P - value

$X = (X_1 \ldots X_n)$ — выборка из P

$H_0: P \in \mathcal{P}_0$ vs $H_1: P \in \mathcal{P}_0$

S — критерий $= \{T(X) > c_\alpha\}$

$t = T(x)$ — реализация статистики

$$p(t) = \sup_{P \in P_0} P(T(X) \geq t) \quad \text{— P-value}$$

$\|$

Вероятность при справедливости H_0 получить t или более экстремальное значение.

Утв. p-value $\leq \alpha$ $\Longleftrightarrow$ H_0 отвергается

▲ Пусть S - критерий $= \{T(x) > c_\alpha\}$

$$P(I_s) = \sup_{P \in \mathcal{P}_0} P(X \in S) = \alpha = \sup_{P \in \mathcal{P}_0} P(T(x) \geq c_\alpha)$$

$$p(t) = \sup_{P \in \mathcal{P}_0} P(T(X) \geq t)$$

- $t > c_\alpha \Rightarrow X \in S \Rightarrow$ отвергается

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_0} P(T(x) \geq t) \leq \sup_{P \in \mathcal{P}_0} P(T(X) \geq c_\alpha)$$

- $t < c_\alpha \Rightarrow X \notin S \Rightarrow$ не отвергается

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_0} P(T(X) \geq t) > \sup_{P \in \mathcal{P}_0} P(T(X) > C_\alpha) = \alpha$$

Замечание: что-то пойдёт не так, если

- дискретное распределение $\Rightarrow$ p-value дискретно
- если критерий асимптотический, то $P(I_s) \to \alpha$ и p-value – асимпт. и в пределе утв. выполняется
- Если $P(I_s) < \alpha$, то в теории нужно сравнивать с реальным уровнем значимости, но на практике его используют с другими крит. и МПГ, поэтому всё ещё сравнивают с 0.05.

множественная проверка гипотез

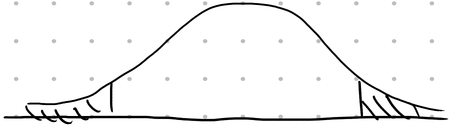
Замечание. Если $p\text{-value} \le \alpha$, то чем оно меньше, тем больше уверенность в отвержении

$p\text{-value} > \alpha \Rightarrow$ ничего не можем сказать

Пример

$H_0: X \sim N(0, 1)$ vs. $H_1 \sim N(0, 100^2)$

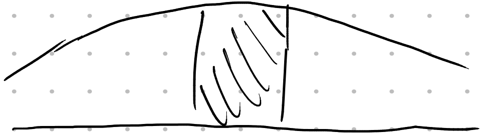
$S = \{|X| > z_{1-\alpha/2}\}$



$p(2) \approx 0.0455$

$H_0: X \sim N(0, 100)$ vs. $H_1 \sim N(0, 1)$

$S = \{|X| < u_{\frac{1+\alpha}{2}}\}$



$p(2) = 0.0159$

уверены в отвержении

Утв. $p(X) = \min\{\alpha \in (0,1) \mid X \in S_\alpha\} \iff p(t) = \sup\limits_{P \in \mathcal{P}_0} P(T(X) \geq t)$

где S_α — критерий вида $\{T(X) > c_\alpha\}$ ур. знач. α

$\Updownarrow$

$p(t) = \min\{\alpha \in (0,1) \mid t > c_\alpha\}$

$\blacktriangle$ Если $p(t) = P(T(X) > t) = \gamma$ и $t = c_\gamma$ — $1-\gamma$ — квантиль $P \in \mathcal{P}_0$

$p(t) = \min\{\alpha \in (0,1) \mid t > c_\alpha\} = \min\{\alpha \in (0,1) \mid c_\gamma > c_\alpha\} =$

$= \min\{\alpha \in (0,1) \mid \gamma \leq \alpha\} = \gamma$

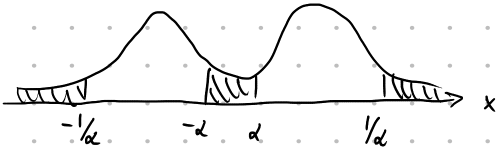
Следствие $p(t) \leq \alpha \iff H_0$ — отвергается

$\blacktriangle$ $p(t) \leq \alpha \iff \min\{\alpha \in (0,1) \mid X \in S_\alpha\} \leq \alpha \Rightarrow X \in S_\alpha \iff H_0$ отверг.

Замечание

Можем удобно объявлять p-value и крит. мн-во

Пример $S = \{x < -1/\alpha\} \cup \{-\alpha < x < \alpha\} \cup \{x > 1/\alpha\}$



$$p\text{-value}(x) = \{t < x\} \cup \{1/x < t < -1/x\} \cup \{t > -x\}$$

Множественная проверка гипотез (МПГ)

Пусть $X^j = (X_1^j \dots X_{n_j}^j)$ — j-ая выборка $\sim P^j$ $\quad j = \overline{1,m}$

