№1 $X_1 \ldots X_n$ – выборка из $\Gamma(\theta, \beta)$, β – изв-но.

а)

$$p_\theta(x) = \frac{\theta^\beta x^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} e^{-\theta x}$$

$$L_x(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{\theta^\beta x_i^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \cdot e^{-\theta x_i}\right) \to \max$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\beta \ln\theta + (\beta-1)\ln x_i - \theta x_i - \ln(\Gamma(\beta))\right) \to \max$$

$$= \underline{n \cdot \beta \cdot \ln\theta} + n \cdot \ln\Gamma(\beta) + (\beta-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \underline{- \theta \cdot \sum x_i}$$

$$\frac{\partial L_x}{\partial \theta} = \frac{n \cdot \beta}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i \overset{?}{=} 0$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{n \cdot \beta}{\sum x_i} = \frac{\beta}{\overline{X}}}$$

Оценка асимпт. норм. т.к. $\overline{X}$ – ас. норм. оценка $\frac{\beta}{\theta}$ по ЦПТ

Найдём ас. дисп. Вычислим $i(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial L_{x_1}(\theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial L_{x_1}(\theta)}{\partial \theta}\right) =$

$$= E_\theta\left(\frac{\beta}{\theta} - x_1\right)^2 = E_\theta(EX_1 - x_1)^2 = DX_1 = \frac{\beta}{\theta^2}$$

Тогда $i^{-1}(\theta) = \boxed{\frac{\theta^2}{\beta} \text{ – ас. д}}$

б) $X_1 \dots X_n$ – выборка из $Pois(\theta)$ – дискр. распр.

$$p_\theta(x) = \frac{\theta^x}{x!} e^{-\theta}$$

$$l_x(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{\theta^{x_i}}{x_i!} e^{-\theta}\right) = \sum_{i=1}^n \left(x_i \ln\theta - \theta - \ln(x_i!)\right)$$

$$l_x'(\theta) = \frac{1}{\theta}\cdot\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n 1 \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{1}{\theta}\cdot n\cdot\bar{X} - n = 0.$$

$$\hat{\theta} = \bar{X}$$ – ас. норм., т.к.

по ЦПТ $\bar{X}$ – ас. норм. оц. $EX = \theta$

Найдём асимпт. дисп. Для этого

$$i(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial l_{x_1}(\theta)}{\partial\theta}\right)^2 = E\left(\frac{x_1}{\theta} - 1\right)^2 = \frac{1}{\theta^2} E(x_1 - \theta)^2 =$$

$$= \frac{1}{\theta^2} E(x_1 - Ex_1)^2 = \frac{1}{\theta^2}\cdot Dx_1 = \frac{1}{\theta^2}\theta = \frac{1}{\theta}$$

Тогда ас. дисп. $i^{-1}(\theta) = \theta$

$\boxed{№ 2}$ **а)** $X_1 \dots X_n$ – выборка из $U(a, b)$

$$\theta = (a, b)$$

$$p_\theta(x) = \frac{1}{b-a} \cdot I_{[a,b]}(x)$$

Тогда $L_x(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i) = \left(\frac{1}{b-a}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^n I\{a \le x_i \le b\} =$

$$= \left(\frac{1}{b-a}\right)^n I\{a \le X_{(1)} \wedge X_{(n)} \le b\}$$

$$L_x(\theta) \to \max \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = (X_{(1)}, X_{(n)})}$$

$L_1 - L_g$ не выполн. в частности

L_2: носитель плотности $[a, b]$ зависит от $\theta = [a, b]$

б) $X_1 \dots X_n$ – выборка из $U(-\theta, \theta)$

$$p_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} \cdot I_{[-\theta, \theta]}(x)$$

Тогда $L_x(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i) = \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \cdot \prod_{i=1}^n I\{-\theta \le x_i \le \theta\} =$

$$= \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n \cdot I\{-\theta \le X_{(1)} \wedge X_{(n)} \le \theta\}$$

$$L_x(\theta) \to \max \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \max\{|X_{(1)}|, |X_{(n)}|\}}$$

Опять не выполнено L_2 про носитель плотности.

c) $X_1 \ldots X_n$ - выборка из $U(\theta, 1+\theta)$

$$p_\theta(x) = I_{[\theta, 1+\theta]}(x)$$

$$L_x(\theta) = I(\theta \le X_{(1)} \cap X_{(n)} \le 1+\theta)$$

$$L_x(\theta) \to \max \Rightarrow \boxed{\hat{\theta} = X_{(1)}}$$ ⊛

Пояснение: брать $\hat{\theta} < X_{(1)}$ не имеет смысла (в общем случае), т.к. если придёт $X_{(n)} = 1 + X_{(1)}$, то функц. правдоподобия занулится

L_2 вновь <u>НЕ выполняется</u>.

