$\boxed{\Theta/3}$

№1 $\quad E|\xi|^n = ?$

a) $p_\xi(x) = \frac{1}{2\Theta} e^{-\frac{|x|}{\Theta}}$

$$E|\xi|^n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\Theta} e^{-\frac{|x|}{\Theta}} |x|^n \, dx =$$

$$= \frac{1}{\Theta} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x}{\Theta}} x^n \, dx = \qquad \text{замена } y = \frac{x}{\Theta}$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-x} x^n \Theta^n \, dx =$$

Ответ.

$$= \Theta^n (-1)^n \int_{-\infty}^{0} e^x x^n \, dx = \boxed{\Theta^n n!}$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^x x^n \, dx = e^x x^n \Big|_{-\infty}^{0} - n \int_{-\infty}^{0} e^x x^{n-1} \, dx =$$

$$= (-1)^n n! \int_{-\infty}^{0} e^x \, dx = (-1)^n n!$$

Acronis

б) $p_\xi(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}, \quad x>0$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x} \cdot x^n \, dx =$$

$$= \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty x^{n+\beta-1} e^{-\alpha x} \, dx =$$

$$= \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{n+\beta-1} e^{-x} \frac{1}{\alpha} dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha^n \Gamma(\beta)} \int_0^\infty x^{n+\beta-1} e^{-x} \, dx = \frac{\Gamma(n+\beta)}{\alpha^n \Gamma(\beta)}$$

$$= \frac{\beta(\beta+1) \cdot \ldots \cdot (\beta+n-1)}{\alpha^n}$$

Acronis

№ 8 n – людей группы, p – вер-ть заболеть

кол-во шприцов на группу из 2-х

$$E\left(\xi_1 + \ldots + \xi_{\frac{n}{2}}\right) = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} E(\xi_k) =$$

$$= \frac{n}{2}\cdot\left((1-p)^2 + 2p(1-p) + 3\cdot p^2 + 3(1-p)p\right)$$

$$= \frac{n}{2}\left(1 - \cancel{2p} + p^2 + \cancel{2p} - 2p^2 + \cancel{3p^2} + 3p - \cancel{3p^2}\right) =$$

$$= \frac{n}{2}\left(1 + 3p - p^2\right)$$

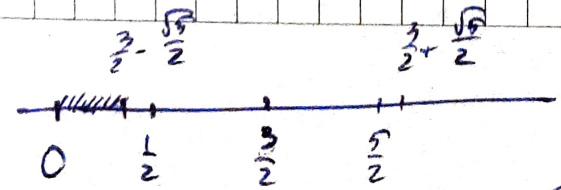
$$\frac{1}{2}\left(1 + 3p - p^2\right) < 1$$

$$1 + 3p - p^2 < 2$$

$$p^2 - 3p + 1 > 0$$

$$D = 9 - 4 = 5 \qquad p_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $\boxed{p < \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$



№2 Рассмотрим вероятн. меру P

Для неё верно $P((-\infty, +\infty)) = 1$

Тогда применима теорема о влож. L_p пространств: (по ~~нер~~ нерав. Гёльдера)

$$\int_{\mathbb{R}} |\xi|^k \, dP \le \left(\int_{\mathbb{R}} \left(|\xi|^k\right)^{\frac{4}{k}} dP \right)^{\frac{k}{4}} \left(\int_{\mathbb{R}} 1 \, dP \right)^{1-\frac{k}{4}} =$$

$$= \Big(\underbrace{E|\xi|}_{<+\infty} \Big)^{\frac{k}{4}} \cdot \Big(\underbrace{P(\mathbb{R})}_{=1} \Big)^{1-\frac{k}{4}} < +\infty$$

№3

1) Найдём распр. k-й порядк. стат.

1.1) $F_{X_{(k)}}(a) = P(X_{(k)} \leq a) = \sum_{t=k}^{n} C_n^t \cdot P(X \leq a)^t (1 - P(X \leq a))^{n-t}$

$= \sum_{t=k}^{n} C_n^t F(a)^t (1 - F(a))^{n-t} =$

1.2) Существует способ найти и плотность.