Гипотезы $H_0^j : X^j \in \mathcal{P}_0^j$ vs. $H_1^j : P^j \in \mathcal{P}_1^j$

S^j — критерий для проверки H_0^j vs. H_1^j для значимости α

$V_{S,P}(X)$ — кол-во отвергнутых H_0^j, которые были выполнены

$R_S(X)$ — кол-во отвергнутых H_0^j

$FWER = P(V_{S,P}(X) > 0)$ — групповая ош. I рода

$FDR = E_P \dfrac{V_{S,P}(X)}{R_S(X)}$ — доля ложных отвержений

Утв. $FWER \leq \alpha \Rightarrow FDR \leq \alpha$

$$\blacktriangle \quad FDR = E_P \frac{V_{s,P}(X)}{R_S(X)} = E_P \underbrace{\frac{V_{s,P}(X)}{R_{s,P}(X)}}_{\leq 1} I\{V_{s,P}(x) > 0\} \leq$$

$$\leq E_P I\{V_{s,P}(x) > 0\} = FWER$$

Хотим по S_j получить α_j, т.ч. $P(X \in S_j) = \alpha_j$ и $FWER \leq \alpha$

Примечание FDR слабее коррелирует гипотезы в отличии от FWER, поэтому его используют в промежуточных вычислениях

Часто берут $\alpha = 0.1$

Процедуры МПГ: [мы их используем для конкретной выборки]

- параллельные
- восходящие
- нисходящие

Бонферони

$\alpha \to \alpha_j = \dfrac{\alpha}{m}$ — параллельная

Холм

$\alpha_j := \dfrac{\alpha}{m-j+1}$ где S_j отсорт. по возрастанию p-value

Для отвержения используют нисход. процедуру идём от 1 до m пока отвергается, потом не отвергаем остальных

Замечание: Холм — наиболее мощный, если мы ничего не знаем про зависимости между выборками.

Шидак

$$\alpha_j = 1-(1-\alpha)^{1/m}$$

Для $S_j = \{T^j > c_\alpha^j\}$ и $P(T^1 > x_1, \ldots, T^m > x_m) \geqslant \prod_{i=1}^{n} P(T^i > x_i)$ ← условие работы

тогда $FWER \leqslant \alpha$

▲ $FWER = P(V_{s,p}(X) > 0) = P\left(\bigcup_{j=1}^{m} \{T^j(x^j) > c_\alpha^j\}\right) =$

$$= 1 - P\left(\bigcap_{j=1}^{m} T^j(x^j) \leqslant c_\alpha^j\right) \leqslant 1 - \prod_{j=1}^{m} P(T^j(x^j) \leqslant c_\alpha^j) =$$

$$= 1 - \prod_{j=1}^{m}\left[1 - P(T^j(x^j) > c_\alpha^j)\right] \leqslant 1 - \prod_{j=1}^{m}(1-\alpha_j) = 1-(1-\alpha_j)^m =$$

$$= 1-(1-\alpha)^{m/m} = 1 - 1 + \alpha = \alpha$$

Шидака – Холма

Пусть $S_j = \{T^j > C_\alpha^j\}$ и T^j – нез.

$p_{(1)} \ldots p_{(m)}$ – отсортируем p-value S^j

Тогда $\alpha_j = 1 - (1-\alpha)^{1/(m-j+1)}$

Нисходящая процедура.

Замечание: Наиболее мощная процедура

Скорректированное p-value

Идея: в МПГ вместо α_j будем искать $\tilde{p}_j$ – новые p-value для S^j и сравнивать с α

Бонферони

$\alpha_j = \frac{\alpha}{m}$ Сравниваем p-value с α_j

$$p_j \leq \frac{\alpha}{m} \sim m p_j \leq \alpha$$

! p-value $\in (0, 1)$

$\tilde{p}_j = \min(1, m p_j)$ Теперь $\tilde{p}_j \leq \alpha$

Холма

$p_{(j)}$ сравниваем с $\alpha_j = \dfrac{\alpha}{m-j+1}$ $\Leftrightarrow$ $(m-j+1)\, p_{(j)}$ сравниваем с α

Нисходящая процедура:

если $\tilde{p}_j > \alpha$ (т.е. мы не отвергли)

значит $\tilde{p}_{j+1} > \alpha$

Давайте скажем, что $\tilde{p}_{j+1} \geq \tilde{p}_j$

$$\tilde{p}_j = \max\left((m-j+1)\, p_j,\ \tilde{p}_{j+1}\right)$$ + ограничение на $(0,1)$

$$\Rightarrow \tilde{p}_j = \min\left(1, \max\left((m-j+1)\, p_j,\ p_{j-1}\right)\right)$$

Пример (МПГ)

Задача с часами $p_1 = 0,0455$ $p_2 = 0,0159$

- Бонферони $\tilde{p}_1 = 0.09$ $\tilde{p}_2 = 0.0318$ отвергаем
- Холм $\tilde{p}_1 = 0.0455$ отвергаем $\tilde{p}_2 = 0.0318$ отвергаем

Реальный уровень значимости

$X = (X_1 \ldots X_n)$ — выборка из P

$H_0: P \in \mathcal{P}_0$ vs. $H_1: P \in \mathcal{P}_1$

S_α — критерий уровня значимости α

Хотим узнать реальный уровень значимости

т.е. хотим оценить $\sup\limits_{P \in \mathcal{P}_0} P(X \in S)$

Процедура: генерируем $X^j = (X_1^j \_ X_m^j)$, считаем I^j

$j = \overline{1, m}$

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} I^j$$

реальный ур. зн. S.

$\sim I_1 \_ I_m \sim$ Bern (γ)

ЦПТ $\frac{\sqrt{n}(\bar{I} - \gamma)}{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}} \to N(0,1)$

с вер. 0.95 $\gamma \in \left(\bar{I} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\gamma(1-\gamma)}}{\sqrt{n}} \right)$ осталось заменить γ на оценку

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} \approx 2 \quad \sqrt{\gamma(1-\gamma)} \leq 1/2$

Тогда $\gamma \in \left(\bar{I} \pm \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

Тогда, если $\gamma \in (0.049,\ 0.051)$

то $\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.001 \Rightarrow n = 10^6$