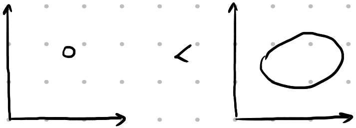
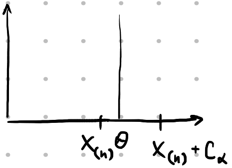
Вопросы

1) 

2) Писать в практике отдельно формулы

3) Помечать задачи в теории

4) $X_1 \dots X_n \sim U[0, \theta]$



интервал для θ, используя $X_{(n)}$

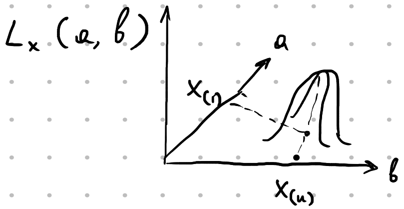
$$P_\theta\left(X_{(n)} \le \theta \le X_{(n)} + C_\alpha\right) = \alpha$$

$$C_\alpha = \theta\left(1 - \sqrt[n]{1-\alpha}\right)$$

$$\left(X_{(n)}\ ;\ X_{(n)} + \theta\left(1 - \sqrt[n]{1-\alpha}\right)\right)$$ ← плохо

5) $X_1 \dots X_n \sim U[a, b]$

ОМП для $\frac{a+b}{2}$



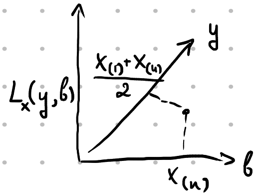
$$L_x(a, b) = \frac{1}{(b-a)^n} \prod_{i=1}^{n} I\{a \le x_i \le b\}$$

$y = \frac{a+b}{2}$

$$L_x(y, b) = \frac{1}{2^n (b-y)^n} \prod_{i=1}^{n} I\{2y - b \le X_i \le b\}$$

$y = \frac{a+b}{2}$

$$\begin{cases} \hat{y} = \frac{X_{(1)} + b}{2} \\ \hat{b} = X_{(n)} \end{cases} \Rightarrow \hat{y} = \frac{X_{(1)} + X_{(n)}}{2}$$



Напоминание: „Что лучше?"

$X_1 \ldots X_n \in P \in \mathcal{P}$ – семейство распределений

парам

непарам

$\mathcal{P} = \{ P_\theta \mid \theta \in \Theta \}$

$\downarrow$

оценка (сост., ас. норм.)

$\downarrow$

дов. инт. (+ ас. дов. инт, Вальда)

$\downarrow$

метод макс. правдоподобия

$\downarrow$

сравнение оценок

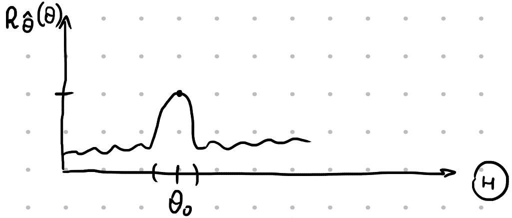
Сравнение оценок

$\mathcal{K}$ — множество оценок

$L: \underset{\hat\theta}{\mathbb{R}^d} \times \underset{\theta}{\mathbb{R}^d} \to \mathbb{R}_+$ — функция потерь

Проблема — зависимость от $\hat\theta$

$R_{\hat\theta}(\theta) = E_\theta L(\hat\theta, \theta)$ — функция риска



если мы знаем, что $\theta \in (\ \ )$, то оценка плохая

Обозначения

1) Если $L(x, y) = (x-y)^2$, то $MSE_{\hat{\theta}}(\theta) = E_\theta(\hat{\theta} - \theta)^2$

2) Если $L(x, y) = |x-y|$, то $MAE_{\hat{\theta}}(\theta) = E_\theta|\hat{\theta} - \theta|$

Подходы: 1) Равномерный $\theta_1 \preccurlyeq \theta_2$, если $\forall \theta \in \Theta$ $R_{\hat{\theta}_1}(\theta) \leq R_{\hat{\theta}_2}(\theta)$

2)

Задача 1 $\quad X_1 \dots X_n \sim U[0, \theta]$

$$\mathcal{K} = \{ cX_{(n)} \mid c \in \mathbb{R} \}$$

равномерный + MSE

Найти наилучшую оценку в $\overbrace{\text{ср. кв. подходе}}^{\text{равномерный + MSE}}$.

