

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ім. О.С. ПОПОВА
Кафедра теорії електричного зв'язку ім. А.Г. Зюко

П. В. Іващенко, І. С. Перекрестов

ТЕОРІЯ ЗВ'ЯЗКУ

Модуль 1. Сигнали електрозв'язку

Одеса – 2013

УДК 621.391(075)
ББК 32.88
І – 24

Рекомендовано до друку
Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник
(Лист № 1/11–13733 від 10.09.2013 р.)

Рецензенти – д.т.н., проф., зав. кафедри телекомунікацій Національного університету "Львівська політехніка" М.М. Климаш; д.т.н., проф., зав. кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем Черкаського державного технологічного університету С.М. Первунінський, проф. кафедри технічної електродинаміки та систем радіозв'язку Одеської національної академії зв'язку ім. О.С. Попова Е.О. Сукачов.

Іващенко П.В. Теорія зв'язку: Модуль 1. Сигнали електрозв'язку: навч. посіб. [для студ., що навчаються за напрямом вищої освіти 6.050903 – Телекомунікації]/ П. В. Іващенко, І. С. Перекрестов. – Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2013. – 145 с. з іл.

ISBN 978-617-582-009-4

Навчальний посібник містить матеріали до вивчення модуля 1 дисципліни «Теорія зв'язку». Матеріали подано як конспект лекцій. У вступному розділі наведені загальні відомості про системи електрозв'язку. В окремих розділах розглядаються елементи загальної теорії сигналів, математичний опис та характеристики випадкових процесів, сигналів аналогових та цифрових видів модуляції. Кожний розділ завершується контрольними питаннями та задачами.

Навчальний посібник призначений для студентів, які навчаються за напрямом 6.050903 – Телекомунікації.

ISBN 978-617-582-009-4

© П.В. Іващенко, І.С. Перекрестов, 2013 р.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
1 ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ПРО СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОЗВ'ЯЗКУ.....	6
1.1 Визначення основних понять.....	6
1.2 Повідомлення й первинні сигнали	7
1.3 Канал зв'язку.....	8
1.4 Мережа зв'язку.....	8
1.5 Системи передавання	8
1.6 Завади та спотворення.....	9
1.7 Основні характеристики систем електричного зв'язку.....	10
Контрольні питання до розділу 1	10
2 ЕЛЕМЕНТИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ СИГНАЛІВ	11
2.1 Класифікація сигналів.....	11
2.2 Енергетичні характеристики неперервних детермінованих сигналів	14
2.3 Подання сигналів в ортогональних базисах	18
2.4 Геометричне подання сигналів.....	20
2.5 Спектральний аналіз періодичних сигналів.....	23
2.6 Спектральний аналіз неперіодичних сигналів.....	27
2.7 Спектральне представлення дискретних сигналів	33
2.8 Теорема й ряд Котельникова	37
2.9 Аналого-цифрове перетворення	40
2.10 Подання смугових сигналів	45
2.11 Аналітичний сигнал	47
2.12 Дискретизація смугових сигналів.....	50
Контрольні питання до розділу 2	51
3 ОПИС ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ.....	53
3.1 Визначення випадкових процесів.....	53
3.2 Імовірнісні характеристики випадкових процесів.....	53
3.3 Числові характеристики стаціонарних процесів	57
3.4 Кореляційна функція стаціонарних процесів	59
3.5 Числові характеристики і кореляційна функція ергодичного процесу	62
3.6 Спектральна густина потужності стаціонарного випадкового процесу ...	63
3.7 Гауссів випадковий процес	65
3.8 Білий шум	68
3.9 Перетворення випадкових процесів лінійними електричними колами	69
3.10 Перетворення випадкових процесів нелінійними електричними колами	73
Контрольні питання до розділу 3	76
4 СИГНАЛИ АНАЛОГОВИХ ВИДІВ МОДУЛЯЦІЇ.....	78
4.1 Загальні відомості про аналогову модуляцію.....	78
4.2 Амплітудна модуляція і її різновиди.....	78
4.3 Частотна й фазова модуляція.....	83
4.4 Формування модульованих сигналів (модулятори)	89

4.5 Детектування сигналів	92
Контрольні питання до розділу 4	95
5 СИГНАЛИ ЦИФРОВИХ ВИДІВ МОДУЛЯЦІЇ	96
5.1 Загальні відомості про цифрову модуляцію	96
5.2 Спектральна густина потужності сигналу цифрової модуляції.....	98
5.3 Вибір форми канальних символів	100
5.4 Амплітудноімпульсна модуляція	106
5.5 Одновимірні смугові сигнали цифрової модуляції	107
5.6 Двовимірні смугові сигнали цифрової модуляції.....	110
5.7 Дистанційні властивості сигналів цифрової модуляції.....	117
5.8 Широкосмугові сигнали.....	120
5.9 Паралельно-послідовне передавання	125
Контрольні питання до розділу 5	132
РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ.....	134
ПЕРЕЛІК ЗНАНЬ І УМІНЬ, ЯКІ ПОВИНЕН НАБУТИ СТУДЕНТ ПІД	
ЧАС ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ 1	136
ЛІТЕРАТУРА	137
ДОДАТКИ	138

ВСТУП

У навчальному посібнику викладені методи математичного опису та характеристики сигналів електрозв'язку. Зміст посібника відповідає вимогам до модуля 1 навчальної програми дисципліни «Теорія зв'язку».

Вивчення матеріалу модуля 1 базується на знаннях, отриманих під час вивчення дисциплін «Вища математика», «Основи теорії кіл» та «Основи схемотехніки».

До посібника увійшли методи математичного опису і характеристики сигналів електрозв'язку, які необхідні для вивчення наступних модулів теорії зв'язку «Основи теорії інформації та її використання в телекомунікаційних системах» (модуль 2), «Теорії завадостійкості приймання сигналів електрозв'язку» (модуль 3) та «Основи теорії завадостійкого кодування в телекомунікаційних системах» (модуль 4).

Перелік знань і умінь, необхідних для вивчення навчального матеріалу модуля 1, які повинен набути студент у процесі вивчення попередніх дисциплін, подано в табл. В.1. Для перевірки засвоєння знань рекомендується використовувати переліки контрольних питань, розміщені наприкінці кожного розділу посібника.

Таблиця В.1 – Перелік вхідних знань і умінь

Найменування	Зміст	Попередня дисципліна
З н а н н я		
Вх.Зн. 1	Матриці, вектори, дії над ними (лінійна алгебра)	Вища математика
Вх.Зн. 2	Методи обчислення похідної та інтегрування функцій	Вища математика
Вх.Зн. 3	Основні характеристики випадкових подій та величин (теорія ймовірностей)	Вища математика
Вх.Зн. 4	Подання функцій рядами, ряд Фур'є, перетворення Фур'є	Вища математика
Вх.Зн. 5	Математичний опис фільтрів у частотній та часових областях	Основи теорії кіл
Вх.Зн. 6	Функціональні елементи аналогової та цифрової схемотехніки	Основи схемотехніки
У м і н н я		
Вх.Ум. 1	Виконувати математичні операції над векторами та матрицями	Вища математика
Вх.Ум. 2	Виконувати диференціювання та інтегрування функцій за допомогою математичних довідників та комп'ютерних програм	Вища математика
Вх.Ум. 3	Виконувати розрахунки спектрів періодичних та імпульсних сигналів	Вища математика
Вх.Ум. 4	Розраховувати ймовірнісні та числові характеристики випадкових подій та величин	Вища математика
Вх.Ум. 5	Будувати схеми пристроїв за алгоритмами їх роботи, використовуючи функціональні елементи схемотехніки	Основи схемотехніки

1 ЗАГАЛЬНІ ПОНЯТТЯ ПРО СИСТЕМИ ЕЛЕКТРОЗВ'ЯЗКУ

Галузь науки “Теорія електричного зв’язку” вивчає загальні закономірності передавання інформації на відстань. Об’єктом вивчення є система електричного зв’язку.

Система електричного зв’язку забезпечує передавання інформації на відстань за допомогою електричних сигналів. Проблема передавання інформації на відстань формулюється так: є джерело інформації (людина, комп’ютер тощо), що володіє деякою інформацією, яку необхідно передати віддаленому отримувачу. Ця інформація повинна бути передана із заданим рівнем вірогідності й із припустимою затримкою. Для обговорення цієї проблеми ми визначимо основні поняття: *інформація*, *повідомлення*, *сигнал* (п. 1.1) і *канал зв’язку* (п. 1.3).

1.1 Визначення основних понять

Інформація – сукупність знань щодо деякого процесу, подій, предмета, які зменшують невизначеність, що була в отримувача до одержання ним цих знань. Для передавання або зберігання інформації використовуються різні знаки (або символи), які дозволяють представляти її в деякій формі.

Повідомлення – матеріальна форма подання інформації. Насамперед, повідомлення – це набір знаків, які представляють інформацію. Передавання повідомлень на відстань виконується за допомогою сигналу.

Сигнал – фізичний процес, яким представлене повідомлення і який використовується для **передавання** інформації на відстань. Сигнал може бути електричним, звуковим або світловим. У теорії електричного зв’язку (за замовчуванням) сигнал – це електричний струм, напруга або напруженість електричного поля, яким представлене повідомлення, що передається.

Інформаційна система – система, що функціонує на основі використання інформації і за допомогою технічних засобів виконує одну або кілька таких функцій, як збирання, передавання, перетворення, накопичення, зберігання та оброблення інформації. Окремий клас інформаційних систем складають системи електричного зв’язку.

Система електричного зв’язку забезпечує передавання повідомлення з певною якістю від *джерела повідомлень* до *отримувача повідомлень*. Система електричного зв’язку може забезпечувати одностороннє передавання повідомлень (мовлення) або двостороннє передавання повідомлень (зв’язок). У першому випадку має місце симплексне (*тільки одностороннє*) передавання, у другому випадку має місце двостороннє передавання: повний дуплекс – система забезпечує одночасно приймання і передавання повідомлень; напівдуплекс – система забезпечує приймання і передавання повідомлень по черзі.

Узагальнену схему системи електричного зв’язку для одностороннього передавання повідомлень наведено на рис. 1.1. Тут $a(t)$ – повідомлення, що передається; $\hat{a}(t)$ – повідомлення, що приймається; $b(t)$ – первинний сигнал; $\hat{b}(t)$ – прийнятий первинний сигнал. У випадку дуплексного передавання необхідно два набори блоків, показаних на рис. 1.1.

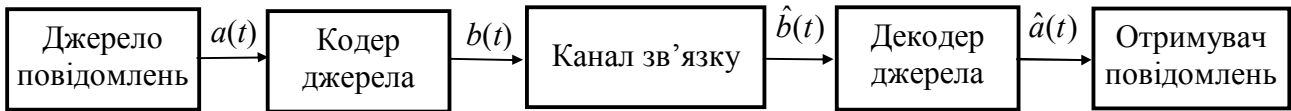


Рисунок 1.1 – Узагальнена схема системи електричного зв'язку

Джерело інформації видає її повідомленнями. Характеристики повідомлень значною мірою визначають побудову обладнання для їх передавання; тому говорять “джерело повідомлень”, замість “джерело інформації”; аналогічно говорять “отримувач повідомлень”, замість “отримувач інформації”.

1.2 Повідомлення й первинні сигнали

Усі повідомлення діляться на *неперервні* й *дискретні*.

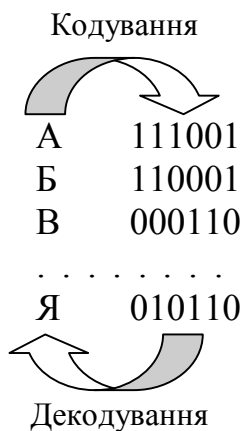


Рисунок 1.2 – Ілюстрація кодування і декодування

Дискретне повідомлення складається з послідовності окремих знаків. Кількість різних знаків є скінченною. Ці знаки утворюють **алфавіт джерела**. Приклад типового дискретного повідомлення – текст. Перетворення дискретних повідомлень в електричні сигнали полягає в їх кодуванні, що виконується кодером джерела. Кодування повідомлення виконується на основі **коду**. **Код** – це правило або таблиця, на основі якого кожному знаку повідомлення ставиться у відповідність кодова комбінація (набір двійкових символів) (рис. 1.2). У результаті кодування одержують **первинний цифровий сигнал** (рис. 1.3, а). Зворотне перетворення первинного цифрового сигналу в повідомлення називається декодуванням і виконується декодером джерела (рис. 1.1).

Основна характеристика цифрового сигналу – його швидкість R , біт у секунду (біт – коротка назва двійкових символів). На рис. 1.3, а позначено $T_6 = 1/R$ – тривалість біта.

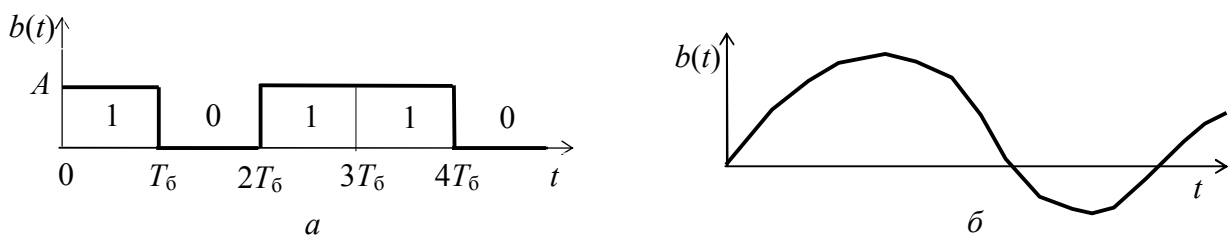


Рисунок 1.3 – Первинні сигнали: а – цифровий сигнал; б – неперервний сигнал

Неперервне повідомлення являє собою зміну деякої неперервної за часом величини (наприклад, звукового тиску). Перетворення неперервних повідомлень в електричні сигнали виконується різними перетворювачами (датчиками) (наприклад, мікрофоном). У результаті перетворення отримують **первинний неперервний (аналоговий) сигнал** (рис. 3, б). Основна характеристика неперервного первинного сигналу в теорії електричного зв'язку – максимальна частота його спектра F_{\max} , що характеризує швидкість його зміни.

1.3 Канал зв'язку

Канал зв'язку – сукупність технічних засобів для передавання електричних сигналів на відстань.

Якщо первинний сигнал є цифровим, то і канал зв'язку повинен бути **цифровим**. Якщо первинний сигнал неперервний, то і канал зв'язку повинен бути **неперервним**.

Неперервний первинний сигнал може бути перетворений у цифровий сигнал для передавання цифровим каналом зв'язку. У цьому випадку використовується аналого-цифрове перетворення. Зворотне перетворення називається цифро-аналоговим. Так, у випадку цифрового передавання неперервних повідомлень кодер джерела перетворює повідомлення в первинний неперервний сигнал, а потім – у цифровий сигнал. Цифрове передавання має багато переваг порівняно з аналоговим передаванням. Протягом декількох останніх десятиліть відбувається цифровізація систем передавання.

Обговорювані перетворення показано на рис. 1.1.

Канал зв'язку може бути простим або складеним.

Розглянемо побудову складеного каналу як частину *мережі зв'язку*.

1.4 Мережа зв'язку

Мережа – набір вузлів і з'єднань, які забезпечують інформаційний обмін між користувачами (користувачі – джерела й отримувачі повідомлень).

Є **вузли користувачів** (ВКр), де використовується *кінцеве* (термінальне) обладнання, і **вузли комутації** (ВКм), де виконується *комутація каналів або пакетів*.

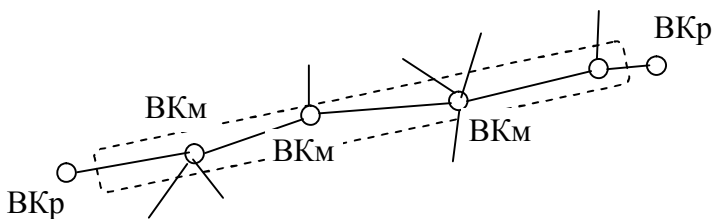


Рисунок 1.4 – Фрагмент топології мережі:
ВКм – вузол комутації; ВКр – вузол користувача

На рис. 1.4 показано фрагмент логічної топології мережі. Цей фрагмент бере участь у передаванні інформації між вказаними вузлами користувачів. В одному ВКр є джерело повідомлень і кодер джерела, в іншому ВКр – декодер і отримувач повідомлень.

Пунктирною лінією обведені з'єднання, які утворюють складений канал зв'язку.

1.5 Системи передавання

З'єднання мережі називають **системами передавання**. Систему передавання, що з'єднує вузол користувача з найближчим вузлом комутації, називають **системою доступу**. Тут варто відзначити, що системи передавання, які створюють канал зв'язку, можуть бути як однотипними, так і зовсім різними.

На рис. 1.5 показано схему типової цифрової системи передавання.

Система передавання будується на основі *лінії передавання*. **Лінія передавання** – фізичне коло (кабель, мідний чи оптичний) або вільний простір (у радіозв'язку), використовуване для передавання сигналу на відстань.

Первинний цифровий сигнал кодується **коректувальним кодом**, який надає можливість під час декодування виявляти та/або виправляти помилки, що виникають під час передавання. Кодування і декодування коректувальним кодом виконують кодер і декодер каналу відповідно.

Модулятор формує сигнал, що добре підходить для передавання по лінії. Іншими словами, модулятор узгоджує характеристики сигналу з характеристиками каналу, зокрема за смугою частот. **Демодулятор** відновлює первинний цифровий сигнал із модульованого сигналу.

В окремих випадках кодер і декодер каналу можуть бути відсутні, якщо демодулятором сигнал відновлюється з високою якістю.

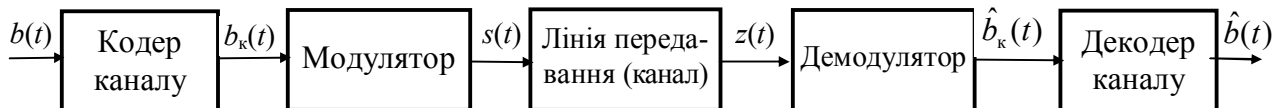


Рисунок 1.5 – Схема типової цифрової системи передавання

1.6 Завади та спотворення

Завада — будь-який вплив на сигнал під час передавання, який викликає *випадкові відхилення значень сигналу*. Завади класифікують за такими ознаками: за походженням, фізичними властивостями, характером дії на сигнал.

За походженням розрізняють:

- *теплові шуми* — шуми апаратури;
- *завади від сторонніх джерел*, що попадають на вхід демодулятора.

За фізичними властивостями розрізняють:

- *флуктуаційну* заваду (синонім — *шум*) — неперервне коливання, яке змінюється випадково;
- *імпульсну* заваду — поодинокі короткі імпульси випадкової тривалості й інтенсивності;
- *зосереджену* (за спектром) заваду — це гармонічне чи модульоване коливання з шириною спектра, яка менша або порівнянна з шириною спектра корисного сигналу.

За характером впливу на сигнал розрізняють:

- *адитивну* заваду — її миттєві значення додаються до миттєвих значень сигналу.
- *мультиплікативну* заваду — її миттєві значення перемножуються з миттєвими значеннями сигналу.

Спотворення сигналу — це *невипадкові зміни форми сигналу*, що зумовлені неідеальними характеристиками електричних кіл та пристроїв, якими проходить сигнал. Розрізняють лінійні та нелінійні спотворення, що виникають відповідно в лінійних та нелінійних колах. У загальному випадку спотворення форми сигналу негативно впливають на якість відтворення повідомлень, і тому вони не повинні перевищувати встановлених норм.

1.7 Основні характеристики систем електричного зв'язку

Основними характеристиками системи електричного зв'язку є:

- **точність передавання повідомлень** або **якість передавання повідомлень**;
- **швидкість передавання інформації** або **кількість інформації, переданої за 1 секунду**.

У каналі зв'язку через дію завад та спотворень сигнал змінює форму. Внаслідок цього під час передавання цифрових сигналів виникають помилки – замість фактично переданих символів отримувачу надходять інші символи. Таке явище кількісно характеризується **ймовірністю помилки символу**, яка визначає точність передавання цифрових сигналів і дискретних повідомлень.

Вплив завад і спотворень на неперервні (аналогові) сигнали призводить до зміни їхньої форми. Кількісно така зміна неперервних сигналів може бути охарактеризована **середнім квадратом різниці між прийнятими й переданими сигналами** або **відношенням сигнал/шум**.

Для передавання повідомлень каналами зв'язку необхідно затратити смугу частот і потужність сигналу (основні ресурси каналу зв'язку). Звідси випливають **основні задачі теорії електричного зв'язку**:

- забезпечення необхідної якості передавання повідомлень каналом зв'язку;
- забезпечення необхідної швидкості передавання каналом зв'язку при обмежених ресурсах каналу.

Контрольні питання до розділу 1

1. Дайте визначення понять: інформація, повідомлення, сигнал.
2. Яке завдання вирішує система електричного зв'язку?
3. В чому різниця між "зв'язком" і "мовленням"?
4. Дайте визначення дискретного і неперервного повідомлень.
5. Як отримують первинний цифровий і аналоговий сигнали?
6. Дайте визначення каналу зв'язку.
7. За яких умов канал зв'язку має бути неперервним, за яких – цифровим?
8. Яким чином здійснюється цифрове передавання неперервних сигналів?
9. Дайте визначення мережі зв'язку.
10. Дайте визначення кінцевого обладнання і вузла комутації.
11. Дайте визначення системи передавання.
12. Дайте визначення лінії передавання.
13. З якою метою здійснюється кодування цифрового сигналу коректувальним кодом?
14. Дайте визначення модулятора і демодулятора.
15. Дайте визначення поняття завада і наведіть класифікацію завад.
16. Дайте визначення поняття спотворення.
17. Що є кількісними мірами оцінки впливу завад і спотворень на цифровий і неперервний сигнали?

2 ЕЛЕМЕНТИ ЗАГАЛЬНОЇ ТЕОРІЇ СИГНАЛІВ

2.1 Класифікація сигналів

Сигнал – поняття досить широке. Під сигналом розуміють процес зміни в часі фізичного явища або стану якого-небудь технічного об'єкта. Сигнали служать для відображення, реєстрації й передавання повідомлень. Спільним для сигналів є те, що в них міститься інформація. Будемо вважати, що сигнал – це електрична напруга або струм.

Найбільш природною математичною моделлю сигналу є функція часу $b(t)$, $s(t)$, $z(t)$ тощо (зупинимось на позначенні $s(t)$). Така функція часу встановлює відповідність між будь-яким моментом часу t і величиною $s(t)$. Розглядаючи математичні моделі сигналів, ми абстрагуємось від конкретної фізичної природи сигналу (напруга, струм, напруженість електромагнітного поля і таке інше), вважаючи, що функція $s(t)$ повністю відбиває суттєві властивості сигналу.

У залежності від того, які значення сигналу s і значення змінної t можливі, розрізняють *неперервні*, *дискретні*, *квантовані* та *цифрові* сигнали.

Сигнал $s(t)$ називається **неперервним** (рис. 2.1, а), якщо множина значень t неперервна (континуальна), тобто аргумент набуває будь-якого значення в інтервалі існування сигналу.

Сигнал $s(t)$ називається **дискретним** (рис. 2.1, б), якщо множина значень t , в які сигнал заданий, скінченна чи його значення t можна пронумерувати. Дискретний сигнал називають також послідовністю, часовим рядом. Такий сигнал з'являється у результаті дискретизації за часом неперервного сигналу. Крок за часом, через який дискретний сигнал задано, як правило, є фіксованим й називається *інтервалом дискретизації* T_d . Таким чином, дискретний сигнал є способом подання у дискретному часі неперервного сигналу.

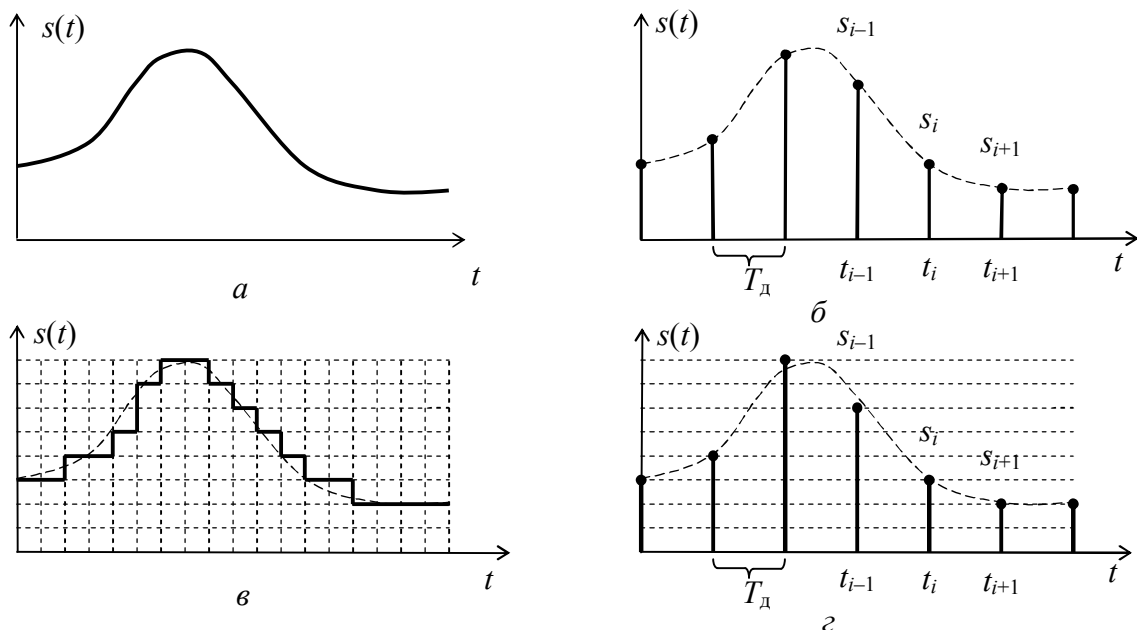


Рисунок 2.1 – Види сигналів

Сигнал $s(t)$ називається **квантованим**, якщо значення s набувають скінчене число значень. На рис. 2.1, *в* показаний квантований неперервний сигнал. Такий сигнал є результатом дискретизації за рівнем неперервного сигналу.

Сигнал $s(t)$ називається **цифровим** (рис. 2.1, *г*), якщо він є і дискретним, і квантованим. Цифрові сигнали з'являються у результаті кодування дискретних повідомлень, а також у результаті кодування неперервних сигналів для їх подання цифровими сигналами.

Сигнали поділяються на *первинні* і *вторинні*. **Первинний** сигнал – це представлення повідомлення неелектричної природи електричним сигналом: якщо повідомлення дискретне, то первинним сигналом є цифровий сигнал, якщо повідомлення неперервне, то первинний сигнал неперервний, а його значення пропорційні значенням повідомлення. На рис. 2.1, *а* показано саме первинний неперервний сигнал. Такий вид мають первинні сигнали у випадку телефонного зв'язку та звукового мовлення, при передаванні сигналів яскравості в телебаченні тощо. *Неперервні первинні сигнали називають аналоговими щоб підкреслити, що сигнали аналогічні тим фізичним процесам, що відображаються цими сигналами. Первинним аналоговим та цифровим сигналам властиво, що їх спектри прилягають до нульової частоти, і їх вважають низькочастотними.*

Для передавання смуговими каналами зв'язку первинні сигнали перетворюють у смугові сигнали за допомогою модуляції. Звичайно, **терміни вторинний, смуговий і модульований сигнали вважають синонімами**.

Усі сигнали поділяються на *детерміновані* та *випадкові*. Ці два класи сигналів суттєво відрізняються використанням математичним апаратом для опису сигналів, їхніх характеристик і перетворень. Математичним виразом **детермінованого** (повністю відомого) сигналу є цілком певна функція часу, задана формулою, графіком чи таблицею значень. Наприклад, $s(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$, де A_0 , f_0 і φ_0 – певні числа (рис. 2.2, *а*). З цього опису відомі значення $s(t)$ у будь-який момент часу.

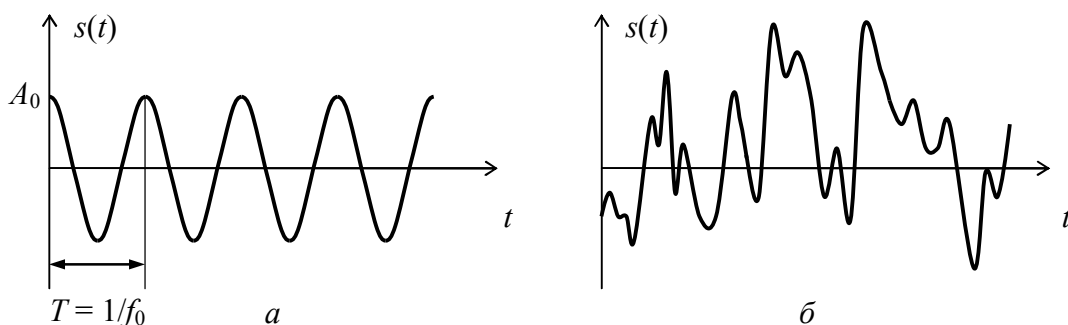


Рисунок 2.2 – Детермінований сигнал (*а*) та реалізація випадкового сигналу (*б*)

Математичним представленням **випадкового** сигналу є випадкова функція часу, її значення не можуть бути точно завбачені заздалегідь (рис. 2.2, *б*). Випадкова функція часу (випадковий процес) описується статистичними характеристиками, що характеризують ті чи інші властивості цієї функції у серед-

ньому. Статистичні характеристики визначають на основі набору реалізацій процесу або (для деяких процесів) однієї реалізації.

Зрозуміло, що випадкові процеси є більш повними математичними моделями сигналів зв'язку та мовлення, ніж детерміновані функції часу. Але багато перетворень сигналів можна вивчати, використовуючи детерміновані функції часу. Це може бути або проста функція – гармонічне коливання, імпульс тощо, або записана раніш реалізація випадкового процесу.

Логічно вважати, що *будь-який реальний сигнал $s(t)$ має скінченну тривалість T_s* . Звичайно початок сигналу суміщають з $t = 0$ (або $t = -T_s/2$) і вважають, що поза інтервалом $(0, T_s)$ (або $(-T_s/2, T_s/2)$) сигнал тотожно дорівнює нулю (рис. 2.3,а). Але в багатьох випадках зручно вважати, що *сигнал нескінченний за тривалістю та існує на інтервалі $(-\infty, \infty)$* (рис. 2.3,б).

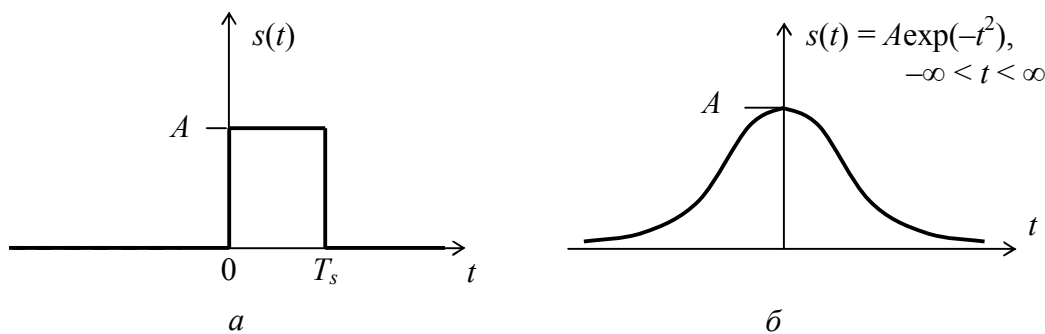


Рисунок 2.3 – Сигнали: а – скінченної тривалості; б – нескінченної тривалості

Серед сигналів нескінченної тривалості можна виділити **періодичні** сигнали (рис. 2.2,а), що задовольняють умові

$$s(t + T) = s(t). \quad (2.1)$$

Найменше значення T , за якого виконується (2.1), називається *періодом сигналу*. Сигнали, для яких не існує періоду повторення, є **неперіодичними** (рис. 2.3).

Сигнали бувають *дійсними* і *комплексними*. З усього вищесказаного випливає, що сигнал – **дійсна функція часу**, що відбиває стан деякого об'єкта. Але у деяких випадках для зручності математичного аналізу перетворень сигналів вводять до розгляду **комплексний сигнал**

$$s(t) = s_1(t) + j s_2(t), \quad (2.2)$$

де $s_1(t)$, $s_2(t)$ – дійсні функції часу; у залежності від вирішуваної задачі $s_2(t)$ – це результат деяких перетворень функції $s_1(t)$ або функція, що не залежить від $s_1(t)$.

Прикладом є широко використовувана комплексна експонента

$$s(t) = e^{j2\pi f_0 t} = \cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t. \quad (2.3)$$

Сигнали поділяються на *прості* та *складні*. До **простих** сигналів відносять функції часу, які мають простий математичний опис, типово – це поодинокі

кий імпульс. **Складні** сигнали будуються як сума простих сигналів з метою отримання сигналів з певними властивостями.

Часто у пристроях перетворення сигналів використовуються допоміжні сигнали, що не містять інформацію. Оскільки вище зазначалася *спільна властивість сигналів* – у них міститься інформація, то допоміжні сигнали слід називати коливаннями.

2.2 Енергетичні характеристики неперервних детермінованих сигналів

Основними енергетичними характеристиками сигналу $s(t)$ є його *потужність* і *енергія*. **Миттєва потужність** дійсного сигналу визначається як квадрат миттєвого значення $s(t)$:

$$p(t) = s^2(t). \quad (2.4)$$

Визначена таким чином функція $p(t)$ має розмірність – квадрат розмірності сигналу $s(t)$. За замовчуванням функція $s(t)$ є напругою, тоді розмірність функції $p(t)$ В² (вольт в квадраті). *Потужність сигналу, визначена у відповідності до (2.4), характеризує інтенсивність сигналу, його спроможність діяти на прилади, пристрої, що реєструють сигнал. Потужність сигналу є його характеристикою, і лише¹.*

Середня потужність сигналу скінченної тривалості визначається шляхом усереднення (2.4) на інтервалі існування сигналу $(0, T_s)$

$$P_s = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} s^2(t) dt. \quad (2.5)$$

Енергія сигналу кінцевої тривалості визначається

$$E_s = P_s T_s = \int_0^{T_s} s^2(t) dt. \quad (2.6)$$

З останнього співвідношення видно, що енергія сигналу враховує як інтенсивність сигналу, так і час його дії, відповідно розмірність В²с (вольт в квадраті секунда).

Для *періодичного сигналу* його *середня потужність* визначається шляхом усереднення (2.5) на одному періоді T

$$P_s = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt, \quad (2.7)$$

а межі інтегрування вибираються за зручністю обчислень. *Говорити про енергію періодичного сигналу або іншого сигналу, що не є скінченим за тривалістю, не має сенсу. Але для таких сигналів може бути визначена енергія на де-*

¹ Не слід плутати потужність сигналу (в теорії сигналів) з потужністю електричного струму, що визначає роботу електричного струму за одиницю часу і має розмірність ват.

якому кінцевому інтервалі (t_1, t_2) (наприклад, на одному періоді періодичного сигналу, на інтервалі спостереження сигналу тощо)

$$E_s = \int_{t_1}^{t_2} s^2(t) dt. \quad (2.8)$$

Потужність та енергія комплексного сигналу $s(t)$ визначаються співвідношеннями (2.4)...(2.8), в які замість $s^2(t)$ необхідно підставити $s(t) \cdot s^*(t) = |s(t)|^2$, де $s^*(t)$ – функція, комплексно спряжена із $s(t)$; $|s(t)|$ – модуль сигналу $s(t)$.

Сигнал називається **нормованим**, якщо його енергія

$$E_s = 1. \quad (2.9)$$

Поряд з функцією часу $s(t)$, яка повністю визначає сигнал, у деяких випадках має значення інша часова характеристика – *кореляційна функція* сигналу. Для дійсного сигналу скінченної тривалості вона визначається, як:

$$K_s(\tau) = \int_0^{T_s} s(t)s(t+\tau)dt, \quad (2.10)$$

де τ – часовий зсув, який набуває як додатніх, так і від’ємних значень. При $\tau = 0$

$$K_s(0) = E_s. \quad (2.11)$$

Для періодичного сигналу з періодом T , енергія якого нескінченно велика, використовується наступне визначення

$$K_{s \text{ пер}}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T s(t)s(t+\tau)dt. \quad (2.12)$$

Функція $K_{s \text{ пер}}(\tau)$ – періодична з періодом T , а

$$K_{s \text{ пер}}(0) = P_s. \quad (2.13)$$

Крім властивостей (2.11) і (2.13) зазначимо, що кореляційна функція дійсного сигналу є парна функція аргументу τ :

$$K_s(\tau) = K_s(-\tau), \quad K_{s \text{ пер}}(\tau) = K_{s \text{ пер}}(-\tau). \quad (2.14)$$

Це стає очевидним, якщо добуток $s(t) \cdot s(t+\tau)$ розглядати як добуток $s(t-\tau)s(t)$.

Для комплексного сигналу $s(t)$ кореляційна функція визначається співвідношеннями (2.10) і (2.12), в які замість $s(t) \cdot s(t+\tau)$ підставляється $s(t) \cdot s^*(t+\tau)$.

Кореляційна функція сигналу характеризує міру зв’язку (кореляції) сигналу $s(t)$ зі своєю копією, що зсунута на величину τ за віссю часу – більш детально це буде обговорюватися у подальших розділах на прикладах випадкових сигналів.

Є два сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$. Для них вводиться поняття *взаємної кореляційної функції*

$$K_{s_1 s_2}(\tau) = \int_0^{T_s} s_1(t)s_2(t+\tau)dt \quad (2.15)$$

і скалярний добуток

$$(s_1, s_2) = \int_0^{T_s} s_1(t) s_2(t) dt. \quad (2.16)$$

З останніх співвідношень видно, що $(s_1, s_2) = K_{s_1 s_2}(0)$.

Якщо скалярний добуток сигналів $(s_1, s_2) = 0$, то сигнали є **ортогональними**. Набір попарно ортогональних сигналів називають системою ортогональних сигналів. Ортогональність сигналів дозволяє легко їх розділяти – тобто з їх суми виділити будь-який сигнал.

Приклад 2.1. Знайдемо енергію і середню потужність поодинокого трикутного імпульсу (рис. 2.4), що описується виразом

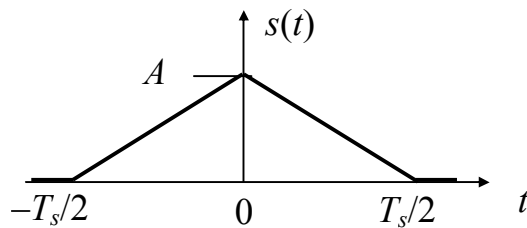


Рисунок 2.4 – Графік трикутного імпульсу

$$s(t) = \begin{cases} A(1 - 2|t|/T_s), & |t| < \frac{T_s}{2}, \\ 0, & |t| \geq \frac{T_s}{2}. \end{cases}$$

Врахуємо, що сигнал є парним, і за виразом (2.6) отримаємо наступний вираз для обчислення енергії

$$\begin{aligned} E_s &= 2 \int_0^{T_s/2} s^2(t) dt = 2A^2 \int_0^{T_s/2} (1 - 2t/T_s)^2 dt = \\ &= 2A^2 \int_0^{T_s/2} \left(1 - \frac{4t}{T_s} + \frac{4t^2}{T_s^2}\right) dt = 2A^2 \left(\int_0^{T_s/2} dt - \frac{4}{T_s} \int_0^{T_s/2} t dt + \frac{4}{T_s^2} \int_0^{T_s/2} t^2 dt \right) = \\ &= 2A^2 \left(\frac{T_s}{2} - \frac{4}{T_s} \frac{(T_s/2)^2}{2} + \frac{4}{T_s^2} \frac{(T_s/2)^3}{3} \right) = \frac{A^2 T_s}{3}. \end{aligned}$$

За відомою енергією легко знайти середню потужність імпульсу

$$P_s = \frac{E_s}{T_s} = \frac{A^2}{3}.$$

Вправа 2.1. Визначте енергію і потужність поодинокого П-імпульсу, що описується

$$s(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t < T_s, \\ 0, & t < 0, \quad t \geq T_s. \end{cases} \quad (2.17)$$

Вправа 2.2. Вкажіть, як зміниться середня потужність послідовності П-імпульсів, якщо:

- не змінюючи тривалості імпульсів змінити період їх повторення;
- не змінюючи періоду повторення зменшити їх тривалість;
- в однакове число разів зменшити або збільшити і тривалість імпульсів, і період їх повторення.

Приклад 2.2. Знайдемо кореляційну функцію поодинокого П-імпульсу, що описується виразом (2.17). Кореляційна функція сигналу визначається співвідношенням (2.10).

Нехай $0 < \tau < T_s$. Тоді

$$s(t)s(t+\tau) = \begin{cases} A^2, & 0 \leq t < T_s - \tau, \\ 0, & t < 0, \ t \geq T_s - \tau \end{cases}$$

і

$$K_s(\tau) = \int_0^{T_s-\tau} A^2 dt = A^2(T_s - \tau).$$

Коли $\tau \geq T_s$, то $K_s(\tau) = 0$. З урахуванням властивості парності кореляційної функції остаточний вираз набуває вигляду

$$K_s(\tau) = \begin{cases} A^2(T_s - |\tau|), & |\tau| < T_s, \\ 0, & |\tau| \geq T_s. \end{cases} \quad (2.18)$$

Графік кореляційної функції П-імпульсу наведено на рис. 2.5.

Приклад 2.3. Знайдемо енергетичні характеристики радіоімпульсу – відрізок гармонічного коливання тривалістю T_s . Нехай радіоімпульс має прямокутну обвідну і описується виразом

$$s(t) = \begin{cases} A \sin \omega_0 t, & 0 \leq t < T_s, \\ 0, & t < 0, \ t \geq T_s. \end{cases} \quad (2.19)$$

За виразом (2.5) знаходимо середню потужність

$$P_s = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} A^2 \sin^2 \omega_0 t dt = \frac{A^2}{2T_s} \left[\int_0^{T_s} dt - \int_0^{T_s} \cos 2\omega_0 t dt \right] = \frac{A^2}{2} \left[1 - \frac{\sin 2\omega_0 T_s}{2\omega_0 T_s} \right].$$

У типових ситуаціях інтервал $(0, T_s)$ містить велике число періодів коливання частоти $2\omega_0$, так що $2\omega_0 T_s \gg 1$. Оскільки $|\sin 2\omega_0 T_s| \leq 1$, то за такої умови другим доданком у квадратних дужках логічно знехтувати у порівнянні з одиницею, і

$$P_s = \frac{A^2}{2}. \quad (2.20)$$

Тепер легко знайти енергію

$$E_s = \frac{A^2 T_s}{2}.$$

Для визначення кореляційної функції радіоімпульсу з прямокутною обвідною покладемо $0 < \tau < T_s$. Тоді на інтервалі $\tau \leq t < T_s$ добуток

$$s(t)s(t-\tau) = A^2 \sin \omega_0 t \sin \omega_0 (t-\tau) = 0,5 A^2 [\cos \omega_0 \tau - \cos \omega_0 (2t-\tau)],$$

а поза інтервалом добуток дорівнює нулю. Кореляційна функція

$$K_s(\tau) = \frac{A^2}{2} \left[\int_0^{T_s} \cos \omega_0 \tau dt - \int_0^{T_s} \cos 2\omega_0(2t - \tau) dt \right] = \frac{A^2}{2} (T_s - |\tau|) \left[\cos \omega_0 \tau - \cos \omega_0 T_s \frac{\sin \omega_0 (T_s - |\tau|)}{\omega_0 (T_s - |\tau|)} \right].$$

Внаслідок міркувань, наведених вище при визначенні P_s , другим доданком у квадратних дужках можна знехтувати, й остаточний вираз для кореляційної функції радіоімпульсу з прямокутною обвідною набуде вигляду

$$K_s(\tau) = \begin{cases} 0,5 A^2 (T_s - |\tau|) \cos \omega_0 \tau, & |\tau| < T_s, \\ 0, & |\tau| \geq T_s. \end{cases} \quad (2.21)$$

Графік $K_s(\tau)$ наведено на рис. 2.6. Особливістю кореляційної функції радіоімпульсу є те, що вона не залежить від фази коливання.

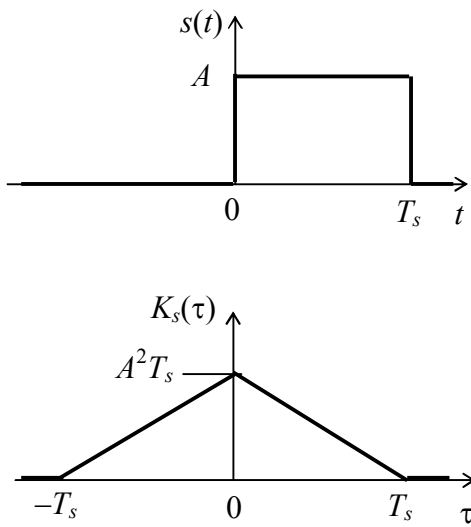


Рисунок 2.5 – П-імпульс $s(t)$ і його кореляційна функція $K_s(\tau)$

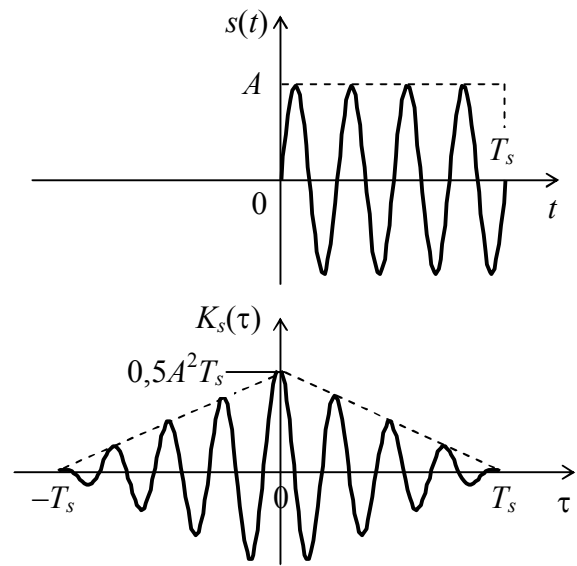


Рисунок 2.6 – Радіоімпульс $s(t)$ і його кореляційна функція $K_s(\tau)$

Вправа 2.2. Доведіть, що енергетичні характеристики радіоімпульсу

$$s(t) = \begin{cases} A \sin(\omega_0 t + \varphi_0), & 0 \leq t < T_s, \\ 0, & t < 0, \quad t \geq T_s, \end{cases} \quad (2.22)$$

де φ_0 – довільна величина, збігаються з характеристиками, отриманими у прикладі 2.3.

2.3 Подання сигналів в ортогональних базисах

Серед різноманітних математичних прийомів, які використовуються для опису електричних кіл і сигналів, найбільш широко застосовується подання довільної функції у вигляді суми більш простих (“елементарних”) функцій. Нехай $s(t)$ – детермінований сигнал тривалості T_s . Представимо його зваженою сумою деяких базисних функцій

$$s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(t), \quad 0 \leq t \leq T_s, \quad (2.23)$$

де a_n – коефіцієнти розкладання;

$\psi_n(t)$ – базисні функції.