Носитель плотности зависит от θ.

d) $X_1 \dots X_n$ — из нек. распр.

$$p_\theta(x) = \frac{2\theta^2}{x^3} I\{x > \theta\} \Rightarrow \boxed{\theta \geq 0 \text{ для неотр. плотности на } \mathbb{R}}$$

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i) = (2\theta^2)^n \prod \frac{1}{x_i^3} I\{\theta < x_i\}$$

$L_x(\theta) \to \max \Rightarrow$?

Можно брать любое сколь угодно близкое снизу к $X_{(1)}$ значение $\hat{\theta}$ и будем получать оценку лучше.

Несмотря на то, что при $\theta = X_{(1)}$ $L_x(\theta) = 0$

положим $\hat{\theta}$, ведь с высокой вер-тью

верное значение θ [redacted] неотличимо от оценки

L_2 вновь <u>не выполнено</u>

$\boxed{№ 3}$ $X_1 \dots X_n$ — выборка из категориальн. распределение.

$$P_\theta(X_1 = j) = \theta_j$$

И, наконец, $\theta = (\theta_1 \dots \theta_k)$

$$\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1, \quad \theta_i \geq 0$$

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i) = \prod_{i=1}^{n} \theta_{X_i} = \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{c_i}$$

где $\boxed{C_j = \sum_{i=1}^{n} I\{X_i = j\}}$

В поисках условных экстремумов, обратимся к функции Лагранжа:

$$L = \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{c_i} + \lambda \left(\sum_{i=1}^{k} \theta_i - 1\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_i} = C_i \theta_i^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{c_i} + \lambda$$

Система

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = 0 \quad \forall i \in [1, k] \\ \sum \theta_i = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_i = C_i \cdot \prod_{i=1}^{k} \theta_i^{c_i} \left(\frac{1}{-\lambda}\right) \\ \sum \theta_i = 1 \end{cases}$$

θ_i относятся как C_i и в сумме $= 1$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\theta}_i = \frac{C_i}{\sum C_i} = \frac{C_i}{n}}; \quad E\frac{C_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E\, I\{X_j = i\} = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \theta_i = \theta_i$$

Сл-но $\boxed{\text{состоятельная}}$

$\boxed{№4}$ $X_1 \dots X_n$ – выборка, причем $X_i = e^{\xi}$, где $\xi \sim U[0,\theta]$

Найти ОМП $\hat{\theta}$ и проверить сост-ть.

Необх. найти $p_\theta(x)$.

Для этого $F_\theta(c) = P(X_1 \le c) = P(e^{\xi} \le c) =$

$$= P(\xi \le \ln c) = \begin{cases} 0; & c \le 1 \\ \frac{\ln c}{\theta}; & 0 \le \ln c \le \theta \iff 1 < x \le e^\theta \\ 1, & \ln c > \theta \end{cases}$$

при $c > 0$

$$p_\theta(x) = F'_\theta(x) = \left(\frac{\ln x}{\theta}\right)'_x \cdot I_{(1,e^\theta)}(x) = \frac{I_{(1,e^\theta)}(x)}{x\theta}$$

$$L_x(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i) = \frac{1}{\theta^n}\left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{X_i}\right) \cdot I\{1 \le X_{(1)} \wedge X_{(n)} \le e^\theta\}$$

$L_x(\theta) \longrightarrow max \Rightarrow \hat{\theta} = \ln(X_{(n)})$ – сост.,

т.к.

$X_{(n)}$ – сост. $U[0,\theta]$

№5

а) 0,95-квантиль $N(a, \sigma^2)$

это $a + \sigma z_{0,95}$, т.к. $P\left(\left(\frac{X-a}{\sigma}\right) < z_{0,95}\right) = 0,95$, $\frac{X-a}{\sigma} \sim N(0,1)$

$P(X < a + \sigma z_{0,95}) = 0,95$

где $z_{0,95}$ – квантиль $N(0,1)$

Тогда по теореме о параметр-ции $\bar{X} + S z_{0,95}$ – ОМП для искомой величины

ас. норм. по теор. о св. ОМП, т.к. $L_1 - L_9$ вып.

~~$D(\bar{X} + z_{0,95} S) = D(\bar{X}) + z_{0,95}^2 D(S)$~~

Найдём ас. д.

