Проверка гипотез

$H_0: P(x) \in \mathcal{P}_0$ v.s. $H_1: P(x) \in \mathcal{P}_1$

$$\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}_1 = \varnothing$$

$x_1 \ldots x_n \sim$ выборка из $P \in \mathcal{P} = \{P_\theta(x) \mid \theta \in \Theta\}$ — парам расп.

$H_0: \theta \in \Theta_0$ vs. $H_1: \theta \in \Theta_1$

$$\Theta_0 \sqcup \Theta_1 \subset \Theta$$

Опр. $S(x)$ — критерий, если $x \in S(x) \Leftrightarrow H_0$ — отвергается

- H_0 отверглась (стат. значимый)
- H_0 не отверглась (стат не значимый)

Ошибки

Ошибки I рода — отвергли верное

$$P_I = \sup_{\theta \in \Theta} P_\theta (x \in S(x))$$

Ошибки II рода — не отвергли ложное

$$P_{II} = \sup_{\theta \in \Theta} P_\theta (x \notin S(x))$$

Цель $\begin{cases} P_I(x) \leq \alpha \\ P_{II}(x) \to \min \end{cases}$

Мощность критерия $S(x)$

$$\beta_S(\theta) = P_\theta (x \in S(x) \mid \theta \in \Theta)$$

Критерий Вальда

$\hat{\theta}$ – а.н.о. θ с ас. дисп. $\sigma^2(\theta)$

Пусть $\hat{\sigma}$ – сост. оц. σ, тогда для θ_0

$$W = \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\hat{\sigma}} \xrightarrow{d_\theta} N(0,1)$$ – критерий для проверки гипотезы

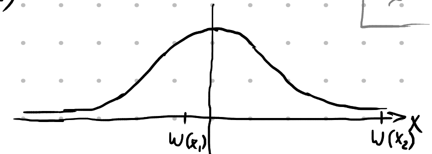
$H_0: \theta = \theta_0$ v.s. $H_1:$

$\theta \neq \theta_0$ $\{|W(x)| > z_{1-\alpha/2}\}$

$\theta > \theta_0$ $\{W(x) > z_{1-\alpha}\}$

$\theta < \theta_0$ $\{W(x) < z_{\alpha}\}$

Если $X = (X_1 \ldots X_n) \sim P_{\theta_0}$ $\Rightarrow$ $W(X) \sim N(0,1)$



Задача $X_1 \ldots X_n \sim Pois(\theta)$

Построить критерий Вальда для $H_0: \theta = \theta_0$ и всех альтернатив

▲ ЦПТ $\sqrt{n}(\overline{X} - \theta) \sim N(0, \theta)$

$\Rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}$ — а.н.о. с ас. дис. $\sigma^2(\theta) = \theta$

$\hat{\sigma} = \sqrt{\overline{X}}$ — сост. оценка σ

$$W(x) = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \theta}{\sqrt{\overline{X}}} \overset{d_{\theta_0}}{\sim} N(0,1)$$

$H_1: \theta \neq \theta_0$ $\quad \left\{ \left| \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \theta_0}{\sqrt{\overline{X}}} \right| > z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}$

$H_1: \theta > \theta_0$ $\quad \left\{ \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \theta_0}{\sqrt{\overline{X}}} > z_{1-\alpha} \right\}$ $\qquad H_1: \theta < \theta_0$ $\quad \left\{ \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - \theta_0}{\sqrt{\overline{X}}} < z_{\alpha} \right\}$

Критерии основанные на отношении правдоподобия

$\mathcal{P}$ - доминируемое семейство

Пусть гипотеза имеет вид $H_0: \theta = \theta_0$ v.s. $H_1: \theta = \theta_1$

Если $\exists\, c_\alpha$ что $P_{\theta_0}\left(\Lambda(x) = \dfrac{L_x(\theta_1)}{L_x(\theta_0)} > c_\alpha\right) < \alpha$

то где $S(x) = \{\Lambda(x) > c_\alpha\}$ - критерий

$L_x(\theta_i)$ - ф-ция правдоподобия от θ_i

Пример часы $x = 2$ — расхождение часов за месяц

$$X \sim N(0,1) \text{ — настоящие}$$

$$X \sim N(0, 100^2) \text{ — подделка}$$

Гипотеза H_0: часы наст. v.s. H_1: часы поддельные

▲ $$L_x(\theta_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$L_x(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,100} e^{-x^2/2\cdot 100^2}$$

$$\Lambda(x) = \frac{L_x(\theta_1)}{L_x(\theta_0)} = \frac{1}{100} e^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{100^2} - 1\right)}$$

$\Lambda(x)$ — монотонно возрастает

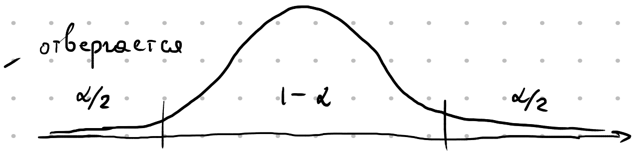
$$P(\Lambda(x) > c_\alpha) = P(x^2 > c_\alpha^2) \le \alpha$$

$\Updownarrow$

$$P(|X| \geq C'_\alpha) \leq \alpha$$

$$S(X) = \{|X| > z_{1-\alpha/2}\}$$

≈ 1.96



$$\beta = P_{\theta_1}(|X| > z_{1-\frac{\alpha}{2}})$$

$\beta =$ sps.norm(0, 100).sf($z_{1-\frac{\alpha}{2}}$) +

+ sps.norm(0, 100).cdf($z_{\frac{\alpha}{2}}$) ≈ 0.984

H_0: подделка vs. H_1: наст.

