, \sigma^2)$

$Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ выб. из $\mathcal{N}(a_2, \sigma^2)$

$Z = (Z_1, \dots, Z_k)$ выборка из $\mathcal{N}(a_3, \sigma^2)$

Представим $X_i = a_1 + \varepsilon_i$

$Y_i = a_2 + \varepsilon_{n+i}$

$Z_i = a_3 + \varepsilon_{n+m+i}$

В виде "регрессии"

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \\ Y_1 \\ \vdots \\ Y_m \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_k \end{pmatrix}}_{\text{"}Y\text{"}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{"}X\text{"}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\text{"}\Theta\text{"}} + \varepsilon$$

Переобозн. получ. сист.:

$Y = X\Theta + \varepsilon$

Имеем лин. гипотезу $\Theta_1 - \Theta_2 = 0$

$\Theta_1 + \Theta_2 - \Theta_3 = 0$ $\iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{T} \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tau}$

$\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y \sim \mathcal{N}(\Theta, \sigma^2 (X^T X)^{-1})$

$\hat{\tau} = T\hat{\Theta} \sim \mathcal{N}(\underset{\tau = 0}{T\Theta}, \underbrace{T (X^T X)^{-1} T^T}_{B} \sigma^2)$

с лекции

$$F(X, Y) = \frac{(\hat{\tau} - \tau)^T B^{-1} (\hat{\tau} - \tau)}{\|e\|} \cdot \frac{n - d}{k} \sim F_{k, n-d}$$

В нашем случае:

расп. Фишера

$$F(X, Y) = \frac{\hat{\tau}^T B^{-1} \hat{\tau}}{\|Y - X\hat{\Theta}\|} \cdot \frac{n + m + k - 3}{2} \sim F_{2, n+m+k-3}$$

$X^T X = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$, $(X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$, $X^T Y = \begin{pmatrix} \sum X_i \\ \sum Y_i \\ \sum Z_i \end{pmatrix}$

$\hat{\Theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y = \begin{pmatrix} \frac{\sum X_i}{n} \\ \frac{\sum Y_i}{m} \\ \sum Z_i / k \end{pmatrix}$, $\hat{\tau} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \hat{\Theta} = \begin{pmatrix} \frac{\sum X_i}{n} - \frac{\sum Y_i}{m} \\ \frac{\sum X_i}{n} + \frac{\sum Y_i}{m} - \frac{\sum Z_i}{k} \end{pmatrix}$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n}+\frac{1}{m} & \frac{1}{n}-\frac{1}{m} \\ \frac{1}{n}-\frac{1}{m} & \frac{1}{n}+\frac{1}{m}+\frac{1}{k} \end{pmatrix}$$

Критерий $\{F(X, Y) \geq F_{2,\, n+m+k-3,\, 1-\alpha}\}$