$\vec{X} \in \mathbb{R}^n$ $\quad X = (x_1, \ldots, x_n)$ $\quad x_i \sim U[0, 1]$

$$\frac{\sqrt{D\,\|X\|}}{E\,\|X\|} \to 1$$

$$\|x\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

$$\frac{\sqrt{D\|x\|}}{E\|x\|} = \sqrt{\frac{E\|x\|^2 - (E\|x\|)^2}{(E\|x\|)^2}} = \sqrt{\frac{E\|x\|^2}{(E\|x\|)^2} - 1} \;=$$

ЦПТ $\sqrt{n}\left(\frac{\|x_i\|^2}{n} - E x_1^2\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, D x_1^2)$

δ- метод: $\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{\|x\|^2}{n}} - \sqrt{E x_1^2}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, c)$

$$\|x\| - \sqrt{n E x_1^2} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, c)$$

$$\|x\| \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(\sqrt{n E x_1^2}, c)$$

$$E\|X\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{n E x_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{n E x_1^2}{n (E x_1)^2} - 1} = 0$$

Задача $X = x_1 \dots x_n$ $x_i \in \mathbb{R}^D$ выборка

1) Построить $h: X \to Y = (Y_1 \dots Y_n)$ $Y_i \in \mathbb{R}^d$ (Embedding)

2) Построить $h: \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^d$ (Extented Embedding)

3) Построить $h: \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^d$

$g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^D$ $x \approx g(h(x))$

PCA: $X = (X_1, \dots X_n) \quad X_i \in \mathbb{R}^D$

Найти $\mathcal{L} = \{ x \in \mathbb{R}^D \mid x = x_0 + \sum_{i=1}^{d} y_i e_i, \ y_0 \in \mathbb{R}^2 \}$

которое хорошо приближает нашу выборку

$x_0, e_i \in \mathbb{R}^D$ — параметры подпр-ва

1) $x_0 = \overline{X}$

2) e_1 — ?

матрица

$$\Sigma = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(x_i - \overline{x})^T$$

проекции не направленные ?

$x \mapsto a^T x_i$

$$D(a^T X) = a^T D X_i\, a = a^T \Sigma a \Rightarrow \hat{\sigma}_a = a^T \hat{\Sigma} a$$

$$\overset{n}{\Sigma}_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (a^T X_i - a^T \bar{X})(a^T X_i - a^T \bar{X})^T =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a^T (x_i - \bar{x}) \left(a^T (x_i - \bar{x})\right)^T =$$

$$- - -$$

$$= a^T \overset{n}{\Sigma} a$$

- e_1 такой что $\hat{\sigma}_{e_1} \to \max\limits_{\|e_1\| = 1}$

- e_k такой что $\hat{\sigma}_{e_k} \to \max\limits_{\substack{\|e_k\| = 1 \\ (e_j, e_k) = 0}}$

$$\begin{cases} e_1^T \hat{\Sigma} e_1 \to \max\limits_{e_1} \\ \|e_1\|^2 = 1 \end{cases} \to \begin{cases} e_1^T \hat{\Sigma} e_1 \to \max \\ e_1^T e_1 = 1 \end{cases}$$

лагранжиан $\quad L = e_1^T \hat{\Sigma} e_1 = \lambda e_1^T e_1$

$$\frac{\partial L}{\partial e_1} = 2 \hat{\Sigma} e_1 - 2 \lambda e_1 = 0$$

$$\hat{\Sigma} e_1 = \lambda e_1$$

$\Rightarrow$ e_1 – собств. вект $\hat{\Sigma}$ с собств знач λ

$$\hat{\sigma}_{e_1} = e_1^T \hat{\Sigma} e_1 = e_1^T \lambda e_1 = \lambda e_1^T e_1 = \lambda \to \max$$

Следствие e_k – k-ый собств. вект $\hat{\sigma}$ – с.з $\lambda_{(k)}$

Переходи