Базисні функції вибираються з тих чи інших міркувань, потім розраховуються коефіцієнти розкладання. Але найбільш просто коефіцієнти розкладання розраховуються, якщо базисні функції ортогональні на інтервалі $(0, T_s)$. Помножимо ліву й праву частини рівності (2.23) на $\psi_k(t)$ і проведемо інтегрування на інтервалі $(0, T_s)$:

$$\int_0^{T_s} s(t) \psi_k(t) dt = \int_0^{T_s} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(t) \psi_k(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{T_s} \psi_n(t) \psi_k(t) dt.$$

Інтеграли в правій частині внаслідок ортогональності функцій $\psi_n(t)$ і $\psi_k(t)$ дорівнюють нулю, крім випадку $n = k$, у цьому випадку інтеграл дорівнює енергії k -ї базисної функції E_{ψ_k} . Тому останню рівність запишемо

$$\int_0^{T_s} s(t) \psi_k(t) dt = a_k E_{\psi_k}.$$

Повернемося до індексу n і запишемо правило обчислення коефіцієнтів розкладання

$$a_n = \frac{1}{E_{\psi_n}} \int_0^{T_s} s(t) \psi_n(t) dt; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

Якщо ж базисні функції не тільки ортогональні, а ще й нормовані (ортонормовані), то

$$a_n = \int_0^{T_s} s(t) \psi_n(t) dt = (s, \varphi_n), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.25)$$

Ряд (2.23), в якому коефіцієнти розкладання визначаються за формулами (2.24) і (2.25), називається **узагальненим рядом Фур'є**.

Періодичний сигнал $s(t)$ з періодом T також можна подати узагальненим рядом Фур'є. Базисні функції повинні мати період T або період у ціле число разів менший за T ; інтервал інтегрування у співвідношеннях (2.24) і (2.25) повинен бути $(0, T)$; енергії базисних функцій E_{ψ_n} повинні визначатись на інтервалі $(0, T)$.

При практичному використанні розкладання (2.23) доводиться обмежуватися скінченним числом доданків, що дає наближений сигнал

$$\hat{s}(t) = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(t). \quad (2.26)$$

При цьому енергія різниці між $s(t)$ і $\hat{s}(t)$ (похибки) визначається

$$E_{\varepsilon} = \int_0^{T_s} [\hat{s}(t) - s(t)]^2 dt = E_s - \sum_{n=1}^N a_n^2 E_{\psi_n}. \quad (2.27)$$

Звичайно вважають, що число N обране так, щоб задовольнити заданій мірі точності, а саме, енергія похибки не перевищує деяке допустиме значення $E_{\varepsilon} \leq E_{\varepsilon \text{ доп}}$. Тоді в записі розкладання сигналу $s(t)$ використовують знак точної рівності

$$s(t) = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(t). \quad (2.28)$$

Залежно від властивостей сигналу $s(t)$ або задачі, що вирішується, використовують ті чи інші системи базисних ортогональних функцій: тригонометричні функції, експонентні функції, функції відліків, функції Уолша.

Після того, як виконано розкладання сигналу $s(t)$ у ряд, коефіцієнти розкладання повністю задають сигнал $s(t)$, тобто за коефіцієнтами можна відновити сигнал. Коефіцієнти розкладання дозволяють також визначити енергетичні характеристики сигналів: енергію сигналу $s(t)$

$$E_s = \int_0^{T_s} \left(\sum_{n=1}^N a_n \psi_n(t) \right)^2 dt = \sum_{n=1}^N a_n^2 E_{\psi_n} \quad (2.29)$$

і скалярний добуток сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$

$$(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \int_0^{T_s} \left(\sum_{n=1}^N a_{n1} \psi_n(t) \right) \left(\sum_{n=1}^N a_{n2} \psi_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^N a_{n1} a_{n2} E_{\psi_n}, \quad (2.30)$$

де a_{n1} і a_{n2} – коефіцієнти розкладання сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$ відповідно.

Визначення коефіцієнтів розкладання можна виконати й апаратно за схемою, наведеною на рис. 2.7, а. Ця процедура називається **аналізом сигналу**. Знайдені коефіцієнти розкладання повністю описують сигнал. Знаючи їх, можна **синтезувати сигнал** – відновити його за коефіцієнтами розкладання (рис. 2.7, б). Схеми, наведені на рис. 2.7, знаходять застосування в техніці зв'язку при деяких методах передавання: у передавальному пристрої виконується аналіз сигналу, каналом зв'язку передаються коефіцієнти розкладання, у приймальному пристрої виконується синтез сигналу.

2.4 Геометричне подання сигналів

При математичному описі сигнали зручно розглядати як такі, що належать деякому N -вимірному простору. Тоді кожний із сигналів відображається вектором або точкою в цьому просторі (рис. 2.8) (точка – це кінець вектора). Згадаємо, що вектор – це відрізок заданого напрямку й довжини. Звичайно вектор задають координатами його кінця. Зрозуміло, що повинна бути задана система координат. Вона задається ортами – векторами одиничної довжини, кути між якими дорівнюють 90° . Отже, сигналу $s(t)$ ставиться у відповідність вектор $\bar{\mathbf{s}}$.

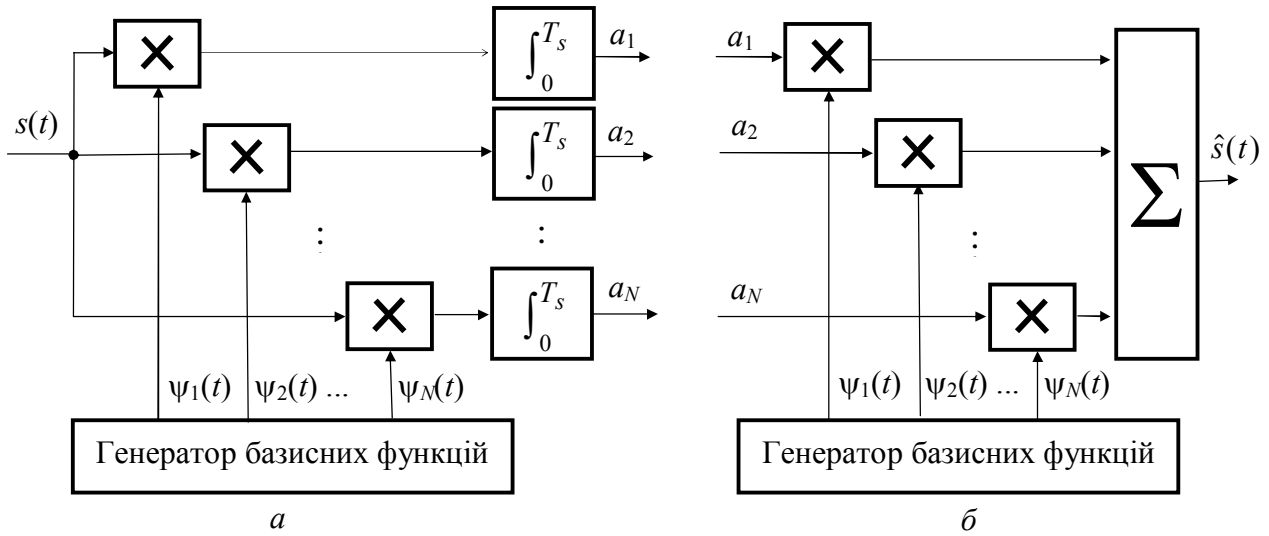


Рисунок 2.7 – Схеми аналізу (а) і синтезу (б) сигналу

Основні співвідношення для N -вимірного лінійного метричного простору:

– норма (довжина) вектора \bar{s}

$$\|\bar{s}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^N a_n^2}; \quad (2.31)$$

– відстань між векторами \bar{s}_1 й \bar{s}_2

$$d(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \sqrt{\sum_{n=1}^N (a_{1n} - a_{2n})^2}; \quad (2.32)$$

– скалярний добуток векторів \bar{s}_1 і \bar{s}_2

$$(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \sum_{n=1}^N a_{1n} \cdot a_{2n}. \quad (2.33)$$

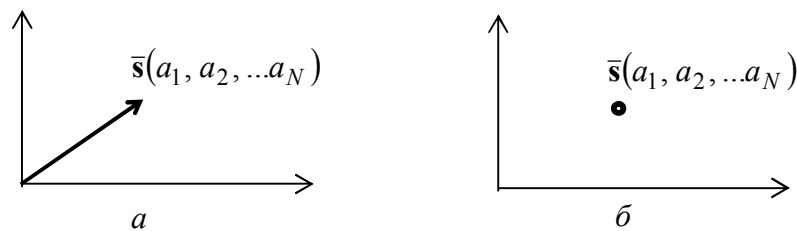


Рисунок 2.8 – Подання вектора \bar{s} в N -вимірному просторі:

a – направленим відрізком; b – точкою

Функціональний простор називається сукупність всіх функцій часу, заданих на інтервалі $(0, T_s)$. Ці функції розглядаються як вектори у функціональному просторі. Координатами цих векторів є значення самих функцій часу. Ясно, що $N \rightarrow \infty$, а співвідношення (2.31)...(2.33) переходять у наступні:

– норма (довжина) вектора \bar{s}

$$\|\bar{s}\| = \sqrt{\int_0^{T_s} s^2(t) dt} = \sqrt{E_s}, \quad (2.34)$$

важливо пам'ятати, що довжина вектора дорівнює кореню з енергії сигналу;
– відстань між векторами \bar{s}_1 й \bar{s}_2

$$d(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \sqrt{\int_0^{T_s} (s_1(t) - s_2(t))^2 dt}; \quad (2.35)$$

– скалярний добуток векторів \bar{s}_1 і \bar{s}_2

$$(\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \int_0^{T_s} s_1(t) s_2(t) dt. \quad (2.36)$$

Звернемося до розкладання сигналів в узагальнений ряд Фур'є:

$$s(t) = \sum_{n=1}^N a_n \psi_n(t). \quad (2.37)$$

Вважаємо, що базисні функції ортогональні й нормовані, і їх можна вважати ортами $\bar{\psi}_n$. Перепишемо співвідношення у векторній формі

$$\bar{s} = \sum_{n=1}^N a_n \bar{\psi}_n. \quad (2.38)$$

Отже, якщо сигнал розкласти в узагальнений ряд Фур'є, то він може бути представлений в N -вимірному просторі.

Приклад 2.4. Нехай гармонічні коливання описуються виразами $s_1(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t$ і $s_2(t) = A_2 \cos 2\pi 2 f_1 t$, а $T = 1/f_1$. Доведемо, що ці коливання є ортогональними на інтервалі $(0, T)$, та зобразимо їх векторами.

Два сигнали є ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю. Обчислимо скалярний добуток та енергії сигналів:

$$\begin{aligned} (\bar{s}_1, \bar{s}_2) &= A_1 A_2 \int_0^T \cos 2\pi f_1 t \cos 2\pi 2 f_1 t dt = \frac{A_1 A_2}{2} \int_0^T (\cos 2\pi f_1 t + \cos 2\pi 3 f_1 t) dt = \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} \left(\int_0^T \cos 2\pi f_1 t dt + \int_0^T \cos 2\pi 3 f_1 t dt \right) = \frac{A_1 A_2 T}{4\pi} \left(\sin 2\pi + \frac{\sin 6\pi}{3} \right) = 0. \end{aligned}$$

$$E_1 = \int_0^T A_1^2 \cos^2 2\pi f_1 t dt = 0,5 A_1^2 T; \quad E_2 = \int_0^T A_2^2 \cos^2 2\pi 2 f_1 t dt = 0,5 A_2^2 T.$$

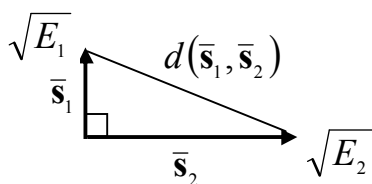


Рисунок 2.9 – Ортогональні сигнали, подані векторами

Отже, сигнали є ортогональними і зображаються взаємно перпендикулярними векторами довжин $\sqrt{E_1}$ і $\sqrt{E_2}$ відповідно (рис. 2.9).

Вправа 2.3. Задано сигнали $s_0(t) = A_0$ і $s_1(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t$. Доведіть їх ортогональність.

Приклад 2.5. Знайдемо відстань між сигналами, заданими у прикладі 2.4. Використаємо вираз (2.35):

$$\begin{aligned} d(\bar{s}_1, \bar{s}_2) &= \sqrt{\int_0^T (s_1(t) - s_2(t))^2 dt} = \sqrt{\int_0^T s_1^2(t) dt - 2 \int_0^T s_1(t) s_2(t) dt + \int_0^T s_2^2(t) dt} = \\ &= \sqrt{\|\bar{s}_1\|^2 - 2(\bar{s}_1, \bar{s}_2) + \|\bar{s}_2\|^2} = \sqrt{0,5(A_1^2 + A_2^2)T}. \end{aligned}$$

2.5 Спектральний аналіз періодичних сигналів

Для розкладання сигналів у ряди найбільш широке застосування в теорії й техніці зв'язку має тригонометричний базис (базисними функціями є гармонічні коливання). Широке застосування гармонічних коливань у теорії й техніці зв'язку обумовлене тим, що при проходженні через лінійні електричні кола форма кожної з них не змінюється – змінюються лише їхні амплітуди й фази (з'являється зсув у часі).

Ряд Фур'є для періодичного сигналу записується

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos 2\pi n f_1 t + b_n \sin 2\pi n f_1 t). \quad (2.39)$$

де $f_1 = 1/T$, T – період сигналу $s(t)$;

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cos 2\pi n f_1 t dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sin 2\pi n f_1 t dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Якщо ввести позначення

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \varphi_n = -\arctg \frac{b_n}{a_n},$$

то ряд (2.36) набуде виду

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_1 t + \varphi_n). \quad (2.40)$$

Розкладання сигналу (2.39) і (2.40) називають **рядом Фур'є в тригонометричній формі**. Більш зручно користуватися рядом (2.40), оскільки він безпосередньо встановлює, з яких гармонічних складових складається сигнал – які значення їхніх частот $n f_1$, амплітуд A_n і початкових фаз φ_n . Ряд (2.40) визначає **спектр сигналу** (синонімом слова "спектр" є "складові").

Наочне представлення про спектр сигналу (2.40) дають два рисунки, на яких будують **амплітудний спектр** – залежність амплітуд A_n від частоти й **фазовий спектр** – залежність початкових фаз φ_n від частоти. Частота f_1 називається **основною частотою** сигналу, вона дорівнює числу періодів сигналу за секунду. Гармонічні коливання частот $n f_1$ ($n = 2, 3, \dots$) називають **гармоніками** частоти f_1 : коливання частоти $2f_1$ – 2-га гармоніка, коливання частоти $3f_1$ – 3-тя гармоніка й т.д. Приклад амплітудного спектра деякого сигналу наведено на рис. 2.10.

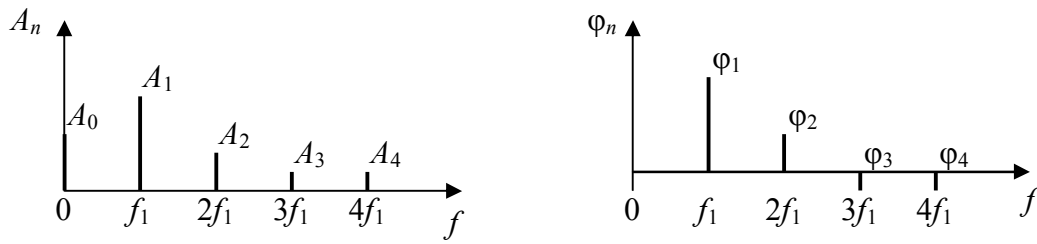


Рисунок 2.10 – Амплітудний (а) і фазовий (б) спектри періодичного сигналу

Амплітудний спектр дозволяє визначити **ширину спектра** сигналу F_{\max} , як протяжність області частот, куди потрапляють складові, сумарна енергія яких становить певну частку від повної енергії сигналу (наприклад, 95% або 99%). В інших випадках ширину спектра визначають як протяжність області частот, поза якою амплітуди складових не перевищують деяке задане значення (наприклад, 0,05 від максимального значення серед A_n). Якщо спектр сигналу, що розглядається, примикає до нульової частоти, то ширину спектра сигналу виражають числом F_{\max} . Визначивши F_{\max} , вважають, що сигнал не містить коливань, частоти яких вищі F_{\max} у тому розумінні, як це оговорено в умові визначення ширини спектра.

Спектральне подання періодичного сигналу можна виконати, використовуючи експонентні базисні функції

$$\psi_n(t) = e^{j2\pi n f_1 t}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

При цьому ряд записується

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_1 t}. \quad (2.41)$$

Таке розкладання сигналу називається **рядом Фур'є в комплексній формі**.

Коефіцієнти розкладання визначаються

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-j2\pi n f_1 t} dt, \quad n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

Легко переконатися, що

$$c_n = \frac{a_n}{2} - j \frac{b_n}{2} = \frac{A_n}{2} e^{j\varphi_n}.$$

Особливістю ряду Фур'є в комплексній формі є компактний запис ряду й коефіцієнтів розкладання. Іншою особливістю є використання від'ємних частот.

Спектри, що відповідають ряду (2.41), називаються двосторонніми. Дільник 2 в останньому виразі пов'язаний саме з тим, що двосторонній спектр містить удвічі більше складових.

Приклад 2.6. Задано шість коефіцієнтів розкладання деякого сигналу у ряд Фур'є в комплексній формі (табл. 2.1). Визначимо за цими коефіцієнтами амплітудний і фазовий спектри та побудуємо їх (табл. 2.1, рис. 2.11, рис. 2.12).

Виконаємо синтез сигналу, а синтезований сигнал подамо графіком в межах двох періодів.

Таблиця 2.1 – Коефіцієнти розкладання сигналу в ряд Фур'є

n	0	1	2	3	4	5
c_n	0	$0,405e^{-j\frac{\pi}{2}}$	0	$0,045e^{j\frac{\pi}{2}}$	0	$0,015e^{-j\frac{\pi}{2}}$
$A_n, \text{В}$	0	0,81	0	0,09	0	0,03
$\varphi_n, \text{рад}$	–	$-\frac{\pi}{2}$	–	$\frac{\pi}{2}$	–	$-\frac{\pi}{2}$

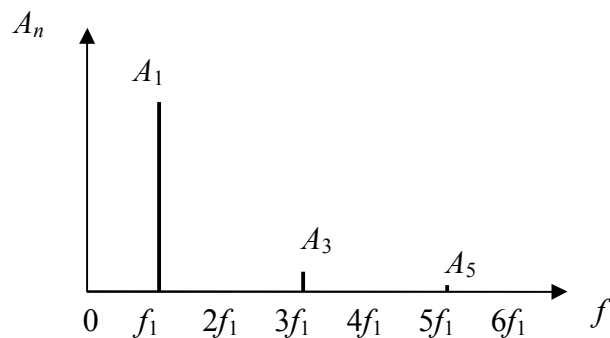


Рисунок 2.11 – Амплітудний спектр

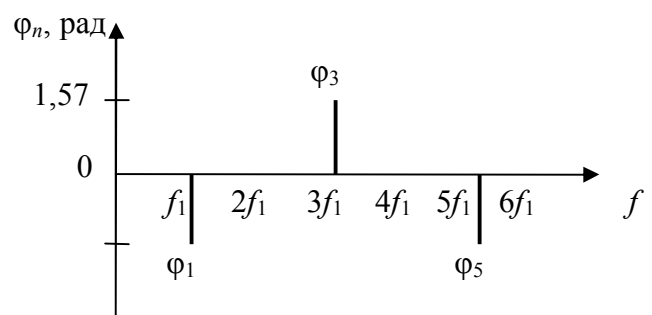


Рисунок 2.12 – Фазовий спектр

Вирішуємо задачу синтезу. Для цього спочатку на інтервалі $(0, T)$ визначимо значення складових тригонометричного ряду Фур'є з урахуванням визначених раніше амплітудного і фазового спектрів.

Таблиця 2.2 – До розв'язання задачі синтезу сигналу

t	0	$\frac{T}{12}$	$\frac{2T}{12}$	$\frac{3T}{12}$	$\frac{4T}{12}$	$\frac{5T}{12}$	$\frac{6T}{12}$	$\frac{7T}{12}$	$\frac{8T}{12}$	$\frac{9T}{12}$	$\frac{10T}{12}$	$\frac{11T}{12}$	T
$0,81 \cos\left(2\pi f_1 t - \frac{\pi}{2}\right) =$ $= 0,81 \sin(2\pi f_1 t)$	0	0,41	0,70	0,81	0,70	0,41	0	-0,41	-0,70	-0,81	-0,70	-0,41	0
$0,09 \cos\left(2\pi 3f_1 t + \frac{\pi}{2}\right) =$ $= -0,09 \sin(2\pi 3f_1 t)$	0	-0,09	0	0,09	0	-0,09	0	0,09	0	-0,09	0	0,09	0
$0,03 \cos\left(2\pi 5f_1 t - \frac{\pi}{2}\right) =$ $= 0,03 \sin(2\pi 5f_1 t)$	0	0,02	-0,03	0,03	-0,03	0,02	0	-0,02	0,03	-0,03	0,03	-0,02	0
$s(t)$	0	0,33	0,67	0,93	0,67	0,33	0	-0,33	-0,67	-0,93	-0,67	-0,33	0

За табл. 2.2 будемо графік сигналу $s(t)$ (рис. 2.13). Спочатку будемо на інтервалі $(0, T)$ і те ж саме повторюємо на інтервалі $(-T, 0)$. З рисунка бачимо, що задані коефіцієнти розкладання c_n описують коливання трикутної форми.

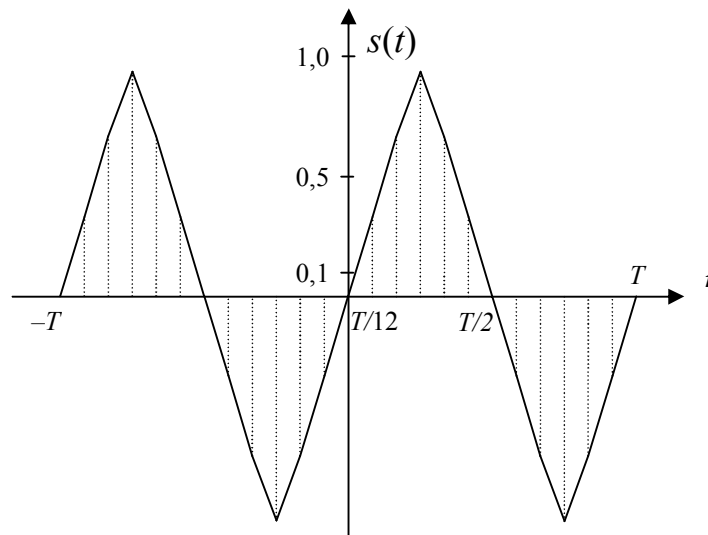


Рисунок 2.13 – Результат розв’язання задачі синтезу

Вправа 2.5. Задано сигнал – періодична послідовність П-імпульсів

$$s(t) = \begin{cases} A & \text{для } kT - \tau/2 \leq t \leq kT + \tau/2, \quad k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots; \\ 0 & \text{поза цими інтервалами.} \end{cases}$$

Цей сигнал представлено на рис. 2.14, а. Нехай параметри сигналу наступні: $A = 1$ В, $T = 1$ мс, $\tau = 0,25$ мс. Використовуючи доступний пакет математичних розрахунків, обчисліть за виразами (2.39) значення для A_n для n від 0 до 10 та порівняйте отримані результати з теоретичними значеннями

$$A_0 = \frac{A\tau}{2T}, \quad A_n = \frac{2A\tau}{T} \cdot \frac{\sin \pi n f_1 \tau}{\pi n f_1 \tau}, \quad n = 1, 2, \dots$$

За отриманими значеннями A_n побудуйте амплітудний спектр сигналу, для прикладу використовуйте рис. 2.14, б.

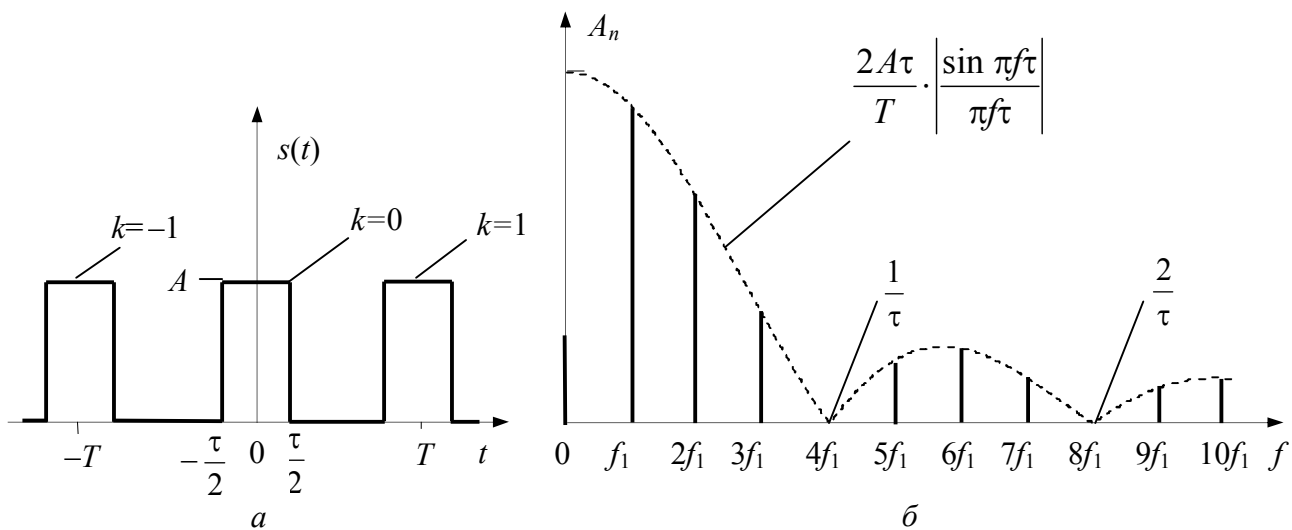


Рисунок 2.14 – Періодична послідовність П-імпульсів:

а – часова діаграма; б – спектральна діаграма

2.6 Спектральний аналіз неперіодичних сигналів

Співвідношення

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \quad \text{і} \quad s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (2.43)$$

становлять пару **перетворень Фур'є** – *пряме* й *зворотнє* перетворення. Функція $S(j\omega)$ називається **спектральною густиною** сигналу. У загальному випадку спектральна густина $S(j\omega)$ є комплексною функцією. Вона визначається на інтервалі $(-\infty, \infty)$. Представимо її через модуль і аргумент $S(j\omega) = S(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$.

Функція $S(\omega)$ називається **амплітудним спектром** сигналу, а функція $\varphi(\omega)$ – **фазовим спектром** сигналу. Функція $S(\omega)$ – парна функція частоти, тому зазвичай на графіках цю функцію зображують для невід'ємних частот (рис. 2.15). Ширину спектра неперіодичного сигналу F_{\max} визначають аналогічно визначенню ширини спектра періодичного сигналу.

Багато сигналів мають парну симетрію (це досягається шляхом відповідного вибору початку відліку часу). У таких сигналів спектральна густина – дійсна функція

$$S(\omega) = 2 \int_0^{\infty} s(t) \cos \omega t dt. \quad (2.44)$$

Внаслідок парності функції $S(\omega)$ зворотнє перетворення Фур'є

$$s(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) \cos \omega t d\omega. \quad (2.45)$$

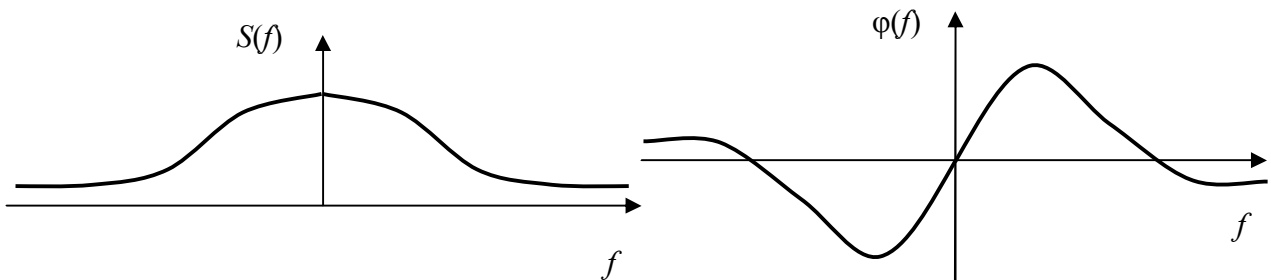


Рисунок 2.15 – Амплітудний (а) і фазовий (б) спектри неперіодичного сигналу

Останні два інтеграли становлять пару *косинус-перетворень Фур'є*.

Принципова відмінність спектрів полягає в тому (рис. 2.10 і 2.15), що у *неперіодичного сигналу спектр суцільний*, а у *періодичного* – *дискретний*, він містить гармоніки частоти $f_1 = 1/T$.

Перехід від ряду Фур'є до перетворення Фур'є здійснюють шляхом припущення, що неперіодичний сигнал є умовно періодичним з періодом $T \rightarrow \infty$, тоді частота вже не є дискретною і стає неперервним параметром перетворення ($2\pi n f_1 \rightarrow \omega$), знак суми переходить в знак інтегралу.

У ряді випадків корисним є використання дельта-функції (одиничного імпульсу) $\delta(t)$. Спектральна густина дельта-функції $\delta(t - t_0)$

$$\Delta(j\omega) = e^{-j\omega t_0}, \quad \text{при } t_0 = 0 \quad \Delta(j\omega) = 1. \quad (2.46)$$

Використовується також дельта-функція у частотній області $\delta(\omega - \omega_0)$, зворотне перетворення Фур'є якої

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}. \quad (2.47)$$

Тобто, $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ є спектральною густиною комплексної експоненти $e^{j\omega_0 t}$.

Використовуючи наведені вище властивості дельта-функції, можна знайти спектральну густину гармонічного коливання $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$

$$S(j\omega) = A\pi[\delta(\omega - \omega_0)e^{j\varphi_0} + \delta(\omega + \omega_0)e^{-j\varphi_0}]. \quad (2.48)$$

Таким чином, використання дельта-функції дозволяє визначати спектральну густину періодичного сигналу, який не задовольняє умові абсолютної інтегруємості.

Апарат перетворення Фур'є є досить ефективним математичним засобом для розв'язання багатьох задач теорії й техніки зв'язку. Відзначимо лише деякі найбільш використовувані **властивості перетворення Фур'є**.

1. Добуток двох сигналів (загальний випадок):

$$s(t) = s_1(t)s_2(t),$$

$$S(j\omega) = S_1(j\omega) * S_2(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\nu) S_2(j(\omega - \nu)) d\nu = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(j\nu) S_1(j(\omega - \nu)) d\nu \quad (2.49)$$

– *множенню сигналів у часовій області відповідає згортка їхніх спектрів.*

2. Згортка сигналів

$$s(t) = s_1(t) * s_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(\tau) s_2(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s_2(\tau) s_1(t - \tau) d\tau, \quad (2.50)$$

$$S(j\omega) = S_1(j\omega) \cdot S_2(j\omega)$$

– *згортиці сигналів у часовій області відповідає множення їхніх спектрів.*

3. Розрахунок енергії сигналів

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \quad (2.51)$$

– це співвідношення називається *рівністю (теоремою) Парсеваля для перетворення Фур'є*.

4. Скалярний добуток сигналів:

$$(s_1, s_2) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t) dt; \quad (s_1, s_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_1(j\omega) S_2^*(j\omega) d\omega. \quad (2.52)$$

Прирівнюючи останнє співвідношення до нуля, отримаємо умову ортогональності сигналів, заданих спектральними густинами.

5. Спектральна густина суми сигналів дорівнює сумі спектральних густин цих сигналів (перетворення Фур'є є лінійним):

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t); \quad S(j\omega) = S_1(j\omega) + S_2(j\omega). \quad (2.53)$$

Приклад 2.7. Нехай сигнал $s_1(t) = A_1$ – постійна напруга, її спектральна густина описується виразом $S_1(f) = A_1\delta(f)$ (рис. 2.16, а), $s_2(t) = A_2 \cos(2\pi f_2 t + \pi/2)$ – гармонічне коливання, спектральна густина якого наступна $S_2(f) = 0,5A_2(\delta(f - f_2)e^{j\pi/2} + \delta(f + f_2)e^{-j\pi/2})$ (рис. 2.16, б). Враховуючи лінійність перетворення Фур'є, спектральна густина суми заданих сигналів буде наступною $S(f) = A_1\delta(f) + 0,5A_2(\delta(f - f_2)e^{j\pi/2} + \delta(f + f_2)e^{-j\pi/2})$ (рис. 2.16, в).

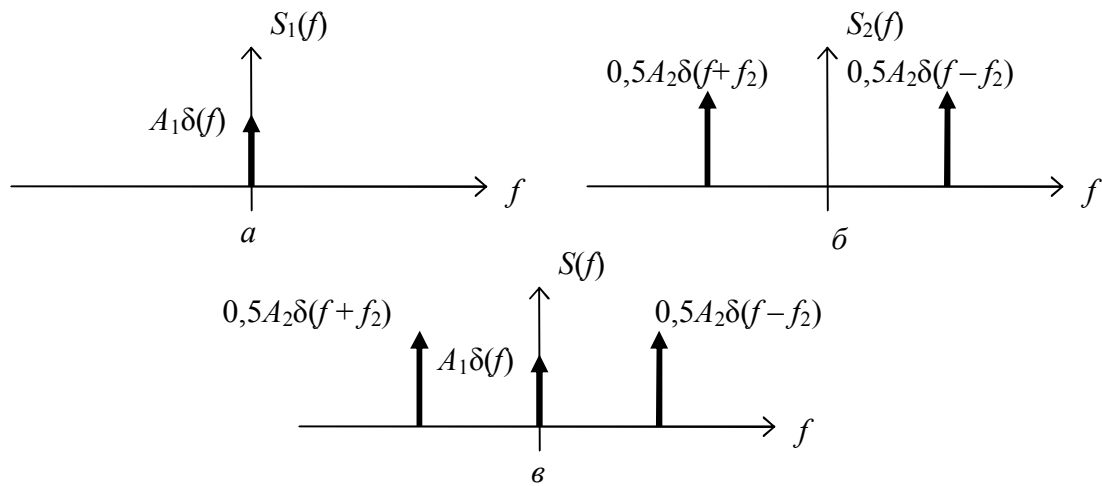


Рисунок 2.16 – До пояснення лінійності перетворення Фур'є

Вправа 2.6. Доведіть співвідношення (2.53).

6. Затримка сигналу в часі призводить до зміни фазового спектра сигналу і не змінює його амплітудний спектр:

$$s(t) = s_1(t - t_0); \quad S(j\omega) = S_1(j\omega)e^{-j\omega t_0}. \quad (2.54)$$

Якщо окремо розглянути амплітудний та фазовий спектри, то отримаємо

$$|S(j\omega)| = |S_1(j\omega)| \text{ або } S(\omega) = S_1(\omega), \quad \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) - \omega t_0.$$

Приклад 2.8. Нехай сигнал $s_1(t)$ – П-імпульс тривалості τ (рис. 2.17, а), амплітудний спектр якого $S(f)$ є модулем функції виду $\sin x/x$ (рис. 2.17, б), а фазовий спектр $\varphi(f)$ набуває значення 0 в непарних пелюстках і $-\pi$ в парних (рис. 2.17, в). Продемонструємо властивість затримки сигналу в часі.

Нехай затримка імпульсу складає чверть його тривалості $\tau/4$ (рис. 2.17, з). Тоді до частоти $1/\tau$ функція $\varphi(f)$ буде лінійно збільшуватись до значення $2\pi(1/\tau)(4/\tau) = \pi/2$ (рис. 2.17, д). В діапазоні частот $(1/\tau, 2/\tau)$ до лінійної залежності

ті додасться значення $-\pi$ і т.д. Якщо імпульс не затримується, а випереджає (рис. 2.17, *e*), то його фазовий спектр є зростаюча залежність (рис. 2.17, *ε*).

Вправа 2.7. Доведіть співвідношення (2.54).

7. Зміна масштабу сигналу в часі призводить до оберненої зміни масштабу спектральної густини:

$$s(t) = s_1(at); \quad S(j\omega) = \frac{1}{|a|} S_1\left(j\frac{\omega}{a}\right). \quad (2.55)$$

Тобто, якщо сигнал стиснути в часі в a разів ($a > 1$), то його спектральна густина розтягнеться вздовж осі частот, а рівень складових зменшиться у стільки ж разів. І навпаки, розтягування сигналу в часі ($a < 1$) призводить до стиснення спектральної густини вздовж осі частот і збільшення рівня її складових.

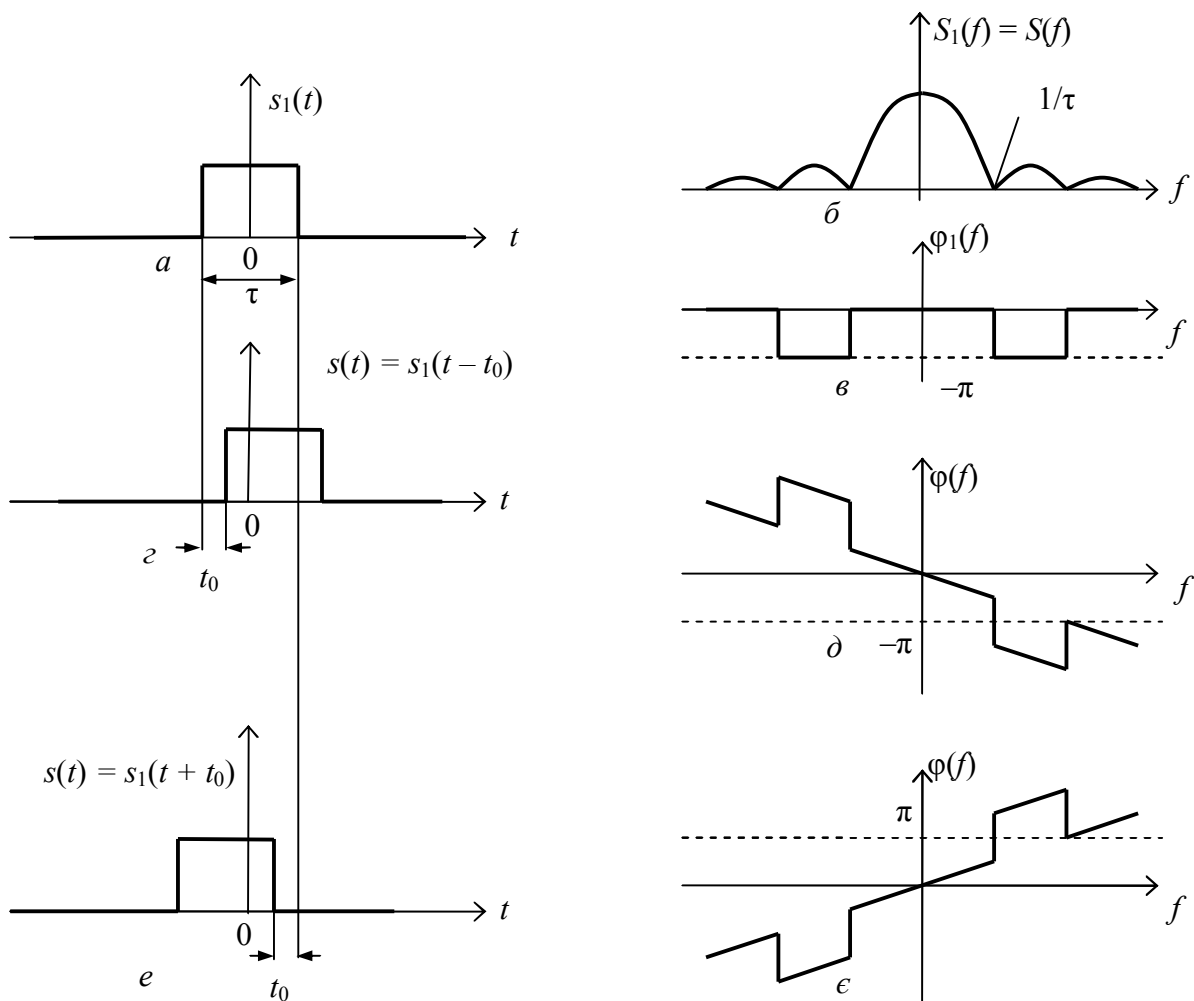


Рисунок 2.17 – До пояснення перетворення Фур'є сигналу, затриманого в часі

Приклад 2.9. Нехай сигнал $s_1(t)$ – П-імпульс тривалості τ_0 (рис. 2.18, *a*). З попереднього прикладу відомо, що амплітудний спектр П-імпульсу є модулем функції виду $\sin x/x$ (рис. 2.18, *б*). Продемонструємо властивість зміни масштабу сигналу у часі.

Нехай сигнал стиснено в часі удвічі ($a = 2$) (рис. 2.18, в), тоді всі складові амплітудного спектра отримують множник 0,5, а їх частоти збільшуються удвічі (рис. 2.18, г). Як видно з рисунку, характерна точка – перший нуль спектральної густини тепер знаходиться не на частоті $1/\tau_0$, а на частоті $2/\tau_0$.

Нехай сигнал розтягнуто в часі у двічі ($a = 1/2$) (рис. 2.18, д), тоді всі складові амплітудного спектра отримують множник 2, а їх частоти навпаки зменшуються удвічі (рис. 2.18, е).

Вправа 2.8. Доведіть співвідношення (2.55).

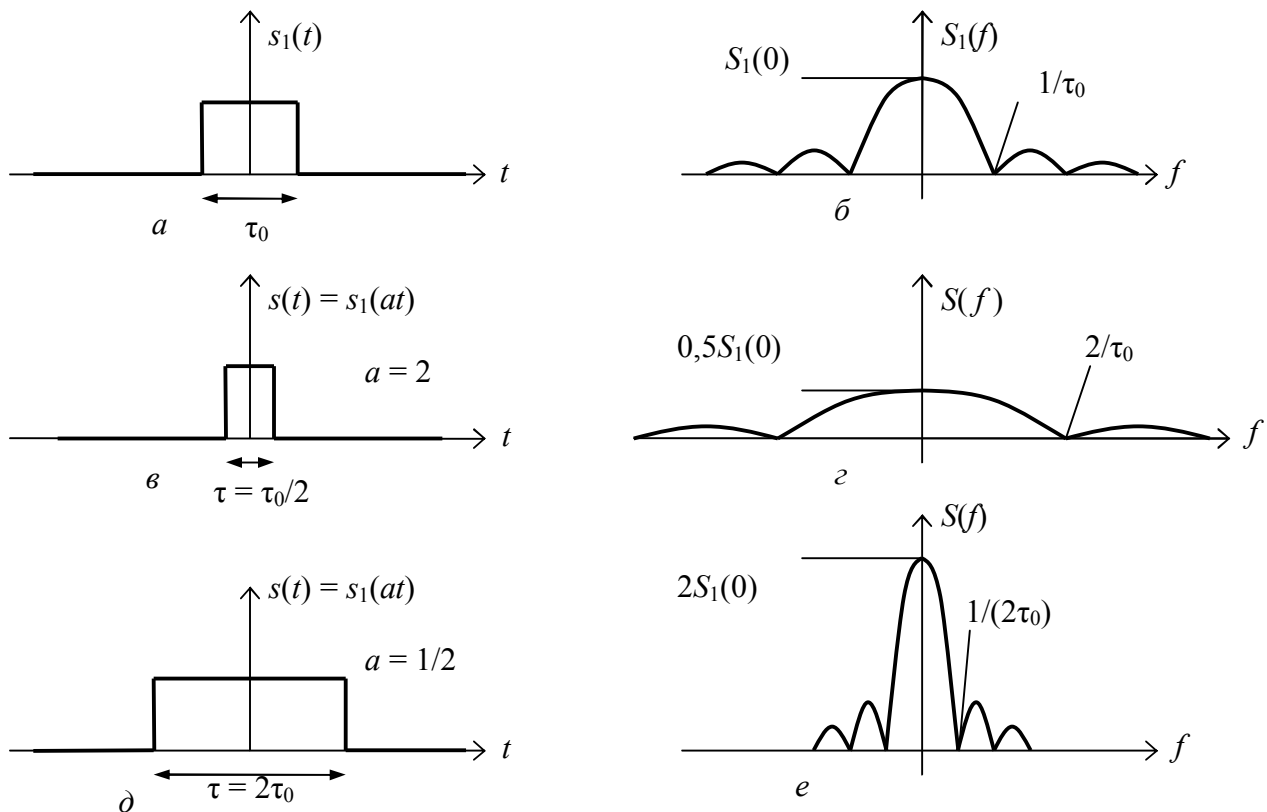


Рисунок 2.18 – До пояснення властивості перетворення Фур'є зміни масштабу

8. Множення сигналу на гармонічне коливання призводить до зміщення його спектра на частоту цього коливання (як у від'ємній, так і додатній областях частот):

$$s(t) = s_1(t) \cos(2\pi f_0 t); \quad S(j\omega) = 0,5(S_1(j(\omega - \omega_0)) + S_1(j(\omega + \omega_0))). \quad (2.56)$$

Приклад 2.10. Нехай сигнал $s_1(t)$ – П-імпульс (рис. 2.19, а, б). Продемонструємо властивість множення сигналу на гармонічне коливання.

На рис. 2.19, в побудовано графік гармонічного коливання $\cos 2\pi f_0 t$, відповідно до виразу (2.48) на рис. 2.19, г побудовано амплітудний спектр цього коливання. В результаті множення П-імпульсу на гармонічне коливання отримуємо відрізок гармонічного коливання – радіоімпульс (рис. 2.19, д), спектр якого складається з двох копій спектра $S_1(f)$ центрованих відносно частот $-f_0$ і f_0 з удвічі меншими амплітудами складових.

Вправа 2.9. Доведіть співвідношення (2.56).

