Верно ли, что выборка из $N(a, \sigma^2)$?

~~Да~~ / Нет

Не знаю / Нет

Проверка статистических гипотез

4

4.1

Гипотезы и критерии

Пусть $\mathcal{X}$ – выборочное пр-во

$\mathcal{P}$ – семейство распр. на $\mathcal{X}$

Высказывание вида $H_0: P \in \mathcal{P}_0$ – основная гипотеза

$H_1: P \in \mathcal{P}_1$ – альтернативная гипотеза

$\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ $\quad\quad$ $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \varnothing$

В парам. подходе $\mathcal{P} = \{ \mathcal{P}_\theta \mid \theta \in \Theta \}$

$H_0: \theta \in \Theta_0$

$H_1: \theta \in \Theta_1$

$\Theta_0 \sqcup \Theta_1 \subset \Theta$

Замечание $\Theta_0 \sqcup \Theta_1 = \Theta$ не всегда. [≥ 3 гипотез быть не может]

Примеры $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$ правосторонняя альтернатива

$H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta < \theta_0$ левосторонняя альтернатива

$H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0$ двусторонняя альтернатива

Истинное θ может не удовл. ни одной из гипотез

Примеры

1) $\mathcal{P} = \{$все абс. непр. распр.$\}$

H_0 : P – нормальное распр.
H_1 : P – эксп. распр.

$$\mathcal{P}_0 = \{ N(a, \sigma^2) \mid a \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \}$$

$$\mathcal{P}_1 = \{ Exp(\lambda) \mid \lambda > 0 \}$$

2) $\mathcal{P} = \{ N(a, \sigma^2) \mid a \in \mathbb{R}, \sigma > 0 \}$

$H_0 : a = 0$ vs. $H_1 : a > 0$

Пусть $X = (X_1 \dots X_n)$ — выборка из неизв. распр. $P \in \mathcal{P}$

Опр Подмножество $S \subset \mathcal{X}$ наз-ся критерием для проверки H_0 vs. H_1, если правило отвержения H_0 выглядит сл. образом:

H_0 отвергается $\iff$ $X \in S$

наша выборка

Частный частный случай: $S = \{\underbrace{x \in \mathcal{X} \mid}_{\text{опускается в записи}} T(x) > c\}$

$T(x)$ — статискита критерия

c — критическое значение

H_0 отвергается $\iff$ $T(x) > c$

Результаты тестирования гипотез

1. $X \in S$ $\Rightarrow$ H_0 отвергается, результат статистически значим

2. $X \notin S$ $\Rightarrow$ H_0 не отвергается, результат статистически не значим

Замечание Нельзя говорить H_0 принимается,

т.к. отсутствие док-в несправедливости H_0 не есть док-во её справедливости

Презумпция невиновности

человек не виноват, пока не доказано обратное

P H_0 H_1

Совершённое действие — $X_1 \ldots X_n$ - выборка

Факты, улики — $T(X)$ - статистика

Док-во виновности — Справедливость $X \in S$

S – критерий для проверки H_0 vs. H_1

Можем допускать ошибки двух видов

	$H_0 +$	$H_0 -$
H_0 не отверг.	☺	II_S
H_0 отверг.	I_S	☺

Ошибка 1 рода: H_0 отвергли, но она верна

$$P(\mathrm{I}_S) := \sup_{P \in \mathcal{P}_0} P(X \in S)$$

не обычная вероятность, просто так говорят

Ошибка 2 рода: H_0 не отвергли, но она не верна

$$P(\mathrm{II}_S) := \sup_{P \in \mathcal{P}_1} P(X \notin S)$$

Обычно решается задача $\begin{cases} P(\mathrm{I}_S) \le \alpha \\ P(\mathrm{II}_S) \to \min \end{cases}$ т.е. I_S опасней $\Rightarrow P(\mathrm{I}_S)$ ограничиваем

α – уровень значимости критерия S, если $P(\mathrm{I}_S) \le \alpha$

$\alpha_0 = P(\mathrm{I}_S)$ – реальный уровень значимости

$\alpha = 0.05$

Обычно альтернативы имеют сложный вид.