$\Lambda(x)$ — монотонно убывает от X^2

$$P(|X| < \overset{(\sigma=100)}{z_{\frac{1+\alpha}{2}}}\}$$

$S(X) = \{ |X| < 6.27 \}$ отвергаем

$\beta_{S(x)}(\theta_0) \approx 1$

Равномерно наиболее мощные критерии

$H_0: \theta \in \Theta_0$ v.s. $H_1: \theta \in \Theta_1$

$S(X)$ — критерий для гипотезы

Опр. $S(X)$ наз-ся равномерно наиболее мощным (РНМК) критерием для H_0 v.s. H_1, если $\forall R(X)$ — критерий для той же гипотезы

$$\beta_S(\theta) \geq \beta_R(\theta) \quad \forall \theta \in \Theta_1$$

Теорема об равномерном отклонении правдоподобия

Пусть для $\theta_2 > \theta_1$ $\quad \Lambda(x) = \dfrac{L_x(\theta_2)}{L_x(\theta_1)} = f_{\theta_1, \theta_2}(T(x))$ –

– монотонно возраст. (убыв.) по $T(x)$

Тогда

$S(x) = \{ T(x) > c_\alpha \}$ – крит. для $H_0: \theta = \theta_0$ v.s. $H_1: \theta > \theta_0$

где сх. : $P_{\theta_0}(T(x) > c_\alpha) \leq \alpha$

Если c_α : $P_{\theta_0}(T(x) > c_\alpha) = \alpha$ – РНМК

- возр $\to$ убыв. $\Rightarrow$ $T(x) > c_\alpha$ $\to$ $T(x) < c_\alpha$

- $H_0: \theta = \theta_0$ рассматривать $H_0: \theta < \theta_0$
- Можем рассмотреть $H_0: \theta = \theta_0$ v.s. $H_1: \theta < \theta_0$

  $\forall\, \theta_2 < \theta_1$

- $H_0: \theta = \theta_0$ v.s. $H_1: \theta < \theta_0$ $P_{\theta_0}(T(X) < C_\alpha)$
- В дискретном случае $\alpha_0 \leq \alpha$

  $$P_{\theta_0}(T(x) > C_\alpha) = \alpha_0$$

- Если θ_2 из Θ_1, θ_1 из Θ_2, то $\Lambda(X) \to \max$, т.е. альтернатива более правдоподобна чем осн. гипотеза

$\Lambda(x) \uparrow$ при $T(x)\uparrow$ при больших $T(x)$, $\Lambda(x)$ – дост. большие

$\Rightarrow$ мы попали в критерий $\{T(x) > C_\alpha\}$

Я в душе не ебу что за высер был вверху (с •)

Задача $X_1 \ldots X_n \sim Bern(\theta)$

РМНК для $H_0: \theta > \theta_0$ v.s. $H_1: \theta < \theta_0$

$\blacktriangle$

$$\Lambda(x) = \frac{\theta_2^{\sum x_i} (1-\theta_2)^{n-\sum x_i}}{\theta_1^{\sum x_i} (1-\theta_1)^{n-\sum x_i}} = \left(\frac{\theta_2(1-\theta_1)}{\theta_1(1-\theta_2)}\right)^{\sum x_i} \left(\frac{1-\theta_2}{1-\theta_1}\right)^n$$

$\theta_2 > \theta_1$ то $\Lambda(x) \uparrow$ при $\sum x_i \uparrow$

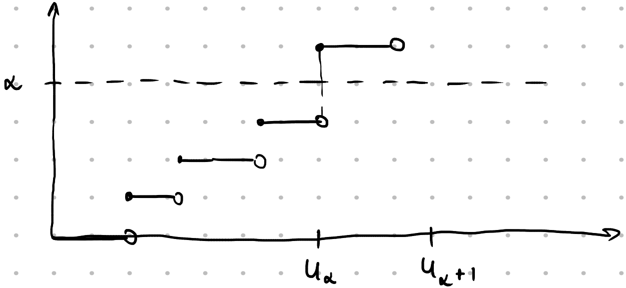
$\Rightarrow$ критерий $\{\sum X_i < C_\alpha\}$

Найдём C_α:

$\sum x_i \sim Bin(n, \theta)$

$$c_\alpha = \begin{cases} u_\alpha, & P(X < u_\alpha) = \alpha \\ u_\alpha - 1 \end{cases}$$

График ф-ции распр. биномиального



$$u_p = \min\{x \mid f(x) > p\}$$