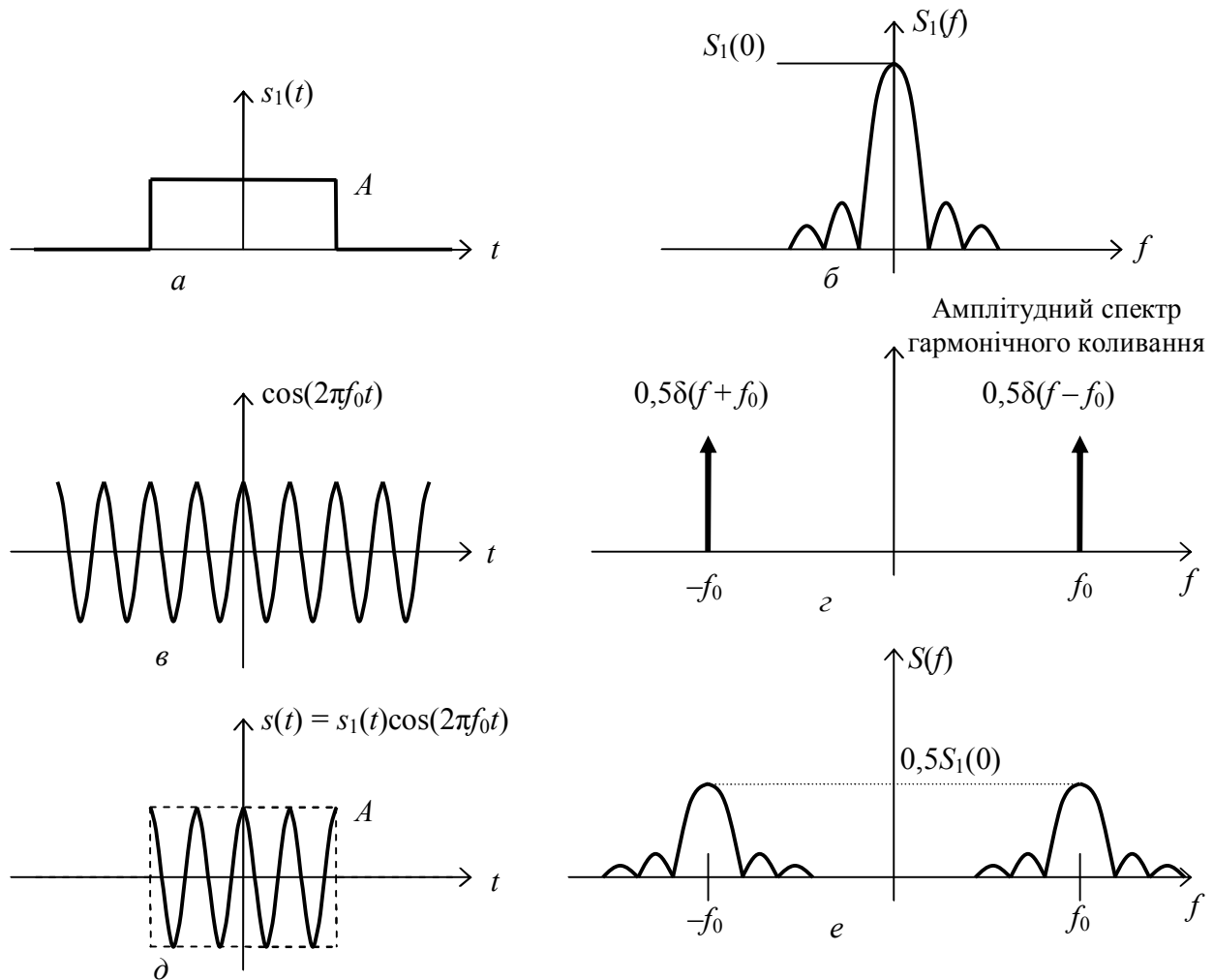


Рисунок 2.19 – До пояснення властивості перетворення Фур'є сигналу, помноженого на гармонічне коливання

9. Множення сигналу на комплексне гармонічне коливання призводить до зміщення його спектра на частоту цього коливання в додатній або від'ємній області частот:

$$s(t) = s_1(t)e^{\pm j2\pi f_0 t}; \quad S(jf) = S_1(j(f \mp f_0)). \quad (2.57)$$

Приклад 2.11. Нехай сигнал $s_1(t)$ – П-імпульс (рис. 2.20, а, б). Продемонструємо властивість множення сигналу на комплексне гармонічне коливання.

На рис. 2.20, в побудовано графік комплексного гармонічного коливання $e^{j2\pi f_0 t}$, яке відповідно до формули Ейлера складається з дійсної частини – гармонічного коливання $\cos(2\pi f_0 t)$ й уявної – $\sin(2\pi f_0 t)$. Відповідно до виразу (2.44) на рис. 2.20, г побудовано амплітудний спектр цього коливання. В результаті множення П-імпульсу на $e^{j2\pi f_0 t}$ отримуємо комплексний радіоімпульс (рис. 2.20, д), спектр якого є копією спектра $S_1(f)$, центрованого відносно частоти f_0 . Оскільки кількість спектральних складових залишилась незмінною, то, відповідно, амплітуди складових також незмінні.

Вправа 2.10. Доведіть співвідношення (2.57).

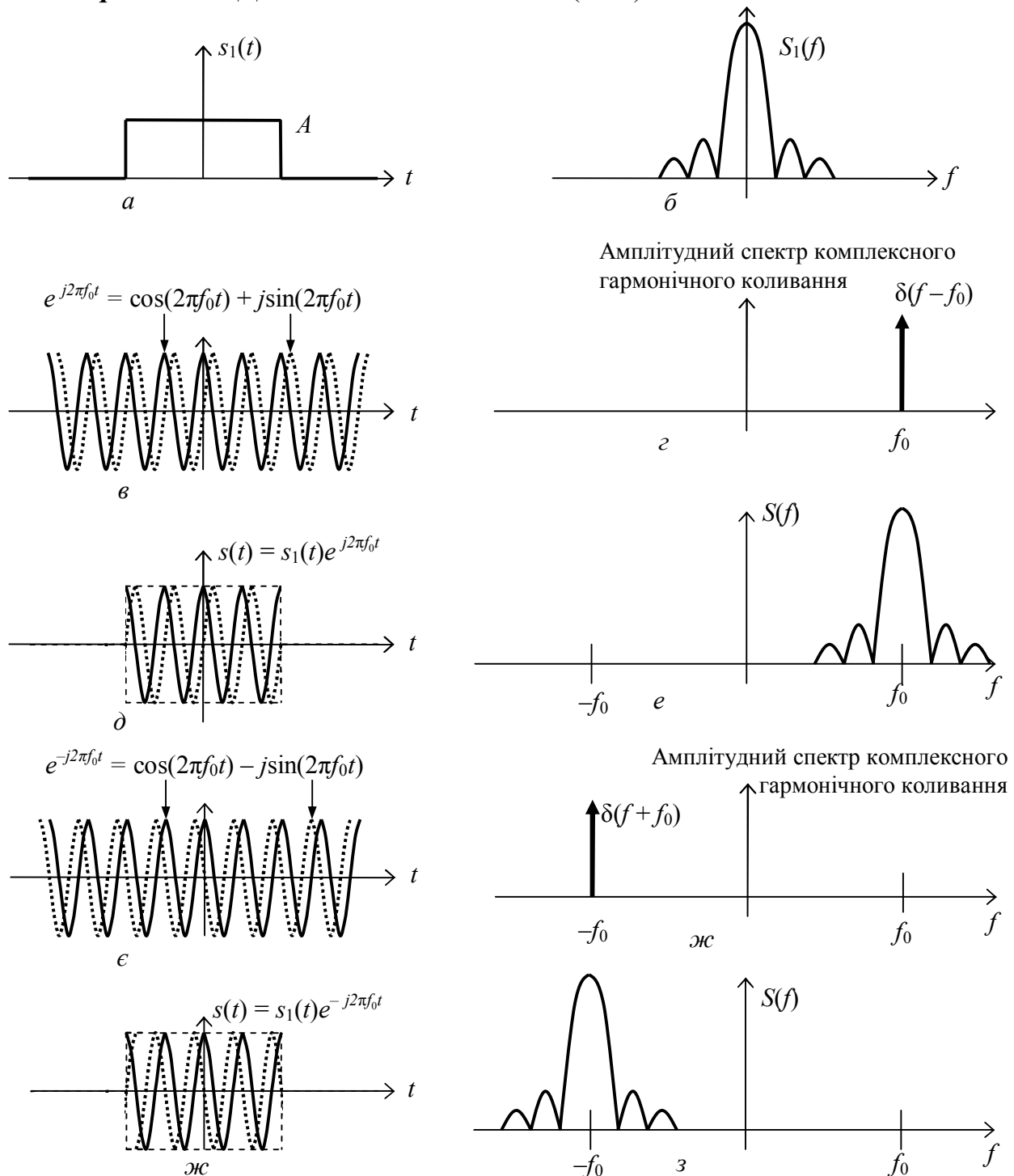


Рисунок 2.20 – До пояснення властивості перетворення Фур'є сигналу, помноженого на комплексне гармонічне коливання

2.7 Спектральне представлення дискретних сигналів

Нагадаємо, що відповідно до класифікації сигналів, наведеної у п. 2.1, сигнал називається дискретним, якщо кількість значень t , у які сигнал заданий, скінченна або значення t можна пронумерувати. Звичайно крок за часом, через який сигнал подається, постійний і називається він інтервалом дискретизації T_d .

Найчастіше дискретний сигнал з'являється в результаті дискретизації за часом неперервного за часом сигналу, тобто подання його відліками (рис. 2.21). Представлення сигналу відліками широко використовується з метою передавання аналогових сигналів цифровими каналами зв'язку, а також для виконання перетворень аналогових сигналів пристроями дискретної та цифрової обробки.

Описом дискретного сигналу є послідовність чисел $\{s(nT_d)\}$, де n – дискретний час. Часто для зручності послідовність позначають $s(nT_d)$, хоча таке ж позначення $s(nT_d)$ є значенням послідовності в момент nT_d . Ще одним варіантом позначення є відповідний індекс біля позначення сигналу $s_d(t)$.

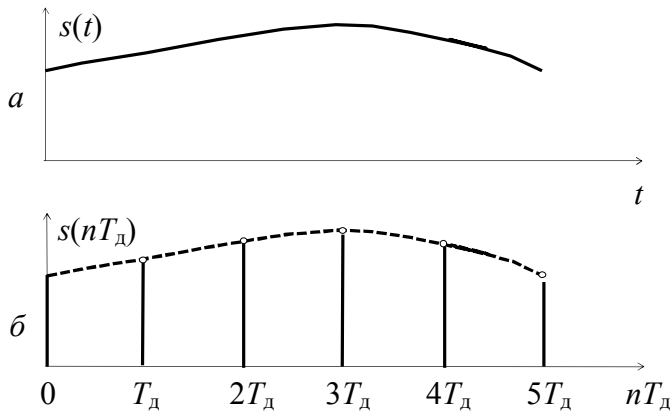


Рисунок 2.21: *a* – неперервний сигнал; *б* – представлення неперервного сигналу відліками

Спектральну густину дискретного сигналу визначають за допомогою перетворення Фур'є, вважаючи, що дискретний сигнал представлений δ -імпульсами (рис. 2.21, б)

$$s_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_d) \delta(t - nT_d). \quad (2.58)$$

Знайдемо перетворення Фур'є дискретного сигналу $s(nT_d)$, для чого підставимо (2.58) у (2.43). Спектральна густина дискретного сигналу

$$S_d(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_d) \delta(t - nT_d) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.59)$$

Змінюючи порядок інтегрування й підсумовування та враховуючи фільтруючу властивість дельта-функції, отримаємо

$$S_d(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_d) e^{-j\omega nT_d}. \quad (2.60)$$

Співвідношення (2.60) визначає спектр дискретного сигналу $s(nT_d)$. Оскільки функції $e^{-j\omega nT_d}$ періодичні за частотою ω з періодом $2\pi/(nT_d)$, то з останнього виразу видно, що функція $S_d(j\omega)$ періодична в частотній області з періодом $2\pi/T_d$. Вираз (2.60) за виглядом збігається з виразом (2.41) для подання

Над послідовностями так само, як і над аналоговими сигналами, виконують різні арифметичні операції. Основним математичним апаратом для аналізу перетворень дискретних сигналів лінійними дискретними й цифровими системами є апарат лінійних різницевих рівнянь і z -перетворення. Цей математичний апарат викладено у відповідній літературі.

Для теорії й техніки зв'язку важливими є спектральні характеристики дискретного сигналу. Спектральну густину дискретного сигналу визначають за допомогою перетворення Фур'є, вважаючи, що дискретний сигнал представлений δ -імпульсами (рис. 2.21, б)

періодичної функції часу рядом Фур'є в комплексній формі. Розглядаючи (2.60) як розвинення функції $S_d(j\omega)$ в ряд Фур'є, слід вважати, що значення $s(nT_d)$ є коефіцієнтами розвинення функції в ряд. Використаємо вираз (2.42) для розрахунку коефіцієнтів розвинення:

$$s(nT_d) = \frac{T_d}{2\pi} \int_{-\pi/T_d}^{\pi/T_d} S_d(j\omega) e^{j\omega n T_d} d\omega. \quad (2.61)$$

Співвідношення (2.60) і (2.61) називаються відповідно *прямим і зворотним перетворенням Фур'є послідовності або дискретного сигналу $s(nT_d)$* .

Обчислення спектра послідовності $s(nT_d)$ за допомогою виразу (2.60) припускає складання нескінченного числа членів. Реально для аналізу спектра дискретного сигналу використовують послідовності скінченної довжини N (тривалості NT_d). Припустимо, що послідовність періодично повторюється з періодом NT_d . Як відомо, спектр періодичного сигналу містить лише складові з частотами $kf_1 = k/(NT_d)$ (k називають цифровою частотою). Тому у співвідношенні (2.60) замість ω слід писати $2\pi kf_1 = 2\pi k/(NT_d)$. Перепишемо (2.60) в загальноприйнятому вигляді

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (2.62)$$

Щоб виразити $s(n)$ через $S(k)$, помножимо обидві частини рівності (2.54) на $e^{j \frac{2\pi}{N} km}$ і просумуємо за k

$$\sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{j \frac{2\pi}{N} km} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} kn} e^{j \frac{2\pi}{N} km}. \quad (2.63)$$

Змінюючи в правій частині порядок підсумовування, розглянемо суму

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j \frac{2\pi}{N} k(n-m)} = \begin{cases} N & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases} \quad (2.64)$$

Справді, у випадку $n = m$ $e^0 = 1$ і сума дорівнює N . У випадку $n \neq m$ сума відліків комплексної експоненти на інтервалі зміни її аргументу, що дорівнює $|n - m|$ періодів, дорівнює нулю.

З урахуванням (2.64) для правої частини (2.63) справедлива рівність

$$\sum_{n=0}^{N-1} s(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} k(n-m)} = N \cdot s(m). \quad (2.65)$$

Підставляючи (2.65) в (2.63) і переходячи до n замість m , отримаємо

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}. \quad (2.66)$$

Вводять позначення $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$. Тоді співвідношення (2.62) і (2.66) записуються

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) W_N^{kn}; \quad (2.67)$$

$$s(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S(k) W_N^{-kn}. \quad (2.68)$$

Співвідношення (2.67) і (2.68) є відповідно **прямим і зворотним дискретним перетворенням Фур'є (ДПФ)**. ДПФ передбачає періодичність дискретного сигналу з періодом NT_d . Періодичним є і спектр цього сигналу з періодом $2\pi/T_d$ так само, як і спектр неперіодичного дискретного сигналу. Програмно пряме і зворотне ДПФ реалізують за алгоритмом швидкого дискретного перетворення Фур'є (FFT – Fast Fourier Transform), який дозволяє суттєво скоротити час обчислення порівняно з безпосереднім використанням виразу ДПФ.

Якщо ДПФ застосовано для сигналу, що насправді не є періодичним, то його результат є вірним для діапазону частот $(0, \pi/T_d)$, а результати для $(\pi/T_d, 2\pi/T_d)$ відповідають значенням з $(-\pi/T_d, 0)$.

Приклад 2.12. Нехай задано

неперервний сигнал $s(t)$ кінцевої тривалості T_s та його спектральна густина $S(j\omega)$ (рис. 2.22, а, б). Для здійснення спектрального аналізу чисельно за допомогою ДПФ цей сигнал дискретизується (рис. 2.22, в). У відповідності до прийнятих вище позначень кількість відліків позначаємо N , а інтервал дискретизації, відповідно, є наступним $T_d = T_s/N$.

Спектр дискретного сигналу $S_d(f)$ містить періодичні повторення спектра сигналу, який дискретизується (рис. 2.22, г).

Для отримання окремих значень спектральної густини (відліків спектральної густини) заданий сигнал $s(t)$ кінцевої тривалості трансформується в періодичний сигнал $s_n(t)$ з періодом, що дорівнює тривалості T_s (рис. 2.22, д). В результаті такої трансформації спектральна густина містить складові

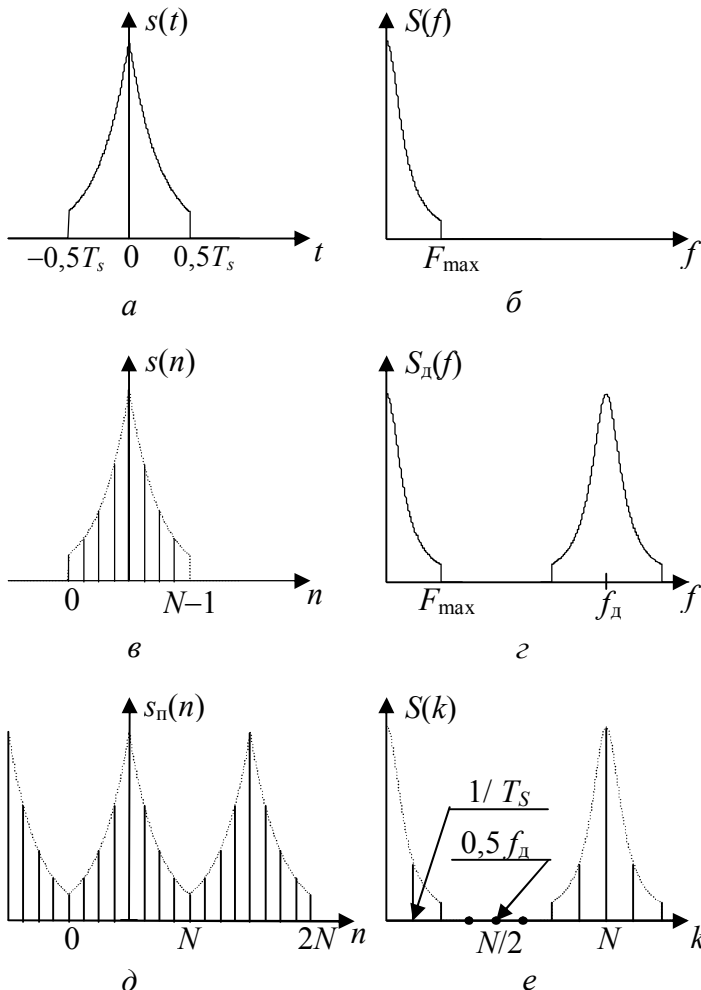


Рисунок 2.22 – До пояснення ДПФ

на частотах кратних $1/T_s$ і саме їх значення обчислюються при ДПФ (з 0 до $N-1$).

До речі, якщо крок між відліками спектральної густини $1/T_s$ є завеликим, його можна зменшити, збільшивши тривалість сигналу шляхом дописування нульових значень в кінець дискретної послідовності, що його відображає.

Вправа 2.11. Використовуючи доступний пакет математичних розрахунків, здайте вісім значень одного періоду гармонічного колювання та виконайте над заданою послідовністю ДПФ. Впевніться в тому, що в отриманій послідовності лише перший та сьомий елементи є ненульовими (рахунок ведеться з нульового значення).

2.8 Теорема й ряд Котельникова

Теорема В.О. Котельникова стверджує: **сигнал $s(t)$, який не містить частот вищих F_{\max} , може бути точно відновлений за відліками, взятими через інтервал $T_d \leq 1/(2F_{\max})$, T_d – інтервал дискретизації, $f_d = 1/T_d$ – частота дискретизації.**

Оскільки для будь-якого реального сигналу можна вказати значення максимальної частоти спектра, то можна вважати, що теорема Котельникова може бути застосована до всіх реальних сигналів.

Для доказу теореми розглянемо дискретний сигнал, що описується формулою (2.58) і є послідовністю відліків $s(nT_d)$. Представлення дискретного сигналу за допомогою дельта-функцій можна дати і в іншій формі

$$s_d(t) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d). \quad (2.69)$$

Співвідношення (2.58) і (2.69) еквівалентні, оскільки значення суми дельта-функцій відмінні від нуля тільки в моменти часу $t = nT_d$.

Спектральна густина добутку сигналів дорівнює згортці спектральних густин співмножників (формула (2.50)). Спектральну густину неперервного сигналу позначимо $S(j\omega)$. Оскільки сума дельта-функцій є періодичний сигнал з періодом T_d , то представимо її рядом Фур'є в комплексній формі:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{-j2\pi mt/T_d}, \quad (2.70)$$

де

$$c_m = \frac{1}{T_d} \int_{-T_d/2}^{T_d/2} \delta(t) e^{j2\pi mt/T_d} dt = 1/T_d, \quad (2.71)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_d) = \frac{1}{T_d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi mt/T_d}. \quad (2.72)$$

Спектральна густина комплексної експоненти $e^{-j2\pi mt/T_d}$ згідно з (2.47) дорівнює $2\pi\delta(\omega + 2\pi m/T_d)$, спектральна густина суми дельта-функцій (2.72) запишеться

$$S_{\delta}(\omega) = \frac{2\pi}{T_d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2\pi m / T_d). \quad (2.73)$$

Знайдемо згортку спектральних густин $S(j\omega)$ і $S_{\delta}(j\omega)$

$$S_d(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\nu) S(j(\omega - \nu)) d\nu = \frac{1}{T_d} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\nu) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \nu + 2\pi m / T_d) d\nu. \quad (2.74)$$

Змінюючи порядок інтегрування і підсумовування і використовуючи фільтруючу властивість дельта-функції, одержимо

$$S_d(j\omega) = \frac{1}{T_d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S(j(\omega + 2\pi m / T_d)) \quad (2.75)$$

або, переходячи до частоти дискретизації f_d ,

$$S_d(jf) = f_d \sum_{m=-\infty}^{\infty} S(j2\pi(f + mf_d)). \quad (2.76)$$

Із (2.76) видно, що **спектральна густина дискретного сигналу є періодичне повторення з періодом f_d спектральної густини неперервного сигналу, з якого отримано дискретний сигнал шляхом взяття відліків**. Сказане ілюструється графічно: на рис. 2.23, а показано амплітудний спектр довільного неперервного сигналу з максимальною частотою спектра F_{\max} ; на рис. 2.23, б показане його періодичне повторення, що відповідає співвідношенню (2.75) – рисунок побудований для випадку $T_d < 1/(2F_{\max})$ чи $f_d > 2F_{\max}$. З рис. 2.23, б видно, що *при $f_d \geq 2F_{\max}$ за дискретним сигналом (відліками) за допомогою ФНЧ можна відновити неперервний сигнал* (пунктиром показана АЧХ відновлювального фільтра). *При $f_d < 2F_{\max}$ має місце накладення періодичних повторень спектра* (рис. 2.23, в), і *відновити без похибки неперервний сигнал неможливо*. Тим самим теорема Котельникова доведена.

У часовій області зв'язок між неперервним і дискретним сигналами описується **рядом Котельникова**

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT_d) \frac{\sin 2\pi F_{\text{зр}}(t - nT_d)}{2\pi F_{\text{зр}}(t - nT_d)}, \quad (2.77)$$

де $F_{\text{зр}}$ – частота зрізу відновлювального ФНЧ.

Значення $s(nT_d)$ є коефіцієнти розкладання сигналу $s(t)$ за відомою з математики системою ортогональних базисних функцій

$$\varphi_n(t) = \frac{\sin 2\pi F(t - nT_d)}{2\pi F(t - nT_d)}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (2.78)$$

Графічна ілюстрація ряду Котельникова показана на рис. 2.24. Пояснюється рис. 2.24 наступним чином: при відновленні неперервного сигналу за його відліками ідеальним ФНЧ з частотою зрізу, що дорівнює половині частоти дис-

кретизації, відгук фільтра на кожний відлік (δ -функцію) є функцією виду $\sin x/x$ з відповідним масштабом і зсувом у часі, сума цих функцій дає сигнал $s(t)$.

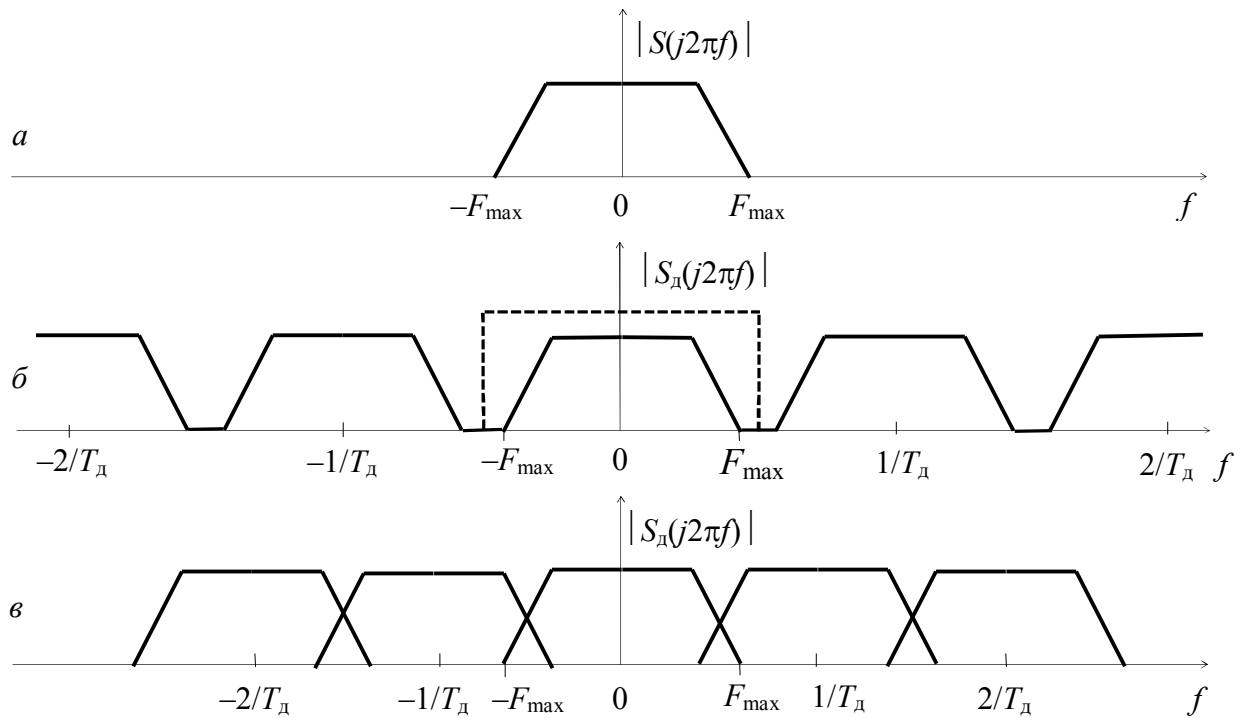


Рисунок 2.23: *а*– спектр неперервного сигналу; *б* – спектр дискретного сигналу і АЧХ відновлювального фільтра; *в* – спектр дискретного сигналу з накладенням

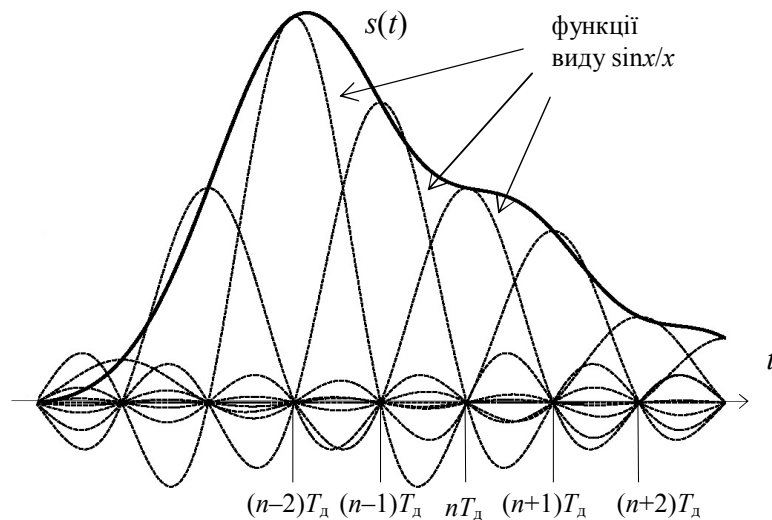


Рисунок 2.24 – Сигнал $s(t)$ і члени ряду Котельникова

Вправа 2.12. Сигнал $s(t) = 2\sin 2\pi 500t + 1\sin 2\pi 750t + 4\sin 2\pi 1250t$ дискретизується з частотою $f_d = 4$ кГц. Зобразити спектр сигналу $S(f)$ і спектр дискретного сигналу $S_d(f)$ в діапазоні частот $0 < f < 2f_d$.

2.9 Аналого-цифрове перетворення

Аналогові сигнали відображають мову людини, гру на музичних інструментах, зображення чи фізичний стан довільного реального об'єкта. Тобто, в системах зв'язку найчастіше передаються саме неперервні повідомлення, в той самий час, цифрові канали зв'язку є більш ефективними по використанню спектра і потужності сигналу. У цьому підрозділі розглядається аналого-цифрове перетворення (АЦП) та цифро-аналогове перетворення (ЦАП).

У відповідності до визначення цифрового сигналу для його отримання з аналогового сигналу необхідно виконати дискретизацію і квантування відліків. А, оскільки, у сучасній техніці використовуються двійкові цифрові сигнали, то в АЦП необхідно виконати перехід від квантованих відліків до відповідних двійкових послідовностей – кодування.

На рис. 2.25 зображена схема АЦП, на рис. 2.26 сигнали на входах і виходах її блоків.

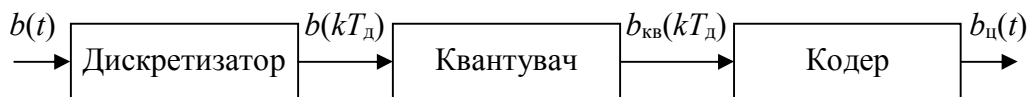


Рисунок 2.25 – Функціональна схема АЦП

Отже, в АЦП виконуються наступні перетворення:

дискретизація – подання неперервного сигналу відліками;

квантування – округлення відліків до найближчих рівнів квантування;

кодування – подання квантованих відліків (номерів рівнів квантування) кодовими комбінаціями.

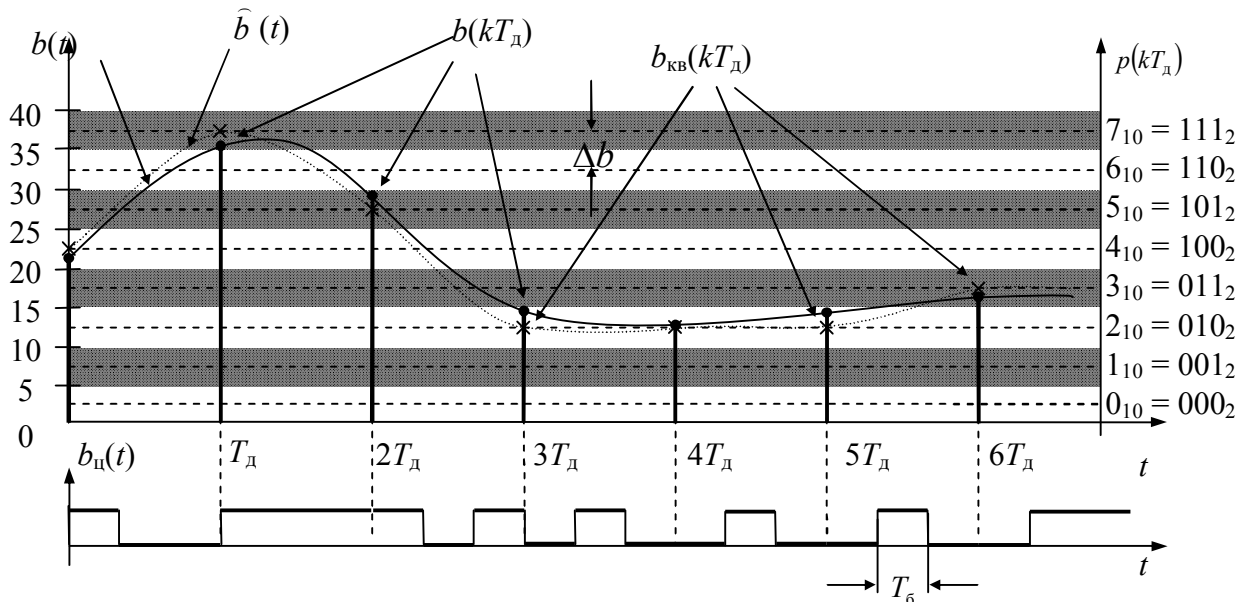


Рисунок 2.26 – Перетворення неперервного сигналу у цифровий

Відповідно до теореми Котельникова для можливості повного відновлення аналогового сигналу інтервал дискретизації має задовольняти умові $T_d \leq 1/2F_{\max}$, а частота дискретизації, відповідно, $f_d \geq 2F_{\max}$.

При роботі квантувача діапазон значень сигналу протяжністю $\max[b(t)] - \min[b(t)]$ розбивається на L смуг, які ще називають коридорами квантування. **Рівні квантування** – це середні значення коридорів квантування. **Крок квантування** (ширина коридорів квантування) визначається

$$\Delta b = \frac{\max[b(t)] - \min[b(t)]}{L}. \quad (2.79)$$

Тут розглядається так зване **рівномірне квантування**, коли Δb є незмінним в усьому діапазоні значень сигналу. Часто зустрічається квантування, за якого крок квантування змінюється за певним законом компандування, наприклад, закон може бути логарифмічним.

Будемо вважати, що $\min[b(t)] = 0$ (апаратно це легко виконати зміщенням сигналу по осі ординат). У процесі квантування квантовані відліки подаються числами

$$p(kT_d) = \text{int} \left[\frac{b(kT_d)}{\Delta b} \right], \quad (2.80)$$

які визначають квантовані відліки наступним співвідношенням

$$b_{\text{кв}}(kT_d) = \Delta b p(kT_d) + 0,5\Delta b. \quad (2.81)$$

Під час кодування десяткові числа $p(kT_d)$ подаються комбінаціями двійкових символів довжиною n . Враховуючи це,

$$L = 2^n, \quad n = \log_2 L. \quad (2.82)$$

Тривалість кодової комбінації дорівнює інтервалу дискретизації T_d , і тривалість дискретизації двійкових символів

$$T_6 = \frac{T_d}{n} = \frac{1}{nf_d}. \quad (2.83)$$

Зручно характеризувати цифровий сигнал його швидкістю $R = 1/T_6$ або

$$R = nf_d = f_d \log_2 L. \quad (2.84)$$

Важливо пам'ятати, що R збільшується як при збільшенні частоти дискретизації, так і при збільшенні числа рівнів квантування.

Для відновлення аналогового сигналу з цифрового в цифро аналоговому перетворювачі виконуються наступні перетворення (рис. 2.27):

декодування – відновлення квантованих відліків за кодovими комбінаціями за співвідношенням (2.81);

відновлення неперервного сигналу за дискретним сигналом, яке здійснюється за допомогою фільтра нижніх частот (ФНЧ) (п. 2.8).

Помилка, що виникає під час квантування в АЦП, називається **похибкою квантування**

$$\varepsilon_{\text{кв}}(kT_d) = b_{\text{кв}}(kT_d) - b(kT_d). \quad (2.85)$$

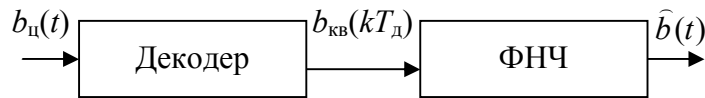


Рисунок 2.27 – Функціональна схема ЦАП

Величина похибки квантування не перевищує половини кроку квантування

$$|\varepsilon_{\text{кв}}(kT_{\text{д}})| \leq \frac{\Delta b}{2}. \quad (2.86)$$

За умови, що крок квантування значно менший діапазону значень сигналу, незалежно від закону розподілу миттєвих значень неперервного сигналу, закон розподілу похибки квантування є рівномірним на інтервалі $(-\Delta b/2, \Delta b/2)$, а значення похибок квантування є незалежними (див. розд. 3). Отже, *середнє значення похибки квантування дорівнює нулю, а середня потужність*

$$\overline{[\varepsilon_{\text{кв}}(kT_{\text{д}})]^2} = \varepsilon_{\text{кв}}^2 = \frac{\Delta b^2}{12}. \quad (2.87)$$

Похибку квантування можна трактувати як додавання до відліків аналогового сигналу відліків білого шуму, в результаті фільтрації яких на виході ЦАП разом з точно відновленим сигналом має місце квазібілий шум, що спотворює сигнал $b(t)$: $\hat{b}(t) = b(t) + \varepsilon_{\text{кв}}(t)$.

Вводиться поняття «**відношення сигнал/шум квантування**» – відношення середньої потужності сигналу до середньої потужності шуму квантування

$$\rho_{\text{кв}} = \frac{P_b}{\varepsilon_{\text{кв}}^2}. \quad (2.88)$$

В розрахунках цифрових систем передавання аналогових сигналів, зазвичай, вихідним є допустиме відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв доп}}$. Знаючи $\rho_{\text{кв доп}}$ та потужність аналогового сигналу, розраховують максимально допустиму потужність шуму квантування, а за ним максимально допустимий крок квантування і, відповідно, мінімально допустиме число рівнів квантування $L_{\text{доп}}$. Враховуючи вираз (2.82), знаходять кількість рівнів квантування

$$L = 2^n \geq L_{\text{доп}}. \quad (2.89)$$

Визначивши L , розраховують значення кроку квантування, потужність шуму квантування і відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}}$, яке має задовольняти умові $\rho_{\text{кв}} \geq \rho_{\text{кв доп}}$.

Очевидно, що для зменшення негативного впливу квантування кількість рівнів квантування має бути збільшена, але при цьому збільшується швидкість цифрового сигналу на виході АЦП – це вимагає збільшення смуги пропускання лінії передавання, на основі якої виконано цифровий канал зв'язку.

Крім похибки квантування під час відновлення неперервного сигналу за його відліками додатково виникають інші похибки. Нижче розглянуто джерела цих похибок.

Необмеженість спектрів реальних сигналів. Реальних сигналів зі строго обмеженим спектром не існує, оскільки сигнали зі скінченною тривалістю мають необмежені спектри – коли $f \rightarrow \infty$, спектри спадають з кінцевою швидкістю. Для реальних сигналів максимальна частота спектра F_{\max} визначається за умови, що складові з частотами $f > F_{\max}$ малі (у певному сенсі).

У спектрах реальних дискретних сигналів виникає перекриття спектрів принаймні складових суми (2.75) з індексами $m = 0$ і $m = 1$ (рис. 2.28). Припустимо, що для відновлення неперервного сигналу використовується ідеальний ФНЧ з частотою зрізу $F_{зр} = F_{\max}$, його АЧХ показана пунктирною лінією на рис. 2.28. Відновлений сигнал буде мати дві *складові похибки відновлення*:

– *лінійні спотворення* за рахунок відсікання складових сигналу $s(t)$ з частотами $f > F_{\max}$;

– *накладення складових спектра* $S_b(f - f_d)$ з частотами $f < F_{\max}$ на спектр сигналу $b(t)$ (похибка накладення спектрів).

З урахуванням сказаного, характеристики ФНЧ та частоту дискретизації f_d визначають за умови, щоб похибка відновлення була достатньо малою.

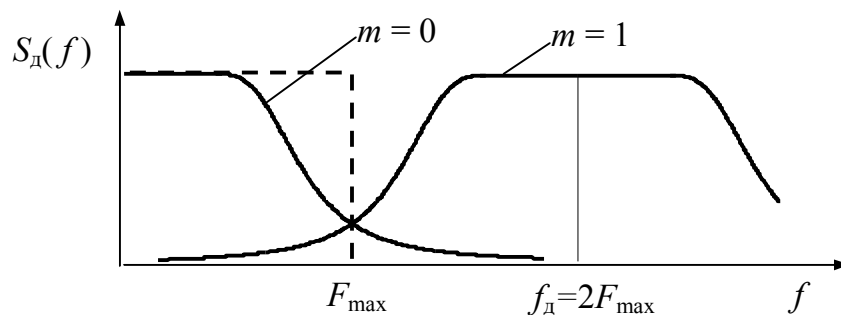


Рисунок 2.28 – Ілюстрація виникнення похибки відновлення неперервного сигналу через необмеженість спектра неперервного сигналу

Відхилення характеристик реального ФНЧ від ідеального. Ідеальний ФНЧ має П-подібну АЧХ (рис. 2.29, а) та лінійну ФЧХ. Тобто, ідеальний ФНЧ без спотворень пропускає всі складові спектра сигналу в межах смуги пропускання ($f < F_{зр}$), і повністю ослаблює складові з частотами $f > F_{зр}$. Реальні ФНЧ описуються граничною частотою смуги пропускання $F_{сп}$ і граничною частотою смуги затримання $F_{сз}$ (рис. 2.29, б).

Якщо ФНЧ призначений для відновлення неперервного сигналу з максимальною частотою F_{\max} з дискретного сигналу з частотою дискретизації f_d , то необхідно, щоб $F_{сп} \geq F_{\max}$ і $F_{сз} \leq f_d - F_{\max}$. У разі реальних ФНЧ можуть виникати дві *складові похибки відновлення*:

– *через непостійність АЧХ і нелінійність ФЧХ у смузі пропускання* фільтр вносить лінійні спотворення у відновлений сигнал;

– через недостатнє ослаблення у смузі затримання ФНЧ пропускає складові сигналу $s_d(t)$ з частотами $f > f_d - F_{\max}$, які утворюють похибку накладення спектрів.

Реальні ФНЧ для відновлення неперервних сигналів проектують так, щоб похибка відновлення була достатньо малою.

Також існує похибка відновлення неперервного сигналу через те, що збудження ФНЧ здійснюється не δ -функціями, а імпульсами кінцевої тривалості $\tau_{\text{ім}}$, проте, оскільки $\tau_{\text{ім}} \ll T_d$, то впливом цієї похибки можна знехтувати.

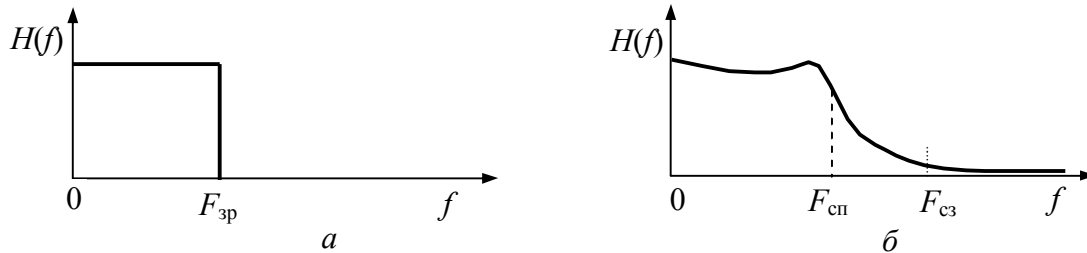


Рисунок 2.29 – АЧХ: а – ідеального ФНЧ; б – реального ФНЧ

З проведеного аналізу випливає, що за рахунок збільшення частоти дискретизації можна мінімізувати похибки, що виникають під час відновлення неперервного сигналу за його відліками. Це дозволяє також спростити ФНЧ в ЦАП. Проте, треба пам'ятати, що збільшення f_d призводить до збільшення швидкості цифрового сигналу на виході АЦП (2.84) – існує суперечність між витратами на більш швидкісний цифровий канал та витратами на більш складний ФНЧ.

Для того, щоб ФНЧ не був занадто складним, частоту дискретизації вибирають за умови

$$f_d = (2,2 \dots 2,5) F_{\max}. \quad (2.90)$$

Приклад 2.13. Визначимо відношення сигнал/шум квантування при $b(t) = A_0 \cos(2\pi Ft)$.

Як показано у прикладі 2.3, середня потужність гармонічного коливання дорівнює половині квадрату його амплітуди $P_b = A_0^2 / 2$. Оскільки різниця між мінімальним і максимальним значеннями сигналу $b(t)$ становить $2A_0$, то потужність шуму квантування визначається

$$\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2} = \frac{(2A_0/2^n)^2}{12} = \frac{4 A_0^2}{12 \cdot 2^{2n}} = \frac{1}{3} \frac{A_0^2}{2^{2n}}.$$

Відношення сигнал/шум квантування

$$\rho_{\text{кв}} = \frac{A_0^2/2}{(1/3)(A_0^2/2^{2n})} = \frac{3}{2} 2^{2n}.$$

Відношення сигнал/шум квантування зручно подавати в децибелах

$$\rho_{\text{кв дБ}} = 10 \lg \rho_{\text{кв}} = 10 \lg \frac{3}{2} 2^{2n} = 10 \lg \frac{3}{2} + 10 \lg 2^{2n} = 1,76 + 20n \lg 2 = 1,76 + 6,02n \text{ дБ}.$$

Отриманий результат дозволяє дійти висновку, що в окремому випадку аналого-цифрового та цифро-аналогового перетворень збільшення довжини ко-

дових комбінацій на один біт дозволяє збільшити $\rho_{\text{кв}}$ приблизно на 6 дБ або, що те ж саме, у 4 рази.

Вправа 2.13. Аналоговий сигнал передається цифровою системою передавання. Потужність аналогового сигналу становить $0,04 \text{ В}^2$, а різниця між його мінімальним і максимальним значеннями 2 В. Визначте кількість рівнів квантування в АЦП за умови, що відношення сигнал/шум квантування відновленого сигналу не менше 40 дБ.

2.10 Подання смугових сигналів

Смуговими (модульованими) називаються сигнали, в яких спектри не примикають до нульової частоти, їхні спектри зосереджені у смузі частот від f_{\min} до f_{\max} , і $f_{\min} > 0$ (рис. 2.30). Для опису смугових сигналів вводять параметри: **середня частота** спектра $f_0 = 0,5(f_{\min} + f_{\max})$ і **ширина спектра** $\Delta F = f_{\max} - f_{\min}$. Для смугових сигналів, як правило, виконується співвідношення $\Delta F \ll f_0$, і тоді вони називаються **вузькосмуговими**. У часовій області вузькосмугові сигнали мають вигляд квазігармонічних коливань із середньою частотою f_0 (рис. 2.31).

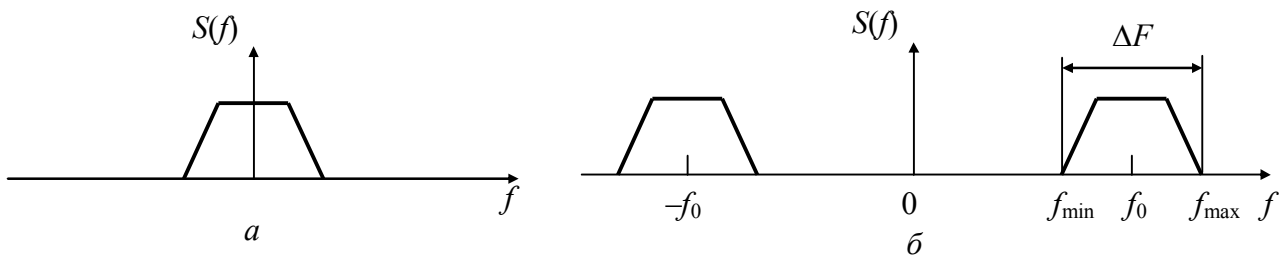


Рисунок 2.30 – Спектри низькочастотного (а) і смугового (б) сигналів

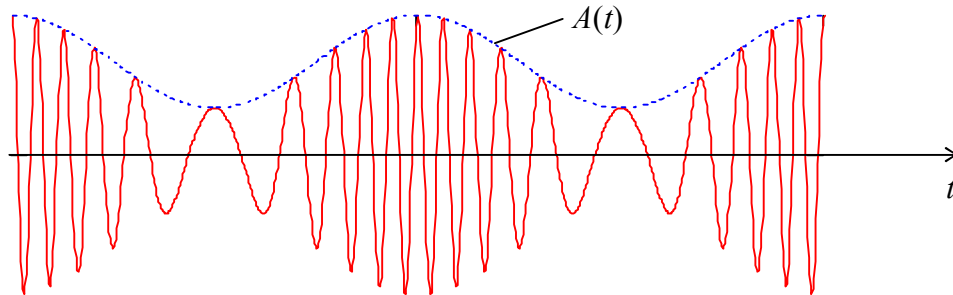


Рисунок 2.31 – Часова діаграма смугового сигналу

Будь-який смуговий сигнал можна представити наступним математичним виразом:

$$s(t) = A(t) \cos[\psi(t)], \quad (2.91)$$

де $A(t)$ – обвідна смугового сигналу;
 $\psi(t)$ – повна фаза смугового сигналу.