плотность

$P(X_{(k)} \in (a, a+\varepsilon)) = f_{X_{(k)}}(a) \cdot \varepsilon$ при малых ε

$\|$

$C_{n-1}^{k-1} F_X(a)^{k-1} \cdot (1 - F_X(a))^{n-k} (n \cdot f_X(a) \cdot \varepsilon)$

Тогда $f_{X_{(k)}}(a) = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} F_X(a)^{k-1} \cdot (1 - F_X(a))^{n-k} \cdot f_X(a)$

2) При $X_i \sim U[0,1]$

$$p_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot x^{k-1} \cdot (1-x)^{n-k} \cdot 1 \; ; \; x \in [0,1]$$

$$p_{X_{(k)}}(x) = n C_{n-1}^{k-1} \cdot x^{k-1} \cdot (1-x)^{n-k} \cdot 1 =$$

Подметим, что $\sum_1^n p_{X_{(i)}}(x) = n = \sum_1^n p_X(x)$

как и должно быть.

$$E X_{(k)} = \int_0^1 n C_{n-1}^{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} x \, dx =$$

$$= n C_{n-1}^{k-1} \cdot B(k+1, n-k+1) = n C_{n-1}^{k-1} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} =$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1}$$

$$DX_k = EX_k^2 - (EX_k)^2$$

$$EX_k^2 = \int_0^1 n\, C_{n-1}^{k-1}\, x^{k+1} (1-x)^{n-k}\, dx =$$

$$= n\, C_{n-1}^{k-1}\, B(k+2, n-k+1) = n\, C_{n-1}^{k-1} \frac{\Gamma(k+2)\,\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+3)}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!\,(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}$$

$$DX_k = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{k^2}{(n+1)^2} = \frac{k(k+1)(n+1) - k^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} =$$

$$= \frac{\cancel{k^2 n} + k^2 + kn + k - \cancel{k^2 n} - 2k^2}{(n+1)^2(n+2)} = \boxed{\frac{k(n-k+1)}{(n+1)^2(n+2)}}$$

* Замечание Зависимость $EX_{(k)}$ от k

очевидно монотонно возр-ая.

Для $DX_{(k)}$ она параболическая — минимум

достигается в $k = \frac{n}{2}$, что также логично.

Acronis

№5 $\varphi_\xi(t) = Ee^{it\xi}$

Заметим ξ_n, η_n — незав, тогда

$$\varphi_{(\xi_n, \eta_n)}(x,y) = \varphi_{\xi_n}(x) \cdot \varphi_{\eta_n}(y)$$

устр. $n \to \infty$ неточечн. сход.

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\varphi_{(\xi,\eta)}(x,y) = \varphi_\xi(x) \cdot \varphi_\eta(y)$$

$$\Downarrow$$

ξ, η — независ, ч.т.д.

1С:ПРЕДПРИЯТИЕ
ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ И УЧЕТА

• Задача 5 (версия 2)

ξ_n, η_n – посл-ти сл. вел. $\xi_n \to \xi$, $\eta_n \to \eta$

Притом ξ_n и η_n – незав. $\forall n$

Тогда по теореме о независимости

(I) $\varphi_{(\xi_n, \eta_n)}(x,y) = \varphi_{\xi_n}(x)\, \varphi_{\eta_n}(x)$

Характ. функц. всегда $\exists$: $|\varphi_\eta| \le 1$

(II) $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$ $\Rightarrow$ $P\left(\left\| \begin{pmatrix}\xi_n\\ \eta_n\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \right\| < \varepsilon\right) >$

$> P\left(|\xi_n - \xi| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \cap |\eta_n - \eta| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$

Стрем. к 1 т.к.

вер. обоих соб. стрем. к 1.

Откуда $\begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$

[Кстати это теор. о покомп. сходимости]

III

Из сходимости по вер. след. сходим. по расп.

По теор. о непр-ти хар. функц. $\forall (x, y)$

$$\varphi_{(\xi_n, \eta_n)}(x,y) = \varphi_{\xi_n}(x) \cdot \varphi_{\eta_n}(y)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\varphi_{(\xi, \eta)}(x,y) = \varphi_{\xi}(x) \cdot \varphi_{\eta}(y)$$

Тогда $\varphi_{(\xi,\eta)} = \varphi_\xi \cdot \varphi_\eta$ => по теор. о независ.: ξ и η – независимы