Напоминание:

Что лучше? $\to$ $\underbrace{A}_{x_1 \ldots x_n}/\underbrace{B}_{y_1 \ldots y_m}$ testing $\to$ $X_1 \ldots X_n$ из какой выборки?

$\downarrow$

Семейство распределений P

$\swarrow$ непарам

$\searrow$ парам $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$

$\downarrow$

оценки

св-ва оценок:

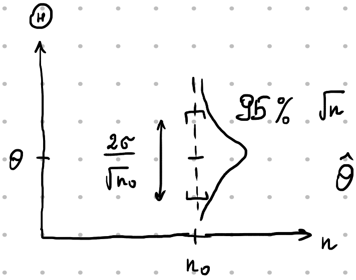
сост. − вер откл $\to 0$

ас. норм − оценка близко

$\downarrow$

интервальное оценивание

ас. норм. оц.



95% $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \to N(0, \sigma^2)$

$$\hat{\theta} \to N\left(\theta, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Пример $X_1 \ldots X_n \sim U[0, \Theta]$

$\hat{\theta} = X_{(n)} \sim Beta(n, 1)$ – абс. непр. распр.

Пусть $x = (x_1 \ldots x_n)$ – реализация выборки

$\hat{\theta} = (x_1 \ldots x_n) = X_{(n)}$ – точечное оценивание

$P(X_{(n)} = C) = 0 \quad \forall C$

Интервальное оценивание. Методы построения дов. инт.

Опр. Пара статистик $T_1(X), T_2(X)$ наз-ся доверительным интервалом с уровнем доверия α, если

$$\forall \theta \in \Theta \subset \mathbb{R} \qquad P(T_1(X) \le \theta \le T_2(X)) \ge \alpha$$

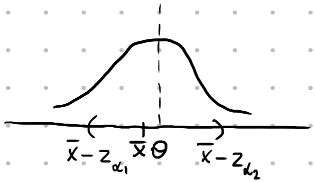
$=$ точный дов. инт.

Замечание 1) $X = (X_1 \dots X_n)$ – выборка

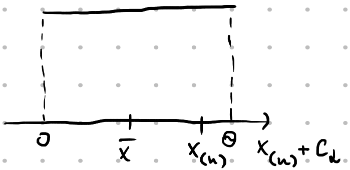
2) $x = (x_1 \dots x_n)$ – реализация выборки

Тогда $P_\theta(T_1(X) \le \theta \le T_2(X)) = \alpha$ – корректно

$P_\theta(T_1(x) \le \theta \le T_2(x)) = \alpha$ – не корректно



$\bar{X} - z_{\alpha_1}$
$\bar{X}$
θ
$\bar{X} - z_{\alpha_2}$



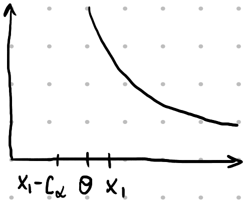
0
$\bar{X}$
$X_{(n)}$
θ
$X_{(n)} + C_\alpha$

Задача 1 $\quad X = (X_1 \ldots X_n)$ из распр Exp со сдвигом θ

$$p_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} I_{\{x \geq 0\}}$$

Используя $X_{(1)}$ построить дов. интервал с ур. дов. α

▲



$X_{(1)}$ — оц. макс. подобия
достаточноя статистика

$$P_\theta(X_{(1)} - C_\alpha \leq \theta \leq X_{(1)}) = \alpha$$

$$\| $$

$$P_\theta(X_{(1)} - C_\alpha \leq \theta) = P_\theta(X_{(1)} - \theta \leq C_\alpha) = [\, Y_i = X_i - \theta \sim Exp(1) \,] =$$

$$= P_\theta(Y_{(1)} \leq C_\alpha) = 1 - (1 - (1 - e^{-C_\alpha}))^n = 1 - e^{-nC_\alpha}$$

$$\alpha = 1 - e^{-nC_\alpha}$$

$$-nC_\alpha = \ln(1-\alpha)$$

$$C_\alpha = \frac{-\ln(1-\alpha)}{n}$$

Дов. инт. $\left(X_{(1)} + \frac{\ln(1-\alpha)}{n} ;\ X_{(1)} \right)$

Метод центральных функций

Опр сл. вел. $G(X, \theta)$ наз-ся центральной ф-цией, если

1) Распр $G(X,\theta)$ известное

2) Распр $G(X, \theta)$ не зависит от θ

$G(X,\theta)$ нельзя назвать оценкой θ, т.к. она принимает его на вход

[странно оценивать параметр, зная его]

Метод: 1) α_1, α_2 — числа $\in (0, 1)$ $\quad \alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

2) Получить z_{α_1} z_{α_2} — α_1, α_2- квантилями распр $G(X,\theta)$

$$P_\theta (z_{\alpha_1} \leq G(X, \theta) \leq z_{\alpha_2}) = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$$

$$\downarrow$$

$$T_1(X) \leq \theta \leq T_2(X)$$

Задача 2

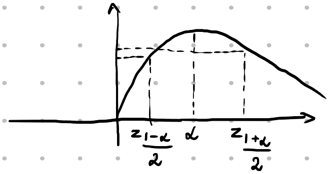
$X = (X_1 \dots X_n)$ - из распр $\mathcal{E}xp$ со сдвигом θ

$$p_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} I\{x \geq \theta\}$$

Методом центр. ф-ций построить дов. инт.