Обвідна смугового сигналу це позитивно визначена функція, тобто $A(t) \geq 0$, що, не перетинаючись із сигналом, має з ним спільні точки в моменти, коли значення сигналу на даному періоді максимальне.

Повна фаза смугового сигналу складається із трьох складових:

$$\psi(t) = \omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0, \quad (2.92)$$

де $\omega_0 t = 2\pi f_0 t$ – лінійна складова;

$\varphi(t)$ – приріст фази;

φ_0 – початкова фаза.

Математичний опис смугових сигналів (2.91), підтверджує їх "квазігармонічність".

При описі смугових сигналів вводять поняття миттєвої частоти, оскільки зміна фази викликає зміну частоти сигналу. За визначенням *частота сигналу – це швидкість зміни його фази*, тобто **миттєва частота – це похідна від повної фази**:

$$\omega(t) = \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \omega_0 + \frac{\partial \varphi(t)}{\partial t}. \quad (2.93)$$

Інтеграл від миттєвої частоти дає повну фазу сигналу:

$$\psi(t) = \int_0^t \omega(t) dt + \varphi_0. \quad (2.94)$$

Широко використовується *квадратурне подання* смугових сигналів

$$\begin{aligned} s(t) &= A(t) \cos[\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0] = \\ &= A(t) \cos[\varphi(t) + \varphi_0] \cos[\omega_0 t] - A(t) \sin[\varphi(t) + \varphi_0] \sin[\omega_0 t] = \\ &= I(t) \cos[\omega_0 t] - Q(t) \sin[\omega_0 t], \end{aligned} \quad (2.95)$$

де $I(t) = A(t) \cos[\varphi(t) + \varphi_0]$ – *синфазна або косинусна складова*;

$Q(t) = A(t) \sin[\varphi(t) + \varphi_0]$ – *квадратурна або синусна складова*.

Якщо квадратурні складові $I(t)$ й $Q(t)$ відомі, то можна знайти обвідну й повну фазу смугового сигналу:

$$A(t) = \sqrt{I^2(t) + Q^2(t)}; \quad (2.96)$$

$$\psi(t) = \omega_0 t + \arctg\left(\frac{Q(t)}{I(t)}\right). \quad (2.97)$$

Розповсюдженою формою подання смугових сигналів є *комплексна форма* $\dot{s}(t)$:

$$s(t) = \operatorname{Re}[\dot{s}(t)] = \operatorname{Re}[A(t)e^{j\psi(t)}] = A(t) \cos[\psi(t)]. \quad (2.98)$$

При аналізі смугових сигналів у комплексній формі вводять поняття *комплексної обвідної сигналу*:

$$\dot{s}(t) = A(t)e^{j\psi(t)} = A(t)e^{j(\omega_0 t + \varphi(t) + \varphi_0)} = A(t)e^{j\omega_0 t} e^{j(\varphi(t) + \varphi_0)} = \dot{A}(t)e^{j\omega_0 t}, \quad (2.99)$$

де $\dot{A}(t)$ – комплексна обвідна смугового сигналу.

Комплексна обвідна має наступну форму:

$$\dot{A}(t) = A(t)e^{j(\varphi(t) + \varphi_0)} = A(t)\cos[\varphi(t) + \varphi_0] + jA(t)\sin[\varphi(t) + \varphi_0] = I(t) + jQ(t). \quad (2.100)$$

Приклад 2.14. Визначимо обвідну, приріст фази, початкову фазу, миттєву частоту та квадратурні складові сигналу

$$s(t) = A_0 \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) - A_0 \sin(\Omega t) \sin(\omega_0 t).$$

Для визначення обвідної сигналу відповідно до виразу (2.96) спочатку необхідно визначити квадратурні складові. Очевидно, що заданий сигнал має квадратурне подання, тому синфазна і квадратурна складові є наступними:

$$I(t) = A_0 \cos(\Omega t), \quad Q(t) = A_0 \sin(\Omega t).$$

Тепер можемо знайти обвідну

$$A(t) = A_0 \sqrt{\cos^2(\Omega t) + \sin^2(\Omega t)} = A_0.$$

Приріст фази і початкова фаза:

$$\varphi(t) + \varphi_0 = \arctg\left(\frac{\sin(\Omega t)}{\cos(\Omega t)}\right) = \Omega t.$$

Зрозуміло, що $\varphi_0 = 0$, а $\varphi(t) = \Omega t$.

Для визначення миттєвої частоти спочатку запишемо вираз повної фази

$$\psi(t) = \omega_0 t + \Omega t.$$

Миттєва частота:

$$\omega(t) = \omega_0 + \Omega.$$

Вправа 2.14. Визначте обвідну, приріст фази, початкову фазу, миттєву частоту та квадратурні складові сигналів:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= A_0 \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) - A_0 \sin(\Omega t) \sin(\omega_0 t), \\ s_2(t) &= A_0 \cos[\omega_0 t + \sin(\Omega t)]. \end{aligned}$$

Приклад 2.15. Запишемо загальний вираз смугового сигналу з середньою частотою спектра f_0 , якщо обвідна $A(t) = A_0 e^{-(\alpha t)^2}$, приріст фази $\varphi(t) = \alpha t$, початкова фаза $\varphi_0 = \pi/3$.

У відповідності до виразів (2.91) і (2.92) маємо

$$s(t) = A_0 e^{-(\alpha t)^2} \cos[2\pi f_0 t + \alpha t + \varphi_0].$$

Вправа 2.15. Запишіть вираз смугового сигналу, заданого у прикладі 2.15, у квадратурній та комплексній формах опису.

2.11 Аналітичний сигнал

Комплексний сигнал $\dot{x}(t) = x(t) + j\tilde{x}(t)$ називається **аналітичним**, якщо $\tilde{x}(t)$ є перетворення Гільберта від $x(t)$. На рисунках комплексний сигнал зображують складеним з двох сигналів, як показано на рис. 2.32.

Перетворювач Гільберта – це лінійне коло, імпульсна реакція якого

$$g(t) = \frac{1}{\pi t}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.101)$$



Рисунок 2.32 – Отримання аналітичного сигналу

У будь-якому лінійному колі вихідний і вхідний сигнали зв'язані інтегралом Дюамеля. Тому

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2.102)$$

Це співвідношення називається **перетворенням Гільберта** сигналу $x(t)$. Знайдемо *передатну функцію перетворювача Гільберта* як перетворення Фур'є від імпульсної реакції

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{t} dt = \begin{cases} -j & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega = 0, \\ j & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \quad (2.103)$$

або

$$H(j\omega) = -j \operatorname{sign}(\omega). \quad (2.104)$$

Нехай $S_x(j\omega)$ – спектральна густина сигналу $x(t)$. Тоді спектральна густина сигналу $\tilde{x}(t)$ визначається

$$S_{\tilde{x}}(j\omega) = \begin{cases} -j S_x(j\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ j S_x(j\omega) & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \quad (2.105)$$

Знайдемо **спектральну густину аналітичного сигналу**

$$S_{\dot{x}}(j\omega) = S_x(j\omega) + j S_{\tilde{x}}(j\omega) = \begin{cases} 2S_x(j\omega) & \text{при } \omega > 0, \\ 0 & \text{при } \omega < 0. \end{cases} \quad (2.106)$$

Ми виявили *важливу властивість аналітичного сигналу* – його спектр на від'ємних частотах дорівнює нулю (рис. 2.33).

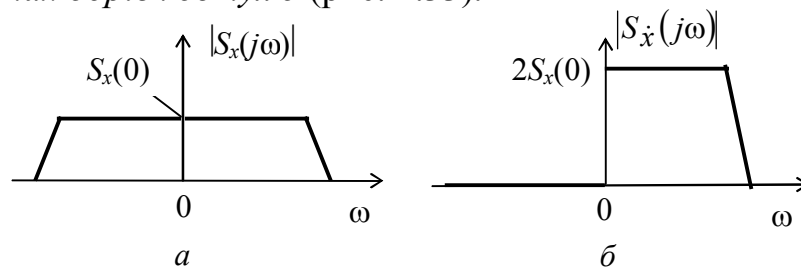


Рисунок 2.33 – Спектральні густини: *a* – сигналу $x(t)$; *б* – відповідного йому аналітичного сигналу $\dot{x}(t)$

Зворотне перетворення Гільберта

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2.107)$$

Модуль аналітичного сигналу

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + \tilde{x}^2(t)} \quad (2.108)$$

є обвідною сигналу $x(t)$, а аргумент

$$\varphi(t) = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{x}(t)}{x(t)} \quad (2.109)$$

– фазою сигналу $x(t)$.

З виразів (2.108) і (2.109) випливає, що аналітичний сигнал може бути записаний у вигляді:

$$\dot{x}(t) = A(t)e^{j\varphi(t)}. \quad (2.110)$$

Таким чином, поняття обвідної й фази сигналу можуть застосовуватися не тільки до смугових, але й низькочастотних сигналів. Обвідна задовольняє двом умовам: $A(t) \geq |x(t)|$ – функція $A(t)$ ніде не перетинає функцію $x(t)$ і в точках дотику функцій $A(t)$ і $x(t)$ їхні похідні збігаються: $A'(t) = x'(t)$, тобто функції мають загальні дотичні.

Приклад 2.16. Задано сигнал $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$. Знайдемо перетворення Гільберта заданого сигналу.

Спочатку знайдемо спектральну густину $\tilde{x}(t)$, з урахуванням виразів (2.48) і (2.103) вона є наступною

$$S_{\tilde{x}}(j\omega) = A\pi[-j\delta(\omega - \omega_0) + j\delta(\omega + \omega_0)].$$

Знайдемо зворотне перетворення Фур'є і тим самим визначимо $\tilde{x}(t)$:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\tilde{x}}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [-j\delta(\omega - \omega_0) + j\delta(\omega + \omega_0)] e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{A}{2} \left[- \int_{-\infty}^{\infty} j\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} j\delta(\omega + \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \right] = \\ &= \frac{A}{2} [-j e^{j\omega_0 t} + j e^{-j\omega_0 t}] = \frac{A}{2} [-j \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t + j \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t] = A \sin \omega_0 t. \end{aligned}$$

При визначенні $\tilde{x}(t)$ враховано вираз (2.47).

Вправа 2.16. Доведіть, що перетворенням Гільберта сигналу $x(t) = A \sin 2\pi f_0 t$ є $-A \cos 2\pi f_0 t$.

Отже, з останнього прикладу і вправи випливає, що перетворення Гільберта, не змінюючи амплітуду гармонічного коливання, змінює його фазу на $-\pi/2$, якщо частота є додатною величиною і, в чому не важко впевнитись, на $\pi/2$, якщо частота є від'ємною величиною.

Враховуючи, що перетворення Гільберта є лінійним, зроблені вище висновки справедливі для кожної окремої спектральної складової сигналу, а АЧХ і ФЧХ кола, що реалізує перетворення Гільберта, є наступними (рис. 2.34):

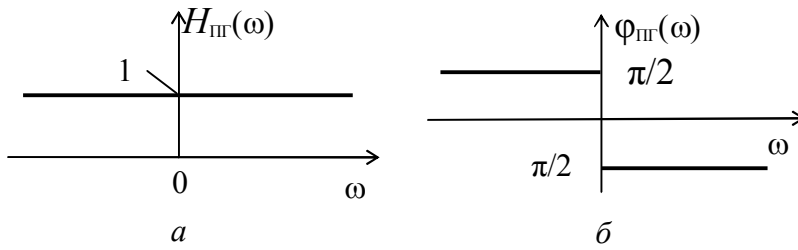


Рисунок 2.34 – Частотні характеристики перетворювача Гільберта: *а* – амплітудна (АЧХ); *б* – фазова (ФЧХ)

$$H_{\text{ПГ}}(\omega) = 1,$$

$$\varphi_{\text{ПГ}}(\omega) = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0; \\ \pi/2, & \omega < 0. \end{cases}$$

Вправа 2.17. Запишіть аналітичний сигнал, якщо $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$, знайдіть його обвідну і фазу.

2.12 Дискретизація смугових сигналів

Подання смугових сигналів дискретними необхідно, коли їхнє перетворення (фільтрація, детектування тощо) виконуються процесорами цифрових сигналів. У випадку смугових сигналів, а особливо вузькосмугових сигналів, частота дискретизації може бути суттєво менша за $2f_{\text{max}}$. Впевнимось у цьому.

Спектральна густина дискретного сигналу описується виразами (2.75) і (2.76). На рис. 2.35, *а* наведено амплітудний спектр довільної форми $S(f)$ смугового сигналу, що зосереджений на інтервалі $(f_{\text{min}}, f_{\text{max}})$. На рис. 2.35, *б* зображено амплітудний спектр дискретного сигналу, що може мати місце при дискретизації сигналу зі спектром, наведеним на рис. 2.35, *а*.

Заради наочності складові спектра дискретного сигналу, які викликані періодичним повторенням смуг частот $(f_{\text{min}}, f_{\text{max}})$ і $(-f_{\text{max}}, -f_{\text{min}})$, позначені “заливкою” різної густини. Щоб складові спектра на рис. 2.35, *б* не перекривалися, необхідно так вибрати частоту дискретизації $f_{\text{д}}$, щоб задовольнити двом умовам, які впливають з рис. 2.35, *б*:

$$-f_{\text{min}} + kf_{\text{д}} \leq f_{\text{min}} \quad \text{і} \quad f_{\text{max}} \leq -f_{\text{max}} + (k+1)f_{\text{д}}, \quad (2.111)$$

де k – ціле число.

Нерівності (2.111) перепишемо так, щоб обмежити знизу і зверху значення частоти дискретизації $f_{\text{д}}$:

$$\frac{2f_{\text{max}}}{k+1} \leq f_{\text{д}} \leq \frac{2f_{\text{min}}}{k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_{\text{max}}. \quad (2.112)$$

Максимальне значення k_{max} визначається за умови, що складові спектра будуть розміщені максимально близько, з рис. 2.35, *б* – у формулах (2.111) необхідно знаки нерівностей змінити на знаки рівностей

$$-f_{\text{min}} + k_{\text{max}} f_{\text{д}} = f_{\text{min}} \quad \text{і} \quad f_{\text{max}} = -f_{\text{max}} + (k_{\text{max}} + 1)f_{\text{д}}. \quad (2.113)$$

За цих рівностей частота дискретизації $f_{\text{д}}$ визначається

$$f_{\text{д}} = \frac{2f_{\text{max}}}{k_{\text{max}} + 1} = \frac{2f_{\text{min}}}{k_{\text{max}}}. \quad (2.114)$$

Рішення рівняння (2.114) відносно k_{\max} дає (з урахуванням того, що k ціле)

$$k_{\max} = \text{int} \left\{ \frac{f_{\min}}{\Delta F} \right\}. \quad (2.115)$$

У випадку, коли $k = 0$, частота дискретизації $f_d \geq 2f_{\max}$, тобто це умова вибору частоти дискретизації для первинних (низькочастотних) сигналів, що задовольняє теоремі Котельникова. Коли $k > 0$, то подання смугового сигналу дискретним стає більш ощадливим (меншим числом відліків). Найбільш ощадливе подання сигналу буде, коли $k = k_{\max}$.

Відновлення неперервного смугового сигналу за відліками здійснюється смуговим фільтром, у якого нижня гранична частота смуги пропускання не більша f_{\min} , а верхня гранична частота смуги пропускання не менша f_{\max} .

Зрозуміло, що у практичних додатках має бути знайдений компроміс між ощадливістю подання сигналу та складністю реалізації відновлювального фільтра, оскільки зі збільшенням k його параметри прямують до параметрів ідеального фільтра.

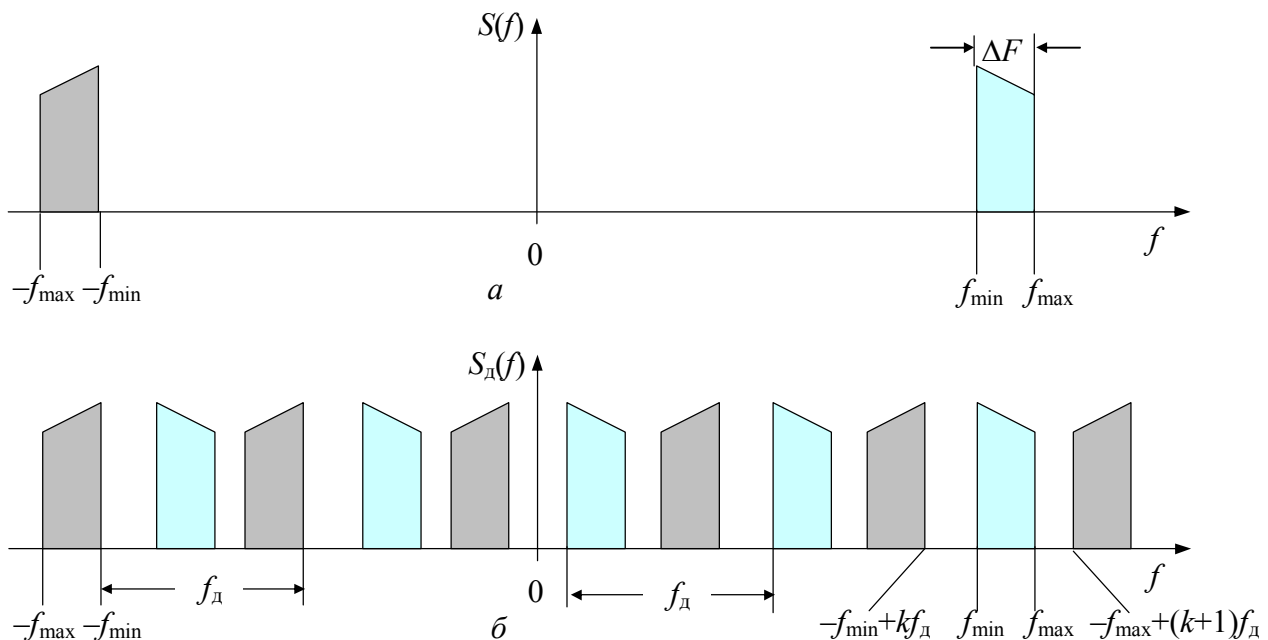


Рисунок 2.35 – Спектри неперервного смугового і дискретного сигналів

Вправа 2.18. Задано смуговий сигнал з параметрами $f_{\min} = 2$ кГц, $f_{\max} = 3$ кГц. Форма спектральної густини є довільною, наприклад, такою, як показано на рис. 2.35. Побудуйте графік спектра заданого сигналу. Визначте можливі значення k та побудуйте відповідні графіки спектрів дискретних сигналів при таких значеннях k . Покажіть на цих графіках, якою має бути АЧХ відновлювальних смугових фільтрів.

Контрольні питання до розділу 2

1. Дайте визначення неперервного, дискретного, квантованого і цифрового сигналів.

2. Дайте визначення первинного і вторинного сигналів.
3. Дайте визначення детермінованого і випадкового сигналів.
4. Дайте визначення періодичного і неперіодичного сигналів.
5. Дайте визначення простого і складного сигналу.
6. В чому різниця між сигналом та коливанням?
7. Дайте визначення миттєвої потужності сигналу, яка її розмірність і що вона характеризує?
8. Дайте визначення середньої потужності і енергії сигналу.
9. За яких умов сигнал називають нормованим?
10. Дайте визначення кореляційної функції сигналу.
11. Що називають узагальненим рядом Фур'є? Запишіть його вираз та вираз розрахунку коефіцієнтів розкладання.
12. Поясніть поняття аналіз та синтез сигналу.
13. Запишіть основні співвідношення для N -вимірного лінійного метричного простору.
14. Запишіть відомі Вам форми ряду Фур'є при тригонометричному базисі.
15. Дайте визначення амплітудного і фазового спектра періодичного сигналу.
16. Дайте визначення поняттям основна частота і гармоніка сигналу, ширина спектра сигналу.
17. Яким чином здійснюють спектральний аналіз періодичного і неперіодичного сигналів? В чому принципова відмінність їх спектрів?
18. Наведіть відомі Вам властивості перетворення Фур'є.
19. В чому особливість спектра дискретного сигналу? Як здійснюють дискретний спектральний аналіз?
20. Сформулюйте теорему Котельникова та доведіть її в частотній області.
21. Що називається рядом Котельникова і що він ілюструє?
22. Перелічіть і поясніть перетворення, що здійснюються в АЦП.
23. Дайте визначення кроку квантування. Як пов'язана величина кроку квантування з діапазоном значень аналогового сигналу?
24. Як збільшення числа рівнів квантування впливає на швидкість цифрового сигналу на виході АЦП?
25. Перелічіть і поясніть перетворення, що здійснюються в ЦАП.
26. Дайте визначення відношення сигнал/шум квантування.
27. Яких значень може набувати похибка квантування? Який закон розподілу її миттєвих значень, чому дорівнюють її середнє значення та середня потужність?
28. Поясніть причини, через які відновлений неперервний сигнал відрізняється від вихідного. Як зменшити цю різницю, якими витратами це буде супроводжуватись?
29. Дайте визначення смугового і вузькосмугового сигналів. Як їх описують, які їх основні параметри?
30. Запишіть відомі Вам форми подання смугового сигналу.
31. Який сигнал називається аналітичним і що необхідно для його отримання?
32. Поясніть особливості дискретизації смугових сигналів.

3 ОПИС ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ

3.1 Визначення випадкових процесів

У попередніх розділах розглянуті засоби опису детермінованих сигналів. Проте багато задач теорії й техніки зв'язку можуть бути вирішені тільки при описі сигналів і завад випадковими функціями. **Випадкова функція якого-небудь аргументу** – це така функція, що при кожному значенні аргументу є випадковою величиною. Випадкова функція часу називається **випадковим (стохастичним) процесом**. Наприклад, напруга завади на виході лінії зв'язку є випадковою функцією часу, тому що ця напруга залежить від безлічі заздалегідь не передбачених і неконтрольованих факторів, які змінюються у часі.

Позначимо випадковий процес, що розглядається, як $X(t)$. Окремі спостереження над процесом, проведені в однакових контрольованих умовах досліду, дають щораз різні функції $x(t)$ – різні **реалізації випадкового процесу**. Сукупність $\{x_k(t)\}$ всіх можливих реалізацій даного випадкового процесу називається **ансамблем** (рис. 3.1). Статистичний підхід до опису випадкового процесу полягає в тому, що визначають деякі усереднені характеристики для ансамблю $\{x_k(t)\}$ у цілому.

3.2 Імовірнісні характеристики випадкових процесів

Найбільш уживаними серед статистичних характеристик випадкових процесів є імовірнісні характеристики. Найпростіша з них – **одновимірний розподіл ймовірностей**. Якщо фіксувати деякий момент часу t_1 , то значення $X(t_1)$ – випадкова величина, різні реалізації набувають різних значень. Нехай $P\{X(t_1) \leq x\}$ – імовірність того, що в момент t_1 величина $X(t_1)$ не перевищує деяке значення x (рис. 3.1). Тоді

$$F_1(x, t_1) = P\{X(t_1) \leq x\} \quad (3.1)$$

називається **одновимірною функцією розподілу ймовірностей випадкового процесу $X(t)$** .

Часткова похідна

$$\frac{\partial F_1(x, t_1)}{\partial x} = p_1(x, t_1), \quad (3.2)$$

якщо вона існує, називається **одновимірною густиною ймовірності випадкового процесу $X(t)$ для моменту t_1** .

Якщо з тексту ясно, що мова йде про одновимірний розподіл, то індекс 1 у функцій (3.1) і (3.2) опускають. З визначення функції $F(x, t_1)$ (3.1) випливає, що при $x_1 < x_2$

$$F(x_2, t_1) - F(x_1, t_1) = P\{x_1 < X(t_1) \leq x_2\} \quad (3.3)$$

– різниця значень функції розподілу визначає ймовірність потрапляння значень процесу $X(t)$ у момент t_1 в інтервал (x_1, x_2) . Застосовуючи (3.3) до визначення функції $p(x, t_1)$, одержимо

$$p(x, t_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x, t_1) - F(x, t_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P\{x < X(t_1) \leq x + \Delta x\}}{\Delta x}$$

або

$$p(x, t_1) \Delta x \approx P\{x < X(t_1) \leq x + \Delta x\} \quad (3.4)$$

– добуток $p(x, t_1) \Delta x$ дає наближене значення ймовірності потрапляння значень процесу $X(t)$ у момент t_1 в інтервал $(x, x + \Delta x)$ (рис. 3.1). Для довільного інтервалу (x_1, x_2)

$$P\{x_1 < X(t_1) \leq x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x, t_1) dx. \quad (3.5)$$

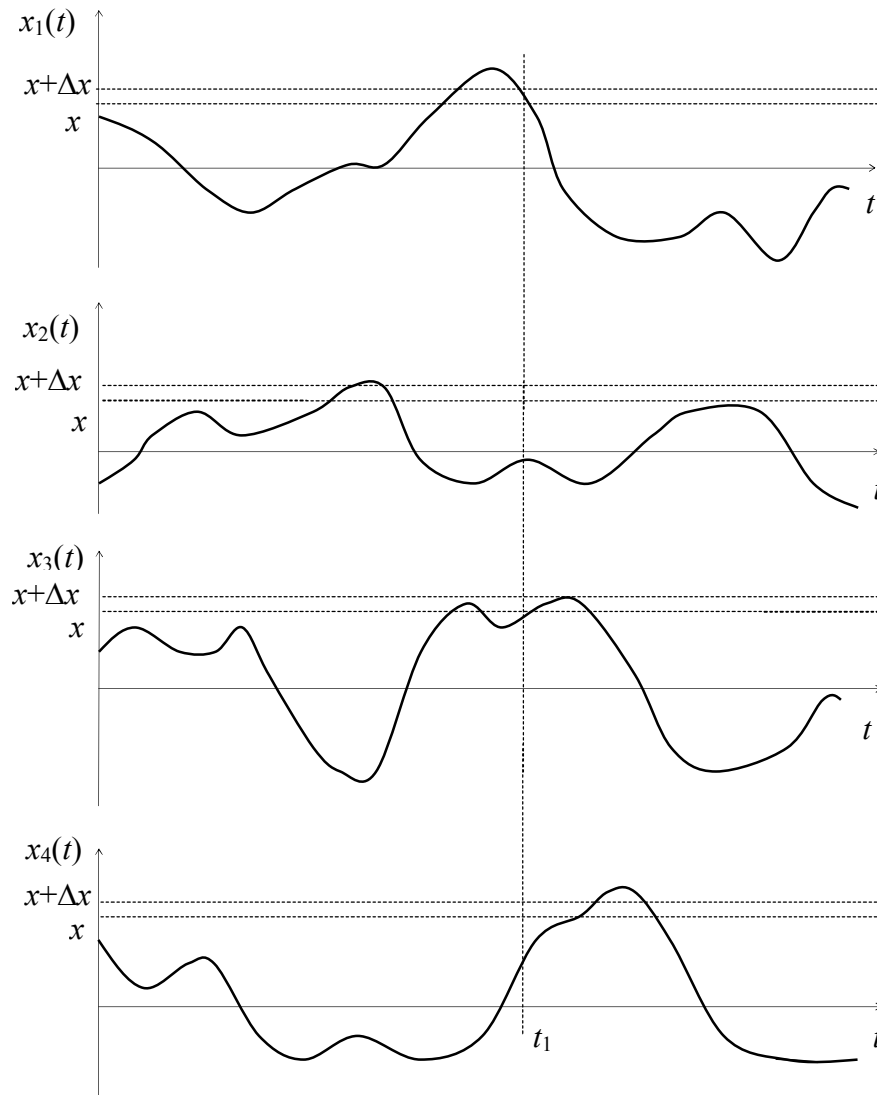


Рисунок 3.1 – Ансамбль реалізацій

Застосовуючи (3.5) до (3.1), отримаємо, що

$$F(x, t_1) = \int_{-\infty}^x p(x, t_1) dx. \quad (3.6)$$

Співвідношення (3.3) і (3.5) виражають одне з основних призначень одновимірних функцій розподілу й густини ймовірності випадкового процесу.

Оскільки сумарна ймовірність усіх можливих значень процесу дорівнює одиниці, то

$$F(\infty, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, t_1) dx = 1. \quad (3.7)$$

Останній вираз називається **умовою нормування**. Очевидно, що $F(-\infty, t_1) = 0$, а *діапазон можливих значень функції розподілу ймовірностей* $(0, 1)$.

Враховуючи, що $F(x, t_1)$ за визначенням є ймовірністю потрапляння в інтервал, розмір якого збільшується зі збільшенням аргументу, вона є *не спадною*. Останнє обумовлює невід'ємність густини ймовірності $p(x, t_1) \geq 0$.

Функції $F_1(x, t_1)$ або $p_1(x, t_1)$ у загальному випадку не можуть бути вичерпними характеристиками випадкового процесу. Адже цей процес, розглянутий у різні моменти часу, являє собою безліч випадкових величин, зв'язаних між собою статистичними залежностями. Зв'язок між двома значеннями випадкового процесу $X(t)$ у моменти часу t_1 і t_2 ураховується двовимірною функцією розподілу ймовірностей і двовимірною густиною ймовірності.

Двовимірною функцією розподілу ймовірностей $F_2(x_1, x_2, t_1, t_2)$ *випадкового процесу* $X(t)$ **називається ймовірність складної події, яка полягає в тому, що в момент t_1 функція $X(t)$ не перевищує деякого значення x_1 , а в момент t_2 не перевищує значення x_2**

$$F_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1; X(t_2) \leq x_2\}. \quad (3.8)$$

Двовимірною густиною ймовірності *випадкового процесу* $X(t)$ **називається часткова похідна другого порядку (якщо вона існує)**

$$p_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, x_2, t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (3.9)$$

Фіксуючи $n = 3, 4, \dots$ моментів часу, за аналогією з (3.7), знаходять **n -вимірну функцію розподілу ймовірностей процесу $X(t)$**

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1; X(t_2) \leq x_2; \dots; X(t_n) \leq x_n\}. \quad (3.10)$$

Часткова похідна n -го порядку (якщо вона існує)

$$\frac{\partial^{(n)} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) \quad (3.11)$$

є **n -вимірною густиною ймовірності процесу $X(t)$** . Величина $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$ визначає ймовірність складної події, яка полягає в тому, що в момент t_1 функція $X(t)$ перебуває в інтервалі між x_1 і $x_1 + dx_1$, у момент t_2 – в інтервалі між x_2 і $x_2 + dx_2$ і т.д., зрештою, у момент t_n функція $X(t)$ перебуває в інтервалі між x_n і $x_n + dx_n$. Інакше кажучи, n -вимірною густиною ймовірності, помножена на dx_1, dx_2, \dots, dx_n , визначає ймовірність проходження функції $X(t)$ через n “щілин” (рис. 3.2), розміри яких dx_1, dx_2, \dots, dx_n , а ординати x_1, x_2, \dots, x_n відповідно.

Чим більше значення n , тим повніше описано випадковий процес. Але отримання n -вимірної густини ймовірності або n -вимірної функції розподілу

вимагає надзвичайно складного й трудомісткого оброблення безлічі реалізацій $x_k(t)$ процесу $X(t)$, причому, чим більше n , тим більш складним і трудомістким є оброблення. Відзначимо, що для рішення багатьох задач достатньо знати одновимірний або двовимірний розподіл імовірностей, оскільки доводиться мати справу з так званими *стаціонарними* процесами.

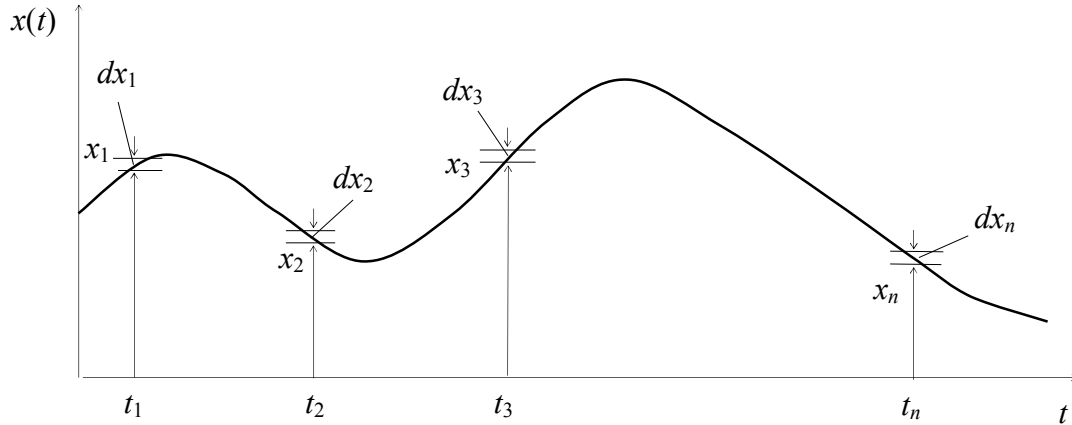


Рисунок 3.2 – До розрахунку ймовірності складної події за допомогою n -вимірної густини ймовірності

*Випадковий процес називається **стаціонарним** (у вузькому сенсі), якщо для будь-якого цілого числа $n \geq 1$ і довільної послідовності t_1, t_2, \dots, t_n справедлива рівність*

$$p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n) = p_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1 + t_0, t_2 + t_0, \dots, t_n + t_0), \quad (3.12)$$

де t_0 – будь-яке значення. Інакше кажучи, розподіл імовірностей не залежить від початку відліку часу. Таким чином, *статистичні характеристики стаціонарного процесу залишаються незмінними в часі.*

З рівності (3.12) випливає, що

$$p_1(x_1, t_1) = p_1(x_1, t_1 + t_0) = p_1(x_1) \quad (3.13)$$

– *одновимірна густина ймовірності стаціонарного випадкового процесу не залежить від часу.*

Для двовимірної густини ймовірності рівність (3.11) набуває виду

$$p_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2, t_1 + t_0, t_2 + t_0).$$

Вважаючи, що $t_0 = -t_1$, одержимо

$$p_2(x_1, x_2, t_1, t_2) = p_2(x_1, x_2, \tau), \quad (3.14)$$

де $\tau = t_2 - t_1$. З (3.14) випливає, що у *стаціонарних процесів двовимірний розподіл імовірностей залежить не від самих моментів t_1 і t_2 , а від їхньої різниці τ .*

Далі будемо вважати, якщо не вказано іншого, то випадковий процес є стаціонарним.

Приклад 3.1. Задано одновимірну густину ймовірності стаціонарного процесу $X(t)$

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > 10, \\ 1/10, & 0 \leq x \leq 10. \end{cases}$$

Перевіримо, чи виконується умова нормування заданої густини ймовірності $p(x)$; запишемо функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ процесу $X(t)$; за виразом $F(x)$ знайдемо ймовірність потрапляння значень процесу $X(t)$ в інтервал $(8, 9)$.

Використовуючи вираз (3.7) знаходимо

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = \int_0^{10} \frac{1}{10} dx = 1$$

– умова нормування виконується.

Вираз $F(x)$ знаходимо за формулою (3.6), при цьому враховуємо, що в інтервалі $-\infty < x < 0$ інтегрування дає нуль, а для значень $x > 10$ інтегрування дає одиницю

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(x) dx = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{10} \int_0^x dx, & 0 \leq x \leq 10, \\ 1, & x > 10, \end{cases} = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{10}, & 0 \leq x \leq 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

В загальному випадку густина ймовірності рівномірного розподілу описується виразом

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \quad x > b, \\ 1/(b-a), & a \leq x \leq b, \end{cases} \quad (3.15)$$

а відповідна їй функція розподілу ймовірностей є наступною

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \quad (3.16)$$

Тепер за формулою (3.5) знаходимо

$$P\{8 < X(t) \leq 9\} = F(9) - F(8) = 0,9 - 0,8 = 0,1.$$

Вправа 3.1. Доведіть вираз (3.16) та за його допомогою визначте ймовірність потрапляння значень процесу $X(t)$ в той самий інтервал $(8, 9)$.

Вправа 3.2. Перевірте виконання властивостей функцій $F(x)$ і $p(x)$, розглянутих у п. 3.2, для виразів (3.15) і (3.16).

3.3 Числові характеристики стаціонарних процесів

Багато практичних задач, пов'язаних з випадковими процесами, можна вирішувати, використовуючи більш “грубі” характеристики процесів, ніж розподіли ймовірностей. Однією з таких характеристик є середнє значення процесу $\overline{X(t)}$ (аналог математичного сподівання випадкової величини). **Середнє значення процесу** – це рівень, навколо якого процес набуває своїх значень. Його можна визначити, знаючи густину ймовірності процесу

$$\overline{X(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx. \quad (3.17)$$

Аналогічно, інтеграл з нескінченними межами добутку будь-якої характеристики процесу і густини ймовірності дозволяє знайти середнє значення цієї характеристики. Так, **середня потужність процесу** – середнє значення квадрату процесу

$$P_X = \overline{X^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx. \quad (3.18)$$

Середнє значення квадрату відхилень процесу від середнього значення називається **дисперсією процесу**

$$D\{X(t)\} = \overline{[X(t) - \overline{X(t)}]^2} = \int_{-\infty}^{\infty} [x - \overline{X(t)}]^2 p(x)dx. \quad (3.19)$$

Додатний корінь із дисперсії

$$\sigma_X = \sqrt{D\{X(t)\}} \quad (3.20)$$

називається **середнім квадратичним відхиленням процесу**.

Як видно зі співвідношень для середніх значень (3.17) – (3.20), для стаціонарних процесів вони є постійними величинами.

Приклад 3.2. Стаціонарний випадковий процес $X(t)$ задано одновимірною густиною ймовірності, використаною у прикладі 3.1. Визначимо середнє значення і дисперсію процесу $X(t)$.

За виразом (3.17) легко знайти $\overline{X(t)}$

$$\overline{X(t)} = \frac{1}{10} \int_0^{10} x dx = 5 \text{ В}$$

(тут і далі, якщо не зазначено інше, прийнято, що процес – це зміна напруги).

Тепер, коли відомо середнє значення, за виразом (3.16) знайдемо дисперсію

$$D\{X(t)\} = \frac{1}{10} \int_0^{10} [x - 5]^2 dx = \frac{1}{10} \left(\int_0^{10} x^2 dx - 10 \int_0^{10} x dx + 25 \int_0^{10} dx \right) = 8,33 \text{ В}^2.$$

Вправа 3.3. Визначте середню потужність процесу $X(t)$, густину ймовірності якого задано в прикладі 3.1, та впевніться, що

$$P_X = \overline{X(t)}^2 + D\{X(t)\}$$

– *середня потужність випадкового процесу є сумою потужності постійної складової (квадрату середнього значення) і потужності змінної складової (дисперсії).*

Вправа 3.4. Доведіть, що середнє значення і дисперсія випадкового процесу, густина ймовірності якого описується виразом (3.15), обчислюються за наступними виразами

$$\overline{X(t)} = \frac{a+b}{2}, \quad D\{X(t)\} = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (3.21)$$

3.4 Кореляційна функція стаціонарних процесів

Уведені середні значення характеризують процес тільки в один довільний момент часу й зовсім не стосуються зв'язку між значеннями випадкового процесу в різні моменти часу. Зв'язок між значеннями $X(t)$ і $X(t + \tau)$ (τ – довільний зсув у часі) статистично оцінюється *кореляційною функцією (КФ) процесу $X(t)$* , що обчислюється як середнє значення добутку

$$K_X(\tau) = \overline{X(t)X(t+\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (3.22)$$

Можна вказати низку **властивостей КФ** довільних стаціонарних процесів.

1. Якщо у співвідношенні (3.22) покласти $\tau = 0$, то воно переходить у співвідношення (3.18), тому

$$K_X(0) = P_X \quad (3.23)$$

– *КФ в нулі дорівнює середній потужності випадкового процесу.*

2. Оскільки КФ стаціонарного процесу не залежить від часу t , то середнє значення добутку $\overline{X(t)X(t+\tau)} = \overline{X(t-\tau)X(t)}$, тому

$$K_X(-\tau) = K_X(\tau) \quad (3.24)$$

– *КФ випадкового процесу парна.*

3. Розглянемо середній квадрат різниці значень процесу, інтервал часу між якими становить τ ,

$$\overline{\varepsilon^2(\tau)} = \overline{[X(t) - X(t+\tau)]^2} = \overline{X^2(t)} - 2\overline{X(t)X(t+\tau)} + \overline{X^2(t+\tau)} = 2K_X(0) - 2K_X(\tau). \quad (3.25)$$

Середній квадрат завжди додатний. Тому

$$K_X(0) \geq K_X(\tau) \quad (3.26)$$

– *значення КФ будь-якого випадкового процесу при аргументі $\tau = 0$ максимальне.*

4. Відповімо на питання: наскільки відрізняються у середньому значення процесу, інтервал часу між якими становить τ ? Відповідь знаходиться у співвідношенні (3.21):

$$\overline{\varepsilon^2(\tau)} = 2[K_X(0) - K_X(\tau)] \quad (3.27)$$

– *чим більше відрізняється $K_X(\tau)$ від $K_X(0)$, тим більше у середньому відрізняються значення процесу, інтервал часу між якими становить τ .* Оскільки швидкість зміни значень будь-якого процесу з обмеженою шириною спектра кінцева, то існує деяка залежність між цими значеннями процесу. Чим більше ця залежність, тим більшою мірою значення повторюють одне одного й тим менше $\overline{\varepsilon^2(\tau)}$. Таким чином, **кореляційна функція $K_X(\tau)$ випадкового процесу $X(t)$ характеризує міру статистичного зв'язку між значеннями процесу, час між якими τ .**

Очевидно, що зі зростанням $|\tau|$ статистичний зв'язок між значеннями $X(t)$ і $X(t + \tau)$ зменшується й за досить великих $|\tau|$ взаємозв'язок зникає. При цьому якщо середнє значення процесу дорівнює нулю, то $\overline{X(t)X(t + \tau)} = 0$, оскільки добутки мають рівні ймовірності бути додатними або від'ємними. Отже, якщо $\overline{X(t)} = 0$, то при $|\tau| \rightarrow \infty$ функція $K_X(\tau)$ прямує до нуля, убываючи монотонно або коливаючись навколо нуля, як показано на рис. 3.3, а. Якщо ж $\overline{X(t)} \neq 0$, то легко показати, що при $|\tau| \rightarrow \infty$ функція $K_X(\tau)$ прямує до $\overline{X(t)}^2$ (рис. 3.3, б).

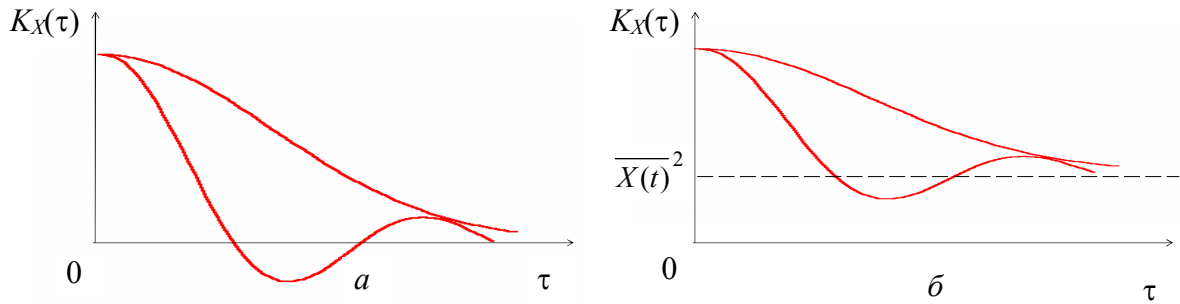


Рисунок 3.3 – Кореляційні функції випадкових процесів:
а – при $\overline{X(t)} = 0$; б – при $\overline{X(t)} \neq 0$

Порівнювати значення $K_X(\tau)$ і $K_X(0)$ для визначення статистичного зв'язку між значеннями процесу зсунутими за часом на τ не зовсім зручно, тому що ці значення залежать від дисперсії процесу (властивості 1 і 4). Визначення статистичного зв'язку зручно проводити за *нормованою кореляційною функцією*

$$R_X(\tau) = K_X(\tau) / K_X(0). \quad (3.28)$$

Зі співвідношення (3.26) випливає, що $-1 \leq R_X(\tau) \leq 1$. Чим ближче значення $R_X(\tau)$ до 1, тим сильніше корельовані значення процесу зсунуті за часом на τ . Якщо $R_X(\tau) = 0$, то значення процесу зсунуті за часом на τ , некорельовані, незалежні.

Для грубого опису кореляційних зв'язків вводять поняття **інтервал (час) кореляції** процесу τ_k . Умовно вважають, що значення процесу, які відстоять на $\tau \leq \tau_k$ суттєво корельовані між собою, а значення процесу, які відстоять на $\tau > \tau_k$, некорельовані або корельовані несуттєво. Інтервал кореляції визначають по-різному подібно тому, як оцінюється ширина спектра. Так, можна прийняти, що

$$\tau_k = \int_0^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau. \quad (3.29)$$

Тут геометрично τ_k дорівнює основі прямокутника з висотою $R_X(0) = 1$, що має ту саму площу, що й площа між кривою $|R_X(\tau)|$ при $\tau > 0$ і віссю абсцис.

Інтервал кореляції τ_k можна визначити й інакше – як тривалість функції $|R_X(\tau)|$ при $\tau > 0$ на рівні, наприклад, 0,1 або як τ , за якого КФ перший раз набуває значення нуль (якщо КФ убуває коливаючись).

Сказане відносно визначення τ_k є вірним у тому випадку, коли $\overline{X(t)}^2 = 0$. Якщо $\overline{X(t)}^2 \neq 0$, то τ_k визначають за *нормованою коваріаційною функцією*

$$r_X(\tau) = k_X(\tau)/k_X(0) = k_X(\tau)/D\{X(t)\}, \quad (3.30)$$

де $k_X(\tau)$ – **коваріаційна функція процесу $X(t)$**

$$k_X(\tau) = \overline{[X(t) - \overline{X(t)}][X(t+\tau) - \overline{X(t)}]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - \overline{X(t)}][x_2 - \overline{X(t)}] p_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2. \quad (3.31)$$

Очевидно, що *кореляційна і коваріаційна функції пов'язані між собою наступним чином*

$$K_X(\tau) = k_X(\tau) + \overline{X(t)}^2. \quad (3.32)$$

Аналогічно визначенню КФ процесу вводиться *взаємна кореляційна функція* для характеристики зв'язку між значеннями двох випадкових процесів $X(t)$ і $Y(t)$, що відстоять у часі на τ ,

$$K_{XY}(\tau) = \overline{X(t)Y(t+\tau)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy p_2(x, y, \tau) dx dy, \quad (3.33)$$

де $p_2(x, y, \tau)$ – спільна густина ймовірності значень стаціонарних процесів $X(t)$ і $Y(t)$, що відстоять у часі на τ .