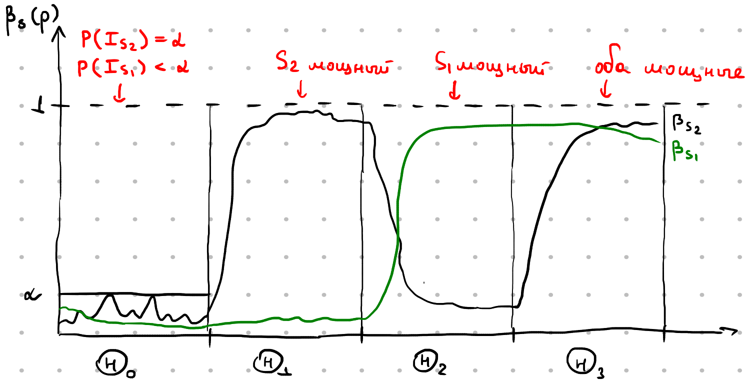
$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

$$H_0 : P \text{ - норм} \quad \text{vs.} \quad H_1 : P \text{ — не норм}$$

$\Rightarrow$ имеет смысл сравнивать критерии на разных распределениях из альтернативы

Для этого введём ф-цию мощности

$$\beta_S(P) = P(X \in S) \text{ для } P \in \mathcal{P}_1$$



$\beta_s(p)$
$P(I_{s_2}) = \alpha$
$P(I_{s_1}) < \alpha$
S_2 мощный
S_1 мощный
оба мощные
1
α
β_{s_2}
β_{s_1}
Θ_0
Θ_1
Θ_2
Θ_3

Пример X – выборка из одного элемента $Exp(\theta)$

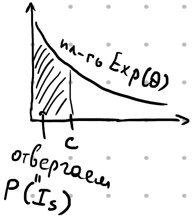
Построить крит. ур. знач. α для проверки

$$H_0: \theta = \theta_0 \quad \text{vs.} \quad H_1: \theta > \theta_0$$

▲ Заметим, что $E_\theta X = 1/\theta$

$\Rightarrow$ чем больше θ, тем меньше X в среднем

Логично брать крит. $S = \{x < c\}$



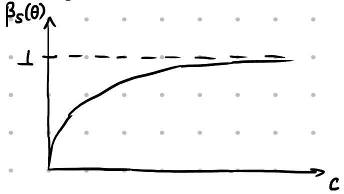
где c подберём из усл. $P(I_s) \leq \alpha$

$$P(I_s) = P_{\theta_0}(x < c) = 1 - e^{-\theta_0 c} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow c \leq -1/\theta_0 \ln(1-\alpha)$$

Мощность $\underset{\rightsquigarrow \max}{\beta_S(\theta)} = P(x < c) = 1 - e^{-\theta c}$ для $\theta > \theta_0$

$\Rightarrow$ наибольший c



$$c = -\frac{1}{\theta_0} \log(1-\alpha)$$

$$\beta_S(\theta) = 1 - e^{\theta/\theta_0 \log(1-\alpha)} = 1 - (1-\alpha)^{\theta/\theta_0} \quad \text{при } \theta > \theta_0$$

$$S = \left\{ x < -\frac{1}{\theta_0} \log(1-\alpha) \right\}$$

Пусть $\theta_0 = 1$, $\alpha = 0.05$ $\Rightarrow$ $c \approx 0.051$

$\Rightarrow$ если $X < 0.051$, то H_0 отвергается и рез. стат. значим

если $X \geq 0.051$, то H_0 не отвергается и рез не стат. значим

Критерий Вальда

4.2

Опр. Критерий S наз-ся асимптотическим критерием уровня знач. α, если $\lim\limits_{n\to\infty} \sup P(I_S) \leq \alpha$

Пусть $X = (X_1 \ldots X_n)$ – выборка из неизв. распр. $P \in \mathcal{P}$

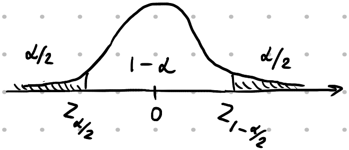
где $\mathcal{P} = \{ P_\theta \mid \theta \in \Theta \}$ $\Theta \subset \mathbb{R}$

Гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta \neq \theta_0$

Рассматриваем $\hat{\theta}$ – а.н.о. θ с а.д. $\sigma^2(\theta)$

$\hat{\sigma}$ – сост. оц. $\sigma(\theta)$

Тогда $W(X) = \sqrt{n}\,\dfrac{\hat\theta - \theta_0}{\hat\sigma} \xrightarrow{d\theta_0} N(0,1)$