▲ Возьмём $Y_i = X_i - \theta \sim \mathcal{E}xp(1)$

$$\sum Y_i = \sum X_i - n\theta \sim \Gamma(1, n)$$



Возьмём

$$P_\theta\left(z_{\frac{1-\alpha}{2}} \leq \sum X_i - n\theta \leq z_{\frac{1+\alpha}{2}}\right) = \alpha$$

$$\theta \in \left(\bar{X} - z_{\frac{1+\alpha}{2}}/n \,,\ \bar{X} - z_{\frac{1-\alpha}{2}}/n \right)$$

$z_{\frac{1\pm\alpha}{2}}$ искать не надо, т.к. оно из $\Gamma(1, n) \Rightarrow$ уже найдена

Асимптотический дов. интервал

Опр. Посл-ть $T_1^{(n)}(X_1 \ldots X_n)$, $T_2^{(n)}(X_1 \ldots X_n)$ наз-ся асимптотическим дов. инт., если

$$\forall \theta \in \Theta \quad \lim_{n\to\infty} P_\theta\left(T_1^{(n)}(X) \leq \theta \leq T_2^{(n)}(X)\right) \underset{=}{\geq} \alpha$$

$=$ точным

тем больше размер выборки

тем меньше дисперсия

тем уже интервал

Интервал Вальда

1) $\hat{\theta}$ – а. н. о. θ :

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma(\theta)} \xrightarrow{d_\theta} N(0,1)$$

$$\lim_{n\to\infty} P_\theta\left(z_{\frac{1-\alpha}{2}} \leqslant \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma(\theta)} \leqslant z_{\frac{1+\alpha}{2}} \right) = \alpha$$

сложно выражать θ

2) $\hat{\sigma}$ – сост. оц. $\sigma(\theta)$

Тогда $\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}-\theta}{\hat{\sigma}} \xrightarrow{d_\theta} N(0,1)$

▲ $\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma(\theta)} \xrightarrow{d_\theta} N(0,1)$

$$\underset{\text{т.к. сост.}}{\hat\sigma \xrightarrow{P_\theta} \sigma(\theta)} \Rightarrow \frac{\sigma(\theta)}{\hat\sigma} \xrightarrow{P_\theta} 1 \Rightarrow \frac{\sigma(\theta)}{\hat\sigma} \xrightarrow{d_\theta} 1$$

$$\underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\hat\theta-\theta}{\sigma(\theta)}}_{\downarrow d_\theta \; N(0,1)} \underbrace{\frac{\sigma(\theta)}{\hat\sigma}}_{\downarrow d_\theta \; 1} \xrightarrow[\text{л. Слуцкого}]{d_\theta} N(0,1)$$

$\square$

$2^*)$ σ – непр ф-ция от θ

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat\theta-\theta}{\sigma(\hat\theta)} \xrightarrow{d_\theta} N(0,1)$$

▲ $\hat\theta$ – а.н.о. $\theta \Rightarrow \hat\theta$ – сост. оц. $\theta \Rightarrow \hat\theta \xrightarrow{P_\theta} \theta \Rightarrow \sigma(\hat\theta) \xrightarrow{P_\theta} \sigma(\theta)$

Ост. шаги аналогично 2)

Задача 4

[Д3] $X_i \sim U(0,\theta)$

$$n(\theta - X_{(n)}) \xrightarrow{d_\theta} \mathcal{E}xp(1/\theta)$$

$X_1 \dots X_n \sim U[0,\Theta]$

Построить ас. дов. инт. Вальда

Построить ас. дов. инт. на основе [Д3]

▲ 1) $\sqrt{n}\left(\bar{X} - \frac{\theta}{2}\right) \xrightarrow{d_\theta} N\left(0, \frac{\theta^2}{12}\right)$

$$\frac{\sqrt{3n}\left(\bar{X} - \frac{\theta}{2}\right)}{\bar{X}} \xrightarrow{d_\theta} N(0,1)$$

$$\theta \in 2\bar{X} \pm \frac{2 z_{\frac{1+\alpha}{2}} \bar{X}}{\sqrt{3n}}$$

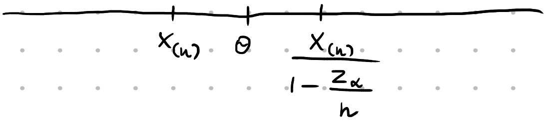
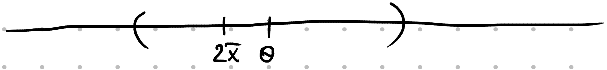
2) $$n(\theta - X_{(n)}) \xrightarrow{d_\theta} \mathcal{E}xp(1/\theta)$$

$$\frac{1}{\theta} n\left(\theta - X_{(n)}\right) \xrightarrow{d_\theta} \frac{1}{\theta}\mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\theta}\right) = \mathcal{E}xp(1)$$

$$n\left(1 - \frac{X_{(n)}}{\theta}\right) \xrightarrow{d_\theta} \mathcal{E}xp(1)$$

$$P_\theta\left(0 \leq n\left(1 - \frac{X_{(n)}}{\theta}\right) \leq z_\alpha\right) = \alpha$$

$$X_{(n)} \leq \theta \leq \frac{X_{(n)}}{1 - z_\alpha/n}$$

		скорость сходимости	несмещенность
2)		$1/n$	—
1)		$1/\sqrt{n}$	+

23