Для розв'язання багатьох практичних задач досить знати лише середні значення, дисперсії й КФ. Теорії, які обходяться лише цими характеристиками, називаються **кореляційними теоріями**. У рамках кореляційної теорії природно вважати стаціонарними такі випадкові процеси, у яких середнє значення й дисперсія процесу не залежать від часу, а КФ залежить лише від τ . Такі випадкові процеси називаються **стаціонарними в широкому сенсі**.

Приклад 3.3. Стаціонарний випадковий процес $X(t)$ має КФ

$$K_X(\tau) = 2 + 10 \frac{\sin 2\pi 100\tau}{2\pi 100\tau}, \text{ В}^2. \quad (3.34)$$

Знайдемо середню потужність і середнє значення цього процесу. Перевіримо виконання властивостей КФ.

Згідно з формулою (3.19) (перша властивість КФ) середня потужність процесу дорівнює 12 В^2 . Відповідно до четвертої властивості КФ, при $|\tau| \rightarrow \infty$ функція $K_X(\tau)$ прямує до $\overline{X(t)}^2$, відповідно, отримуємо $\overline{X(t)} = \sqrt{2} = 1,41 \text{ В}$ або $\overline{X(t)} = -1,41 \text{ В}^2$ (знак неможливо встановити по КФ).

Парність заданої КФ впливає з парності другого доданку, який є функцією виду $\sin x/x$. Максимум КФ при $\tau = 0$ обумовлюється максимумом функції виду $\sin x/x$ за нульового значення аргументу.

Приклад 3.4. Задано КФ процесу (3.34). Визначимо інтервал кореляції цього процесу.

Оскільки середнє значення процесу не є нульовим, то для визначення τ_k маємо визначити його нормовану коваріаційну функцію:

$$r_x(\tau) = \frac{\sin 2\pi 100\tau}{2\pi 100\tau}.$$

Враховуючи, що $r_x(\tau)$ – функція виду $\sin x/x$ убуває коливаючись навколо нуля, визначаємо τ_k за першим нульовим значенням: $r_x(\tau_k) = 0$. Вираз $r_x(\tau)$ набуває нульових значень, коли нулю дорівнює значення функції \sin у чисельнику. При $\tau = 0$ чисельник набуває нульового значення, проте знаменник теж дорівнює нулю, а розкриття цієї невизначеності дає 1. Для значень τ функція $\sin 2\pi 100\tau$ набуває нульових значень, коли $2\pi 100\tau = k\pi$ (k – ціле число). Найменше $k = 1$ і $2\pi 100\tau_k = \pi$, звідки $\tau_k = 1/200$ с.

Вправа 3.5. Стаціонарний випадковий процес $X(t)$ має КФ

$$K_X(\tau) = 0,5e^{-\frac{4\tau^2}{10}}.$$

Знайдіть потужність та середнє значення процесу $X(t)$. Визначте інтервал кореляції процесу. Доведіть, що задана КФ парна, а при $\tau = 0$ її значення максимальне.

3.5 Числові характеристики і кореляційна функція ергодичного процесу

Стаціонарний випадковий процес називається ергодичним, якщо будь-які статистичні характеристики його, знайдені шляхом усереднення за ансамблем реалізацій, збігаються з характеристиками, знайденими усередненням у часі однієї реалізації.

Середнє значення за часом позначають хвилястою лінією над залежністю, що усереднюється за часом. Так, **середнє в часі** значення процесу $X(t)$ визначається усередненням за часом реалізації $x(t)$

$$\tilde{X}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt. \quad (3.35)$$

Середня потужність процесу

$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt. \quad (3.36)$$

Дисперсія процесу

$$D\{X(t)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x(t) - \tilde{X}(t)]^2 dt. \quad (3.37)$$

КФ ергодичного процесу визначається

$$K_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau)dt \quad (3.38)$$

Два процеси $X(t)$ і $Y(t)$ називаються *спільно ергодичними*, якщо усереднення функцій від них за ансамблем приводить до того ж результату, що й усереднення за часом. *Взаємна кореляційна функція спільно ергодичних процесів* визначається

$$K_{XY}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau)dt \quad (3.39)$$

3.6 Спектральна густина потужності стаціонарного випадкового процесу

При вивченні детермінованих сигналів для спектрального аналізу використовується перетворення Фур'є. Можна спробувати знайти перетворення Фур'є від k -ї реалізації процесу $x_k(t)$ і знайти її спектральну густину як межу

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_k(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} x_k(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.40)$$

Проте спроба може виявитися безуспішною, оскільки при $T \rightarrow \infty$ немає гарантії, що k -та реалізація задовольняє умові абсолютної інтегрованості. Якби межа інтеграла (3.40) для k -ї реалізації й існувала, то вона була б спектральною характеристикою лише k -ї реалізації, а не процесу в цілому.

Можна показати, що

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \overline{|S_k(j\omega)|^2} = \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (3.41)$$

де пряма лінія означає усереднення за ансамблем реалізацій. Співвідношення (3.41) є не що інше, як перетворення Фур'є від КФ процесу. Оскільки КФ характеризує процес у цілому, то й ліва частина в (3.41) є спектральною характеристикою всього процесу. Її позначають як $G_X(\omega)$.

Фізичний зміст функції $G_X(\omega)$ легко з'ясувати, якщо врахувати, що $|S_k(j\omega)|^2$ відповідно до рівності Парсеваля (2.51) характеризує розподіл енергії процесу за частотою. У результаті ділення цієї функції на T отримаємо розподіл потужності процесу за частотою.

Співвідношення (3.41) можна переписати у вигляді прямого й зворотного перетворень Фур'є

$$\left. \begin{aligned} G_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau)e^{-j\omega\tau} d\tau, \\ K_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega)e^{j\omega\tau} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

На підставі (3.42) можна записати

$$K_X(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} G_X(f) df. \quad (3.43)$$

Нам вже відома властивість КФ $K_X(0) = P_X$, враховуючи її, стверджуємо, що функція $G_X(\omega)$ дійсно характеризує розподіл потужності процесу за частотою на інтервалі $(-\infty, \infty)$, а значення функції $G_X(\omega)$ або $G_X(f)$ дорівнює потужності процесу у смугах в 1 Гц навколо частот $+f$ і $-f$. У зв'язку зі сказаним функцію $G_X(\omega)$ називають **спектральною густиною потужності процесу (СГП)**. Таким чином, спектральна густина потужності й кореляційна функція стаціонарного випадкового процесу зв'язані перетвореннями Фур'є. Це твердження відоме як **теорема Хінчина-Вінера**. Розмірність СГП $\text{В}^2/\text{Гц}$, вона збігається з розмірністю енергії й, напевно тому, іноді функцію $G_X(\omega)$ називають енергетичним спектром процесу.

Оскільки функції $K_X(\tau)$ і $G_X(\omega)$ парні, то замість пари перетворень (3.42) можна записати пару косинус-перетворень Фур'є, які, як правило, більш прості в обчисленнях, ніж співвідношення (3.34)

$$\left. \begin{aligned} G_X(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} K_X(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \\ K_X(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_X(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Знаючи функцію $G_X(\omega)$, можна визначити ширину спектра процесу тими самими способами, що і ширину спектра детермінованого сигналу, наприклад, як протяжність області додатних частот, поза якою значення функції не перевищують значення $0,1 \max\{G_X(\omega)\}$. Якщо спектр примикає до нуля, то ширину спектра позначають величиною F_{\max} (рис. 3.4, а), а якщо спектр смуговий, то ширину спектра позначають величиною ΔF (рис. 3.4, б).

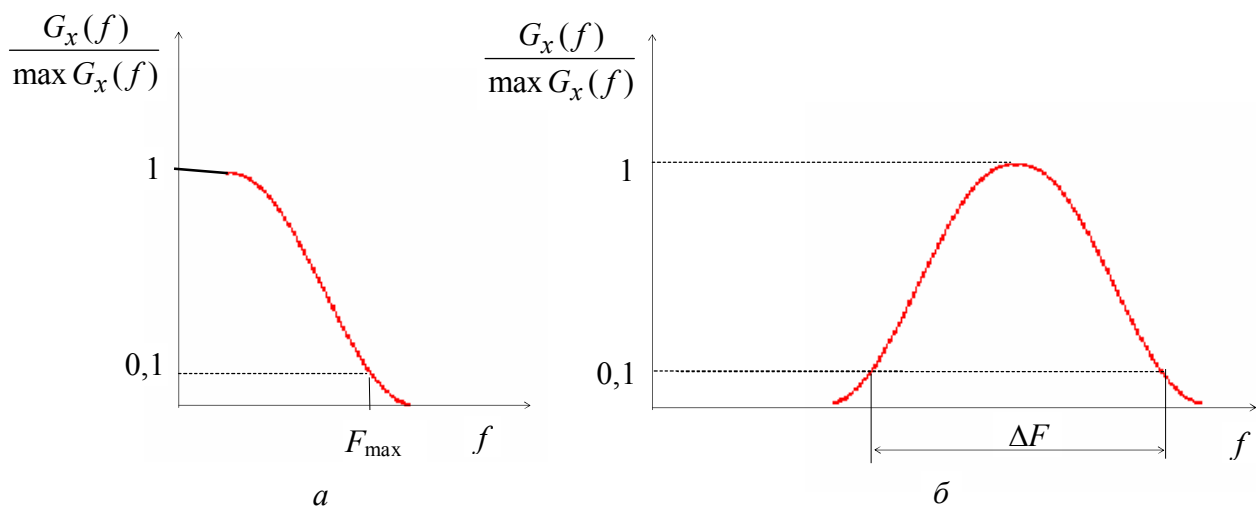


Рисунок 3.4 – Визначення ширини спектра процесу:
а – спектр примикає до нульової частоти; б – смуговий спектр

Оскільки функції $G_X(\omega)$ і $K_X(\tau)$ зв'язані перетворенням Фур'є, то відповідно до властивості перетворення Фур'є зміни масштабу ω і τ , чим менший інтервал кореляції процесу, тим ширший спектр процесу й навпаки. Інакше кажучи, *інтервал кореляції й ширина спектра процесів обернено пропорційні величини, а їх добуток є величиною порядку 0,5*:

$$\tau_k F_{\max} \sim 0,5.$$

Приклад 3.5. Випадковий процес $X(t)$ має КФ, задану у прикладі 3.3. Визначимо СГП процесу $X(t)$, знайдемо ширину спектра процесу $X(t)$ та перевіримо виконання умови $\tau_k F_{\max} \sim 0,5$.

Для визначення СГП знаходимо косинус перетворення Фур'є КФ

$$\begin{aligned} G_X(\omega) &= 2 \int_0^{\infty} \left(2 + 10 \frac{\sin 2\pi 100\tau}{2\pi 100\tau} \right) \cos \omega\tau d\tau = \\ &= 4 \int_0^{\infty} \cos \omega\tau d\tau + 20 \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\pi 100\tau}{2\pi 100\tau} \cos \omega\tau d\tau = 4\pi\delta(\omega) + \begin{cases} 0,05, & |\omega| \leq 2\pi 100, \\ 0, & |\omega| > 2\pi 100. \end{cases} \end{aligned}$$

При визначенні $G_X(\omega)$ враховано, що спектральною густиною константи є дельта-функція з множником 2π , а також використано табличний інтеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x \cos ax}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & |a| \leq 1, \\ 0, & |a| > 1. \end{cases}$$

Легко перевірити правильність отриманого виразу, якщо здійснити його інтегрування в нескінченних межах та порівняти результат з $K_X(0) = 12 \text{ В}^2$ (вираз (3.5))

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_X(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi 100}^{2\pi 100} (4\pi\delta(\omega) + 0,05) d\omega = 2 + 200 \cdot 0,05 = 12 \text{ В}^2.$$

Вираз $G_X(\omega)$ однозначно визначає $F_{\max} = 100 \text{ Гц}$.

Знайдемо добуток інтервалу кореляції та ширини спектра $\tau_k F_{\max} = 100/200 = 0,5$ – результат збігається з очікуваним значенням.

Вправа 3.6. Випадковий процес $X(t)$ має КФ, задану у вправі 3.5. Визначте СГП процесу $X(t)$, знайдіть ширину його спектра, обчисліть добуток $\tau_k F_{\max}$.

3.7 Гауссів випадковий процес

Найчастіше в теорії й техніці зв'язку зустрічається так званий гауссів (або нормальний) випадковий процес. *Випадковий стаціонарний процес $X(t)$ називається гауссовим, якщо його одновимірна й двовимірна густини ймовірності визначаються наступними виразами*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (3.45)$$

$$p_2(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{2\pi\sigma^2 \sqrt{1-R_X^2(\tau)}} \exp\left(-\frac{(x_1-a)^2 - 2R_X(\tau)(x_1-a)(x_2-a) + (x_2-a)^2}{2\sigma^2[1-R_X^2(\tau)]}\right), \quad (3.46)$$

де σ^2 – дисперсія процесу;

a – середнє значення процесу;

$R_X(\tau)$ – значення нормованої кореляційної функції процесу.

Щоб визначити двовимірну густину ймовірностей нормального випадкового стаціонарного процесу, досить знати лише його КФ. Таким чином, *нормальні стаціонарні процеси можуть відрізнятися один від іншого видами КФ й, відповідно, СГП.*

Одновимірна функція розподілу ймовірностей нормального процесу наступна

$$F(x) = 1 - Q\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \quad (3.47)$$

де
$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (3.48)$$

– гауссова Q -функція або доповнення до функції розподілу ймовірностей. Графіки функцій (3.45) і (3.47) наведені на рис. 3.5.

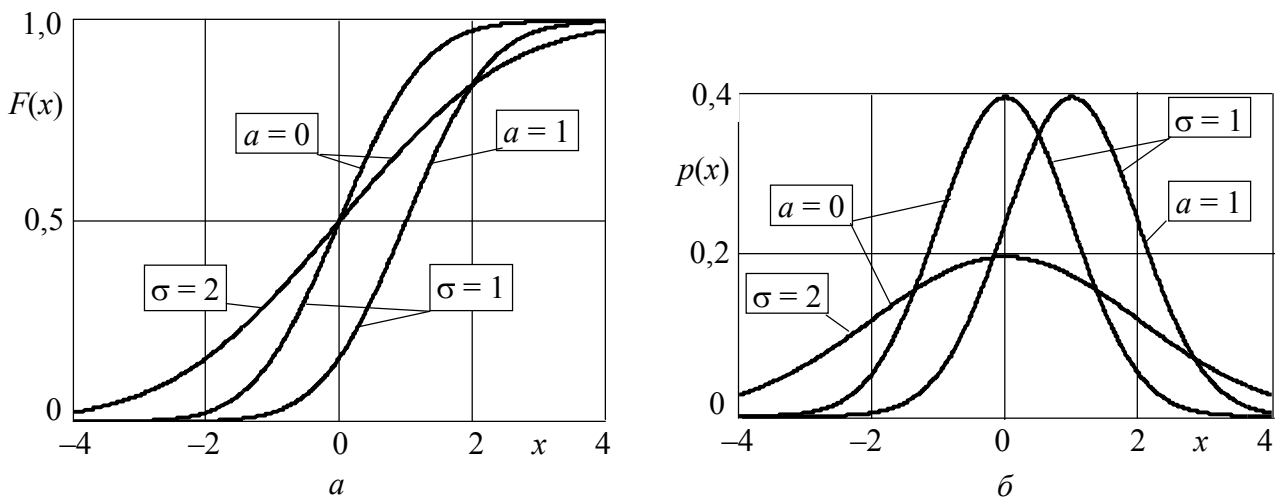


Рисунок 3.5 – Гауссів розподіл:

a – функція розподілу ймовірностей; b – густина ймовірності

Гауссів смуговий процес зручно представити через квадратурні складові

$$X(t) = A(t) \cos(\omega_0 t + \Phi(t)) = A_c(t) \cos \omega_0 t + A_s(t) \sin \omega_0 t = X_c(t) + X_s(t), \quad (3.49)$$

де $A(t)$ і $\Phi(t)$ – обвідна і фаза процесу;

$X_c(t)$ і $X_s(t)$ – квадратурні складові процесу;

ω_0 – деяка частота, що належить смузі частот процесу $X(t)$.

Квадратурні складові $X_c(t)$ і $X_s(t)$ – некорельовані процеси, що мають гауссів розподіл імовірностей, їхні дисперсії однакові й дорівнюють половині дисперсії процесу $X(t)$.

Обвідна $A(t)$ і фаза $\Phi(t)$ також є некорельованими процесами. *Обвідна $A(t)$ має релеєвський розподіл імовірностей* (рис. 3.6)

$$p(a) = \begin{cases} \frac{a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), & a > 0, \\ 0, & a \leq 0; \end{cases}$$

$$F(a) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), & a > 0, \\ 0, & a \leq 0. \end{cases} \quad (3.50)$$

У виразах (3.50) σ^2 – дисперсія процесу $X(t)$. Числові характеристики релеєвського процесу: середнє значення $\overline{A(t)} = \sqrt{\pi/2}\sigma$, дисперсія $D[A(t)] = (2 - \pi/2)\sigma^2$, середня потужність $P_A = 2\sigma^2$.

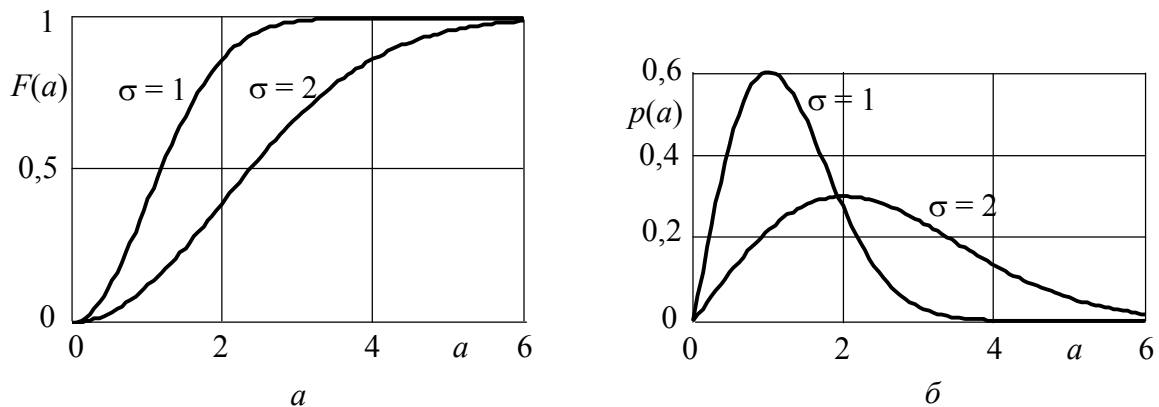


Рисунок 3.6 – Розподіл Релея:
 a – функція розподілу ймовірностей; b – густина ймовірності

Фаза $\Phi(t)$ має рівномірний розподіл ймовірностей на інтервалі $(0, 2\pi)$ (рис. 3.7)

$$p(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ 0, & \varphi < 0, \varphi \geq 2\pi; \end{cases}$$

$$F(\varphi) = \begin{cases} 0, & \varphi < 0, \\ \varphi/2\pi, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ 1, & \varphi \geq 2\pi. \end{cases} \quad (3.51)$$

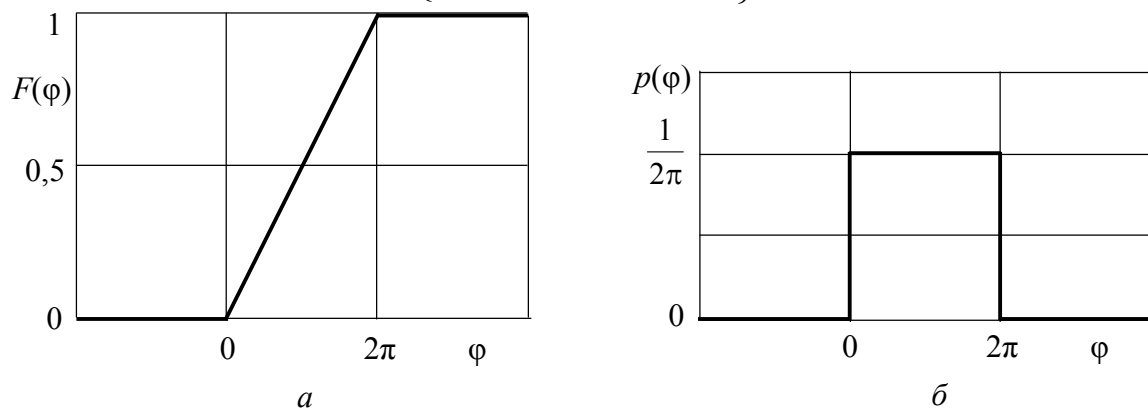


Рисунок 3.7 – Рівномірний розподіл:
 a – функція розподілу ймовірностей; b – густина ймовірності

Тут уважний читач мав звернути увагу, що вище у прикладах 3.1 і 3.2 та вправах 3.1...3.4 використовувався рівномірний розподіл імовірностей, а вирази (3.51) є окремими випадками виразів (3.15) і (3.16).

Вправа 3.7. Визначте числові характеристики фази гауссового смугового процесу. Не забудьте, що одиницями виміру фази (в даному випадку випадкового процесу) є радіани або градуси.

Приклад 3.6. Чисельним моделюванням доведемо, що обвідна гауссового смугового процесу має релеєвський розподіл імовірностей.

Будемо використовувати середовище інженерних та наукових розрахунків Matlab. Задамо ряди незалежних значень квадратурних складових смугового процесу $X_c(t)$ і $X_s(t)$, що мають гауссів розподіл імовірностей з дисперсією 1 В^2 та нульове середнє значення. Не формуючи безпосередньо смуговий процес, за виразом обвідної (2.96) визначимо ряд її значень та побудуємо гістограму (рис. 3.8) – аналог густини ймовірності за обмеженого обсягу значень реалізації випадкового процесу. Порівняємо отриманий результат з очікуваним релеєвським розподілом (тонка суцільна лінія). Також побудуємо гістограми квадратурних складових та впевнимися, що їх розподіл близький до гауссового.

Текст так званого М-файлу, операції в якому описані вище, наведено в додатку А.

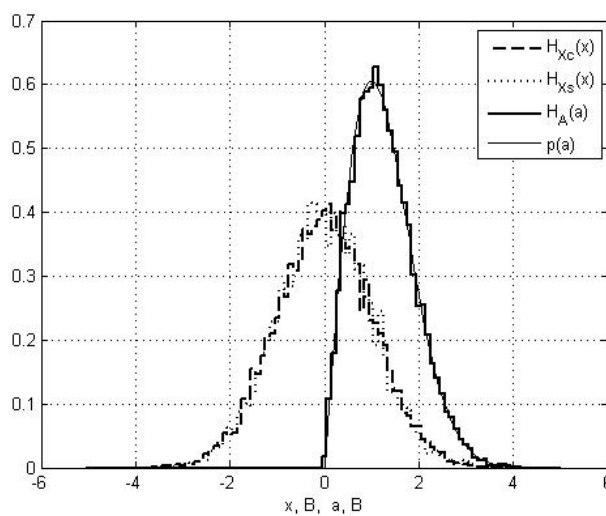


Рисунок 3.8 – Результат вирішення прикладу 3.6

Вправа 3.8. За аналогією вирішення прикладу 3.6 чисельним моделюванням у середовищі Matlab або іншому доведіть, що фаза гауссового смугового процесу має рівномірний розподіл імовірностей.

3.8 Білий шум

Білим шумом називається випадковий процес, СГП якого є постійною величиною

$$G(\omega) = \frac{N_0}{2}, \quad -\infty < \omega < \infty \quad \text{або} \quad G(\omega) = N_0, \quad 0 < \omega < \infty, \quad (3.52)$$

де N_0 – потужність процесу у смузі 1 Гц.

Визначенням (3.52) відповідають графічні залежності, наведені на рис. 3.9.

КФ білого шуму визначається як зворотне перетворення Фур'є від (3.52)

$$K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{N_0}{2} \delta(\tau). \quad (3.53)$$

На рис. 3.10 наведено графік КФ білого шуму.

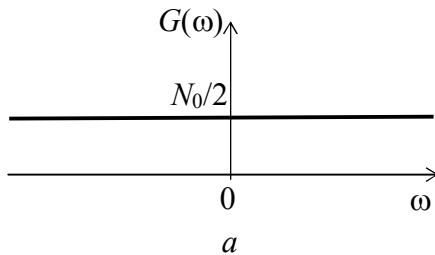


Рисунок 3.9 – Спектральна густина потужності білого шуму: *а* – двосторонній спектр; *б* – односторонній спектр

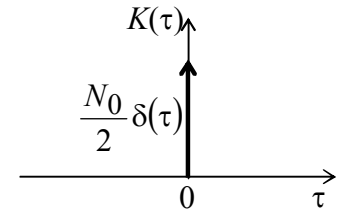
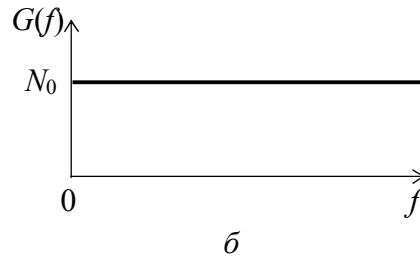


Рисунок 3.10 – Кореляційна функція білого шуму

З виразу (3.53) та рис. 3.10 видно, що інтервал кореляції прямує до нуля, тобто *два значення білого шуму, для яких $\tau \neq 0$, є незалежними*. Очевидно, що білий шум має нескінченну потужність і фізично існувати не може, проте є зручною математичною моделлю, яка часто використовується в теорії і техніці зв'язку.

3.9 Перетворення випадкових процесів лінійними електричними колами

Нагадаємо, що за визначенням **лінійним електричним колом називається таке, для якого виконується принцип суперпозиції – реакція кола на суму дій дорівнює сумі реакцій на кожну дію окремо**.

При дослідженні проходження випадкових процесів через лінійні кола вважається, що відомі статистичні характеристики вхідного випадкового процесу $X(t)$ та передатна функція лінійного кола $H(j\omega)$. Необхідно знайти характеристики вихідного процесу $Y(t)$ (рис. 3.10).

СГП процесу на виході лінійного кола зв'язана з СГП вхідного процесу через квадрат АЧХ кола

$$G_Y(\omega) = G_X(\omega) H^2(\omega). \quad (3.54)$$

Зокрема, якщо вхідний процес – білий шум, то СГП вихідного процесу повторює квадрат АЧХ лінійного кола.

КФ процесу на виході лінійного кола визначається як перетворення Фур'є від СГП процесу

$$K_Y(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_Y(\omega) \cos \omega \tau d\omega. \quad (3.55)$$

Приклад 3.7. Нехай для наочності $X(t)$ – білий шум з однобічною СГП $G_X(f) = N_0$, $0 \leq f < \infty$, подається на вхід ідеального ФНЧ з АЧХ

$$H(f) = \begin{cases} H_0, & 0 \leq f < F_{зр}, \\ 0, & f \geq F_{зр}, \end{cases} \quad (3.56)$$

де $F_{зр}$ – частота зрізу ФНЧ. Визначимо СГП, КФ, інтервал кореляції та середню потужність процесу $Y(t)$.

СГП процесу $Y(t)$:

$$G_Y(f) = G_X(f) \cdot H^2(f) = \begin{cases} N_0 H_0^2, & 0 \leq f < F_{зр}, \\ 0, & f \geq F_{зр}. \end{cases} \quad (3.57)$$

СГП процесу $Y(t)$ показано на рис 3.12, а. Шум з СГП такого виду називають **квазібілим**, оскільки він має частотні складові однакової амплітуди, але в обмеженому діапазоні частот.

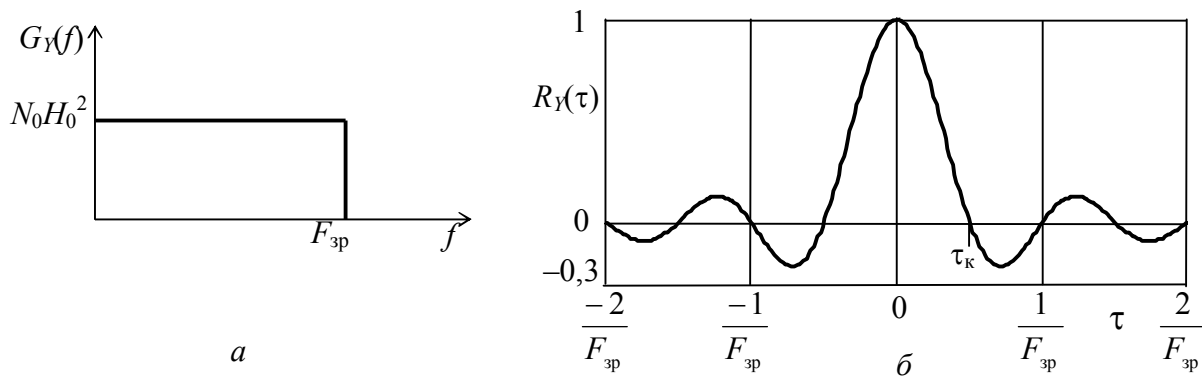


Рисунок 3.12 – Характеристики процесу $Y(t)$ при фільтрації ФНЧ: а – СГП; б – КФ

КФ процесу $Y(t)$:

$$K_Y(\tau) = N_0 H_0^2 F_{зр} \frac{\sin 2\pi F_{зр} \tau}{2\pi F_{зр} \tau}. \quad (3.58)$$

На рис 3,12, б показана нормована КФ $R_Y(\tau) = K_Y(\tau)/K_Y(0)$. Інтервал кореляції процесу $Y(t)$ $\tau_k = 1/(2F_{зр})$.

Середня потужність процесу $Y(t)$:

$$P_Y = \int_0^{\infty} G_Y(f) df = \int_0^{F_{зр}} N_0 H_0^2 df = N_0 H_0^2 F_{зр}. \quad (3.59)$$

В інженерних розрахунках часто виникає задача визначення потужності шуму на виході довільного лінійного кола (неідеального) за умови дії білого шуму з однобічною СГП N_0 на його вході¹. Для легкого розв'язання цієї задачі

¹ Насправді шум є квазібілим, але при цьому займає смугу частот значно ширшу смуги пропускання лінійного кола і тому може трактуватися, як білий.

одноразово визначається так звана **шумова смуга кола**, як інтеграл від квадрата нормованої АЧХ кола

$$F_{\text{ш}} = \int_0^{\infty} \frac{H^2(f)}{H_{\text{max}}^2} df, \quad (3.60)$$

де H_{max} – максимальне значення АЧХ.

За відомої шумової смуги середня потужність P_Y обчислюється за виразом

$$P_Y = N_0 \cdot F_{\text{ш}} \cdot H_{\text{max}}^2. \quad (3.61)$$

У ідеального ФНЧ шумова смуга фільтра $F_{\text{ш}} = F_{\text{зр}}$.

Приклад 3.8. Нехай $X(t)$ – білий шум з двобічною СГП $G_X(f) = N_0/2$, $-\infty \leq f < \infty$, подається на вхід фільтра Баттерворта, нормована АЧХ якого описується виразом

$$H(f) = H_0 \frac{1}{\sqrt{1 + (f/F_{\text{зр}})^{2n}}}, \quad (3.62)$$

де n – порядок фільтра.

Нехай $n = 1$. Визначимо КФ процесу на виході фільтра $Y(t)$ та його середню потужність:

$$\begin{aligned} K_Y(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_Y(\omega) \cos \omega \tau d\omega = 2 \int_0^{\infty} G_Y(f) \cos 2\pi f \tau df = \\ &= N_0 H_0^2 \int_0^{\infty} \frac{\cos 2\pi f \tau}{1 + (f/F_{\text{зр}})^2} df = N_0 H_0^2 F_{\text{зр}} \frac{\pi}{2} e^{-2\pi F_{\text{зр}} |\tau|}, \end{aligned}$$

$$P_Y = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G_Y(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} G_Y(f) df = N_0 H_0^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + (f/F_{\text{зр}})^2} df = N_0 H_0^2 F_{\text{зр}} \frac{\pi}{2}.$$

Для інтегрування використані такі табличні інтеграли

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}, \quad \int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a}.$$

Для перевірки правильності отриманих результатів можна впевнитись, що виконується властивість КФ $K_X(0) = P_X$.

Вправа 3.9. Визначте шумову смугу фільтра, заданого у прикладі 3.8, та переконайтесь, що середня потужність, знайдена за її допомогою, буде збігатись з отриманим вище результатом.

Вправа 3.10. Побудуйте графіки КФ і СГП процесу на виході фільтра, заданого в прикладі 3.8, та визначте за ними ширину спектра і інтервал кореляції. Перевірте, чи є добуток $\tau_k F_{\text{max}}$ величиною порядку 0,5.

Щодо розподілу ймовірностей процесу, що пройшов через лінійне коло, відомо наступне. Якщо на вході лінійного кола процес гауссів, то вихідний про-

цес також гауссів – вид розподілу не змінюється, змінюються тільки його параметри. Якщо на вході кола процес не гауссів, то вид розподілу змінюється, і вихідний процес має розподіл імовірностей більш близький до гауссового, ніж розподіл вхідного процесу.

Фільтрація є вузькосмуговою, якщо смуга пропускання кола значно менша ширини спектра вхідного процесу. При вузькосмуговій фільтрації має місце явище **нормалізації процесу**, що полягає в наступному – незалежно від виду розподілу вхідного процесу, розподіл імовірностей процесу на виході кола є гауссовим. Доказ цього явища базується на центральній граничній теоремі теорії ймовірностей.

Приклад 3.9. Чисельним моделюванням доведемо, що розподіл імовірностей миттєвих значень процесу на виході лінійного кола (ФНЧ) тим ближчий до гауссового, чим більшим є відношення ширини спектра процесу на його вході до смуги пропускання кола.

Нехай ФНЧ є фільтром Баттерворта другого порядку, а випадковий процес на його вході – квазібілий шум з рівномірним розподілом в діапазоні значень $(0, 2)$.

Як і у прикладі 3.6, будемо використовувати середовище Matlab. Задамо послідовність незалежних значень вхідного процесу $X(t)$. Тричі розраховуючи параметри фільтра з частотою зрізу 0,5; 0,25 та 0,1 від ширини спектра вхідного процесу F_X відповідно, виконаємо фільтрацію тієї самої послідовності значень вхідного процесу. Побудуємо гістограми усіх процесів (рис. 3.13).

Текст М-файла, операції в якому описані вище, наведено в додатку Б.

Вправа 3.11. За аналогією до прикладу 3.9 чисельним моделюванням в середовищі Matlab або іншому, доведіть, що за вузькосмугової фільтрації буде спостерігатися нормалізація випадкового процесу з довільним розподілом миттєвих значень, наприклад, з релеєвським розподілом.

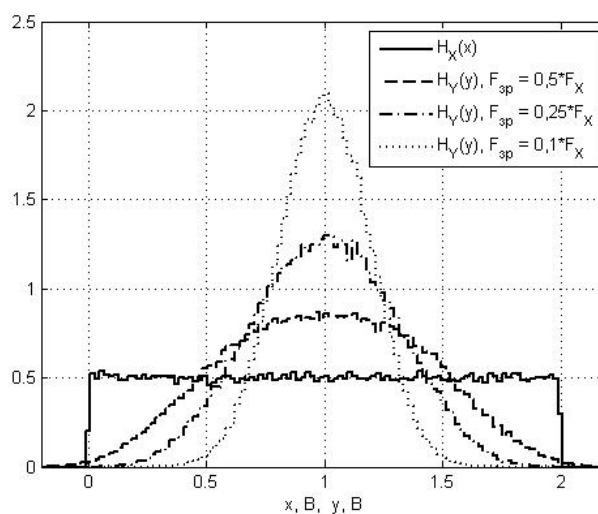


Рисунок 3.13 – Результат вирішення прикладу 3.9

3.10 Перетворення випадкових процесів нелінійними електричними колами

Тут розглядаються лише **безінерційні електричні кола**, тобто такі, реакція яких на дію миттєво припиняється після її закінчення. Коло називається **нелінійним**, якщо для нього не виконується принцип суперпозиції. Варто відзначити, що присутність одного нелінійного елементу робить усе електричне коло нелінійним.

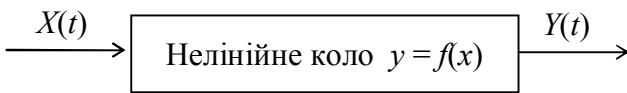


Рисунок 3.14 – До вивчення проходження випадкових процесів через нелінійні кола

При дослідженні проходження випадкових процесів через нелінійні безінерційні кола вважається, що відомі статистичні характеристики вхідного процесу $X(t)$ і залежність $y = f(x)$ між миттєвими значеннями вхідного й вихідного процесів. Необхідно знайти

характеристики вихідного процесу $Y(t)$ (рис. 3.14).

Найпоширенішою функцією $f(x)$ для опису нелінійних перетворень є поліном степеня n

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad (3.62)$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – коефіцієнти полінома.

Коефіцієнти й степені полінома визначаються в результаті апроксимації характеристики реального електричного кола або виходячи із деяких припущень. Крім поліноміальної залежності (3.54) використовуються й інші залежності.

Кожна із складових (3.62) вносить свій внесок у формування значень реакції нелінійного кола на вхідну дію. Так, a_0 описує появу постійної складової при $x = 0$; a_1x – лінійний доданок, що забезпечує пропорційне відображення значень x в y ; a_2x^2 – квадратичний доданок; a_3x^3 – кубічний доданок і т.д. забезпечують внески, пропорційні x^2, x^3 і т.д.

Найпростіша дія – гармонічне коливання $x(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t$. У цьому випадку сигнал на виході нелінійного кола буде наступним:

$$y(t) = a_0 + a_1 A_1 \cos 2\pi f_1 t + a_2 A_1^2 \cos^2 2\pi f_1 t + \dots + a_n A_1^n \cos^n 2\pi f_1 t. \quad (3.63)$$

Якщо скористатися формулами кратних аргументів, то отримаємо

$$y(t) = Y_0 + Y_1 \cos 2\pi f_1 t + Y_2 \cos 2\pi 2f_1 t + \dots + Y_n \cos 2\pi n f_1 t, \quad (3.64)$$

де Y_0 – постійна складова реакції;

Y_1, Y_2, \dots, Y_n – амплітуди першої, другої, ..., n -ї гармонік реакції.

Таким чином, реакція на гармонічну дію містить постійну складову й гармоніки частоти дії – це принципово відрізняє нелінійні кола від лінійних, в яких нові складові не виникають.

У випадку бігармонічної дії

$$x(t) = A_1 \cos 2\pi f_1 t + A_2 \cos 2\pi f_2 t \quad (3.65)$$

підхід до визначення реакції такий самий, як і використаний вище – вираз для $x(t)$ підставляється в поліном (3.62). При зведенні суми (3.65) у квадрат, куб і т.д. з'являються степені косинусоїд частот f_1 і f_2 , що після перетворень дає вираз виду (3.64) для коливань частот f_1 і f_2 . Але з'являються ще й добутки косинусоїд й їхніх степенів. Добуток косинусоїд приводить до появи складових сумарних і різницевих частот.

У загальному випадку будуть мати місце **складові комбінаційних частот**

$$f_{\text{комб}} = |pf_1 \pm qf_2|, \quad (3.66)$$

де p, q – цілі числа 0, 1, 2, ..., але такі, що $p + q \leq n$. Їхня сума $N = p + q$ називається *порядком комбінаційної частоти*.

Так, якщо $n = 3$, то у спектрі реакції можуть бути складові частот $f_1, f_2, 2f_1, 2f_2, |f_1 \pm f_2|, 3f_1, 3f_2, |2f_1 \pm f_2|, |f_1 \pm 2f_2|$ і постійна складова. Амплітуди складових залежать від амплітуд A_1 і A_2 і коефіцієнтів полінома (3.62). Якщо амплітуди і фази складових дії на коло є випадковими, то, відповідно, випадковими будуть амплітуди і фази складових на комбінаційних частотах реакції.

Визначити СГП вихідного процесу $G_Y(f)$ можна в такий спосіб: визначити спочатку КФ вихідного процесу $K_Y(\tau)$, а потім виконати над нею перетворення Фур'є. Виходячи з визначення КФ

$$K_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1) f(x_2) p_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2, \quad (3.67)$$

де $f(x)$ – функція, що описує нелінійне коло;

$p_2(x_1, x_2, \tau)$ – двовимірна густина ймовірності вхідного процесу.

При проходженні випадкового процесу через нелінійне коло вид розподілу миттєвих значень суттєво змінюється.

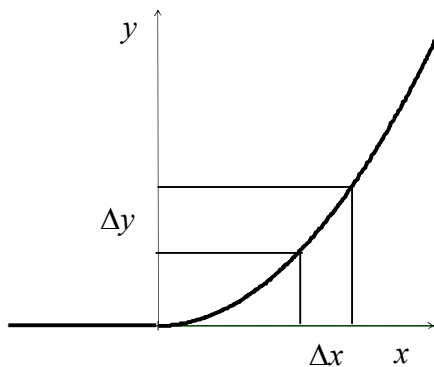


Рисунок 3.15 – Характеристика нелінійного кола

На рис. 3.15 показано довільну нелінійну залежність $y = f(x)$. Всі значення процесу $X(t)$, що попадають в інтервал Δx , відображаються в значення процесу $Y(t)$, що попадають в інтервал Δy . Тому справедлива рівність $p(x)\Delta x \approx p(y)\Delta y$. Переходячи до нескінченно малих приростів dx і dy , отримаємо, що

$$p(y) = \frac{p(x)}{|dy / dx|}. \quad (3.68)$$

Це і є загальне правило розрахунку густини ймовірності вихідного процесу для електричних кіл з однозначними залежностями між x і y .

Методи визначення характеристик вихідного процесу викладені. Звичайно, у конкретних випадках можуть зустрітися математичні труднощі.

Приклад 3.10. Визначимо складові комбінаційних частот на виході нелінійного кола, характеристика якого описується поліномом третьої степені з ко-

ефіцієнтами $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, якщо на вході цього кола діє випадковий процес, що є бігармонічним коливанням з частотами $f_1 = 100$ Гц, $f_2 = 230$ Гц, нульовими початковими фазами та амплітудами $A_1 = A_2 = 1$ В. Побудуємо графіки спектрів процесів на вході і виході нелінійного кола.

Як було вказано вище, для знаходження складових реакції нелінійного кола необхідно у вираз полінома (3.54) підставити вираз дії на коло (3.57). Для поліному з $n = 3$ результат розв'язання такої задачі зручно представити табл. 3.1.

Для заданих значень коефіцієнтів поліному та амплітуд дії, значення частот та амплітуд складових комбінаційних частот, визначені за табл. 3.1 і зведені в табл. 3.2

На рис. 3.16 наведено графік спектра дії на нелінійне коло $G_X(f)$ та графік спектра реакції нелінійного кола $G_Y(f)$, побудований за значеннями табл. 3.2.

Таблиця 3.1 – Амплітуди комбінаційних частот у випадку $n = 3$

Порядок частоти N	Частота $f_{\text{комб}}$	Амплітуди складових вихідного коливання, які викликані окремими доданками поліному		
		$a_1 x$	$a_2 x^2$	$a_3 x^3$
0	0	–	$0,5a_2(A_1^2 + A_2^2)$	–
1	f_1	$a_1 A_1$	–	$1,5a_3 A_1(A_1^2/2 + A_2^2)$
	f_2	$a_1 A_2$	–	$1,5a_3 A_2(A_1^2 + A_2^2/2)$
2	$2f_1$	–	$0,5a_2 A_1^2$	–
	$2f_2$	–	$0,5a_2 A_2^2$	–
	$ f_1 \pm f_2 $	–	$a_2 A_1 A_2$	–
3	$3f_1$	–	–	$0,25a_3 A_1^3$
	$3f_2$	–	–	$0,25a_3 A_2^3$
	$ f_1 \pm 2f_2 $	–	–	$0,75a_3 A_1 A_2^2$
	$ 2f_1 \pm f_2 $	–	–	$0,75a_3 A_1^2 A_2$

Таблиця 3.2 – Результат вирішення прикладу 3.10

Порядок $N = p + q$	0	1	2		3		
$f_{\text{комб}}$	0	f_1, f_2	$2f_1, 2f_2$	$ f_1 \pm f_2 $	$3f_1, 3f_2$	$ f_1 \pm 2f_2 $	$ 2f_1 \pm f_2 $
Числове значення $f_{\text{комб}}, \text{Гц}$	0	100, 230	200, 460	330, 130	300, 690	460, 30	560, 360
$Y_{pq}, \text{В}$	1	3,25	0,5	1	0,25	0,75	0,75

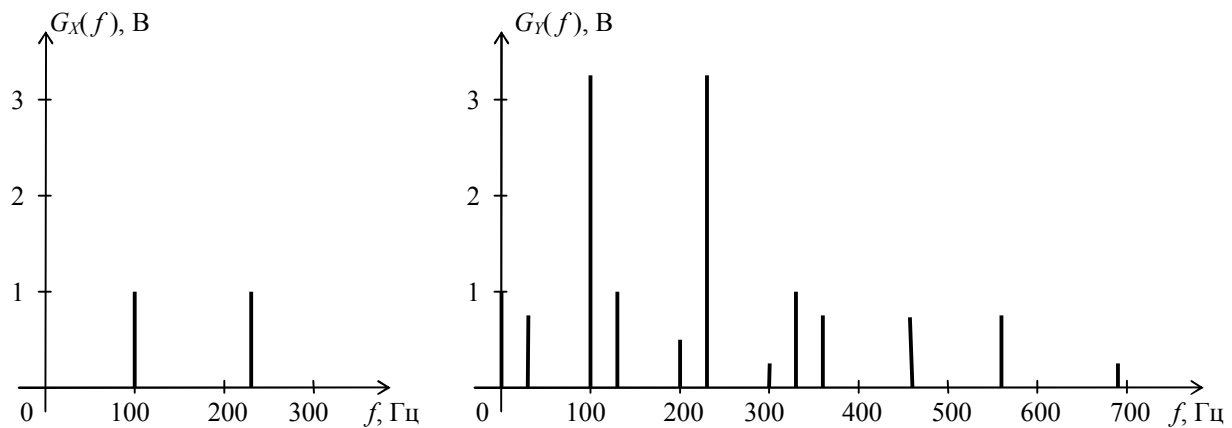


Рисунок 3.16 – Результат вирішення прикладу 3.10

Вправа 3.12. Доведіть значення амплітуд складових вихідного коливання, які викликані окремими доданками поліному, що наведені в табл. 3.1.

Вправа 3.13. Розв'яжіть задачу, аналогічну розглянутій в прикладі 3.10, за умови, що $f_1 = 75$ Гц, $f_2 = 150$ Гц, $A_1 = 0,5$ В, $A_2 = 1,5$ В.