$D(\bar{X} + z_{0,95} S) = D(\bar{X}) + z_{0,95}^2 D(S)$ по нез-ти $\bar{X}, S^2$

$i(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial L_{x_1}}{\partial a}\right)^2 = E\left(\frac{x_1 - a}{\sigma^2}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^4} \underbrace{E(x_1 - a)^2}_{\sigma^2 = Dx_1} = \frac{1}{\sigma^2}$

с семинара

$L_{x_1}(\theta) = -\frac{1}{2}\ln 2\pi\sigma^2 - \frac{(x_1-a)^2}{2\sigma^2}$

$\frac{\partial L_{x_1}}{\partial \sigma} = -\frac{1}{2}\frac{4\pi\sigma}{2\pi\sigma^2} + \frac{(x_1-a)^2}{\sigma^3} = -\frac{1}{\sigma} + \frac{(x_1-a)^2}{\sigma^3}$

$i(\theta) = E_\theta\left(\frac{\partial L_{x_1}}{\partial \sigma}\right)^2 = E\left(\frac{(x_1-a)^2 - \sigma^2}{\sigma^3}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^6}E(x_1-a)^4 - \frac{2}{\sigma^4}E(x_1-a)^2 + \frac{1}{\sigma^2} =$

$E(x_1-a)^4 = \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = 3\sigma^4$

$i(\theta) = \frac{1}{\sigma^6}\cdot 3\sigma^4 - \frac{2}{\sigma^4}\sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} = \frac{2}{\sigma^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow D(\bar{X} + z_{0,95} S) = \sigma^2 + z_{0,95}^2 \cdot \frac{\sigma^2}{2} = \boxed{\sigma^2\left(1 + \frac{z_{0,95}^2}{2}\right)}$

$\approx \sigma^2 \cdot 3$

Асим. расп.

(5) б)

По теореме (б/р) с лекции: f — плотн-ть распред.

$$\sqrt{n}\,(\hat{u}_p - u_p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{f^2(u_p)}\right)$$

Откуда ас. дисп. оценки $X_{(0{,}95\cdot n)}$ // ч/з выб. квантиль

равна $$\frac{0.95\cdot 0.05}{\frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-2\frac{(\mu-a)^2}{2\sigma^2}}} = 0.95\cdot 0.05\cdot 2\pi\sigma^2 \cdot e^{\left(\frac{\mu-a}{\sigma}\right)^2} =$$

$$\approx 0.3\,\sigma^2 \cdot e^{z_{0.95}^2} \approx 0.3 \cdot e^4 \cdot \sigma^2 \approx 16\,\sigma^2$$

Получается ОМП даёт дисп. поменьше.

№ 6 (а) $X_1 \dots X_n$ – выборка из распр

с плотностью $p_{\theta=(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{(\beta - x)}{\alpha}} \cdot I(x \geq \beta)$

$$L_x(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{\alpha} e^{\frac{\beta - x_i}{\alpha}}\right)$$

// притом $\beta \leq X_{(1)}$

$$= -n \cdot \ln(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta - x_i}{\alpha} = -n \ln(\alpha) + n \cdot \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\sum x_i}{\alpha} =$$

$$= n\left(-\ln\alpha + \frac{\beta - \overline{X}}{\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial L_x}{\partial \alpha} = n\left(-\frac{1}{\alpha} - \frac{\beta - \overline{X}}{\alpha^2}\right) = 0 \Rightarrow -\alpha - \beta + \overline{X} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = \overline{X} - \hat{\beta} = \overline{X} - X_{(1)}}$$

$$\frac{\partial L_x}{\partial \beta} = n \cdot \frac{1}{\alpha} > 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = X_{(1)}}$$

б) $EX_1 = \beta + \alpha \qquad DX_1 = \alpha^2$

сдвиг   матож. несдвинутого

$$\sqrt{n}\,(\overline{X} - (\alpha + \beta)) \xrightarrow{d} N(0, \alpha^2)$$

Притом $\sqrt{n}(\hat{\alpha} - \alpha) \xrightarrow{P} \sqrt{n}(\overline{X} - \beta - \alpha) \xrightarrow{d} N(0, \alpha^2)$

Оценка $\hat{\alpha}$ – а.н.о. α с асим. дисп. α^2

Воспользовались $X_{(1)}$ – сост. оценка β.

сдвиг

// Для несдвин: $EX_{(1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(c) Нет, целиком $L_1 - L_9$ не выполнены.

В част. носитель п.п-ти $p_\theta(x) = [\beta, +\infty)$

зависит от θ. // это L_2.

