$X_1 \, ... \, X_n$ — семейство распределений

непарам

парам ($\theta \in \Theta$)

План на будущее

- Точечные оценки и их св-ва
- Интервальные оценки
- Св-ва оценок (другие)

Точечные и интервальные оценки

Пример $X_1 \ldots X_5$ — выборка $\sim U[0, \theta]$

2 3 15 4 6

$\theta = 14$ — не очень, т.к. $15 > 14$

$\theta = 16$ $\theta = 17$ — что лучше?

Обозначения $(\mathcal{X}, \beta(\mathcal{X}), P)$ – вер.-стат. пр-во

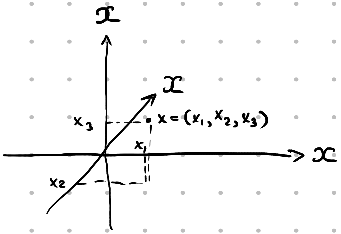
$\mathcal{X}$ – пр-во значений

x – реализация выборки

Пример $n = 3$ $\mathcal{X} = \mathbb{R}$

$X_i(x) = x_i$

$X = (X_1 \dots X_n)$



$\mathcal{X}$ – мн-во возможных результатов эксперимента
x – элемент $\mathcal{X}$ (один результат)
X – случ. величина, где $P(X \in A) = P(A)$

Опр. Статистикой $S(X)$ наз-ся измеримая ф-ция $\mathcal{X} \to E$, где $(E, \mathcal{E})$ – измеримое пр-во

Оценкой, если $E = \Theta$

Оценка $\hat{\Theta}$ наз-ся несмещённой, если $\forall \theta \in \Theta \quad E_\theta \hat{\theta} = \theta$

Задача $X = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{E}xp(\theta)$

$\hat{\theta} = \dfrac{C}{\sum X_i}$, где $C = const$

Найти C при котором $\hat{\theta}$ – несм. оценка

$\blacktriangle$ $E_\theta \hat{\theta} = E_\theta \dfrac{C}{\sum X_i} = C \, E_\theta \dfrac{1}{\sum X_i} = \theta$

$\sum X_i \sim \Gamma(\theta, n)$ $\leftarrow$ интересный факт $\sum^n \mathcal{E}xp\,\theta \sim \Gamma(\theta, n)$

$\xi \sim \mathcal{E}xp(\theta) \Rightarrow p_\xi(x) = \theta e^{-\theta x}$

$\eta \sim \Gamma(\alpha, \beta) \Rightarrow p_\eta(x) = \dfrac{\alpha^\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x}}{\Gamma(\beta)}$

$$E \frac{1}{\Sigma X_i} = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{x} \frac{\theta^n x^{n-1} e^{-\theta x}}{\Gamma(n)} dx = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} \int_{\mathbb{R}_+} x^{n-2} e^{-\theta x} dx =$$

$$= \frac{\theta}{\Gamma(n)} \int_{\mathbb{R}_+} (\theta x)^{n-2} e^{-\theta x} d(\theta x) = \frac{\theta}{\Gamma(n)} \Gamma(n-1) = \frac{\theta}{n-1}$$

$$\frac{c\theta}{n-1} = \theta \implies c = n-1$$

Задача $X_1 \sim Bern(\theta)$

Док-ть, что оценить $\frac{1}{\theta}$ с помощью несм. оценки невозможно

▲ Пусть $\hat{\theta}$ — несм. оц. $1/\theta$

$$E_\theta \hat{\theta} = \underbrace{\hat{\theta}(0)}_{const}(\underset{\downarrow 1}{1-\theta}) + \underbrace{\hat{\theta}(1)}_{const}\underset{\downarrow 0}{\theta} \overset{\theta\to 0}{\not\to} \infty$$

$$\frac{1}{\theta} \xrightarrow[\theta\to 0]{} \infty$$

Опр $\hat{\theta}$ наз-ся (сильно) состоятельной, если

$$\forall \theta \in \Theta \quad \hat{\theta}(X_1 \ldots X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{P_\theta / d} \theta$$

Задача $X = (X_1 \ldots X_n) \sim U[0, \theta]$

Показать, что 1) $\hat{\theta}_1$ — смещ.

$\hat{\theta}_2$ — несмещ.

2) $\hat{\theta}_1$ — сост.

$\hat{\theta}_2$ — несост.

$$\hat{\theta}_1 = X_{(n)}$$
$$\hat{\theta}_2 = (n+1) X_{(1)}$$

▲ 1) $E_\theta \hat{\theta}_1 = [\text{ДЗ}] = \frac{n}{n+1}\theta$ — смещ.

$E_\theta \hat{\theta}_2 = (n+1)\frac{1}{n+1}\theta = \theta$ — несмещ.

2) $P_\theta(|X_{(n)} - \theta| > \varepsilon) = P_\theta(X_{(n)} < \theta - \varepsilon) = [\text{ДЗ}] =$

$$= \int_0^{\theta-\varepsilon} \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} dx = \frac{n}{\theta^n}\int_0^{\theta-\varepsilon} x^{n-1}\, dx = \frac{(\theta-\varepsilon)^n}{\theta^n} =$$

$= \left(1 - \varepsilon/\theta\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ состоятельна

ко ко ко $P(X_{(n} \in (0; \frac{\theta}{n+1})) \to 0$

$P_\theta(|(n+1)X_{(1)} - \theta| > \varepsilon) = P_\theta((n+1)X_{(1)} < \theta - \varepsilon) =$

$$= P_\theta\left(X_{(n)} < \frac{\theta-\varepsilon}{n+1}\right) = \int_0^{\frac{\theta-\varepsilon}{n+1}} \frac{n}{\theta}\left(\frac{\theta-x}{\theta}\right)^{n-1} dx =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{\theta-\varepsilon}{(n+1)\theta}\right)^n \longrightarrow 1 - e^{-(1-\varepsilon/\theta)} \neq 0$$

$\Downarrow$

не сост.