Критерий $S = \left\{ \sqrt{n}\,\dfrac{|\hat\theta - \theta_0|}{\hat\sigma} > z_{1-\alpha/2} \right\}$

Проверим:

$$P(I_s) = P_{\theta_0}\left(W(X) > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + P_{\theta_0}\left(W(x) < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) \xrightarrow{n\to\infty}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 1 - \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - (1-\alpha/2) + \alpha/2 = \alpha$$

ф.р. $N(0,1)$

Изучим мощность

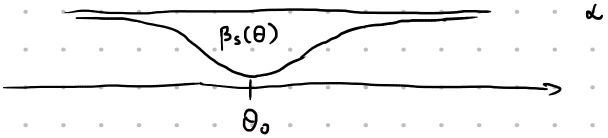
$$\beta_s(\theta) = P_\theta\left(W(X) > z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) + P_\theta\left(W(X) < z_{\alpha/2}\right) = P_\theta\Bigg(\underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\hat\theta-\theta}{\hat\sigma}}_{\substack{\downarrow d_\theta \\ N(0,1)}} > z_{1-\frac{\alpha}{2}} - \underbrace{\frac{\theta-\theta_0}{\hat\sigma}\sqrt{n}}_{W(\theta)}\Bigg) +$$

$$+ P_\theta\Bigg(\underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\hat\theta-\theta}{\hat\sigma}}_{\substack{\downarrow d_\theta \\ N(0,1)}} < z_{\alpha/2} - \underbrace{\frac{\theta-\theta_0}{\hat\sigma}\sqrt{n}}_{W(\theta)}\Bigg) \approx$$

$$\approx 1 - \Phi\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} + W(\theta)\right) + \Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}} - W(\theta)\right)$$

Если $|W(\theta)| \to \infty$, то $\forall c \quad \Phi(c - W(\theta)) \to \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \Rightarrow \beta_s(\theta) \to 1$

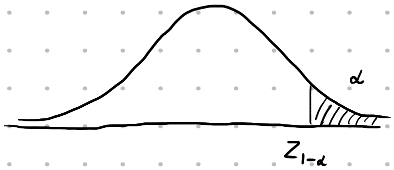
$W(\theta)$ большая $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n \text{ большая} \\ \theta \text{ сильно откл от } \theta_0 \end{array}\right.$



$\beta_s(\theta)$
α
θ_0

Замечания:

1) — $H_0: \theta = \theta_0$ vs. $H_1: \theta > \theta_0$



$\Downarrow$

θ − большая

$\Downarrow$

$\hat{\theta} - \theta_0$ − большая

$\Downarrow$

$W = \sqrt{n}\,\dfrac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{\sigma}}$ большая

$\Downarrow$

отвергаем

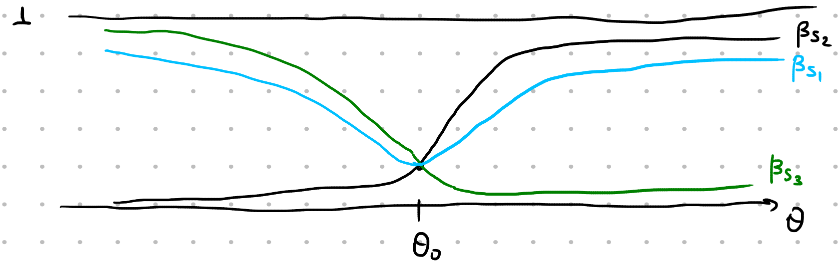
$$S_2 = \left\{ \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{\sigma}} > z_{1-\alpha} \right\}$$

— $H_0: \theta = \theta_0$ vs. $H_1: \theta < \theta_0$

$$S_3 = \left\{ \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{\sigma}} < z_{\alpha} \right\}$$

Забавно, что S_1, S_2, S_3 — критерии уровня α для всех 3-ёх случаев

Графики мощностей



Замечание 2)

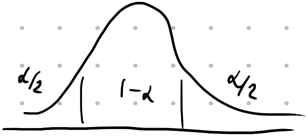
Если в односторонней альтернативе поставить нер-во:

$$H_0 : \theta \le \theta_0 \quad vs \quad H_1 : \theta > \theta_0$$

то крит Вальда сохранит свой вид.