$$MSE_{cX_{(n)}}(\theta) = E_\theta (cX_{(n)} - \theta)^2 = c^2 E_\theta X^2_{(n)} - 2c\theta E_\theta X_{(n)} + \theta^2 =$$

$$\left[E_\theta X^2_{(n)} = \int_0^\theta x^2 \frac{n x^{n-1}}{\theta^n} dx = \frac{n}{n+2} \theta^2 \right]$$

$$= c^2 \frac{n}{n+1} \theta^2 - 2c \frac{n}{n+1} \theta^2 + \theta^2 = \theta^2 \left(c^2 \frac{n}{n+2} - 2c \frac{n}{n+1} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow C_{min} = \frac{2 \frac{n}{n+1}}{2 \frac{n}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

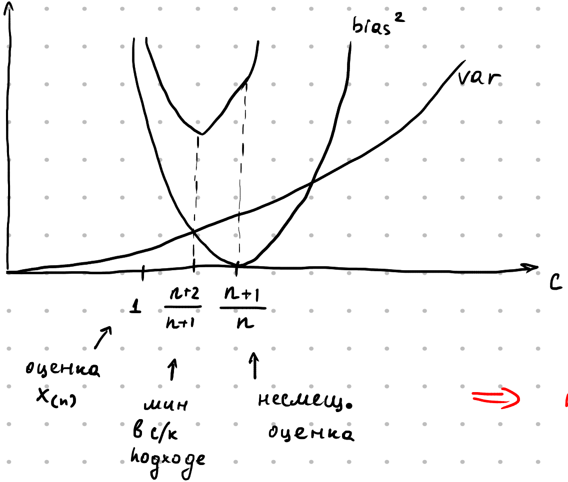
Bias - variance decomposition

$$MSE_\theta(\theta) = \underbrace{(E_\theta \hat{\theta} - \theta)^2}_{bias} + \underbrace{D_\theta \hat{\theta}}_{var.}$$

Пример (пред. задача)

$$bias = \left(c \frac{n}{n+1}\theta - \theta\right)^2 = \theta^2\left(c\frac{n}{n+1} - 1\right)^2$$

$$var = D_\theta \hat{\theta} = c^2 D_\theta X_{(n)} = c^2\left(\frac{n}{n+2}\theta^2 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\theta^2\right) = c^2\theta^2\left(\frac{n}{n+2} - \left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right)$$



$\Rightarrow$ не всегда выгодно использовать несмещ. оценки

Задача 2 $\quad X_1 \ldots X_n \sim N(a, \sigma^2)$

$$\mathcal{K} = \left\{ \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{c} \;\Big|\; c \in \mathbb{R} \right\}$$

Найти наил. оц. в с/к подходе.

$\blacktriangle \quad bias = E_{\sigma^2}\left(\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{c} - \sigma^2 \right)$

$var = D_{\sigma^2} \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{c}$

$bias = \frac{1}{c}\sigma^2(n-1) - \sigma^2$

$var = \frac{1}{c^2} 2\sigma^4(n-1)$

$\left[\text{было} \quad \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}\right]$

$\overset{\shortparallel}{\xi}$

$E\xi = n-1$	$D\xi = 2(n-1)$
$\frac{1}{\sigma^2} E(x_i - \bar{x})^2 = n-1$	$\frac{1}{\sigma^4} D\left(\sum(x_i - \bar{x})^2\right) = 2(n-1)$
$E(x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2(n-1)$	$D\left(\sum(x_i - \bar{x})^2\right) = \sigma^4 2(n-1)$

$$MSE_{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{c}}(\sigma^2) = \sigma^4\left(\frac{n-1}{c}-1\right)^2 + \sigma^4\frac{2(n-1)}{c} = \sigma^4\left(\underbrace{\left(\frac{n-1}{c}-1\right)^2 + \frac{2(n-1)}{c^2}}_{\downarrow\ \min_c}\right)$$

[выкидываем σ^4, $\qquad \frac{\partial MSE/\sigma^4}{\partial c} = 0$]

$$c = n+1$$