$\boxed{\text{ФЗ №6}}$

№1 Найти дост. статистики для след. парам. семейств

а) $\mathcal{P} = \{ \Gamma(\alpha,\beta) \mid \alpha > 0, \ \beta > 0 \}$

$$p_{\alpha,\beta}(x) = \frac{\alpha^{\beta} x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x}$$

$$p_{\alpha,\beta}(x_1 \dots x_n) = \left(\frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta-1}\right) e^{-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)} =$$

$$= \underbrace{\left(\frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\beta-1} e^{-\alpha\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)}}_{\psi(S(x),\ \underbrace{\alpha,\ \beta}_{\theta})}$$

$$S(x) = \begin{pmatrix} \sum x_i \\ \prod x_i \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Пересчёт}}$

$$S_{new} = \begin{pmatrix} S_{old,1} + x_{new} \\ S_{old,2} \cdot x_{new} \end{pmatrix}$$

б) $\mathcal{P} = \{ U(a,b),\ a < b \}$

$$p_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{b-a} I\{a \le x \le b\}$$

$$p_{\alpha,\beta}(x_1 \dots x_n) = \underbrace{\frac{1}{(b-a)^n} I\{a \le x_{(1)},\ x_{(n)} \le b\}}_{\psi(S(x),\ a,\ b)}$$

$$S(x) = \begin{pmatrix} x_{(1)} \\ x_{(n)} \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Пересчёт}}$

$$S_{new} = \begin{pmatrix} \min(S_{old,1}, x_{new}) \\ \max(S_{old,2}, x_{new}) \end{pmatrix}$$

(c) $\mathcal{P} = \{ \mathrm{Pois}(\theta) \mid \theta > 0 \}$

$$p_\theta(x) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}$$

$$p_\theta(x_1 \ldots x_n) = \underbrace{\frac{\theta^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i!)} e^{-\theta n}}_{\varphi(S(x),\, \theta)}$$

$$\left(\begin{matrix} \sum^{n} x_i \\ \prod (x_i!) \end{matrix} \right)$$

$\boxed{\text{Пересчёт}}$

$$S_{new} = \left(\begin{matrix} S_{old_1} + x_{new} \\ S_{old_2} \cdot (x_{new}!) \end{matrix} \right)$$

(d) $\mathcal{P} = \{ \mathrm{Geom}(\theta) \mid \theta \in (0,1) \}$

$$p_\theta(x) = \theta (1-\theta)^{x-1}$$

$$p_\theta(x_1 \ldots x_n) = \underbrace{\theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i - n}}_{\varphi(S(x),\, \theta)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\boxed{\text{Пересчёт}}$

$$S_{new} = S_{old} + x_{new}$$

№2 X – сл вел с плотностью $p_\theta(x) = \frac{p(x)}{h(\theta)} e^{\theta^T u(x)}$

Д-ть, что $\operatorname{cov}_\theta(u_j(x), u_k(x)) = \frac{\partial^2 \ln h(\theta)}{\partial\theta_j \partial\theta_k}$

$$\frac{\partial \ln h(\theta)}{\partial\theta_k} = \frac{1}{h(\theta)} \cdot \frac{\partial h(\theta)}{\partial\theta_k} = \frac{\partial}{\partial\theta_k}\left(\int p(x) e^{\theta^T u(x)} dx\right) \cdot \frac{1}{h(\theta)} =$$

$$= \frac{1}{h(\theta)} \cdot \int p(x) u_k(x) e^{\theta^T u(x)} dx = \int u_k(x) \cdot \frac{p(x)}{h(\theta)} e^{\theta^T u(x)} dx$$

$$= E_\theta u_k(x)$$

$$\frac{\partial^2 \ln h(\theta)}{\partial\theta_j \partial\theta_k} = \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(E_\theta u_k(x)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\int u_k(x) \frac{p(x)}{h(\theta)} e^{\theta^T u(x)} dx\right) =$$

$$= \frac{\int u_k(x) u_j(x) e^{\theta^T u(x)} p(x) dx \cdot h(\theta) - \int u_k(x) e^{\theta^T u(x)} p(x) dx \cdot \overbrace{\frac{\partial h(\theta)}{\partial\theta_j}}^{= h(\theta) E u_j(x)}}{h^2(\theta)} =$$

$$= \int u_k(x) u_j(x) \cdot \frac{p(x)}{h(\theta)} e^{\theta^T u(x)} dx - \int u_k(x) e^{\theta^T u(x)} \frac{p(x)}{h(\theta)} dx \cdot E u_j(x)$$

$$= E u_j(x) u_k(x) - E u_k(x) E u_j(x) = \operatorname{cov}(u_k(x), u_j(x))$$

$\boxed{№ 3}$ $\mathcal{P} = \{\Gamma(\alpha,\beta) \mid \alpha > 0,\ \beta > 0\}$