Контрольні питання до розділу 3

1. Дайте визначення випадкової функції і випадкового процесу.
2. Дайте визначення реалізації і ансамблю реалізацій випадкового процесу.
3. В чому сенс статистичного підходу до опису випадкових процесів?
4. Дайте визначення ймовірнісних характеристик випадкових процесів. Якими властивостями вони володіють?
5. Який процес називають стаціонарним? Запишіть вирази, за яким визначаються числові характеристики такого процесу.
6. Дайте визначення кореляційної функції випадкового процесу. Якими властивостями вона володіє?
7. Яким чином грубо описують кореляційні зв'язки між значеннями випадкового процесу в різні моменти часу?
8. Який процес називають ергодичним? Запишіть вирази, за яким визначаються числові характеристики і КФ такого процесу.
9. Що називають спектральною густиною потужності випадкового процесу?
10. Сформулюйте теорему Хінчина-Вінера, запишіть відповідні математичні вирази.
11. Дайте визначення гауссового (нормального) випадкового процесу.
12. Який розподіл ймовірностей мають обвідна і фаза смугового нормального процесу?
13. Дайте визначення білого та квазібілого шуму. У чому полягає відмінність кореляційних властивостей цих шумів?

14. Дайте визначення лінійного кола. Як описують такі кола?
15. Як визначити СГП, КФ і середню потужність процесу на виході лінійного кола?
16. Дайте визначення шумової смуги лінійного кола. З якою метою введена така характеристика кола?
17. Як лінійні перетворення впливають на вид розподілу миттєвих значень випадкового процесу?
18. Що називається нормалізацією випадкового процесу, за яких умов вона відбувається?
19. Дайте визначення нелінійного безінерційного кола. Як описують такі кола?
20. Що принципово відрізняє нелінійні кола від лінійних?
21. Як нелінійні перетворення впливають на вид розподілу миттєвих значень випадкового процесу?
22. Який розподіл миттєвих значень і СГП процесу на виході нелінійного безінерційного кола?

4 СИГНАЛИ АНАЛОГОВИХ ВИДІВ МОДУЛЯЦІЇ

4.1 Загальні відомості про аналогову модуляцію

У більшості систем передавання первинні сигнали електрозв'язку не можуть бути безпосередньо переданими каналами зв'язку без перетворення в інші сигнали. Перетворення мають на меті узгодити характеристики сигналів з характеристиками каналів зв'язку. Одним з таких перетворень є модуляція.

Розрізняють аналогову модуляцію, якщо сигнал, що модулює, неперервний, і цифрову модуляцію, якщо сигнал, що модулює, цифровий. У цьому розділі розглядається аналогова модуляція.

Аналогова модуляція – це процес зміни одного з параметрів переносника $u_{\text{пер}}(t)$ пропорційно значенням модулюючого сигналу $b(t)$. **Переносник** – це допоміжне гармонічне коливання, необхідне для виконання процесу модуляції

$$u_{\text{пер}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0). \quad (4.1)$$

У такого коливання під час модуляції може змінюватися параметр: амплітуда, частота або початкова фаза. *Назва параметра, що змінюється, визначає назву модуляції (амплітудна, фазова, частотна).*

При розгляді аналогових видів модуляції будемо вважати, що сигнал $b(t)$ – це первинний сигнал електрозв'язку $b(t)$, який:

- має спектр, обмежений частотою F_{max} ;
- є нормованим – максимальне за модулем значення дорівнює 1: $|b(t)|_{\text{max}} = 1$;
- має нульове середнє значення – $\overline{b(t)} = 0$.

Характеристикою сигналу $b(t)$ є **коефіцієнт амплітуди** K_A , що визначає, у скільки разів максимальне за модулем значення сигналу перевищує його середнє квадратичне значення (корінь із середньої потужності P_b):

$$K_A = \frac{|b(t)|_{\text{max}}}{\sqrt{P_b}}. \quad (4.2)$$

Якщо сигнал нормований зазначеним вище способом, то

$$P_b = 1/K_A^2. \quad (4.3)$$

4.2 Амплітудна модуляція і її різновиди

При амплітудній модуляції (АМ) приріст амплітуди гармонічного переносника пропорційний миттєвим значенням модулюючого сигналу тобто амплітуда модульованого сигналу

$$A(t) = A_0 + \Delta A b(t), \quad (4.4)$$

де ΔA – коефіцієнт пропорційності, який вибирають так, щоб амплітуда $A(t)$ не набувала від’ємних значень. Оскільки $|b(t)|_{\max} = 1$, то ΔA визначає найбільший за модулем приріст амплітуди переносника. Щоб амплітуда $A(t)$ не набувала від’ємних значень, необхідно вибрати $\Delta A \leq A_0$. Частота й початкова фаза переносника в процесі АМ залишаються незмінними.

Зручно перейти до відносного максимального приросту амплітуди – **коефіцієнту амплітудної модуляції**

$$m_{AM} = \Delta A / A_0. \quad (4.5)$$

Зрозуміло, що

$$0 < m_{AM} \leq 1. \quad (4.6)$$

Аналітичний вираз АМ сигналу у випадку довільного модулюючого сигналу має вигляд

$$s_{AM}(t) = A_0[1 + m_{AM}b(t)]\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0). \quad (4.7)$$

Часова діаграма АМ сигналу наведена на рис. 4.1, з якого бачимо, що об’єднана модульованого сигналу повторює форму сигналу, що модулює.

Перейдемо до визначення спектральних характеристик АМ сигналу. Нехай модулюючий сигнал $b(t)$ є гармонічним коливанням частоти $F < f_0$. Запишемо вираз для АМ сигналу за такого $b(t)$

$$s_{AM}(t) = A_0[1 + m_{AM}\cos(2\pi Ft)]\cos(2\pi f_0 t + \varphi_0). \quad (4.8)$$

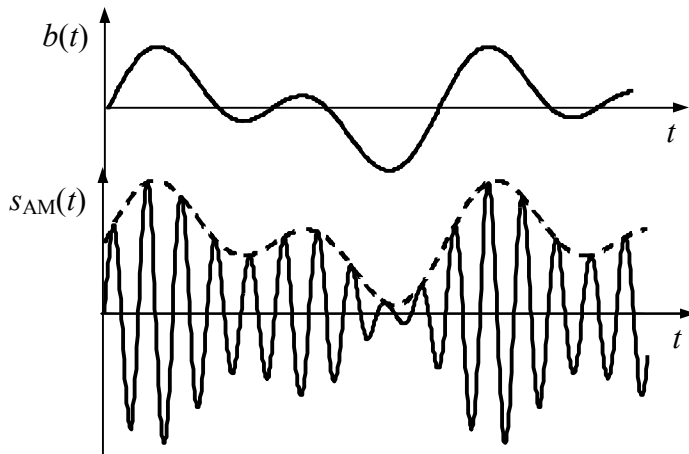


Рисунок 4.1 – Сигнал, що модулює, $b(t)$ і модульований сигнал $s_{AM}(t)$

Якщо використати тригонометричну формулу добутку косинусів, то з виразу (4.8) отримаємо

$$s_{AM}(t) = A_0\cos(2\pi f_0 t) + 0,5A_0m_{AM}\cos[2\pi(f_0 + F)t] + 0,5A_0m_{AM}\cos[2\pi(f_0 - F)t]. \quad (4.9)$$

З формули (4.9) випливає, що спектр АМ сигналу за одногонального $b(t)$ містить три гармонічних коливання: із частотою переносника (несівного коливання) f_0 ; верхнє бічне коливання із частотою $f_0 + F$ і нижнє бічне коливання із частотою $f_0 - F$.

Амплітудний спектр розглянутого АМ сигналу наведено на рис. 4.2. Амплітуди бічних коливань однакові й навіть для $m_{AM} = 1$ не перевищують половини амплітуди переносника A_0 .

Перейдемо до розгляду спектра АМ сигналу при складному сигналі, що модулює, – це буде значною мірою відповідати реальним сигналам електрозв’язку. Складний сигнал $b(t)$ має скінченну або нескінченну суму гармонічних складових. Кожна складова викликає появу у спектрі модульованого сигналу

двох складових – сумарної й різницевої частот. Їхні сукупності створюють відповідно верхню й нижню бічні смуги частот.

На рис. 4.3 показано довільний амплітудний спектр модулюючого сигналу і відповідного йому амплітудного спектра сигналу АМ, що складається з гармонічного колювання частоти переносника, верхньої бічної смуги частот (ВБС) і нижньої бічної смуги частот (НБС). При цьому ВБС є масштабною копією спектра модулюючого сигналу зсунутого за частотою на величину f_0 . НБС є дзеркальним відображенням ВБС відносно частоти переносника f_0 . З рис. 4.3 випливає важливий результат: **ширина спектра АМ сигналу $\Delta F_{\text{АМ}}$ дорівнює подвоєному значенню максимальної частоти F_{max} спектра модулюючого сигналу тобто**

$$\Delta F_{\text{АМ}} = 2F_{\text{max}}. \quad (4.10)$$

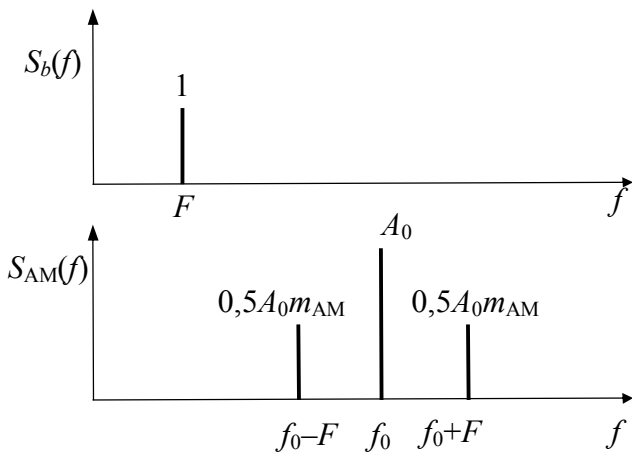


Рисунок 4.2 – Амплітудні спектри однотонального модулюючого сигналу і відповідного АМ сигналу

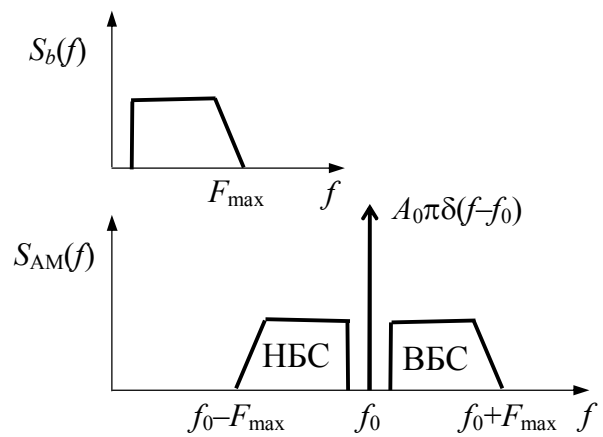


Рисунок 4.3 – Амплітудні спектри модулюючого сигналу і сигналу АМ

З виразу (4.7) знайдемо середню потужність сигналу АМ

$$P_{\text{АМ}} = \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2 m_{\text{АМ}}^2 P_b}{2}, \quad (4.11)$$

де перший доданок – це середня потужність переносника, а другий доданок – це середня потужність бічних смуг. Враховуючи вираз (4.3), знайдемо відношення потужності бічних смуг до потужності сигналу АМ

$$\frac{P_{\text{біч}}}{P_{\text{АМ}}} = \frac{m_{\text{АМ}}^2}{K_A^2 + m_{\text{АМ}}^2}. \quad (4.12)$$

Якщо прийняти максимально можливе значення $m_{\text{АМ}} = 1$, а значення коефіцієнта амплітуди модулюючого сигналу $K_A = 5$ (розмовний сигнал), то частка потужності бічних смуг $P_{\text{біч}}/P_{\text{АМ}} = 0,04$ або 4%.

Отже, основна частка потужності АМ сигналу витрачається на коливання частоти переносника, хоча це коливання інформації не несе, оскільки його рівень у процесі модуляції залишається незмінним – інформація міститься в бічних смугах частот. Тому доцільно сформувати сигнал зі спектром, що скла-

дається лише із двох бічних смуг частот (коливання частоти переносника відсутнє), такий сигнал називається сигналом балансної модуляції (БМ).

Балансною називається такий вид модуляції, коли модульованим сигналом є добуток модулюючого сигналу $b(t)$ і переносника. Аналітичний вираз сигналу балансної модуляції (БМ) має вигляд

$$s_{\text{БМ}}(t) = A_0 b(t) \cos(2\pi f_0 t). \quad (4.13)$$

Часові діаграми модулюючого сигналу й модульованого сигналу наведені на рис. 4.4. З рис. 4.4 видно, що обвідна сигналу БМ $A(t) = A_0 |b(t)|$ (вона показана штриховою лінією) повторює не сам модулюючий сигнал а його модуль.

Порівнюючи математичні вирази, які описують АМ сигнал (4.7) і БМ сигнал (4.13), можна очікувати, що спектр БМ сигналу відрізняється від спектра АМ сигналу відсутністю коливання частоти переносника.

На рис. 4.5 показано довільний амплітудний спектр модулюючого сигналу і відповідного йому амплітудного спектра БМ сигналу, що складається з ВБС і НБС. Метод побудови бічних смуг той самий, що і при АМ.

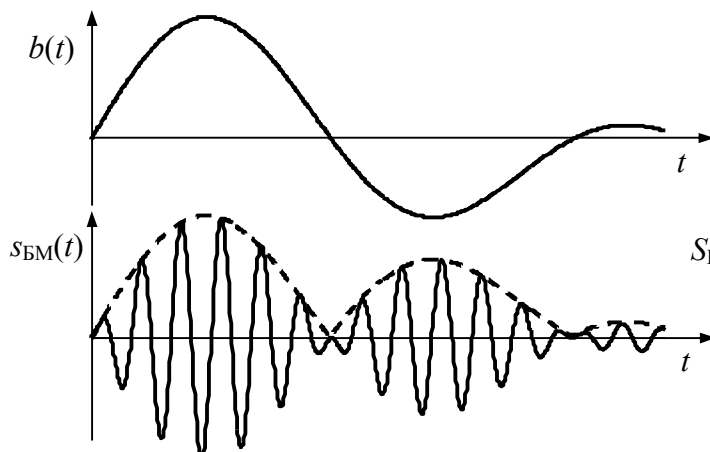


Рисунок 4.4 – Модулюючий сигнал $b(t)$ і модульований сигнал $s_{\text{БМ}}(t)$

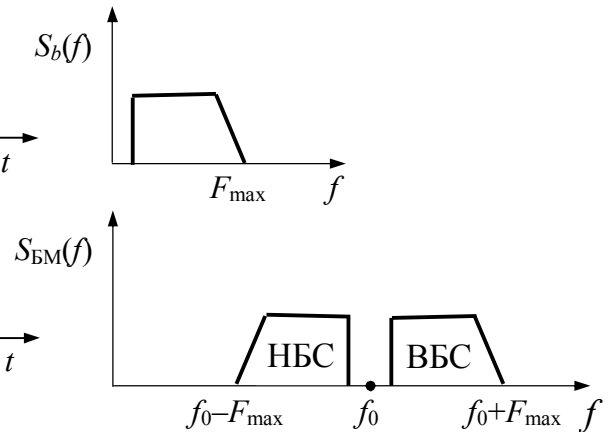


Рисунок 4.5 – Амплітудні спектри модулюючого сигналу і сигналу БМ

Відсутність у спектрі складової на частоті переносника не впливає на його ширину і, відповідно, **ширина спектра БМ сигналу** така сама, як і ширина спектра АМ сигналу

$$\Delta F_{\text{БМ}} = 2F_{\text{max}}. \quad (4.14)$$

Отже, важливою перевагою БМ сигналів порівняно із сигналами АМ є підвищена ефективність використання потужності передавача, оскільки не витрачається значна частка потужності сигналу на несівне коливання, що має місце у спектрах АМ сигналів.

Без втрат відомостей про сигнал $b(t)$ можна вилучити одну бічну смугу частот (верхню або нижню) зі спектра сигналу БМ. При цьому отримаємо сигнал односмугової модуляції (ОМ).

У загальному випадку (для довільного сигналу $b(t)$) сигнал ОМ записується

$$s_{\text{OM}}(t) = A_0 b(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \mp A_0 \tilde{b}(t) \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0), \quad (4.15)$$

де знак “–” ставиться до опису сигналу з верхньою бічною смугою частот, а знак “+” – з нижньою бічною смугою; $\tilde{b}(t)$ – перетворення Гільберта сигналу $b(t)$.

На рис. 4.6 наведені часові діаграми довільного модулюючого сигналу $b(t)$, розрахованого для нього перетворення Гільберта $\tilde{b}(t)$ сигналу і ОМ сигналу. З рис. 4.6 видно, що обвідна сигналу ОМ описується виразом $A(t) = A_0 \sqrt{b^2(t) + \tilde{b}^2(t)}$ (показана штриховою лінією) і, відповідно, також не повторює модулюючий сигнал.

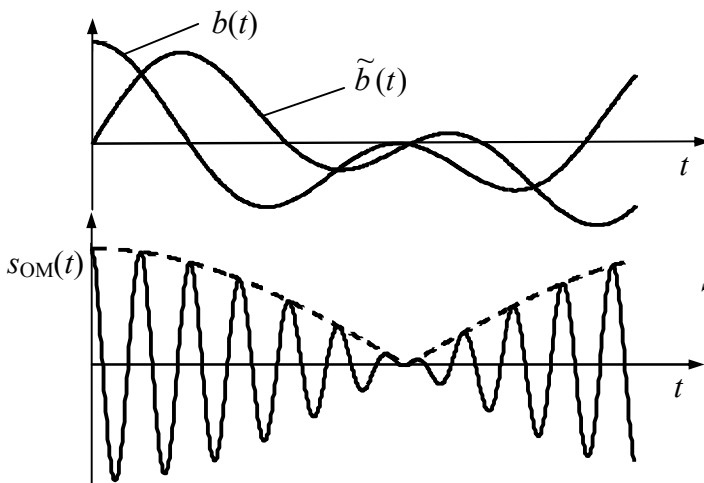


Рисунок 4.6 – Модулюючий сигнал $b(t)$ і модульований сигнал $s_{\text{OM}}(t)$

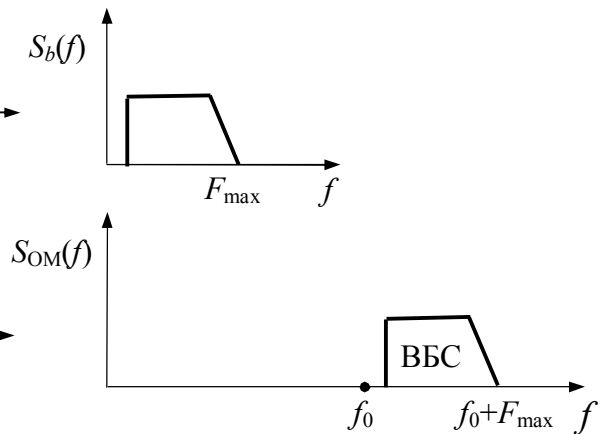


Рисунок 4.7 – Амплітудні спектри модулюючого сигналу і сигналу ОМ

На рис. 4.7 наведено амплітудний спектр ОМ сигналу, отриманий зі спектра БМ сигналу шляхом вилучення нижньої бічної смуги частот (можна вилучити верхню бічну смугу частот). Отже, **односмуговою називається такий вид модуляції**, коли спектр модульованого сигналу збігається зі спектром модулюючого сигналу зсунутим на частоту переносника, або є інверсією зсунутого спектра відносно частоти переносника.

З рис. 4.7 випливає, що **ширина спектра ОМ сигналу ΔF_{OM} дорівнює максимальній частоті спектра модулюючого сигналу**

$$\Delta F_{\text{OM}} = F_{\text{max}}. \quad (4.16)$$

Важливою перевагою ОМ сигналів порівняно з БМ і АМ сигналами є зменшена вдвічі ширина спектра модульованого сигналу, що дозволяє вдвічі збільшити кількість сигналів у заданій смузі частот каналу зв'язку. Тому ОМ широко застосовується у системах багатоканального зв'язку з частотним поділом. ОМ – це єдиний вид аналогової модуляції, коли при модуляції не розширюється смуга частот сигналу. Крім розглянутої “чистої” ОМ у системах зв'язку знайшли використання сигнали ОМ із залишком несівної (з пілот-сигналом) й із частковим придушенням однієї бічної смуги частот. Це створює певні зручності при формуванні й детектуванні модульованих сигналів.

Вправа 4.1. Переносник, що має частоту $f_0 = 1000$ Гц, модулюється первинним сигналом, який задано виразом $b(t) = 0,5\sin(2\pi 75t) + 0,2\sin(2\pi 125t) + 0,3\sin(2\pi 200t)$. Побудуйте спектри первинного сигналу і спектри АМ, БМ і ОМ сигналів (покласти $m_{\text{АМ}} = 1$). Визначте ширину спектрів модульованих сигналів та покажіть її на графіках спектрів.

4.3 Частотна й фазова модуляція

Ці два методи модуляції відносяться до **кутових видів модуляції** (КМ) – амплітуда модульованого сигналу залишається незмінною, а аргумент (кут) тригонометричної функції-переносника $u_{\text{пер}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0)$ отримує прирости $\Delta\varphi(t)$, обумовлені процесом модуляції. Тому сигнал КМ можна записати

$$u_{\text{КМ}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \Delta\varphi(t) + \varphi_0) = A_0 \cos\Phi(t). \quad (4.17)$$

Функцію $\Phi(t)$ називають кутом, повною фазою, миттєвою фазою або просто фазою сигналу, а φ_0 – початковою фазою сигналу. Миттєва частота сигналу при заданій функції $\Phi(t)$ визначається

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d(\Delta\varphi(t))}{dt} = f_0 + \Delta f(t), \quad (4.18)$$

$$\text{де} \quad \Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d(\Delta\varphi(t))}{dt} \quad (4.19)$$

– *приріст частоти*.

У переносника $u_{\text{пер}}(t)$ миттєва частота $f(t) = f_0$ – константа, а миттєва фаза лінійно залежить від часу: $\Phi(t) = 2\pi f_0 t + \varphi_0$.

При заданій функції $f(t)$ миттєва фаза сигналу визначається

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t 2\pi f(t) dt + \varphi_0 = 2\pi \int_{-\infty}^t (f_0 + \Delta f(t)) dt + \varphi_0 = 2\pi f_0 t + 2\pi \int_{-\infty}^t \Delta f(t) dt + \varphi_0, \quad (4.20)$$

тобто, *приріст фази*

$$\Delta\varphi(t) = 2\pi \int_{-\infty}^t \Delta f(t) dt. \quad (4.21)$$

Початкову фазу φ_0 можна розглядати як постійну інтегрування.

При **фазовій модуляції (ФМ)** *приріст фази пропорційний миттєвим значенням сигналу, що модулює*

$$\Delta\varphi(t) = \Delta\varphi_d b(t), \quad (4.22)$$

де $\Delta\varphi_d$ – коефіцієнт пропорційності, що називається *девіацією фази*. Оскільки максимальне за модулем значення $|b(t)|_{\text{max}} = 1$, то **девіація фази при ФМ** – це найбільше відхилення фази від лінійної залежності в часі.

Математичний опис сигналу ФМ

$$s_{\text{ФМ}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \Delta\varphi_d b(t) + \varphi_0). \quad (4.23)$$

Під час фазової модуляції миттєва частота залежить від модулюючого сигналу наступним чином

$$\Delta f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{d(\Delta\varphi_d b(t))}{dt} = \frac{\Delta\varphi_d}{2\pi} \cdot \frac{d(b(t))}{dt}. \quad (4.24)$$

При частотній модуляції (ЧМ) приріст частоти пропорційний миттєвим значенням модулюючого сигналу

$$\Delta f(t) = \Delta f_d b(t), \quad (4.25)$$

де Δf_d – коефіцієнт пропорційності, що називається **девіацією частоти** й визначає максимальне відхилення миттєвої частоти модульованого сигналу від частоти переносника f_0 .

Під час частотної модуляції має місце приріст фази

$$\Delta\varphi(t) = 2\pi \int_{-\infty}^t \Delta f(t) dt = 2\pi \Delta f_d \int_{-\infty}^t b(t) dt. \quad (4.26)$$

Математичний опис сигналу ЧМ отримаємо підстановкою виразу (4.26) у формулу (4.17):

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + 2\pi \Delta f_d \int_{-\infty}^t b(t) dt + \varphi_0). \quad (4.27)$$

Оскільки $b(t)$ входить у цей вираз під знаком інтегралу, то ЧМ часто називають інтегральним видом модуляції.

З наведених описів сигналів випливає, що ЧМ і ФМ мають багато спільного. *Під час модуляції як у випадку ЧМ, так і у випадку ФМ мають місце прирости і частоти, і фази.* Назва виду модуляції визначається тим, який з параметрів отримує приріст, пропорційний модулюючому сигналу. Початкова фаза φ_0 залежить лише від вибору початку відліку часу, тому її значення не впливає на часові й спектральні характеристики сигналів, які розглядаються. Для спрощення подальших записів приймемо $\varphi_0 = 0$.

Перепишемо вираз (4.17) у квадратурній формі

$$u_{\text{КМ}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \Delta\varphi(t)) = A_0 \cos\Delta\varphi(t) \cos 2\pi f_0 t - A_0 \sin\Delta\varphi(t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (4.28)$$

З останнього виразу видно, що сигнал кутової модуляції можна розглядати як суму двох сигналів БМ. Спектр кожного з них визначається зсунутими на частоту f_0 спектрами функцій $\cos\Delta\varphi(t)$ і $\sin\Delta\varphi(t)$, а спектр сигналу $u_{\text{КМ}}(t)$, відповідно до властивості лінійності перетворення Фур'є, їх сумою. Оскільки функції $\cos\Delta\varphi(t)$ і $\sin\Delta\varphi(t)$ нелінійні, то їхні спектри можуть суттєво відрізнятися від спектра функції $\Delta\varphi(t)$ – у спектрах функцій $\cos\Delta\varphi(t)$ і $\sin\Delta\varphi(t)$ можуть з'явитися кратні й комбінаційні частоти, як при нелінійних перетвореннях сигналів, які розглянуті в розд. 3. Отже, *при кутових модуляціях зв'язок між спектром модулюючого сигналу й спектром модульованого сигналу значно складніший, ніж при АМ і її різновидах*, тому особливості спектрів сигналів КМ вивчають, приймаючи:

$$b(t) = \cos 2\pi Ft \quad (4.29)$$

– модулюючий сигнал – гармонічне коливання частоти F .

З урахуванням (4.29), сигнали ФМ і ЧМ запишуться

$$s_{\text{ФМ}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \Delta\varphi_{\text{д}} \cos 2\pi Ft); \quad (4.30)$$

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + \frac{\Delta f_{\text{д}}}{F} \sin 2\pi Ft). \quad (4.31)$$

На рис. 4.8 наведені часові діаграми модулюючого сигналу (4.29) і модульованих сигналів (4.30) і (4.31), розраховані за певних числових значень, які входять у вирази. На рисунку витримані взаємні часові співвідношення. Легко переконатись, що наведений сигнал ЧМ відповідає модулюючому сигналу: на часовому інтервалі, де миттєві значення сигналу $b(t)$ збільшуються, також збільшуються значення миттєвої частоти сигналу $s_{\text{ЧМ}}(t)$ й навпаки. Саме миттєву частоту легко відслідковувати на часових діаграмах, оскільки період коливань є зворотною величиною до частоти. Під час фазової модуляції приріст частоти відповідно до (4.24) буде пропорційний похідній $db(t)/dt$, що наведена на рисунку. Бачимо, що значення миттєвої частоти сигналу $s_{\text{ФМ}}(t)$ відповідають значенням функції $db(t)/dt$.

З рис. 4.8 видно, що при модуляції гармонічним коливанням сигнали ЧМ і ФМ збігаються за формою, вони лише взаємно зсунуті на чверть періоду коливання модулюючого сигналу, а значить їхні амплітудні спектри однакові (властивість перетворення Фур'є – спектр сигналу зсунутого у часі). Для подальшого аналізу спектрів сигналів ЧМ і ФМ вводяться індекси модуляції:

$$m_{\text{ЧМ}} = \Delta f_{\text{д}} / F \quad (4.32)$$

– **індекс частотної модуляції**, що визначається відношенням девіації частоти сигналу ЧМ до частоти модулюючого сигналу;

$$m_{\text{ФМ}} = \Delta\varphi_{\text{д}} \quad (4.33)$$

– **індекс фазової модуляції**, що дорівнює девіації фази сигналу ФМ.

Сигнали ЧМ і ФМ з урахуванням прийнятих позначень записуються у вигляді

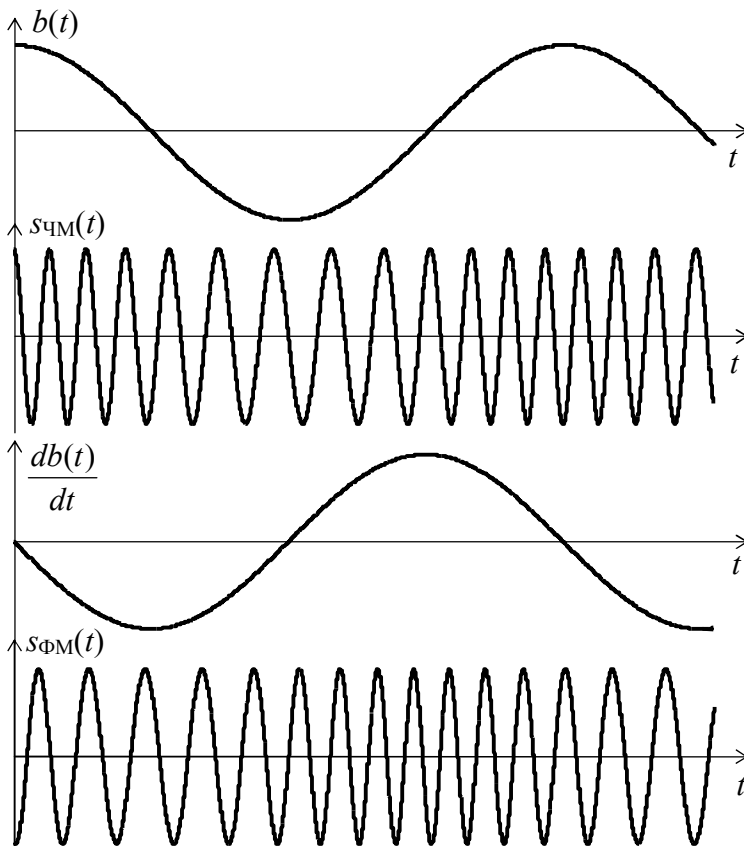


Рисунок 4.8 – Модулюючий сигнал та сигнали ЧМ і ФМ

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + m_{\text{ЧМ}} \sin 2\pi F t); \quad (4.34)$$

$$s_{\text{ФМ}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + m_{\text{ФМ}} \cos 2\pi F t). \quad (4.35)$$

З останніх виразів видно, що індекс модуляції визначає найбільший приріст фази в процесі модуляції. Якщо індекси сигналів ЧМ і ФМ однакові, то однакові їхні амплітудні спектри. Вирази (4.34) і (4.35) підтверджують наведений вище висновок з рис. 4.8, що сигнали ЧМ і ФМ збігаються за формою, вони лише взаємно зсунуті на чверть періоду модулюючого коливання. Для аналізу амплітудних спектрів сигналів ЧМ і ФМ використаємо опис сигналу ЧМ (4.34), позначивши $m_{\text{ЧМ}} = m$.

За формулою суми косинусів вираз (4.34) перетвориться в

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 \cos(m \sin 2\pi F t) \cos 2\pi f_0 t - A_0 \sin(m \sin 2\pi F t) \sin 2\pi f_0 t. \quad (4.36)$$

Функції косинус і синус періодичні в часі, і вони можуть бути представлені рядами Фур'є:

$$\cos(m \sin x) = J_0(m) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(m) \cos 2kx; \quad \sin(m \sin x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(m) \cos(2k-1)x, \quad (4.37)$$

де $J_k(m)$ – функція Бесселя першого роду k -го порядку від аргументу m . Після підстановки (4.37) в (4.36), виконання нескладних перетворень і розкриття добутку тригонометричних функцій, отримаємо

$$s_{\text{ЧМ}}(t) = A_0 J_0(m) \cos 2\pi f_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} A_0 J_k(m) \cos 2\pi(f_0 + kF)t + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k A_0 J_k(m) \cos 2\pi(f_0 - kF)t. \quad (4.38)$$

Отже, **спектр кутової модуляції при однотональному модулюючому сигналі** такий: *перший доданок – гармонічне коливання частоти переносника, перша сума – гармонічні коливання із частотами $f_0 + kF$ (верхня бічна смуга частот); друга сума – гармонічні коливання із частотами $f_0 - kF$ (нижня бічна смуга частот)*. Кількість складових у верхній і нижній смугах частот теоретично нескінченна, а амплітудний спектр симетричний відносно частоти f_0 . Амплітуди спектральних складових визначаються як $|A_0 J_k(m_{\text{ЧМ}})|$. Графіки функцій Бесселя для $k = 0 \dots 7$ наведено на рис. 4.9.

Значення функцій Бесселя, яких немає на рис. 4.9, можна розрахувати за рекурентною формулою

$$J_{k+1} = \frac{2k}{m} J_k(m) - J_{k-1}(m). \quad (4.39)$$

З виразу (4.38) випливає, що протяжність амплітудного спектра нескінченна. Проте основна частка потужності сигналу зосереджена в деякому обмеженому частотному інтервалі навколо f_0 , розмір якого і вважають шириною спектра сигналу. Функціям Бесселя властива наступна закономірність: чим більший порядок функції k , тим за більших значень аргументу m спостерігаються її суттєві значення (рис. 4.9). Для значень $k > m + 1$ значення функцій Бесселя є малими величинами, тобто малими будуть амплітуди спектральних складових і

ними можна знехтувати. Дійсно, якщо врахувати складові, амплітуди яких не менші за $0,05A_0$, то ширина спектра ЧМ і ФМ сигналів розраховується за формулою:

$$\Delta F_{\text{ЧМ}} = \Delta F_{\text{ФМ}} = 2F(m + 1). \quad (4.40)$$

Іноді враховують складові, амплітуди яких не менші за $0,01A_0$, і тоді ширина спектра ЧМ і ФМ сигналів розраховується за формулою:

$$\Delta F_{\text{ЧМ}} = \Delta F_{\text{ФМ}} = 2F(m + \sqrt{m} + 1). \quad (4.41)$$

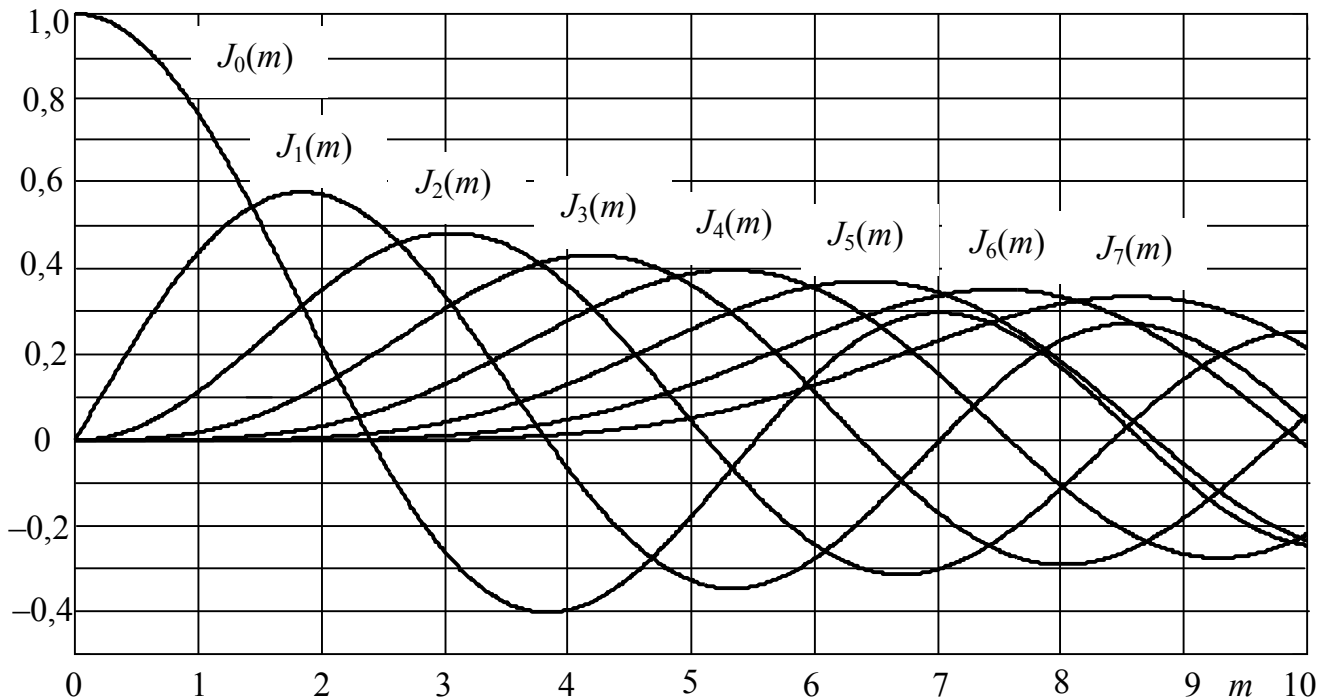


Рисунок 4.9 – Графіки функцій Бесселя

Розрізняють *вузькосмугову* (у випадку $m_{\text{ЧМ}} < 1$) і *широкосмугову* (у випадку $m_{\text{ЧМ}} \gg 1$) модуляції. На рис. 4.10 наведені амплітудні спектри модульованих сигналів з $m_{\text{ЧМ}} = 0,8$ і $m_{\text{ЧМ}} = 8$ (частоти складових відрізняються на F). *Ширина спектра сигналу вузькосмугової КМ порівняна із шириною спектра сигналу АМ.* Якщо КМ широкосмугова, то у формулі (4.38) можна знехтувати числом 1, і *ширина спектра сигналу КМ приблизно дорівнює подвоєній девіації частоти.*

Викладений аналіз спектра справедливий як для ЧМ, так і для ФМ. Відмінність між спектрами ЧМ і ФМ сигналів можна виявити, якщо зафіксувати параметри модульованих сигналів і змінювати частоту модулюючого сигналу. У випадку ФМ індекс модуляції $m_{\text{ФМ}}$ залишається незмінним і ширина спектра ФМ сигналу за формулою (4.38) змінюється. У випадку ж ЧМ індекс модуляції $m_{\text{ЧМ}} = \Delta f_d / F$ змінюється і ширина спектра ЧМ сигналу за формулою (4.38) практично залишається незмінною.

Якщо модулюючий сигнал складний, тобто містить ряд гармонічних складових, то спектр ЧМ і ФМ сигналів буде дуже складним, з'являться різні комбінаційні частоти. Як приклад складного (негармонічного) модулюючого

сигналу розглянемо $b(t) = A_1 \sin 2\pi F_1 t + A_2 \sin 2\pi F_2 t$. У цьому випадку модульований сигнал запишеться

$$s_{\text{КМ}}(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t + m_1 \sin 2\pi F_1 t + m_2 \sin 2\pi F_2 t), \quad (4.42)$$

де m_1, m_2 – парціальні індекси модуляції (цей вираз описує як сигнал ФМ, так і сигнал ЧМ, якщо цікавитися амплітудним спектром). У спектрі модульованого сигналу будуть такі складові комбінаційних частот

$$J_{k_1}(m_1) J_{k_2}(m_2) \cos(2\pi(f_0 \pm k_1 F_1 \pm k_2 F_2)t). \quad (4.43)$$

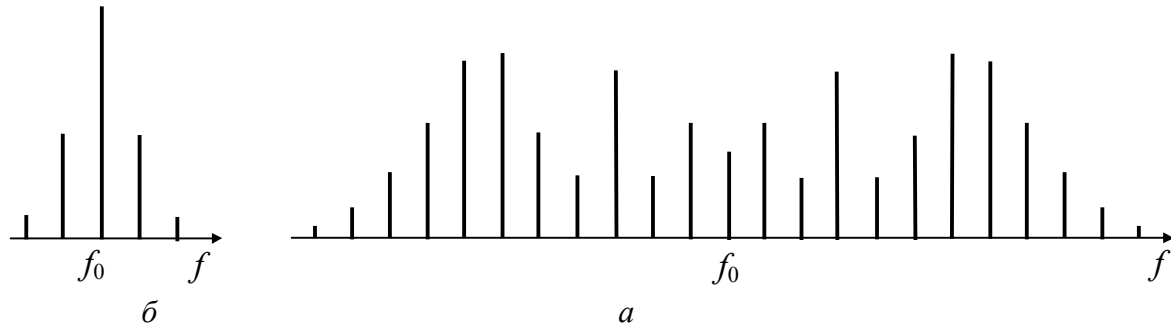


Рисунок 4.10 – Амплітудні спектри ЧМ і ФМ сигналів:
а – $m = 0,8$; б – $m = 8$

Кількість складових порівняно з випадком модуляції гармонічним коливанням різко збільшується, ускладнюється й аналіз спектра. У випадку складного модулюючого сигналу з максимальною частотою спектра F_{max} **ширина спектра** модульованого сигналу розраховується за формулами

$$\Delta F_{\text{ЧМ}} = 2 (m_{\text{ЧМ}} + 1) F_{\text{max}}, \quad (4.44)$$

$$\Delta F_{\text{ФМ}} = 2 (m_{\text{ФМ}} + 1) F_{\text{max}}, \quad (4.45)$$

де
$$m_{\text{ЧМ}} = \Delta f_{\text{д}} / F_{\text{max}}. \quad (4.46)$$

Приклад 4.1. Побудуємо спектр сигналу ЧМ при однотональному модулюючому сигналі частоти $F = 50$ Гц; девіація частоти сигналу ЧМ $\Delta f_{\text{д}} = 200$ Гц; амплітуда переносника $A_0 = 2$ В; частота переносника $f_0 = 750$ Гц.

Першим кроком у визначенні амплітуд спектральних складових сигналу ЧМ є розрахунок або визначення за графіком значень функцій Бесселя. Для цього знайдемо індекс частотної модуляції $m_{\text{ЧМ}} = 4$.

Для розрахунку $J_k(m_{\text{ЧМ}})$ можна використати функцію "БЕССЕЛЬ.І" програми Excel з пакету офісних програм Microsoft Office. Результати розрахунків занесені до табл. 4.1, читач може перевірити їх за графіком на рис. 3.9.

Таблиця 4.1 – Результат вирішення прикладу 4.1

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_0 - kF$, Гц	750	700	650	600	550	500	450	400	350	300	250
$f_0 + kF$, Гц		800	850	900	950	1000	1050	1100	1150	1200	1250
$J_k(m_{\text{ЧМ}})$	–0,397	–0,066	0,364	0,430	0,281	0,132	0,049	0,015	0,004	0,001	0,000
$ A_0 J_k(m_{\text{ЧМ}}) $	0,794	0,132	0,728	0,860	0,562	0,264	0,098	0,030	0,008	0,002	0,000

Модуль добутку значень функцій Бесселя і амплітуди переносника дає амплітуди спектральних складових сигналу ЧМ. Відповідні результати також занесені в табл. 4.1, як і значення частот складових.

На рис. 4.11 за даними табл. 4.1 побудовано спектр сигналу ЧМ.

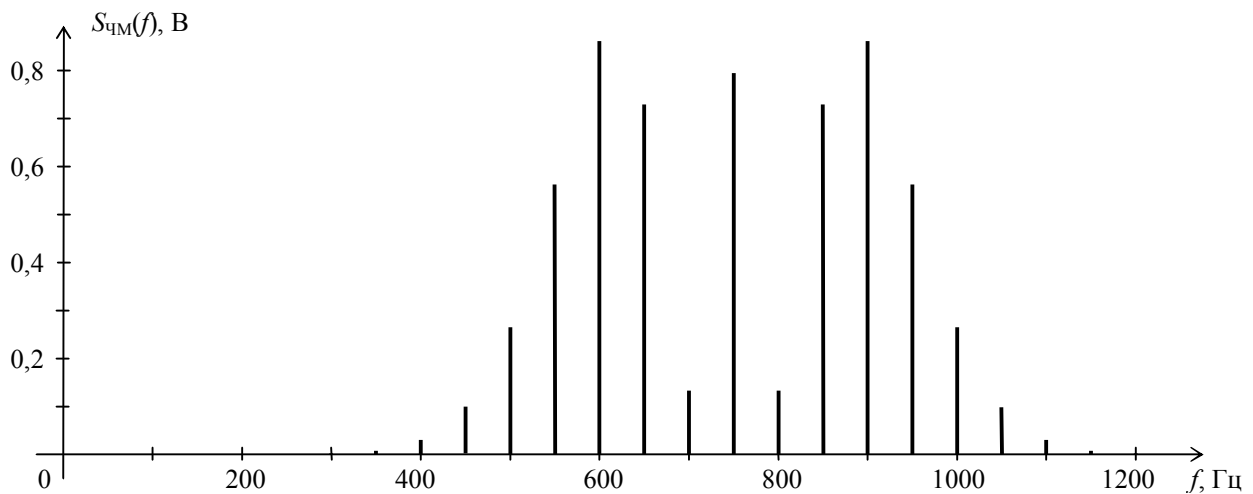


Рисунок 4.11 – Результат вирішення прикладу 4.1

Вправа 4.2. Визначте ширину спектра модульованого сигналу з прикладу 4.1 за формулами та за графіком, порівняйте отримані результати.

Вправа 4.3. Побудуйте спектр сигналу ЧМ при однотональному модулюючому сигналі частоти $F = 50$ Гц; девіація частоти сигналу ЧМ $\Delta f_d = 100$ Гц; амплітуда переносника $A_0 = 5$ В; частота переносника $f_0 = 750$ Гц.

4.4 Формування модульованих сигналів (модулятори)

У цьому підрозділі розглядається побудова схем модуляторів аналогових видів модуляції: амплітудної, балансної, односмугової, фазової й частотної модуляції. Вхідним сигналом модулятора є модулюючий сигнал $b(t)$. Задано параметри модульованого сигналу ($A_0, f_0, m_{\text{АМ}}, m_{\text{ФМ}}, m_{\text{ЧМ}}$). Суть цих параметрів зрозуміло з опису модульованих сигналів.

Побудова схем модуляторів характеризується двома особливостями:

- модулятори виконуються на процесорах цифрових сигналів або (рідше) на аналогових мікросхемах;
- схема модулятора реалізує алгоритм формування, що впливає з математичного опису модульованого сигналу.

Нижче передбачається, насамперед, що модулятори виконуються на процесорах цифрових сигналів. При цьому схеми працюють із відліками сигналів, а частота дискретизації вибирається відповідно до співвідношення (2.87).

Розглянемо побудову схеми **модулятора сигналу БМ**. Математичний опис сигналу задано співвідношенням (4.13). Схема модулятора сигналу БМ, складена на основі цього співвідношення, наведена на рис. 4.12. Вона дуже проста, містить генератор несінного коливання G і перемножувач.

Модулятор сигналу АМ будується на основі співвідношення (4.7). Відповідно до цього виразу модулятор реалізується схемою, зображеною на рис. 4.13.