№ 7 С лекции

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}$$

$$\frac{\partial L_x}{\partial\theta} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{2(\theta-x_i)}{1+(x_i-\theta)^2} = 0$$

Конкретизируем

$\boxed{n=1} \Rightarrow$ $$\frac{\partial L_x}{\partial\theta} = -\frac{2(\theta-x_1)}{1+(x_1-\theta)^2} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat\theta = X_1}$$

Теор. о св-ах ОМП расп. А.Р.

$$i(\theta) = E_\theta\frac{4(\theta-x_1)^2}{(1+(x_1-\theta)^2)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4(\theta-x_1)^2}{(1+(x_1-\theta)^2)^2}\cdot\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}dx =$$

плотность с лекции

сдвиг на θ

$$= \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{8x^2}{(1+x^2)^3}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{-x^4+6x^2-1+x^4+2x^2+1}{(1+x^2)^3}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\frac{-x^4+6x^2-1}{(1+x^2)^3}+\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(x)+\frac{x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}\right)\Bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-0+(0-0)\right)$$

$$= \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\text{Асимп. дисп.} = 2}$$

Сравним с оценкой 4/3 в. медиану: $\hat\theta = X_1$

По теор. (б/р) ас. дисп: $$\frac{1}{4p^2(\mu)} = \frac{\pi^2}{4} \approx \boxed{2{,}47}$$

Прошлая лучше.

$$\cancel{\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)' = \frac{1(1+x^2)^2 - x\,2\cdot(1+x^2)\,2x}{(1+x^2)^4} = 1+x^2-4x^2}$$

$\boxed{n=2}$

$$\frac{\partial L_n(\theta)}{\partial\theta} = -\frac{2(\theta-x_1)}{1+(x_1-\theta)^2} - \frac{2(\theta-x_2)}{1+(x_2-\theta)^2} = 0$$

$$(\theta-x_1)(1+(\theta-x_2)^2) + (\theta-x_2)(1+(\theta-x_1)^2) = 0$$

$$\theta^3 - \theta^2 2x_2 + \theta(1+x_2^2) - \theta^2 \cdot x_1 + \theta\cdot 2x_1x_2 - x_1(1+x_2^2) +$$
$$\theta^3 - \theta^2 2x_1 + \theta(1+x_1^2) - \theta^2\cdot x_2 + \theta\cdot 2x_1x_2 - x_2(1+x_1^2) = 0.$$

$$2\theta^3 - 3\theta^2(x_1+x_2) + \theta(2+x_1^2+x_2^2+4x_1x_2) - (x_1+x_2+x_1x_2^2+x_2x_1^2) = 0$$

$$2\theta^3 - 3\theta^2 s + \theta(s^2+2p+2) - (s+ps) = 0$$

Подбираем $\theta_1 = f(s,p)$, чтобы всё сократ-сь // $p = x_1+x_2$, $s = x_1x_2$

$$\boxed{\theta_1 = \frac{s}{2}} \Rightarrow 2\frac{s^3}{8} - 3\frac{s^2}{4}s + \frac{s}{2}(s^2 + \cancel{2p+2}) - (\cancel{s+ps}) \overset{?}{=} 0$$

$$0=0.$$

$$\underbrace{2\theta^3 - \theta^2\cdot s}_{} - \underbrace{2\theta^2 s + \theta s^2}_{} + \underbrace{2\theta(p+1) - s(p+1)}_{} = 0$$

$$\theta^2(2\theta-s) - \theta s(2\theta-s) + (p+1)(2\theta-s) = 0.$$

$$\theta^2 - \theta s + p+1 = 0.$$

$$D = s^2 - 4p - 4 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 - 4 = (x_1-x_2)^2 - 4$$

$$\theta_{1,2} = \frac{(x_1+x_2) \pm \sqrt{(x_1-x_2)^2-4}}{2}.$$

Оценка выб. медианой расп ирект. оценку $\frac{x_1+x_2}{2}$

Тогда в общем случае оценка $\boxed{\hat{\theta} = \frac{x_1+x_2}{2}}$

Теорема от ОМП не работает, т.к. ур-ие $\frac{\partial L_n}{\partial\theta} = 0$ <u>может</u> иметь >1 решения (при $|x_1-x_2| \geq 2$)

Теорема о св-вах ОМП могла бы дать оценку а.р.

$$i(\theta) = E\left[\frac{4(\theta-x_1)^2}{(1+(x_1-\theta)^2)^2} + \frac{8(\theta-x_1)(\theta-x_2)}{(1+(x_1-\theta)^2)(1+(x_2-\theta)^2)} + \frac{4(\theta-x_2)^2}{(1+(x_2-\theta)^2)^2}\right]$$

$$= 0.5 + 0.5 + 8\,E\frac{\theta-x_1}{1+(x_1-\theta)^2}\,E\frac{\theta-x_2}{1+(x_2-\theta)^2}$$

незав. т.к. x_1, x_2 – незав

и $f(x) = \frac{\theta-x}{1+(x-\theta)^2}$ – непр.

$$E\frac{\theta-x_1}{1+(x_1-\theta)^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta-x}{1+(x-\theta)^2}\cdot\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+(x-\theta)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{2(x^2+1)}\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Тогда ас.р. $= i^{-1}(\theta) = 1^{-1} = 1$