(a) $p_{\alpha,\beta}(x) = \dfrac{\alpha^\beta x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} = \left(\dfrac{1}{x}\right) \cdot \dfrac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x + \beta \ln x} =$

$p(x)$

$\dfrac{1}{h(\theta)}$

$u(x) = \begin{pmatrix} -x \\ \ln x \end{pmatrix}$

$a(\theta) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

натур. параметр

~~$p_{\alpha,\beta}(x_1 \ldots x_n) = \left(\frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\right)^n \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i} e^{-\alpha(\sum x_i) + \beta(\sum \ln x_i)}$~~

(b) $p_{\alpha,\beta}(x_1 \ldots x_n) = \underbrace{\dfrac{1}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i)}}_{h(x)} \underbrace{\left(\dfrac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}\right)^n e^{-\alpha(\sum x_i) + \beta(\sum \ln x_i)}}_{\varphi(S(x),\, \alpha,\, \beta)}$

$S(x) = \begin{pmatrix} \sum x_i \\ \sum \ln x_i \end{pmatrix}$ – дост. статистика.

$\boxed{№4}$ $X_1 \ldots X_n$ – выборка из расп. Лапласа со сдвигом θ.

$p_\theta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$ $\Rightarrow$ $EX = \theta$, $DX = 2$

$\boxed{\hat{\theta}_1 = \overline{X}}$ По ЦПТ $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \theta}{\sqrt{2}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

А.Н.О с $\boxed{\text{а.р.} = 2}$

$\boxed{\hat{\theta}_2 = \hat{\mu}}$ По теореме (б/р):

$$\sqrt{n}(\hat{\mu} - \theta) \xrightarrow{d} N\left(0, \frac{1}{4p_\theta^2(\theta)}\right) = N(0,1)$$

А.Н.О с $\boxed{\text{а.р.} = 1}$

$$\boxed{\hat{\theta}_3 = \overline{X}_\alpha} = \frac{\sum_{i=k+1}^{n-k} X_{(i)}}{n-2k}, \text{ где } k = [\alpha n], \ \alpha \in \left(0, \tfrac{1}{2}\right)$$

По теореме с лекции $\sigma^2 = \frac{2}{(1-2\alpha)^2}\left(\int_0^{u_{1-\alpha}} x^2 p(x)\,dx + \alpha u_{1-\alpha}^2\right)$

асимп. дисп.

где $u_{1-\alpha}$ – $(1-\alpha)$-квантиль для станд. Лапласа.
$p(x)$ – плотность станд. Лапласа

$$\boxed{\hat{\theta}_4 = W} = \text{med}\left\{\frac{X_i + X_j}{2}, 1 \le i \le j \le n\right\}$$

По теореме с лекции $\sigma^2 = \frac{1}{12\left(\int_{\mathbb{R}} p^2(x)\,dx\right)^2} = \frac{1}{12 \cdot \frac{1}{16}} = \boxed{\frac{4}{3}}$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{4} e^{-2|x|}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

Осталось заметить, что

$\hat{\mu}$ лучше ω лучше $\overline{X}$

в асимпт подходе.

Теперь сравним с $\overline{X_\alpha}$

$$\sigma^2 = \frac{2}{(1-2\alpha)^2}\left(\frac{1}{2}\int_0^{u_{1-\alpha}} x^2 e^{-x}\,dx + \alpha u_{1-\alpha}^2\right)$$

$$\int_0^{u_{1-\alpha}} x^2 e^{-x}\,dx = x^2(-e^{-x})\Big|_0^{u_{1-\alpha}} + 2\int_0^{u_{1-\alpha}} x e^{-x}\,dx =$$

$$= -u_{1-\alpha}^2 e^{-u_{1-\alpha}} + 2\left(x(-e^{-x})\Big|_0^{u_{1-\alpha}} + \int_0^{u_{1-\alpha}} e^{-x}\,dx\right) =$$