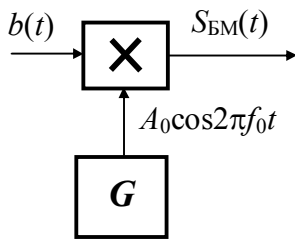


Рисунок 4.12 – Схема балансного модулятора

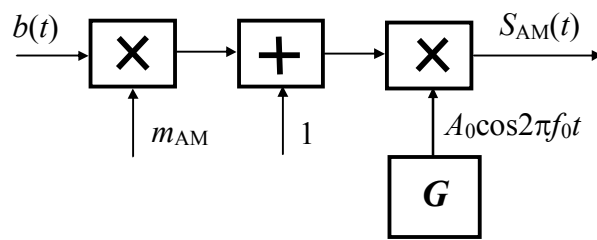


Рисунок 4.13 – Схема амплітудного модулятора

Модулятор сигналу ОМ може бути виконаний двома способами: за фільтровим методом або фазовим методом. На рис. 4.14 наведено схему формування сигналу ОМ фільтровим методом: зі спектра сигналу балансної модуляції смуговим фільтром виділяється необхідна (верхня або нижня) бічна смуга частот.

Фазовий метод формування сигналу ОМ базується на основній властивості аналітичного сигналу (п. 2.11): його спектр зосереджений на додатних частотах. Сформуємо аналітичний сигнал $\dot{b}(t) = b(t) + j\tilde{b}(t)$. На рис. 4.15, а показано спектр довільного сигналу $b(t)$, а на рис. 4.15, б – спектр сигналу $\dot{b}(t)$. Множення сигналу $\dot{b}(t)$ на $A_0 e^{j2\pi f_0 t}$ дає аналітичний сигнал $\dot{m}(t)$. Його спектр – зміщений вправо на f_0 спектр сигналу $\dot{b}(t)$ (рис. 4.15, в). Для переходу до реального сигналу необхідно взяти дійсну частину сигналу $\dot{m}(t)$:

$$\begin{aligned} s_{\text{ОМ}}(t) &= \text{Re}\{\dot{m}(t)\} = \text{Re}\{(b(t) + j\tilde{b}(t)) \cdot A_0 (\cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t)\} = \\ &= A_0 b(t) \cos 2\pi f_0 t - A_0 \tilde{b}(t) \sin 2\pi f_0 t, \end{aligned} \quad (4.47)$$

що дає вираз (4.15), використаний для опису ОМ сигналу із ВБС. Легко переконатися, що множення комплексно спряженого аналітичного сигналу $\dot{b}^*(t) = b(t) - j\tilde{b}(t)$ на $A_0 e^{j2\pi f_0 t}$ й виділення дійсної частини дає

$$s_{\text{ОМ}}(t) = A_0 b(t) \cos 2\pi f_0 t + A_0 \tilde{b}(t) \sin 2\pi f_0 t \quad (4.48)$$

– ОМ сигнал із НБС.

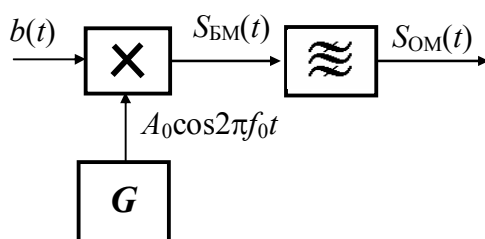


Рисунок 4.14 – Формування сигналу ОМ фільтровим методом

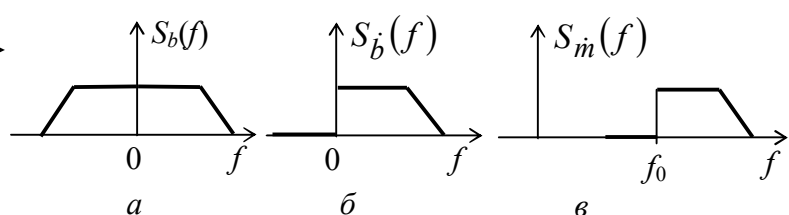


Рисунок 4.15 – Амплітудні спектри сигналів $b(t)$, $\dot{b}(t)$ і $\dot{m}(t)$

Схема модулятора сигналу ОМ (рис. 4.16) впливає зі співвідношення (4.15). Схема перетворювача Гільберта може бути синтезована за імпульсною реакцією, заданою співвідношенням (2.101), або за АЧХ і ФЧХ перетворювача, що відповідають цій імпульсній реакції (рис. 4.17). Тут F_{\min} і F_{\max} – граничні частоти спектра модулюючого сигналу.

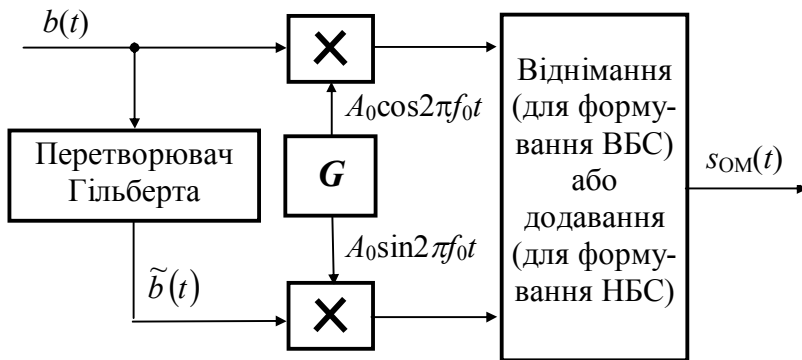


Рисунок 4.16 – Формування сигналу ОМ фазовим методом

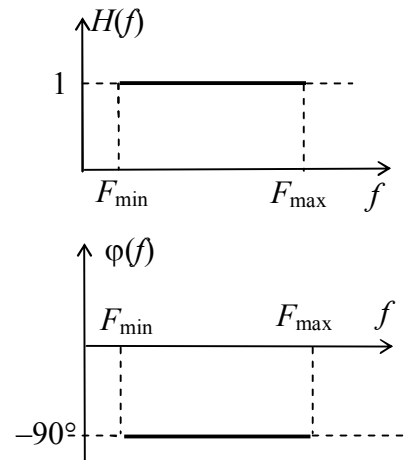


Рисунок 4.17 – АЧХ $H(f)$ і ФЧХ $\varphi(f)$ перетворювача Гільберта

Для побудови **схеми модулятора сигналу ФМ** використаємо квадратурне подання модульованого сигналу

$$\begin{aligned} s_{\text{ФМ}}(t) &= A_0 \cos(2\pi f_0 t + \Delta\varphi_d b(t)) = \\ &= A_0 \cos(\Delta\varphi_d b(t)) \cos 2\pi f_0 t - A_0 \sin(\Delta\varphi_d b(t)) \sin 2\pi f_0 t. \end{aligned} \quad (4.49)$$

На рис. 4.18 наведено схему модулятора сигналу ФМ, побудованої на основі співвідношення (4.49). У підканалах модулятора включені блоки, які обчислюють значення косинуса й синуса, інші блоки вже зустрічалися раніше.

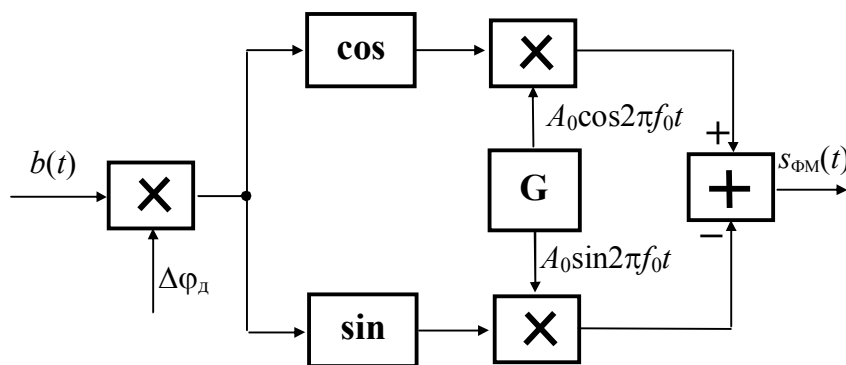


Рисунок 4.18 – Схема фазового модулятора

Для побудови **схеми модулятора сигналу ЧМ** використаємо квадратурне подання модульованого сигналу

$$\begin{aligned}
 s_{\text{ЧМ}}(t) &= A_0 \cos\left(2\pi f_0 t + 2\pi \Delta f_{\text{д}} \int_{-\infty}^t b(t) dt\right) = \\
 &= A_0 \cos\left(2\pi \Delta f_{\text{д}} \int_{-\infty}^t b(t) dt\right) \cos 2\pi f_0 t - A_0 \sin\left(2\pi \Delta f_{\text{д}} \int_{-\infty}^t b(t) dt\right) \sin 2\pi f_0 t.
 \end{aligned}
 \tag{4.50}$$

На рис. 4.19 наведено схему модулятора сигналу ЧМ, побудованої на основі співвідношення (4.50).

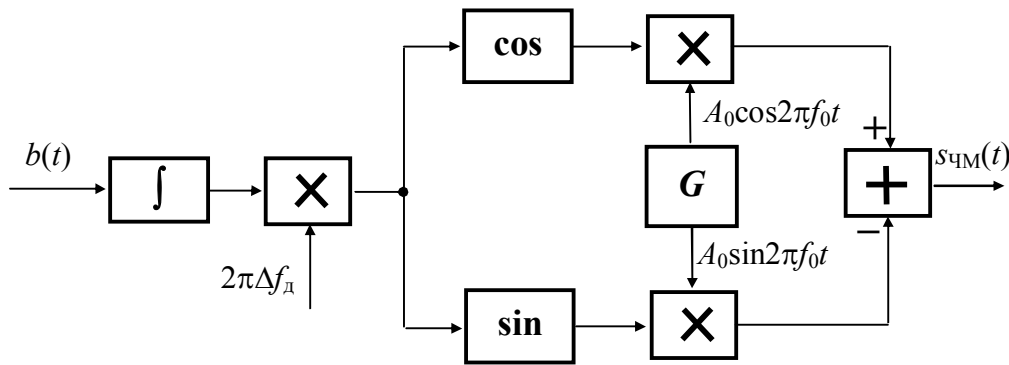


Рисунок 4.19 – Схема частотного модулятора

4.5 Детектування сигналів

Детектування – це процес, зворотний до аналогової модуляції. Детектування виконується детектором. Головна вимога до детектора – його вихід пропорційний значенням певного параметра смугового сигналу, поданого на його вхід. Цей параметр визначає назву детектора: амплітудний детектор, частотний детектор, фазовий детектор.

Амплітудний детектор буває двох видів: *синхронний детектор* і *детектор обвідної*. Схему **синхронного детектора** наведено на рис. 4.20. Цей детектор називається також когерентним. Обидві назви пов'язані з тим, що *опорне коливання повинне бути когерентним до несівного коливання, на основі якого сформований модульований сигнал* (мають збігатись повні фази цих коливань). Таке коливання виробляє система фазового автоматичного підстроювання частоти (ФАПЧ) (для її роботи у випадку ОМ необхідно передавати пілот-сигнал). *Синхронний детектор використовується для детектування АМ, БМ і ОМ сигналів*. У правильності процесу детектування можна переконатися, проводячи аналіз проходження сигналів перерахованих видів модуляції через схему детектора. ФНЧ на рис. 4.20 виконує роль післядетекторного фільтра.

У **детектора обвідної** вихід пропорційний обвідній смугового сигналу, поданого на його вхід. Оскільки при АМ обвідна модульованого сигналу пропорційна модулюючому сигналу, то детектор обвідної забезпечує детектування АМ сигналу (і тільки). Такий детектор не вимагає когерентного опорного коливання й відповідно системи ФАПЧ. Цим пояснюється друга назва детектора обвідної – некогерентний детектор. Для детектування сигналу АМ використовується його властивість, що в спектрі сигналу є потужне коливання несівної частоти.

На рис. 4.21 наведена схема некогерентного детектора АМ сигналу на основі нелінійного електричного кола (НЕ), яке описується поліномом, що містить доданок $a \cdot x^2$. У спектрі сигналу на виході нелінійного кола будуть міститись коливання різницевих частот: верхньої бічної смуги й несівної, а також несівної й нижньої бічної смуги частот. Ці різницеві частоти виділяє ФНЧ, що й забезпечує в підсумку детектування сигналу АМ.

У загальному випадку (у тому числі, якщо у спектрі сигналу, що детектується, немає несівного коливання) використовується детектор обвідної, що функціонує за виразом (2.96), до складу якого входить квадратурний розщеплювач (обведений штриховою лінією) (рис. 4.22). Квадратурний розщеплювач виділяє квадратурні складові модульованого сигналу $I(t)$ і $Q(t)$. Тут $\Delta\varphi$ – довільна початкова фаза опорного коливання. Вихідна напруга детектора $u_d(t)$ пропорційна обвідній смугового сигналу $s(t)$.

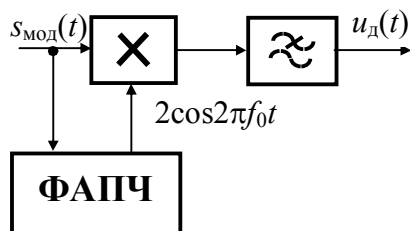


Рисунок 4.20 – Схема синхронного детектора

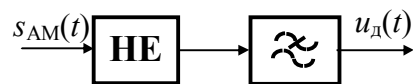


Рисунок 4.21 – Схема некогерентного детектора на основі нелінійного елемента

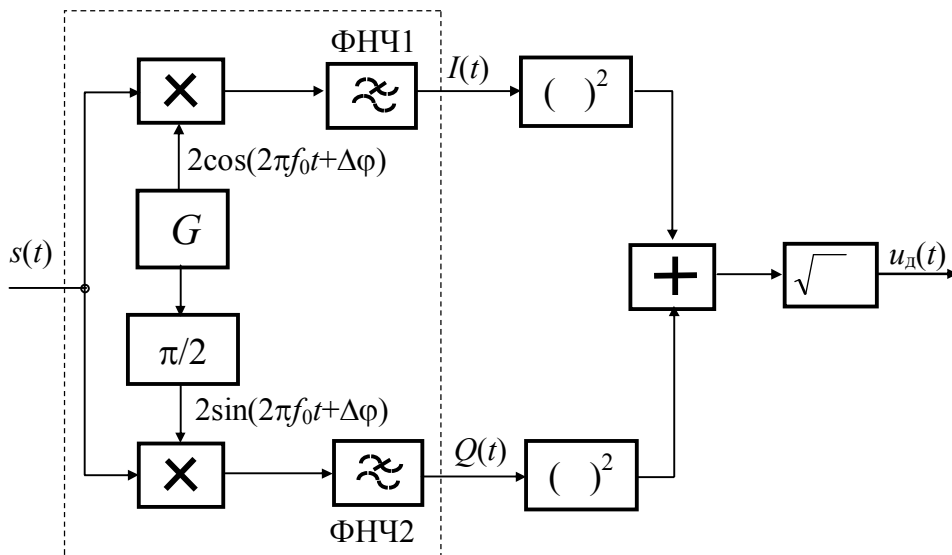


Рисунок 4.22 – Схема детектора обвідної на основі квадратурного розщеплювача

Фазовий детектор (рис. 4.23) також виконується на основі квадратурного розщеплювача. Прирости фази обчислюються відповідно до виразу (2.72), як арктангенс відношення $Q(t)$ і $I(t)$. Для безпосереднього отримання сигналу $b(t)$ вихід арктангенса необхідно поділити на девіацію фази $\Delta\varphi_d$, яка є параметром модульованого сигналу.

Схема **частотного детектора** наведена на рис. 4.24. Вона більшою своєю частиною збігається зі схемою фазового детектора, оскільки відповідно до виразів (2.97) і (4.19) приріст частоти є похідною від приростів фази, які і визначає фазовий детектор. Відповідно, після обчислення арктангенса у схемі частотного детектора увімкнено обчислювач похідної. Аналогічно до фазового детектування, для безпосереднього отримання сигналу $b(t)$, прирости частоти необхідно поділити на девіацію частоти $2\pi\Delta f_{\text{д}}$.

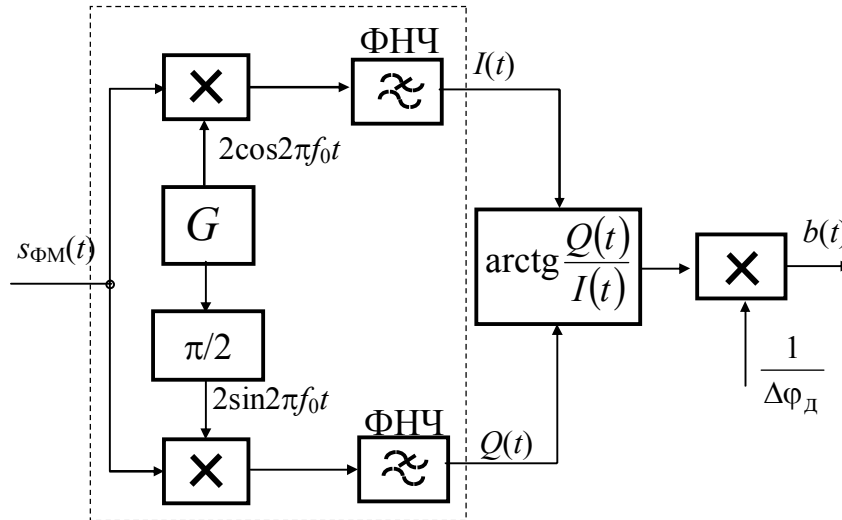


Рисунок 4.23 – Схема фазового детектора

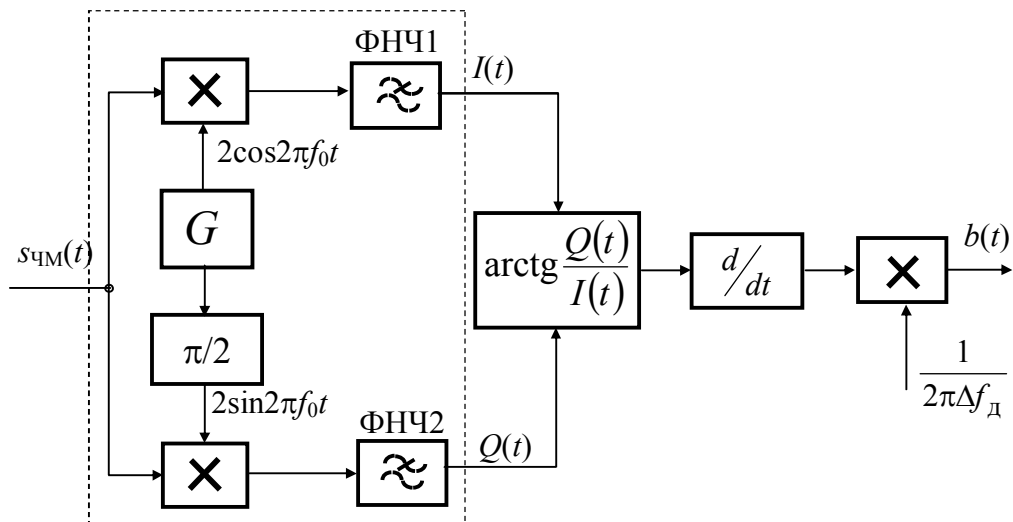


Рисунок 4.24 – Схема частотного детектора

Контрольні питання до розділу 4

1. Дайте визначення аналогової модуляції. Що використовується в якості переносника в процесі аналогової модуляції?
2. Дайте визначення амплітудної модуляції, наведіть необхідні математичні вирази. Які спектральні складові має сигнал АМ? Як визначити ширину спектра сигналу АМ?
3. Поясніть, чому використання сигналів АМ є неефективним?
4. З яких міркувань з'явилися сигнали балансної модуляції? Наведіть математичний опис сигналів БМ. Як визначити ширину спектра сигналу БМ?
5. З яких міркувань з'явилися сигнали односмугової модуляції? Наведіть математичний опис сигналів ОМ. Як визначити ширину спектра сигналу ОМ?
6. Дайте визначення сигналу частотної модуляції. Яким чином зміни миттєвої частоти смугового сигналу впливають на приріст його фази? Запишіть математичний вираз сигналу ЧМ.
7. Дайте визначення сигналу фазової модуляції. Запишіть математичний вираз сигналу ФМ. Яким чином прирости фази смугового сигналу впливають на його миттєву частоту? Як разом називають сигнали ЧМ і ФМ?
8. Як здійснюють аналіз спектра сигналів ЧМ і ФМ? Що визначає амплітуди спектральних складових сигналів ЧМ і ФМ при однотональній модуляції?
9. Дайте визначення девіації частоти і девіації фази. Поясніть як ці параметри впливають на ширину спектра модульованих сигналів.
10. Що є визначальним при побудові сучасних схем модуляторів?
11. Наведіть математичні вирази і схеми модуляторів сигналів АМ і БМ.
12. Наведіть математичний вираз сигналу ОМ та поясніть можливі способи формування сигналу ОМ.
13. Наведіть математичні вирази і схеми модуляторів сигналів ЧМ і ФМ.
14. Дайте визначення процесу детектування.
15. Яким чином здійснюють амплітудне детектування? Наведіть відповідні схеми та поясніть принцип їх функціонування.
16. Яким чином здійснюють детектування кутових видів модуляції? Наведіть відповідні схеми та поясніть принцип їх функціонування.

5 СИГНАЛИ ЦИФРОВИХ ВИДІВ МОДУЛЯЦІЇ

5.1 Загальні відомості про цифрову модуляцію

Модуляція називається цифровою, якщо модулюючим сигналом є цифровий сигнал. **Цифровий сигнал (ЦС)** – це послідовність цифрових символів, які належать певному алфавіту. Кожний із символів займає фіксований інтервал часу – така послідовність символів називається синхронною. Як правило, символи двійкові, і позначаються 1 і 0, їх називають бітами, і надходять вони через інтервал T_6 . Надалі будемо вважати, що ЦС, якщо це спеціально не застережено (тобто за замовчуванням), двійковий. ЦС з'являється в результаті кодування знаків дискретних повідомлень або відліків неперервних повідомлень. ЦС можна представити, записуючи послідовність, наприклад, 10110..., і вказуючи значення T_6 . Основною характеристикою ЦС є швидкість сигналу або бітова швидкість $R = 1/T_6$, біт/с.

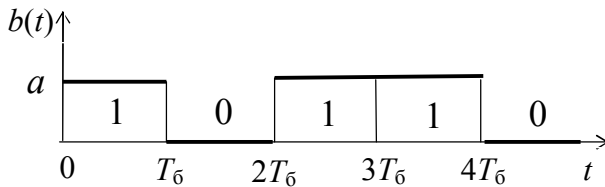


Рисунок 5.1 – Цифровий сигнал

У кінцевому обладнанні систем зв'язку, виконаному на логічних мікросхемах або процесорах, цифрові сигнали мають вигляд послідовності П-імпульсів. Приклад такого сигналу наведено на рис. 5.1. Цей сигнал двіривний: більш високий рівень відповідає

символу 1, а більш низький – 0. Можна вважати, що носієм інформації є П-імпульс, а інформація відображена в амплітуді імпульсу, що набуває значень a й 0. Величезний арсенал логічних мікросхем і процесорів розрахований на роботу саме з такими сигналами.

Для передавання цифрових сигналів каналами зв'язку використовуються методи цифрової модуляції, в основному, з послідовним передаванням й, рідше, з паралельно-послідовним передаванням.

Розглянемо **послідовне передавання**. Модульований сигнал для передавання каналом зв'язку формується із сигналів $s_i(t)$, що належать ансамблю канальних символів $\{s_i(t)\}$, $i = 0, 1, \dots, M - 1$, де M – число канальних символів ($M \geq 2$), які по черзі передаються.

При **формуванні модульованого сигналу з послідовним передаванням** послідовність двійкових символів (модулюючий ЦС) розбивається на блоки з $n = \log_2 M$ біт. Кожному такому блоку (кількість можливих різних блоків $M = 2^n$) ставиться у відповідність канальний символ $s_i(t)$. Тривалість n біт становить **тактовий інтервал** $T = T_6 \cdot \log_2 M$. Отримана послідовність канальних символів, що надходять через час T , й утворює модульований сигнал

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} s_i^{(k)}(t - kT), \quad (5.1)$$

де $s_i^{(k)}(t - kT)$ – i -й каналний символ, що передається на k -му тактовому інтервалі.

На рис. 5.2 схематично показано перехід від ЦС до модульованого сигналу ($n = 4, M = 16$). На графіку $s(t)$ уздовж осі часу показані інтервали тривалістю T , на яких передаються каналні символи $s_{11}(t), s_1(t), s_3(t), s_6(t), \dots$. З рис. 5.2 видно **суть цифрової модуляції** – це відображення блоків біт в імпульс-переносники (каналні символи).

Якщо $M = 2$, то сигнал $s(t)$ – двійковий; якщо $M > 2$, то сигнал $s(t)$ – багатопозиційний або багаторівневий.

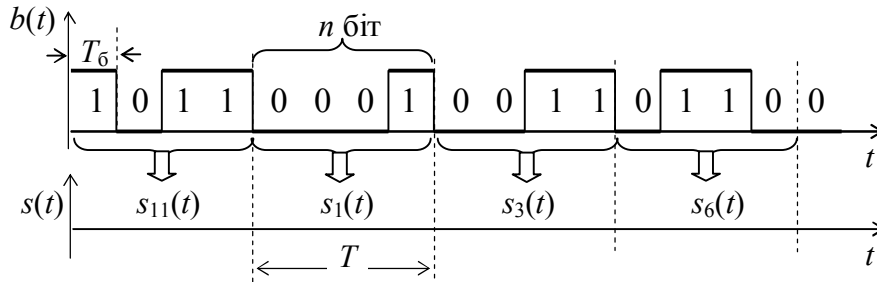


Рисунок 5.2 – Схема перетворення ЦС в модульований сигнал

При **паралельно-послідовному передаванні** каналом зв'язку одночасно передаються декілька модульованих сигналів з послідовним передаванням, що розглянуте вище. Детально це питання розглядається в п. 5.7.

Нижче, якщо це не застережено, розглядається послідовне передавання.

Тактовий інтервал T є одним з основних параметрів, які характеризують передавання ЦС каналом зв'язку. Зворотна величина називається **тактовою частотою** $f_T = 1/T$, Гц, а також **швидкістю модуляції** $B = 1/T$, Бод або **символьною швидкістю** (розмірність симв/с).

До основних параметрів також відноситься **ширина спектра модульованого сигналу**. Вона залежить від швидкості ЦС R і ансамблю каналних символів $\{s_i(t)\}$ (широко поширені ансамблі будуть наведені далі). Задача вибору методу цифрової модуляції зводиться до вибору ансамблю каналних символів. Виходячи з простоти схем формування модульованих сигналів та схем оброблення сигналів під час демодуляції, нині у якості каналних символів, в основному, використовуються такі імпульси:

– для отримання низькочастотних модульованих сигналів

$$s_i(t) = a_i A(t), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1; \quad (5.2)$$

– для отримання смугових модульованих сигналів

$$s_i(t) = a_i A(t) \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (5.3)$$

або

$$s_i(t) = a_{ci} A(t) \sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t + a_{si} A(t) \sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t, \quad i = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (5.4)$$

де a_i , a_{ci} , a_{si} – коефіцієнти, що відображають біти, які передаються i -м каналним символом;

$A(t)$ – функція, що відображає форму імпульсу;

f_0 – частота радіоімпульсу.

Вправа 5.1. Визначте символну швидкість модульованого сигналу, якщо число рівнів сигналу становить 64, а швидкість цифрового сигналу – 1 Мбіт/с.

Вправа 5.2. Визначте необхідне число рівнів модульованого сигналу, якщо швидкість цифрового сигналу дорівнює 256 кбіт/с, а передавання необхідно вести з символною швидкістю 64 симв/с.

5.2 Спектральна густина потужності сигналу цифрової модуляції

Сигнали цифрової модуляції описуються співвідношенням (5.1). Нехай каналні символи описуються формулою (5.2), в якій $A(t)$ – низькочастотний імпульс-переносник. Будемо вважати, що каналні символи, що передаються на різних тактових інтервалах $s_i^{(k)}(t - kT)$ і $s_i^{(l)}(t - lT)$, $k \neq l$, незалежні й рівноймовірні, через те, що у реальному первинному ЦС двійкові символи 0 і 1 незалежні й рівноймовірні. Внаслідок цієї властивості первинного ЦС коефіцієнти a_i , a_{ci} , a_{si} , що входять у співвідношення (5.2)...(5.4), є випадковими дискретними величинами, рівномірно розподіленими на певному інтервалі, а їх середні значення дорівнюють нулю (це стане очевидним далі).

Для визначення спектральної густини потужності сигналу цифрової модуляції спочатку знайдемо кореляційну функцію сигналу $s(t)$, який описується формулою (5.1):

$$K_s(\tau) = \lim_{T_p \rightarrow \infty} \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} s(t)s(t+\tau)dt, \quad (5.5)$$

де T_p – тривалість реалізації сигналу $s(t)$.

Нехай $T_p = NT$, тоді на підставі співвідношень (5.1), (5.2) і (5.5) запишемо

$$\begin{aligned} K_s(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \int_{-NT/2}^{NT/2} \sum_{k=-N/2}^{N/2} s_i^{(k)}(t - kT) \sum_{l=-N/2}^{N/2} s_i^{(l)}(t - lT + \tau) dt = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \int_{-NT/2}^{NT/2} \sum_{k=-N/2}^{N/2} a_i^{(k)} \sum_{l=-N/2}^{N/2} a_i^{(l)} A(t - kT) A(t - lT + \tau) dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Розглянемо добуток сум у співвідношенні (5.6), він дає N^2 доданків. Виділимо N доданків, в яких $k = l$. Ці доданки дають величину $\sum_{k=-N/2}^{N/2} (a_i^{(k)})^2$. Для інших доданків у співвідношенні (5.6), для яких $k \neq l$, добутки співмножників $a_i^{(k)}$ й $a_i^{(l)}$ з однаковими ймовірностями набувають певних додатних і від'ємних значень. Ці доданки під час усереднення за часом (за індексом k) дадуть нульовий внесок. На основі викладеного співвідношення (5.6) перепишеться

$$K_s(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \int_{-NT/2}^{NT/2} \sum_{k=-N/2}^{N/2} (a_i^{(k)})^2 A(t - kT) A(t - kT + \tau) dt. \quad (5.7)$$

Враховуючи, що за визначенням кореляційна функція детермінованого сигналу $A(t)$ записується як

$$K_A(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) A(t + \tau) dt, \quad (5.8)$$

то співвідношення (5.7) перепишеться

$$K_s(\tau) = \frac{\overline{a_i^2}}{T} K_A(\tau). \quad (5.9)$$

Перейдемо до розгляду сигналів, побудованих на основі каналних символів (5.3). Їх відрізняє від розглянутих НЧ каналних символів те, що використовуються радіоімпульси. За аналогією з викладками, наведеним у прикладах 2.2 і 2.3, неважко отримати вираз для кореляційної функції модульованого сигналу, побудованого на основі каналних символів (5.3):

$$K_s(\tau) = \frac{\overline{a_i^2}}{T} K_A(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau). \quad (5.10)$$

У випадку сигналів, побудованих на основі каналних символів (5.4), для отримання виразу для кореляційної функції слід вираз для каналних символів переписати у вигляді радіоімпульсів

$$s_i(t) = A_i A(t) \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t + \varphi_i), \quad i = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (5.11)$$

де $A_i = \sqrt{a_{ci}^2 + a_{si}^2}$, $\varphi_i = -\arctg(a_{si}/a_{ci})$.

Оскільки кореляційна функція радіоімпульсу не залежить від початкової фази, то остаточний вираз для кореляційної функції модульованого сигналу, побудованого на основі каналних символів (5.4), аналогічний виразу (5.10):

$$K_s(\tau) = \frac{\overline{A_i^2}}{T} K_A(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau). \quad (5.12)$$

Знайдемо спектральну густину потужності (СГП) $G_s(f)$ модульованих сигналів, використовуючи перетворення Фур'є. Перетворення Фур'є від функції $K_A(\tau)$ дає спектр енергії імпульсу $A(t)$, тобто квадрат його амплітудного спектра $S_A^2(f)$. Тому для сигналів, побудованих на основі каналних символів (5.2), СГП запишеться

$$G_s(f) = \frac{\overline{a_i^2}}{T} S_A^2(f), \quad -\infty < f < \infty. \quad (5.13)$$

Порівнюючи формулу (5.9) з формулами (5.10) і (5.12), видно, що вони відрізняються множителем $\cos(2\pi f_0 \tau)$. Із властивостей перетворення Фур'є ві-

домо, що множення функції часу на $\cos(2\pi f_0 \tau)$ приводить до зсуву її спектра на $-f_0$ й f_0 . Тому для сигналу, побудованого на основі канальних символів (5.3):

$$G_s(f) = \frac{\overline{a_i^2}}{2T} (S_A^2(f - f_0) + S_A^2(f + f_0)), \quad -\infty < f < \infty. \quad (5.14)$$

Аналогічно для сигналу, побудованого на основі канальних символів (5.4):

$$G_s(f) = \frac{\overline{A_i^2}}{2T} (S_A^2(f - f_0) + S_A^2(f + f_0)), \quad -\infty < f < \infty. \quad (5.15)$$

Зі співвідношень (5.13) – (5.15) випливає, що *спектральна густина потужності модульованого сигналу збігається із квадратом амплітудного спектра поодинокого імпульсу-переносника*. Отже, **ширина спектра сигналу цифрової модуляції визначається шириною спектра імпульсу-переносника**. Цей результат дуже важливий для обґрунтування вибору форми канальних символів.

5.3 Вибір форми канальних символів

Із виразів (5.2), (5.3) і (5.4) випливає, що *інформація відображена в амплітудах імпульсів, а не в їхній формі*. Тому форму імпульсу-переносника $A(t)$ необхідно вибирати за спектральними й іншими характеристиками. Спочатку обговоримо вибір функції $A(t)$ – НЧ імпульсу.

Показаний на рис. 5.1 ЦС в абсолютній більшості випадків не підходить для безпосереднього передавання навіть низькочастотними каналами зв'язку, насамперед, через його спектральні властивості. На рис. 5.1 елементарним сигналом, що використовується для подання символів, є П-імпульс. Нехай $A(t)$ – П-імпульс амплітуди 1 і тривалості T . Не важко знайти, що амплітудний спектр такого П-імпульсу визначається

$$S_A(f) = T |\sin \pi f t / \pi f t|. \quad (5.16)$$

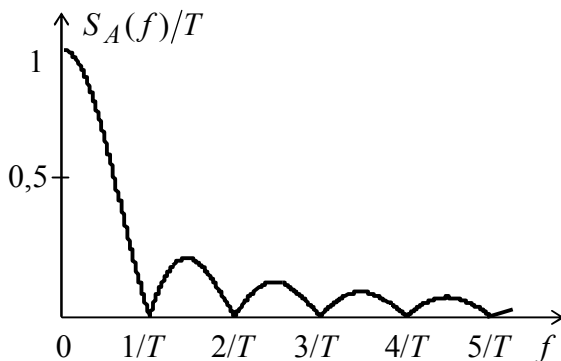


Рисунок 5.3 – Нормований спектр П-імпульсу

На рис. 5.3 наведено графік нормованого амплітудного спектра $S_A(f)/T$. Спектр П-імпульсу зменшується вкрай повільно поза смугою частот, де зосереджена основна частка енергії імпульсу, – зі швидкістю $1/f$. Якщо намагатися передавати каналом зв'язку П-імпульси зі збереженням їхньої форми, то смуга пропускання каналу зв'язку повинна бути значно більшою, ніж $1/T$. З метою економії смуги пропускання каналу

зв'язку необхідно відмовитися від передавання символів імпульсами П-подібної форми – імпульс $A(t)$ повинен мати згладжену форму. Справді, імпульс є пере-

носною числа a_i , і при використанні імпульсів довільної форми, але з амплітудою a_i , досить зробити відлік амплітудного значення імпульсу, щоб визначити це число. Імпульсами згладженої форми можуть бути гауссів імпульс, косинус-квадрат імпульс тощо.

Постає питання, а який імпульс кращий? Передусім, критерієм повинна бути мінімальна ширина спектра імпульсу. Але, чим вужчий спектр імпульсу, тим більша протяжність імпульсу у часі. Ще раз підкреслимо, що після передавання імпульсу $a_i A(t)$ каналом зв'язку буде взято відлік його амплітудного значення, в якому відображена інформація.

На вхід демодулятора надходить $a_i A(t) + n(t)$, де $n(t)$ – завада. До взяття відліку у демодуляторі імпульс проходить через фільтр, призначення якого – послабити дію завади. Під час дії на вході цього фільтра імпульсу $A(t)$ на його виході має місце імпульс $P(t)$. Оскільки в канал зв'язку імпульси надходять через тактовий інтервал T , і відліки у демодуляторі необхідно брати через цей інтервал, то необхідно зажадати, щоб *відліки переддії й післядії імпульсу $P(t)$ були нульовим, а в цілому імпульс $P(t)$ повинен задовольняти умові* (вважаємо, що амплітудне значення імпульсу має місце в момент часу $t = 0$)

$$P(t) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t = kT, \quad k = \pm 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.17)$$

Умова (5.17) називається **умовою відліковості** або **умовою відсутності міжсимвольної інтерференції (МСІ)**. У результаті дискретизації імпульсу $P(t)$, що задовольняє умові (5.17), утворюється дискретний сигнал $P(nT) = \dots, 0, 0, 1, 0, 0, \dots$. Спектральна густина цього дискретного сигналу визначається

$$S_d(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(nT) e^{-j\omega nT} = 1 \cdot e^{-j\omega 0T} = 1, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (5.18)$$

З іншого боку, спектральна густина дискретного сигналу є сума періодичних повторень із періодом $2\pi/T$ спектральної густини $S_p(j\omega)$ неперервного сигналу $P(t)$, з якого отримано дискретний сигнал шляхом узяття відліків (ф-ла (2.75)):

$$S_d(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_p \left(j \left(\omega + 2\pi \frac{m}{T} \right) \right), \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (5.19)$$

Отже, необхідно знайти функцію $S_p(j\omega)$, при якій сума її періодичних повторень із частотою $2\pi/T$ дає постійне значення, що дорівнює 1. Це завдання легко вирішити, якщо накласти на функцію $S_p(j\omega)$ вимогу – вона повинна бути дійсною й мати косу симетрію навколо точки $(T/2, \pi/T)$. Ця вимога описується рівністю

$$S_p(\omega_n - \omega) + S_p(\omega_n + \omega) = T, \quad 0 \leq \omega \leq 2\pi/T, \quad (5.20)$$

де $\omega_n = \pi/T$ – частота Найквіста.

Можна вказати нескінченну безліч функцій $S_p(\omega)$, що задовольняють умові (5.20). На рис. 5.4 наведені приклади функцій $S_p(\omega)$ з косою симетрією.

Графічно коса симетрія означає: якщо графік функції для значень $\omega > \omega_H$ повернути проти годинникової стрілки на 180° навколо точки симетрії $(T/2, \omega_H)$, то він буде збігатися із графіком для значень $\omega < \omega_H$.

З погляду формування імпульсу $P(t)$ реальними фільтрами, які мають згладжений скат АЧХ, і, відповідно, згладженим буде скат спектра імпульсу, потрібно вибрати функцію $S_P(\omega)$ виду рис. 5.4, в. Саме для функції виду рис. 5.4, в і побудований амплітудний спектр відліків імпульсу, що задовольняє умові відліковості (рис. 5.5): спектр відліків дорівнює 1, показані складові спектра (5.19) (штриховими лініями) зі значеннями $m = -2, -1, 0, 1, 2$.

Сpektри імпульсних сигналів, що задовольняють умові відліковості (5.17), називаються **спектрами Найквіста**. Їх позначають як $N(f)$. Найчастіше спектр Найквіста описують функцією

$$N(f) = \begin{cases} T, & 0 \leq |f| \leq (1 - \alpha)f_H, \\ 0,5T \left[1 + \sin \left(\frac{\pi}{2\alpha} \left(1 - \frac{|f|}{f_H} \right) \right) \right], & (1 - \alpha)f_H < |f| < (1 + \alpha)f_H, \\ 0, & |f| \geq (1 + \alpha)f_H. \end{cases} \quad (5.21)$$

де $f_H = 1/(2T)$ – частота Найквіста.

α – коефіцієнт скату спектра сигналу, $0 \leq \alpha \leq 1$.

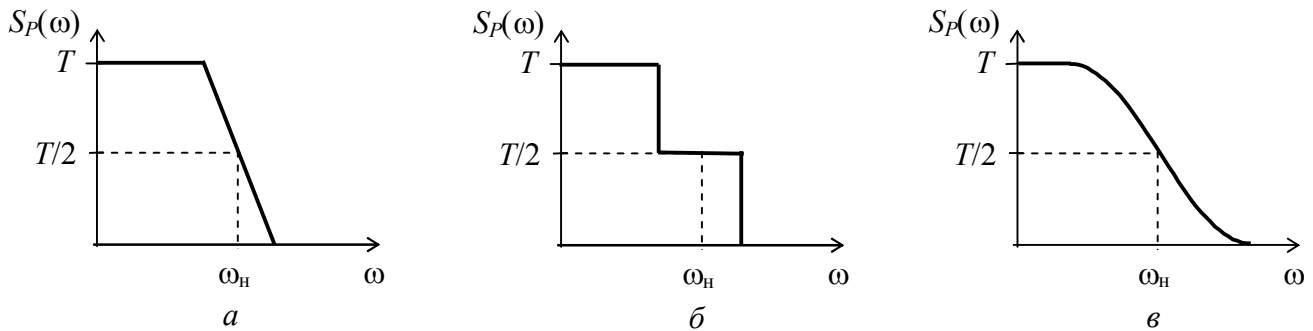


Рисунок 5.4 – Приклади функцій $S_P(\omega)$ з косою симетрією

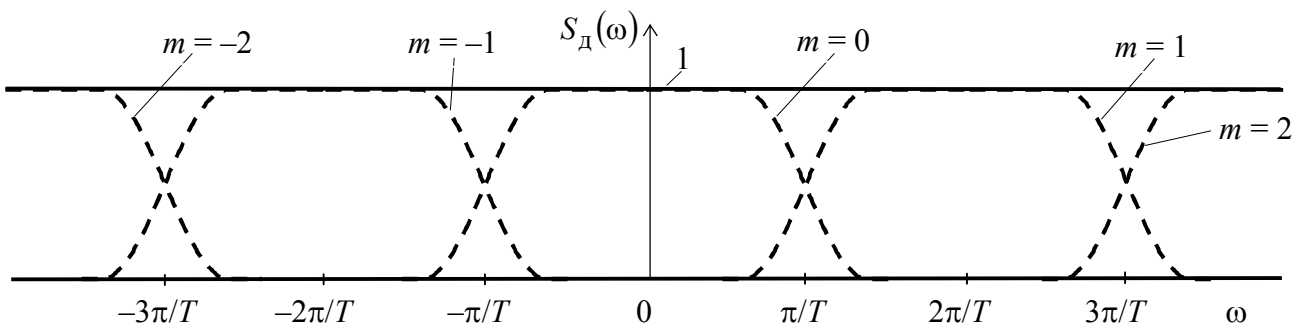


Рисунок 5.5 – Спектр відліків сигналу, що задовольняє умові відліковості

Залежність (5.21) називається „піднятий косинус“. На рис. 5.6, а наведено таку залежність для $\alpha = 0,4$.

Функцію $P(t)$ можна отримати як зворотне перетворення Фур'є від $N(f)$

$$P(t) = \frac{\sin 2\pi f_h t}{2\pi f_h t} \cdot \frac{\cos 2\pi \alpha f_h t}{1 - (4\alpha f_h t)^2}. \quad (5.22)$$

Імпульси $P(t)$ називають **імпульсами Найквіста**. При розрахунках графіків імпульсів $P(t)$ можуть виникнути невизначеності. Так, $\frac{\sin x}{x} = 1$, коли $x \rightarrow 0$; $\frac{\cos 2\pi \alpha f_h t}{1 - (4\alpha f_h t)^2} = \frac{\pi}{4}$, коли $4\alpha f_h |t| \rightarrow 1$. На рис. 5.7 показано графіки імпульсів $P(t)$ для $\alpha = 0; 0,5$ і 1 .

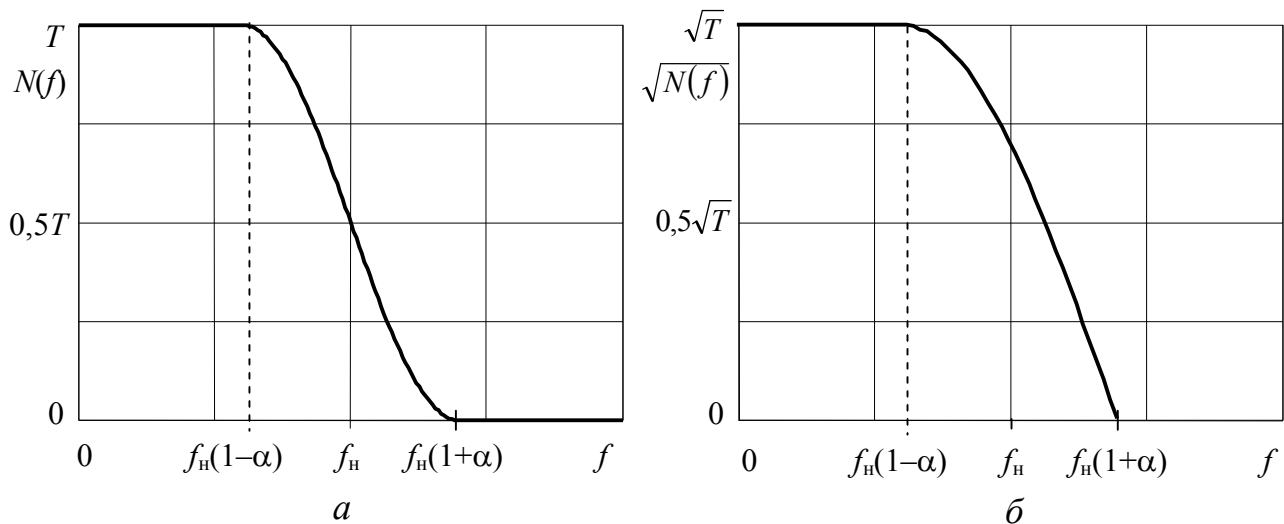


Рисунок 5.6 – Спектри: *a* – Найквіста; *б* – корінь зі спектра Найквіста

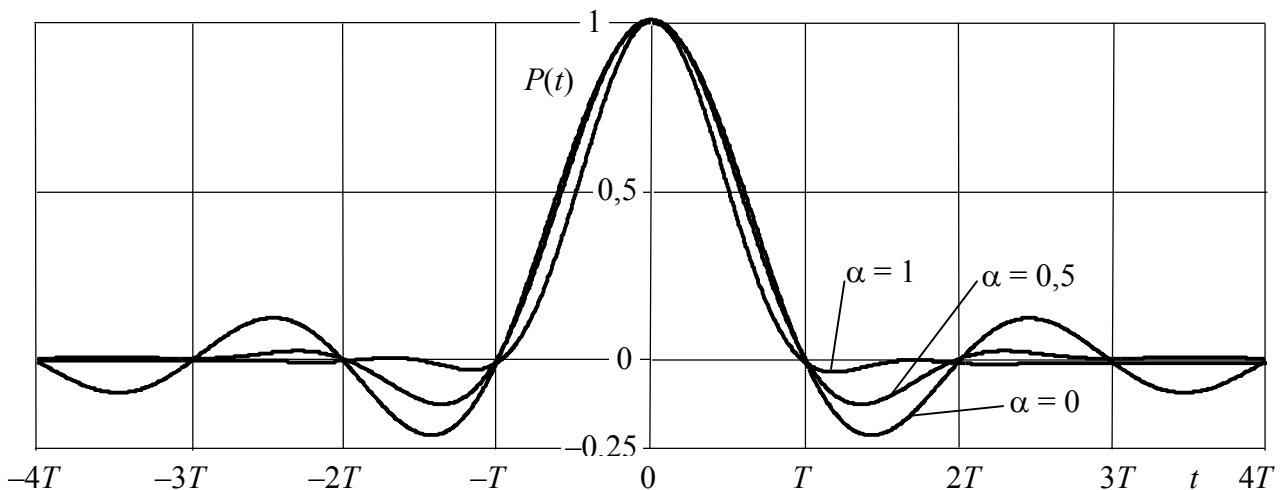


Рисунок 5.7 – Імпульси Найквіста
за різних значень коефіцієнта скату спектра

В теорії оптимальної демодуляції сигналів цифрової модуляції доведено, що АЧХ фільтра демодулятора повинна збігатися з амплітудним спектром імпульсу $A(t)$. Для виконання цієї вимоги амплітудний спектр імпульсу $A(t)$ повинен описуватись залежністю «корінь квадратний зі спектра Найквіста»:

$$\sqrt{N(f)} = \begin{cases} \sqrt{T}, & |f| \leq (1 - \alpha)f_H, \\ \sqrt{T} \sin \left[\frac{\pi}{4\alpha} \left(1 + \alpha - \frac{|f|}{f_H} \right) \right], & (1 - \alpha)f_H < |f| < (1 + \alpha)f_H, \\ 0, & |f| \geq (1 + \alpha)f_H. \end{cases} \quad (5.23)$$

На рис. 5.6, б показано залежність $\sqrt{N(f)}$ при $\alpha = 0,4$.