Опр Оценка $\hat{\theta}$ наз-ся асимптотически нормальной оценкой θ, если

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d_\theta} N(0, \Sigma(\theta))$$

$\Sigma(\theta)$ — ас. мат. ков.

Задача 4 $\quad X = (X_1, \dots X_n) \sim U[\theta - 1, \theta + 1]$

Пок-ть $\hat{\theta} = \overline{X}$ а.н.о. и а.д.

▲ $E X_1 = \int\limits_{\theta-1}^{\theta+1} \frac{x}{2} dx = \frac{(\theta+1)^2 - (\theta-1)^2}{4} = \theta$

$E X_1^2 = \int\limits_{\theta-1}^{\theta+1} \frac{x^2}{2} dx = \frac{(\theta+1)^3 - (\theta-1)^3}{6} = \theta^2 + \frac{1}{3}$

$D X_1 = \frac{1}{3}$

ЦПТ $\sqrt{n}\,(\overline{X} - \theta) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, 1/3)$

Теорема о насл. св-в

1) $\hat{\theta}$ (сильно) сост. оц. θ

2) $\tau : \Theta \to \mathbb{R}^d$ непр

Тогда $\tau(\hat{\theta})$ – (сильно) сост. оц. $\tau(\theta)$

Теорема (δ – метод)

1) $\hat{\theta}$ – а.н.о. θ с а.м.к. $\Sigma(\theta)$

2) $\tau : \Theta \to \mathbb{R}^d$ непр дифф

Тогда $\tau(\hat{\theta})$ – а.н.о. $\tau(\theta)$ с а.м.к. $D(\theta)\Sigma(\theta)D^T(\theta)$

$$D(\theta) = \left(\frac{\partial \tau_i}{\partial x_i}\Big|_{x=\theta}\right)_{i,j}$$

Задача $X = (X_1, \dots, X_n) \sim Exp(\theta)$

Пок-ть, что $\hat{\theta} = \dfrac{\overline{X^2}}{2\overline{X}^3}$ — а.н.о. θ и а.д.

▲ $$\sqrt{n}\left(\underbrace{\begin{pmatrix} \overline{X} \\ \overline{X^2} \end{pmatrix}}_{f} - \underbrace{\begin{pmatrix} 1/\theta \\ 2/\theta^2 \end{pmatrix}}_{h}\right) \xrightarrow{d_\theta} N(0, \Sigma(\theta))$$

Пусть $\tau(x, y) = \dfrac{y}{2x^3}$

$// \ \xi \sim Exp(\theta)$
$E\xi^k = \dfrac{k!}{\theta^k}$

$$\tau(f) = \hat{\theta} \qquad \tau(h) = \theta$$

$$\Sigma(\theta) = \begin{pmatrix} DX_1 & cov(X_1, X_1^2) \\ cov(X_1, X_1^2) & DX_1^2 \end{pmatrix}$$

$DX_1 = 1/\theta^2$

$DX_1^2 = EX_1^4 - (EX_1^2)^2 = \dfrac{4!}{\theta^4} - \dfrac{4}{\theta^4} = \dfrac{20}{\theta^4}$

$$\operatorname{cov}(X_1, X_1^2) = E X_1^3 - E X_1 E X_1^2 = \frac{3!}{\theta^3} - \frac{2}{\theta^3} = \frac{4}{\theta^3}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{1}{2x^3} \qquad \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{y(-3)}{2x^4} = -\frac{3y}{2x^4}$$

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial y}\right|_\theta = \frac{\theta^3}{2} \qquad \left.\frac{\partial \tau}{\partial x}\right|_\theta = -\frac{3}{2}\,\frac{2\theta^4}{\theta^2} = -3\theta^2$$

$$D(\theta) = (-3\theta^2, \ \theta^3/2)$$

$$D(\theta)\,\Sigma(\theta)\,D(\theta)^T = \Sigma'(\theta)$$

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d_\theta} N(0, \Sigma'(\theta))$$

ЦПТ $\xi = (\xi_1 \ldots \xi_n)$

$$\sqrt{n}\,(\overline{\xi} - E\xi_1) \xrightarrow{d} N(0, D\xi)$$

Метод моментов

$g_1 \ldots g_d$ — борелевские функции : $|E_\theta\, g_i(X)| < \infty$

$X = (X_1, \ldots X_n)$ из распр. P

$P \in \mathcal{P} = \{ P_\theta \mid \theta \in \Theta \}$

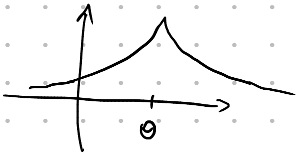
Алгоритм:

$$\begin{cases} E_\theta\, X_1 = \overline{g_1(X)} \\ \vdots \\ E_\theta\, g_d(X_1) = \overline{g_d(X)} \end{cases}$$

решение системы отн. Θ наз-ся **оценкой метода моментов**

Задача $X = (X_1 \ldots X_n)$ — выборка из распр. Лапласа с θ

$$p_\theta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$$



▲ $E_\theta X_1 = \theta = \overline{X}$

$$\Downarrow$$

$$\hat{\theta} = \overline{X}$$

Задача $X_1 \ldots X_n \sim N(a, \sigma^2)$ $\theta = (a, \sigma^2)$

$$\begin{cases} a = \overline{X} \\ \sigma^2 + x^2 = \overline{X^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \hat{a} = \overline{X} \\ \hat{\sigma}^2 = S^2 \end{matrix}$$ – выборочная дисперсия

D3