$$= -u_{1-\alpha}^2 e^{-u_{1-\alpha}} - 2u_{1-\alpha} e^{-u_{1-\alpha}} + 2e^{-x}\Big|_{u_{1-\alpha}}^{0} =$$

$$= 2 + e^{-u_{1-\alpha}}(-u_{1-\alpha}^2 - 2u_{1-\alpha} - 2) = 2 - e^{-u_{1-\alpha}}(u_{1-\alpha}^2 + 2u_{1-\alpha} + 2)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{(1-2\alpha)^2}\left(2 - e^{-u_{1-\alpha}}(u_{1-\alpha}^2 + 2u_{1-\alpha} + 2) + 2\alpha u_{1-\alpha}^2\right)$$

α	0,1	0,2	0,3	0,4	0,01	0,49
$\sim u_{1-\alpha}$	1,6	0,91	0,51	0,22	3,91	0,02
$\sim \sigma^2$	1,49	0,29	1,16	1,07	1,88	1,007

А значит при разных α: $\overline{X_\alpha}$ лучше или хуже ω

Экспериментально $\hat{\mu}$ лучше $\overline{X_\alpha}$ лучше $\overline{X}$

№ 5 Найти асимпт. толерантность оценки Гальтона

$$\hat{\theta} = \text{median}\left\{\left(\frac{X_{(i)} + X_{(n-i+1)}}{2}\right) \Big| \; i = 1 \ldots \lfloor (n+1)/2 \rfloor \right\}$$

Хотим найти k^* - наим k при котором

верно

$$X_{(1)} \ldots X_{(k+1)} \to -\infty \Rightarrow \hat{\theta} \to -\infty$$

либо

$$X_{(n-k)} \ldots X_{(n)} \to +\infty \Rightarrow \hat{\theta} \to +\infty$$

В случае медианы достаточно чтобы более половины элементов

вида $\frac{X_{(i)} + X_{(n-i+1)}}{2} \to -\infty$ или, наоборот более половины $\to +\infty$

А значит устремив четверть $\to -\infty$ или $\to +\infty$, получим

необходимое. В точности $k^* = \underbrace{\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor + 1}_{\text{более половины эл-ов}}$

$n = 4k \Rightarrow k^* = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{4k+1}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor + 1 = k+1$

$n = 4k+1 \Rightarrow k^* = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{4k+2}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor + 1 = k+1$

$n = 4k+2 \Rightarrow k^* = k+1$

$n = 4k+3 \Rightarrow k^* = \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{4k+4}{2} \rfloor}{2} \right\rfloor + 1 = k+2$

Тогда $\frac{k^*}{n} \to \boxed{\frac{1}{4}}$

толерантность.

$\boxed{№6}$ Найти асимпт. толерантн. медианы средних Уолша

$$W = \text{median}\underbrace{\left\{ \frac{X_i + X_j}{2} \;\middle|\; 1 \le i \le j \le n \right\}}_{A}$$

$|A| = \frac{n(n+1)}{2}$, значит хотим $\to +\infty$

не менее половины: $\left\lceil \frac{n(n+1)}{4} \right\rceil$

Пусть $X_{(n-k)} \dots X_{(n)} \to +\infty$

Тогда $(k+1)(n-k-1) + \frac{(k+1)\cdot k}{2}$ — столько пар

$\frac{X_i + X_j}{2} \to +\infty$

$$\frac{(k+1)(2n - 2k - 2 + k)}{2} = \frac{(k+1)(2n-k+2)}{2} > \frac{n(n+1)}{4}$$

$$2(k \cdot 2n - k^2 + 2k + 2n - k + 2) > n^2 + n$$

$$-2k^2 + k(4n+2) + 4n + 4 - n^2 - n \ge 0$$

$$D = 16n^2 + 16n + 4 + 8(-n^2 + 3n + 4) =$$

$$= 8n^2 + 40n + 36$$

$$k^* = \left\lceil \frac{-4n - 2 \pm \sqrt{8n^2 + 40n + 36}}{-4} \right\rceil = \left\lceil \frac{2n+1 \pm \sqrt{2n^2 + 10n + 9}}{2} \right\rceil$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k^*}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1 - \sqrt{2n^2+10n+9}}{2n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2n} - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{10}{4}\frac{1}{n} + \frac{9}{4n^2}}$$

$$= \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Ответ.