т.к. $\sup\limits_{\theta \le \theta_0}$ достигается на θ_0

3) Рассмотрим дополнение к критерию



$$P_\theta\left(\sqrt{n}\,\frac{|\hat{\theta}-\theta|}{\hat{\sigma}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \xrightarrow{d_\theta} 1-\alpha$$

$\Rightarrow$ можем получить эквив. дов. инт.

$$C = \left(\hat{\theta} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)$$ ур. дов. $1-\alpha$

H_0 отвергается $\Leftrightarrow$ $\theta_0 \in C$

4) Вместо $\hat{\sigma}$ можно рассматривать $\sigma(\theta_0)$

5) Критерий Вальда — z-критерий

Пример $X_1 \ldots X_n$ – выборка из распр. Коши со сдвигом θ

$\hat{\mu}$ – а.н.о. θ с а.д. $\frac{\pi^2}{4}$

$H_0: \theta = \theta_0$ vs. $H_1: \theta \neq \theta_0$

$$S = \left\{ \sqrt{n} \frac{|\hat{\mu} - \theta|}{\pi/2} > z_{1-\alpha/2} \right\}$$

Критерий отношения правдоподобия

4.3

Пусть $X = (X_1 \ldots X_n)$ — выборка из распр $P \in \mathcal{P}$, где

$$\mathcal{P} = \{P_\theta \mid \theta \in \Theta\} \text{ — домин. семейство}$$

$$L_X(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p_\theta(x_i) \text{ — ф-ция правдоподобия}$$

Рассмотрим частные случаи, в точности решающие задачи

$$\begin{cases} P(I_S) \leq \alpha \\ P(II_S) \to \min\limits_S \end{cases}$$

① Простые гипотезы

$H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$ т.е. $\Theta_0 = \{\theta_0\}$, $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ один эл-нт

Рассмотрим $\Lambda(X) = \dfrac{L_X(\theta_1)}{L_X(\theta_0)}$

Лемма Неймана-Пирсона

Если $\exists\, c_\alpha$, т.ч. $P_\theta(\Lambda(X) > c_\alpha) = \alpha$, то критерий

$$S = \{\Lambda(x) > c_\alpha\}$$ — крит. ур. зн. α

и имеет наибольшую мощность

② Сложные гипотезы

$$\begin{cases} P(I_s) \leq \alpha \\ \beta_s(P) \to \max\limits_{s} \quad \forall P \in \mathcal{P}_1 \end{cases}$$

[частн. случаи когда мощные везде сущ.]

Опр. Крит. S ур. зн. α наз-ся равномерно наиб. мощным (РНМК), если $\forall$ другого критерия R того же ур. зн. α:

$$\beta_s(P) \geq \beta_R(P) \quad \forall P \in \mathcal{P}_1$$

Теорема (о монотонном отношении правдоподобия)

Пусть $\forall\, \theta_1 > \theta_2$ отношение правдоподобия представимо в виде:

$$\frac{L_x(\theta_1)}{L_x(\theta_2)} = f_{\theta_1 \theta_2}(T(x)),$$ где $f_{\theta_1 \theta_2}(t)$ возрастает

Тогда критерий $S = \{T(x) > c_\alpha\}$ – РНМК ур. зн. α для проверки

$$H_0: \theta = \theta_0 \text{ vs. } H_1: \theta > \theta_0$$

где c_α подбирается из условия $P_{\theta_0}(T(X) > c_\alpha) = \alpha$

Пример $X_1 \ldots X_n \sim Exp(\theta)$

$H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$

Найти РНМК

▲ $\theta_1 > \theta_2$ $$\frac{L_x(\theta_1)}{L_x(\theta_2)} = \frac{\theta_1^n e^{-\theta_1 \sum x_i}}{\theta_2^n e^{-\theta_2 \sum x_i}} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^n e^{\overbrace{(\theta_2 - \theta_1)}^{0 >} \sum_{i=1}^n x_i}$$

$\Rightarrow$ $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ и отношение убывает по $T(X)$

$\Rightarrow$ $S = \{ T(X) < c_\alpha \}$

где c_α : $P_{\theta_0}(T(X) < c_\alpha) = \alpha$

$T(X) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(\theta, n)$ $\Rightarrow$ c_α − α кванг. $\Gamma(\theta_0, n)$

$$c_\alpha = \text{sps. gamma}(a=n, \text{scale}=1/\theta_0).\text{ppf}(\alpha)$$

$$\beta_S(\theta) = \text{sps. gamma}(a=n, \text{scale}=1/\theta).\text{cdf}(c_\alpha)$$