Вираз для імпульсу $A(t)$ можна одержати як зворотне перетворення Фур'є від залежності $\sqrt{N(f)}$, вважаючи, що фазовий спектр тотожно дорівнює нулю:

$$A(t) = \frac{\pi}{8\alpha + 2\pi(1 - \alpha)} \left\{ \frac{8\alpha}{\pi(1 - (8\alpha f_H t)^2)} \cdot [\cos(2\pi(1 + \alpha)f_H t) + 8\alpha f_H t \cdot \sin(2\pi(1 - \alpha)f_H t)] + \right. \\ \left. + 2(1 - \alpha) \frac{\sin(2\pi(1 - \alpha)f_H t)}{2\pi(1 - \alpha)f_H t} \right\}, \quad -\infty < t < \infty. \quad (5.24)$$

На рис. 5.8 показані графіки імпульсів $A(t)$ і $P(t)$ при $\alpha = 0,4$. Із графіка $P(t)$ видно, що його амплітудне значення дорівнює 1. А це значить, що під час передавання імпульсу $a_i A(t)$ відлік на виході фільтра демодулятора дорівнює a_i . Рис. 5.7 демонструє, що імпульс $P(t)$ набуває нульових значень при $t = \pm kT$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), тобто задовольняє умові відліковості, а імпульс $A(t)$, навпаки, не набуває нульових значень при $t = \pm kT$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

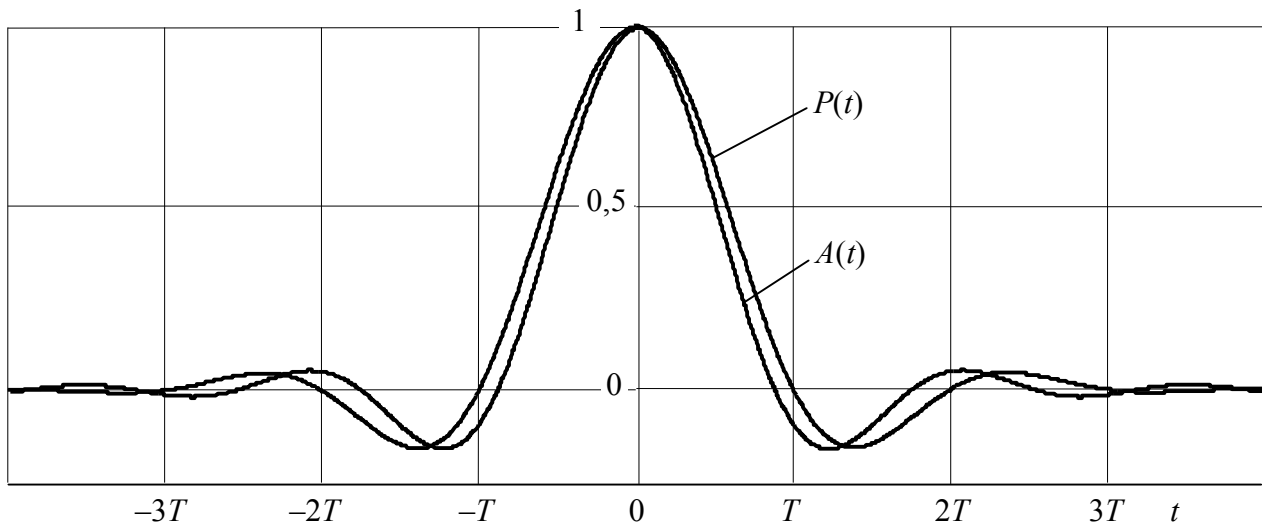


Рисунок 5.8 – Імпульси $A(t)$ і $P(t)$

Визначимо енергію імпульсу $A(t)$ – це значення потрібне для подальшого аналізу сигналів цифрової модуляції:

$$E_A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_A^2(\omega) d\omega = 2 \int_0^{\infty} S_A^2(f) df = 2 \int_0^{\infty} (\sqrt{N(f)})^2 df = 2 \int_0^{\infty} N(f) df = 1. \quad (5.25)$$

Результат отримано, виходячи з того, що інтеграл дорівнює площі під кривою, описуваною підінтегральною функцією (рис. 5.6, а). Оскільки функція

$N(f)$ має кососиметричний скат, то ця площа дорівнює площі прямокутника висотою T й основою $f_n = 1/(2T)$.

Визначимо також енергії радіоімпульсів $A(t)\sqrt{2} \cos 2\pi f_0 t$ і $A(t)\sqrt{2} \sin 2\pi f_0 t$ – їх амплітудні спектри однакові

$$S_{pi}(f) = \frac{\sqrt{2}}{2} (S_A(f - f_0) + S_A(f + f_0)), \quad -\infty < f < \infty. \quad (5.26)$$

Енергії радіоімпульсів

$$E_{pi} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{pi}^2(f) df = 1. \quad (5.27)$$

Під час інтегрування враховано, спектр радіоімпульсів удвічі ширший ніж Π -імпульсу та множник $1/2$.

Із рис. 5.6 видно, що **ширина спектра НЧ імпульсу-переносника** $F_{max} = (1 + \alpha)f_n$, а **мінімально можлива ширина спектра дорівнює частоті Найквіста** $\min[F_{max}] = f_n$ – це значення ще називають **межею Найквіста**. Таким чином, коефіцієнт α показує значення відносного розширення ширини спектра сигналу порівняно з мінімально шириною, за якої можливе передавання без МСІ. Тому коефіцієнт α називають також коефіцієнтом розширення спектра сигналу. Таке розширення необхідно, тому що спектр формується фільтрами, а АЧХ реальних фільтрів мають перехідну смугу частот від смуги пропускання до смуги затримки скінченної (не нульової) протяжності. Типові значення коефіцієнта α лежать у межах від 0,2 до 0,4.

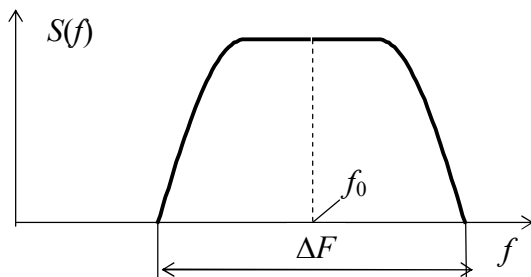


Рисунок 5.9 – Спектр радіоімпульсів

Для отримання смугових модульованих сигналів використовуються радіоімпульси $A(t)\sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t)$ і $A(t)\sqrt{2} \sin(2\pi f_0 t)$. Їхні амплітудні спектри описуються залежністю (5.26), вони мають дві бічні смуги частот, які є копіями спектра імпульсу $A(t)$ (рис. 5.9). Якщо спектр сигналу $A(t)$ описується залежністю «корінь зі спектра Найквіста», то ширина спектра радіоімпульсів і

модульованих сигналів визначається

$$\Delta F = 2(1 + \alpha)f_n = R(1 + \alpha)/\log_2 M. \quad (5.28)$$

Тут враховано, що $f_n = 1/(2T)$, $T = T_6 \log_2 M$, $R = 1/T_6$.

Вправа 5.3. Визначте у скільки разів може змінюватися ширина спектра імпульсів Найквіста в залежності від коефіцієнта скату спектра.

Вправа 5.4. Визначте у скільки разів ширина спектра імпульсів Найквіста вужча за ширину спектра Π -імпульсу, якщо її визначати за першим нулем спектра. При розрахунках прийміть типове значення коефіцієнта α .

Вправа 5.5. Запропонуйте власну форму функцій $S_A(\omega)$ з косою симетрією, що відрізняється від наведених на рис. 5.4.

5.4 Амплітудноімпульсна модуляція

Модуляція називається амплітудноімпульсною, якщо каналними символами, які використовуються для формування модульованого сигналу, є низькочастотні імпульси, тобто їхній спектр примикає до нульової частоти. Канальні символи описуються

$$s_i(t) = a_i A(t), \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (5.29)$$

де $A(t)$ – імпульс із певними часовими й спектральними характеристиками, а щоб не було міжсимвольної інтерференції, імпульс $A(t)$ повинен мати спектр «корінь зі спектра Найквіста»;

a_i – коефіцієнт, що відображає інформацію.

Сигнали амплітудноімпульсної модуляції позначаються як АІМ- M , де M – число каналних символів.

Наочним поданням сигналів цифрової модуляції є сигнальне сузір'я (рис. 5.10 і 5.11). На **сигнальному сузір'ї** кожний з каналних символів відображається точкою, координатами точок є коефіцієнти, якими описуються каналні символи. У випадку сигналів АІМ- M кожний каналний символ описується лише одним коефіцієнтом a_i , тому для подання сигналів АІМ- M використовується одновимірний простір – числова вісь. На рис. 5.10 показано сигнальне сузір'я сигналу АІМ-2. Також вказується **модуляційний код**, що встановлює відповідність між двійковими символами й коефіцієнтами a_i .

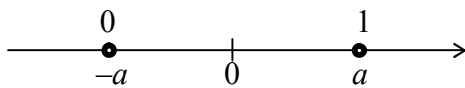


Рисунок 5.10 – Сигнальне сузір'я АІМ-2

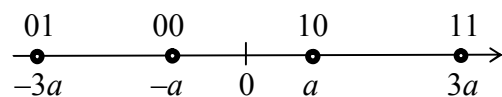


Рисунок 5.11 – Сигнальне сузір'я АІМ-4

На рис. 5.11 показано сигнальне сузір'я сигналу АІМ-4. Модуляційний код для сигналу АІМ-4 встановлює відповідність між парами двійкових символів ($n = 2$) і коефіцієнтами a_i . Ці пари також визначають номер каналного символу – двійкові символи є записом номера каналного символу у двійковій системі числення. Модуляційний код повинен бути **кодом Грея** – блоки з n біт, які відповідають найближчим каналним символам, повинні відрізнятися лише в одному розряді. Код Грея мінімізує кількість помилкових біт у разі виникнення помилки рішення про переданий каналний символ під час демодуляції.

Як при АІМ-2, так і при АІМ-4 число a визначає енергії кожного з каналних символів і середню потужність модульованого сигналу.

Аналогічно розглянутим прикладам можна побудувати сигнальні сузір'я для $M = 8, 16, \dots$.

Схему формування сигналу АІМ- M наведено на рис. 5.12. На вхід надходить ЦС, що підлягає передаванню. **Кодер модуляційного коду (КМК)** бере $n = \log_2 M$ біт і видає коефіцієнт a_i П-імпульсом тривалістю T або меншою (на рис. 5.12 імпульсом $\delta(t)$). Із цього імпульсу **формуючий фільтр (ФФ)** виробляє імпульс $a_i A(t)$ – імпульс Найквіста. Ця процедура повторюється на кожному

тактовому інтервалі. Для різних значень M робота схеми відрізняється лише модуляційним кодом.

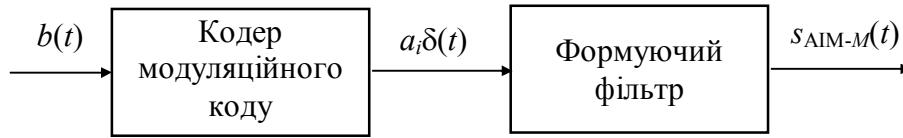


Рисунок 5.12 – Модулятор сигналу AIM-M

Для отримання імпульсів Найквіста АЧХ ФФ описується виразом $H(f) = N(f)/S_{\text{КМК}}(f)$, де $S_{\text{КМК}}(f)$ – амплітудний спектр імпульсів на виході КМК. **Ширина спектра сигналів AIM-M** визначається шириною спектра імпульсів $A(t)$. Оскільки $T = T_6 \log_2 M$, то

$$F_{\text{AIM-M}} = \frac{1 + \alpha}{2T_6 \log_2 M} = \frac{R(1 + \alpha)}{2 \log_2 M}. \quad (5.30)$$

Приклад 5.1. Побудуємо сигнальне сузір'я сигналу AIM-8.

Нам відомо, що сигнали AIM-M є одновимірними, а отже, як і на рис. 5.11, усі точки сузір'я сигналу AIM-8 будуть знаходитись на числовій осі. Для забезпечення однакової стійкості усіх канальних символів до дії шуму в каналі їх амплітуди мають відрізнятися на одну і ту саму величину, нехай як і раніше ця різниця дорівнює $2a$. Для того, щоб визначити модуляційний код можна вчинити так: записати кодові комбінації у тому порядку, як це показано на рис. 5.11, і до кожної з них дописати символ "0", потім записати ці самі комбінації в зворотному порядку і дописати до них символ "1". Сигнальне сузір'я сигналу AIM-8, побудоване з урахуванням наведених міркувань, зображене на рис. 5.13.

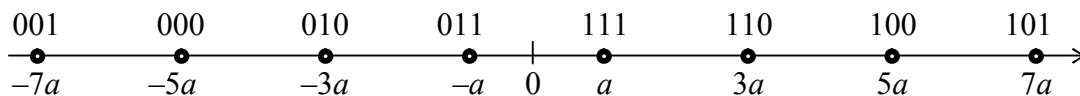


Рисунок 5.13 – Сигнальне сузір'я AIM-8

Вправа 5.6. Побудуйте сигнальне сузір'я сигналу AIM-16. Визначте, у скільки разів відрізняються ширини спектрів сигналів AIM-16 і AIM-8.

5.5 Одновимірні смугові сигнали цифрової модуляції

У сигналів M -рівневої амплітудної модуляції (АМ- M) ($M \geq 2$) і двійкової фазової модуляції (ФМ-2) канальними символами є радіоімпульси:

$$s_i(t) = a_i A(t) \sqrt{2} \cos(2\pi f_0 t), \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (5.31)$$

де a_i – число, що відображає $n = \log_2 M$ біт, які передаються символом $s_i(t)$;

$A(t)$ – функція, що визначає форму радіоімпульсів, її максимальне значення дорівнює 1;

f_0 – частота радіоімпульсів.

Оскільки каналні символи відрізняються лише одним коефіцієнтом a_i , то сигнальні сузір'я цих видів модуляції представляються в одновимірному просторі, а самі модульовані сигнали називаються одновимірними. На рис. 5.14 наведено сигнальні сузір'я сигналів ФМ-2, АМ-2 і АМ-4 із вказівкою модуляційних кодів.

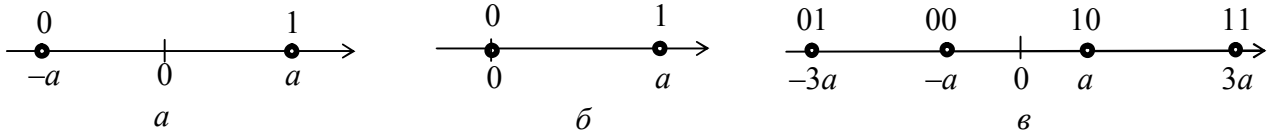


Рисунок 5.14 – Сигнальні сузір'я сигналів: а – ФМ-2; б – АМ-2; в – АМ-4

Часові діаграми каналних символів, які розглядаються, наведені на рис. 5.15. Лише для наочності при побудові прийнято, що $A(t)$ – П-імпульс тривалості, що дорівнює тактовому інтервалу, а гармонічне коливання – синусоїда. Аналогічно розглянутому, можна побудувати сигнальні сузір'я й часові діаграми для сигналів АМ-8, АМ-16 тощо.

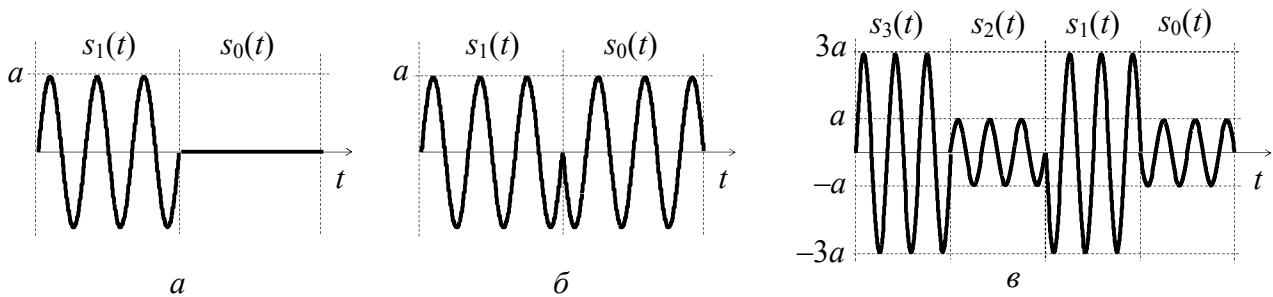


Рисунок 5.15 – Часові діаграми послідовності каналних символів: а – АМ-2; б – ФМ-2; в – АМ-4

Спектр імпульсу-переносника $A(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t)$, на основі якого будуються каналні символи (5.31), розглянуто вище. Отже, **ширина спектра сигналів АМ-М і ФМ-2** визначається співвідношенням (5.28). З виразу (5.28) випливає важливий висновок – збільшення числа позицій сигналу АМ-М при фіксованій швидкості сигналу R дозволяє зменшити ширину спектра сигналу.

Розглянемо схему формування сигналів АМ-М і ФМ-2. З порівняння виразів (5.29) і (5.31) випливає, що у сигналів АІМ-М імпульс-переносник $A(t)$, а у смугових сигналів імпульс-переносник $A(t)\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t)$. Таким чином, схема формування одновимірних смугових сигналів (модулятор) будується на основі схеми рис. 5.10 з доповненням генератором G несінного коливання $\sqrt{2}\cos(2\pi f_0 t)$ і перемножувачем \times (рис. 5.16).

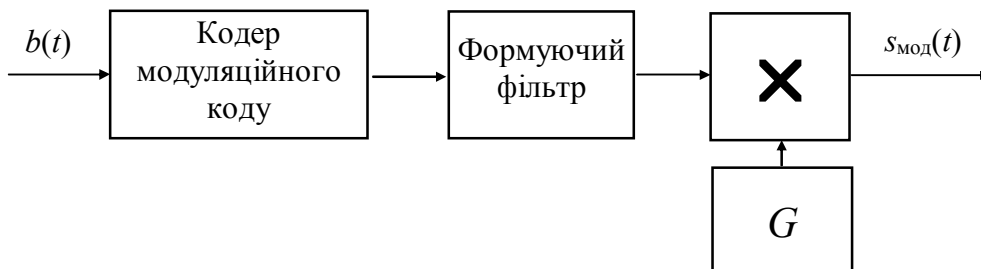


Рисунок 5.16 – Модулятор одновимірних смугових сигналів

Отже, на основі аналізу одновимірних смугових сигналів цифрової модуляції стало очевидним, що *назва методу модуляції вказує, яким параметром відрізняються каналні символи*: АМ-М – М сигналів відрізняються амплітудами, ФМ-2 – два сигнали відрізняються початковими фазами (0 і 180°).

Приклад 5.2. Побудуємо часові діаграми сигналів у всіх точках схеми модулятора одновимірних смугових сигналів, поданої на рис. 5.16, за таких умов: $b(t) = \{1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\}$; $T_6 = 0,5$ с; $\alpha = 0$; вид модуляції АМ-4.

Поставлене завдання будемо вирішувати за допомогою середовища Matlab. При написанні відповідного програмного коду (додаток В) прийнято, що $A(t)$ описується залежністю $\sin x/x$, а гармонічне коливання – функцією "sin".

На рис. 5.17...5.19 наведено часові діаграми, отримані при виконанні програмного коду додатку В.

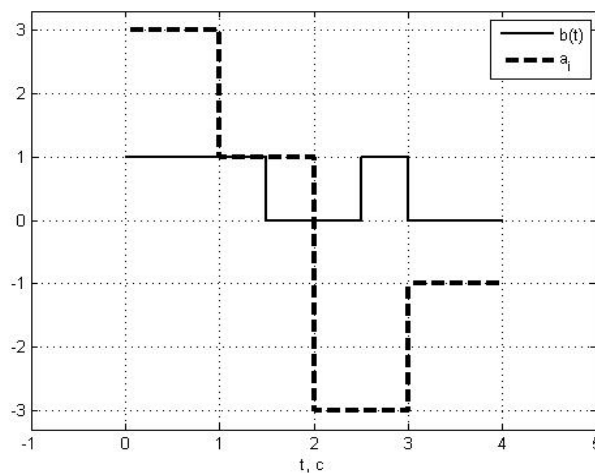


Рисунок 5.17 – Цифровий сигнал та сигнал на виході КМК

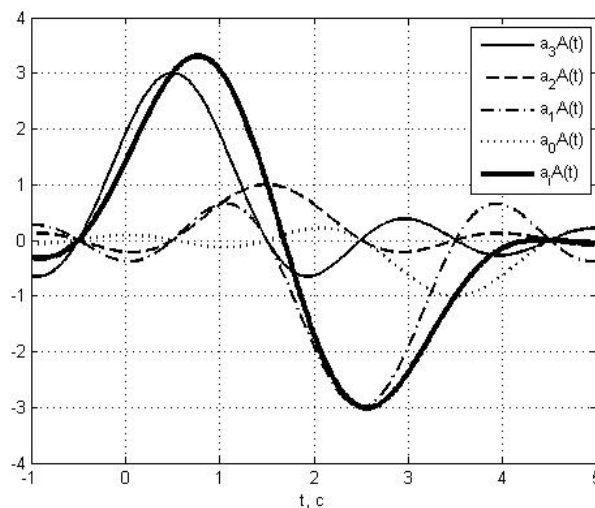


Рисунок 5.18 – Результат фільтрації окремих імпульсів з виходу КМК та їх сума

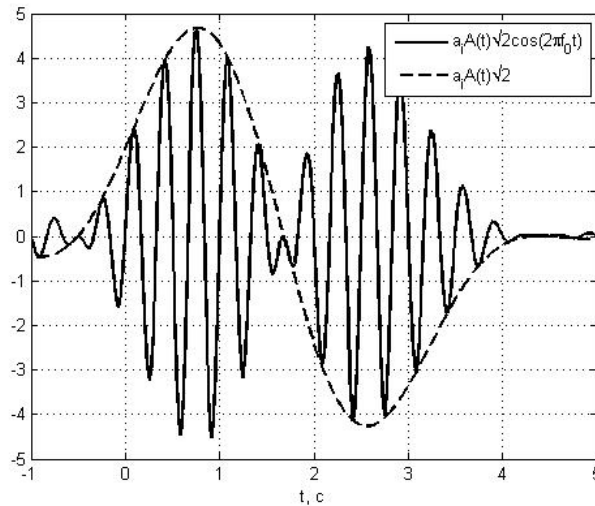


Рисунок 5.19 – Сигнал АМ-4 та фільтрована послідовність імпульсів з виходу КМК

Вправа 5.7. Використовуючи середовище Matlab або інше за аналогією до прикладу 5.7 побудуйте часові діаграми, аналогічні тим, що зображені на рис. 5.17 – 5.19, при іншому цифровому сигналі та іншому числі каналних символів з відповідним модуляційним кодом.

5.6 Двовимірні смугові сигнали цифрової модуляції

У сигналів M -рівневої фазової модуляції (ФМ- M) ($M \geq 4$) і M -рівневої амплітудно-фазової модуляції (АФМ- M) каналні символи описуються сумою косинусного й синусного радіоімпульсів:

$$s_i(t) = a_{ci} \sqrt{2} A(t) \cos 2\pi f_0 t + a_{si} \sqrt{2} A(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (5.32)$$

де a_{ci} , a_{si} – пари коефіцієнтів, що спільно відображають інформацію;

$A(t)$ – імпульс зі спектром «корінь зі спектра Найквіста»;

f_0 – частота радіоімпульсів.

Оскільки кожний каналний символ описується двома коефіцієнтами a_{ci} і a_{si} , то сигнальні сузір'я цих видів модуляції представляються у двовимірному просторі, а самі модульовані сигнали називаються двовимірними.

Сума косинусного й синусного радіоімпульсів однакових форм в (5.32) може бути замінена одним радіоімпульсом такої ж форми з амплітудним множником A_i й початковою фазою φ_i , що визначаються:

$$A_i = \sqrt{a_{ci}^2 + a_{si}^2}, \quad \varphi_i = -\arctg \frac{a_{si}}{a_{ci}}, \quad i = 0, 1, \dots, M-1. \quad (5.33)$$

Канальні символи сигналів ФМ- M мають однакові амплітудні множники $A_i = a$ для всіх i , а їхні початкові фази φ_i відрізняються з кроком $2\pi/M$. На рис. 5.20 наведені сигнальні сузір'я сигналів ФМ-4, ФМ-8 і ФМ-16 з вказівкою модуляційних кодів Грея.

Канальні символи сигналів АФМ- M відрізняються або амплітудними множниками A_i , або початковими фазами φ_i , або амплітудними множниками й

початковими фазами одночасно. На рис. 5.21 наведено сузір'я 16-рівневої квадратурної амплітудної модуляції (КАМ-16). Сигнали КАМ-М є окремими випадками сигналів АФМ-М. До сигналів КАМ-М відносять сигнали АФМ-М, в яких точки сигнального сузір'я знаходяться у вузлах квадратних решіток. Така структура сузір'я надає певні зручності при демодуляції.

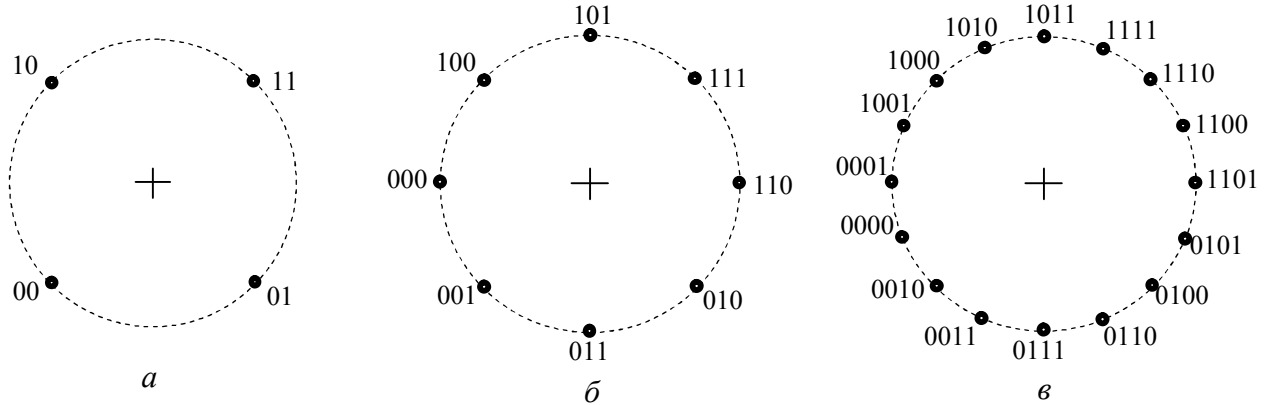


Рисунок 5.20 – Сигнальні сузір'я сигналів: а – ФМ-4; б – ФМ-8; в – ФМ-16

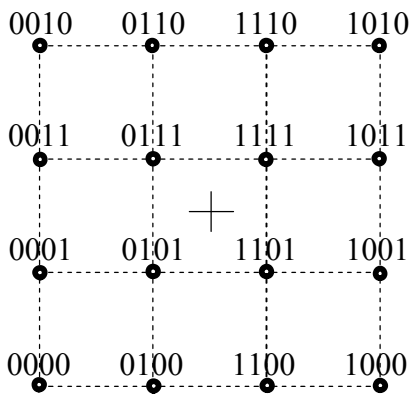


Рисунок 5.21 – Сигнальне сузір'я КАМ-16

На практиці використовуються наступні сигнали КАМ-М: КАМ-4 (те ж саме, що ФМ-4), КАМ-8, КАМ-16, КАМ-64, КАМ-256, КАМ-1024.

Сигнали, описувані виразом (5.32), є сумою двох незалежних БМ сигналів з однаковими амплітудними спектрами, які визначаються спектром сигналу $A(t)$. Тому **ширина спектра сигналу у випадку ФМ-М і АФМ-М** так само, як і у випадку АМ-М і ФМ-2, описується виразом (5.28).

Розглянемо схему формування сигналів ФМ-М і АФМ-М. З порівняння виразів (5.32) і (5.31) випливає, що схема формування двовимірних смугових сигналів (модулятор) будується на основі схеми рис. 5.16 з доповненням другим підканалом ідентичної структури і суматором (рис. 5.22). КМК ставить у відповідність $n = \log_2 M$ вхідним бітам два П-імпульси з амплітудами a_{ci} і a_{si} ; П-імпульси фільтруються ФФ, щоб отримати імпульси $a_{ci}A(t)$ і $a_{si}A(t)$, які надходять на входи балансних модуляторів; отримані модульовані сигнали підсумовуються.

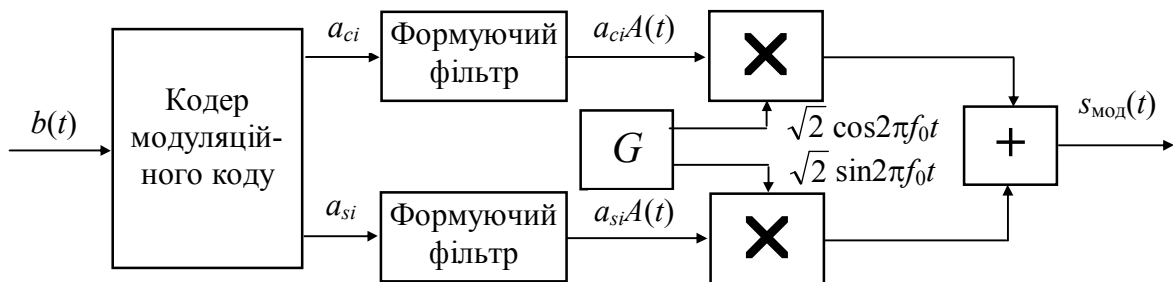


Рисунок 5.22 – Модулятор двовимірних смугових сигналів

Таким чином, знову переконалися, що назва методу цифрової модуляції вказує яким параметром (або якими параметрами) відрізняються каналні символи: ФМ-М – М сигналів відрізняються початковими фазами, АФМ-М – М сигналів відрізняються амплітудами й/або початковими фазами.

До двовимірних сигналів відносяться також **сигнали двійкової частотної модуляції (ЧМ-2)**. З назви модуляції випливає, що каналні символи – це радіоімпульси, що відрізняються частотами:

$$\begin{aligned} s_0(t) &= aA(t)\sqrt{2} \cos(2\pi(f_0 - \Delta f/2)t + \varphi_0), \\ s_1(t) &= aA(t)\sqrt{2} \cos(2\pi(f_0 + \Delta f/2)t + \varphi_1), \end{aligned} \quad (5.34)$$

де $s_0(t)$ – каналний символ для передавання символу 0;

$s_1(t)$ – каналний символ для передавання символу 1;

f_0 – середня частота радіоімпульсів;

Δf – рознесення частот;

$A(t)$ – функція, що визначає форму радіоімпульсів;

a – коефіцієнт, що визначає енергію сигналів;

φ_0, φ_1 – початкові фази імпульсів.

Такі каналні символи використовувались у модуляторах ЧМ-2 протягом багатьох десятиліть завдяки наступній простоті: якщо спектри радіоімпульсів $s_0(t)$ і $s_1(t)$ не перекриваються, то їх можна розділити під час демодуляції при довільних початкових фазах φ_0 і φ_1 , і немає потреби забезпечувати певні співвідношення між φ_0 і φ_1 .

Якщо спектри сигналів $s_0(t)$ і $s_1(t)$ не перекриваються, то такі сигнали ортогональні. Перейдемо до векторного подання каналних символів

$$\bar{s}_i = a_i \bar{\psi}_0 + b_i \bar{\psi}_1, \quad (5.35)$$

де

$$\begin{aligned} \psi_0(t) &= A(t)\sqrt{2} \cos(2\pi(f_0 - \Delta f/2)t + \varphi_0), \\ \psi_1(t) &= A(t)\sqrt{2} \cos(2\pi(f_0 + \Delta f/2)t + \varphi_1). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Модуляційний код, який робить еквівалентними записи (5.36) і (5.35), наведено у табл. 5.1. На основі виразу (5.35) і табл. 5.1 сигнальне сузір'я сигналу ЧМ-2 показано на рис. 5.23. Тут імпульси $\psi_0(t)$ і $\psi_1(t)$ утворюють базис простору сигналів.

Таблиця 5.1 – Модуляційний код ЧМ-2

i	a_i	b_i
0	a	0
1	0	a

Для того, щоб ширина спектрів радіоімпульсів була мінімальною й не було міжсимвольної інтерференції, імпульс $A(t)$ повинен мати спектр «корінь зі спектра Найквіста». У такому випадку можна вважати, що спектр сигналу $s_{\text{ЧМ-2}}(t)$ є сумою спектрів двох радіоімпульсів частот $f_0 - \Delta f/2$ і $f_0 + \Delta f/2$. На рис. 5.24 представлено нормований спектр сигналу ЧМ-2, з якого випливає, що рознесення частот буде мінімальним, коли спектри радіоімпульсів примикають один до одного, і дорівнює:

$$\Delta f_{\min} = \frac{1 + \alpha}{T}, \quad (5.37)$$

де T – тактовий інтервал, що дорівнює T_0 .

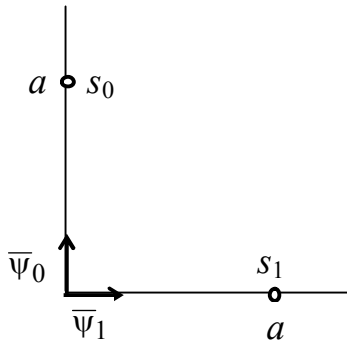


Рисунок 5.23 – Сигнальне сузір'я

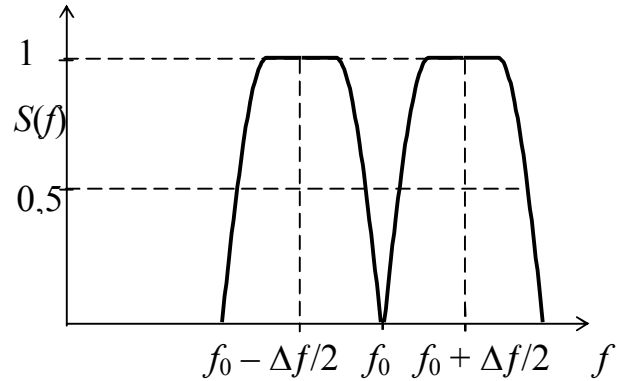


Рисунок 5.24 – Спектр сигналу ЧМ-2 на основі імпульсів Найквіста

Тоді **ширина спектра сигналу ЧМ-2**:

$$\Delta F_{\text{ЧМ-2}} = \Delta f_{\min} + \frac{1 + \alpha}{T} = \frac{2(1 + \alpha)}{T} = 2R(1 + \alpha), \quad (5.38)$$

вона вдвічі більша ширини спектра сигналів АМ-2 і ФМ-2.

Із запису (5.36) і табл. 5.1 випливає схема модулятора сигналу ЧМ-2 (рис. 5.25). Формування сигналу ЧМ-2 відрізняється від формування сигналів ФМ-М роботою кодера модуляційного коду й тим, що частоти опорних коливань генераторів у балансних модуляторах відрізняються на величину $\Delta f/2$ від частоти несінного коливання.

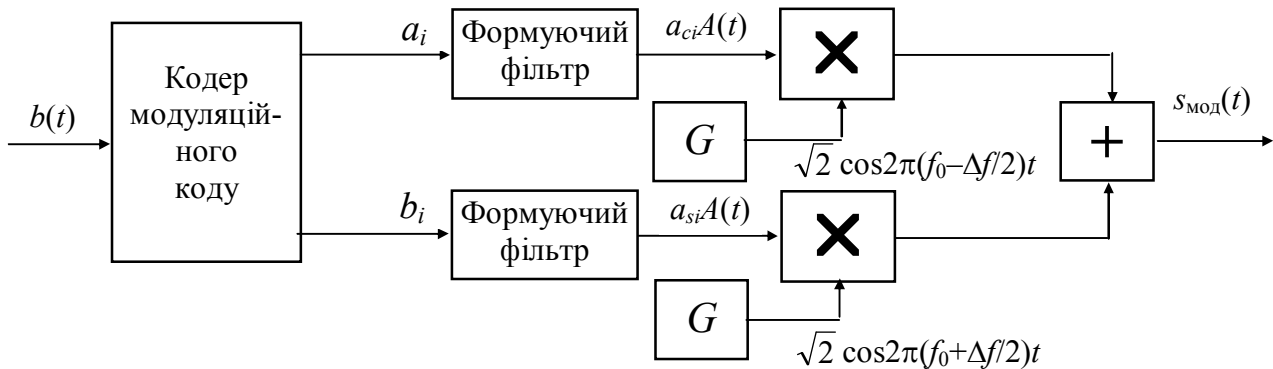


Рисунок 5.25 – Модулятор сигналу ЧМ-2, якщо каналними символами є імпульси Найквіста

Недоліками сигналу ЧМ-2 на основі імпульсів Найквіста є: непостійна об'ємна модульованого сигналу і надто широкий спектр сигналу. Вказані недоліки можна суттєво зменшити, якщо використати каналні символи (5.34), коли функція $A(t)$ – П-імпульс тривалості T з амплітудою $\sqrt{1/T}$. Нехай $\varphi_0 = \varphi_1 = 0$. Легко впевнитись, що у цьому разі скалярний добуток сигналів $s_0(t)$ і $s_1(t)$:

$$(s_0, s_1) = a^2 \frac{\sin 2\pi\Delta f T}{\pi\Delta f T}. \quad (5.39)$$

Отже, каналні символи (5.34) ортогональні, коли рознесення частот

$$\Delta f = \frac{k}{2T}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (5.40)$$

Розглянемо випадок, $k = 1$, тобто $\Delta f = 0,5/T$. Сигнал ЧМ-2 на одному тактовому інтервалі записується

$$s(t) = a\sqrt{2/T} \cos(2\pi f_0 t \pm \pi\Delta f t), \quad 0 \leq t < T, \quad (5.41)$$

де знак «+» відповідає $s_1(t)$, а знак «-» відповідає $s_0(t)$.

Із (5.41) видно, що на тактовому інтервалі має місце лінійна зміна фази несінного коливання $\cos 2\pi f_0 t$, а у момент T набіг фази складає $\pi/2$.

Модуляція ЧМ-2 називається модуляцією мінімального зсуву (ММЗ) у разі виконання наступних умов:

1. У каналних символів (5.34) функція $A(t)$ – П-імпульс тривалості T .
2. Рознесення частот $\Delta f = 0,5/T$.
3. Модульований сигнал формується без “розриву” фази.

Остання умова реалізується наступним чином: фаза несінного коливання $\cos 2\pi f_0 t$ на початку наступного тактового інтервалу збігається з фазою у кінці попереднього тактового інтервалу, повинно бути накопичення фази без “розриву”. Для цього символи цифрового сигналу відображаються у П-імпульси тривалості T і амплітуди d_k (k – номер тактового інтервалу): $1 \rightarrow d_k = 1$, $0 \rightarrow d_k = -1$. Тоді зміну фази $\Delta\varphi(t)$ без “розриву” для будь-якого моменту часу $t = nT + \Delta t$ можна записати

$$\Delta\varphi(t) = \sum_{k=0}^n d_k \frac{\pi}{2} + d_{n+1} \pi\Delta f \Delta t. \quad (5.42)$$

Тут П-імпульси амплітуди d_k виступають у ролі множників до функції $\pi\Delta f \Delta t$. Для первинного цифрового сигналу $b(t) = \{1, 0, 0, 1\}$ на рис. 5.26 наведено зміну фази $\Delta\varphi(t)$ без “розриву”.

Сигнал ММЗ на нескінченному інтервалі записується

$$s_{\text{ММЗ}}(t) = a\sqrt{2/T} \cos(2\pi f_0 t + \Delta\varphi(t)), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (5.43)$$

де $\Delta\varphi(t)$ – зміна фази, яка визначається виразом (5.42).

Подамо сигнал $s_{\text{ММЗ}}(t)$ через квадратурні складові:

$$s_{\text{ММЗ}}(t) = a\sqrt{2/T} I(t) \cos 2\pi f_0 t + a\sqrt{2/T} Q(t) \sin 2\pi f_0 t, \quad 0 \leq t < \infty, \quad (5.44)$$

де $I(t) = \cos \Delta\varphi(t)$ – косинусна складова;

$Q(t) = -\sin \Delta\varphi(t)$ – синусна складова.

Для первинного цифрового сигналу $b(t) = \{1, 0, 0, 1\}$ на рис. 5.26 наведено квадратурні складові. Подання сигналу $s_{\text{ММЗ}}(t)$ через квадратурні складові лежить в основі побудови схеми модулятора (рис. 5.27).

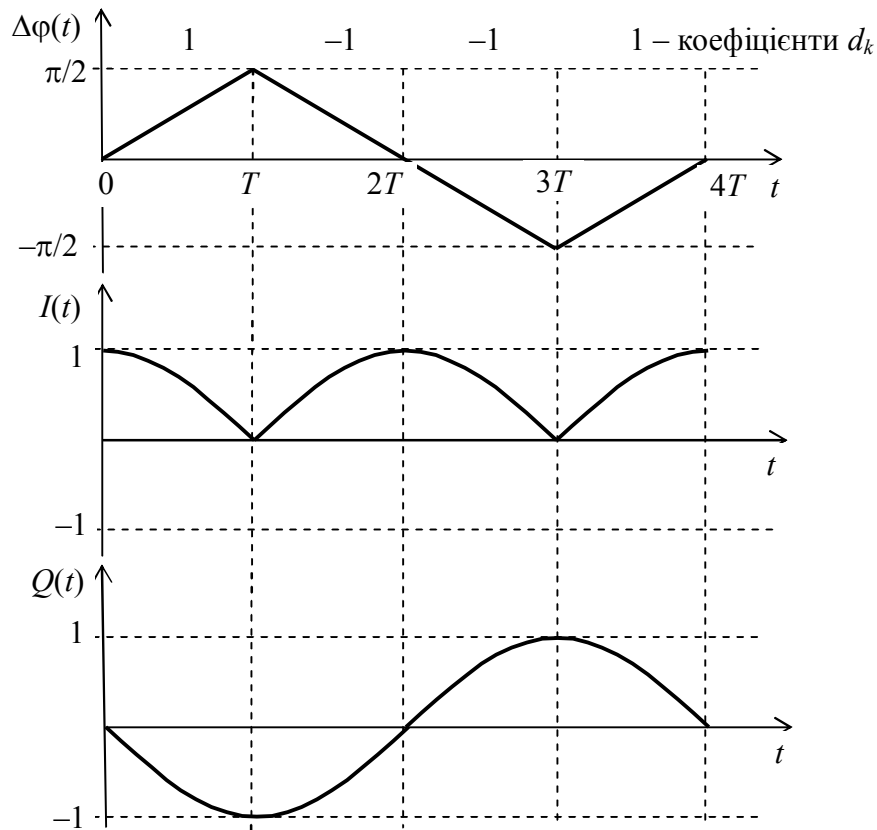


Рисунок 5.26 – До пояснення формування сигналу ММЗ

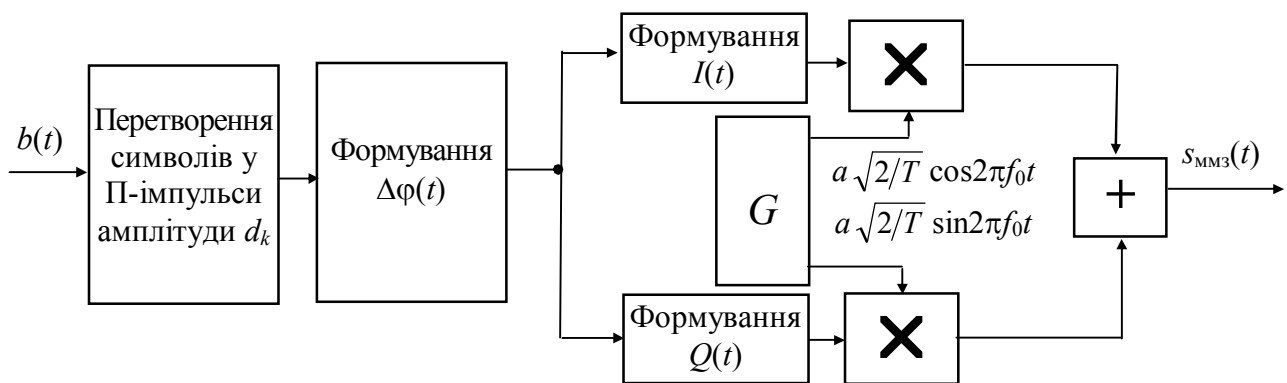


Рисунок 5.27 – Модулятор сигналу ММЗ

Нормований спектр модульованого сигналу ММЗ описується виразом

$$S(f) = \frac{\sqrt{1 + \cos(4\pi(f - f_0)T)}}{\sqrt{2}(1 - (4(f - f_0)T)^2)}. \quad (5.45)$$

Залежність (5.45) наведено на рис. 5.28. Зі збільшенням $|f - f_0|$ спектр убуває зі швидкістю $1/(f - f_0)^2$. Якщо **ширину спектра** $\Delta F_{\text{ММЗ}}$ визначити за першими нулями залежності (5.43), то

$$\Delta F_{\text{ММЗ}} = 1,5/T = 1,5R. \quad (5.46)$$

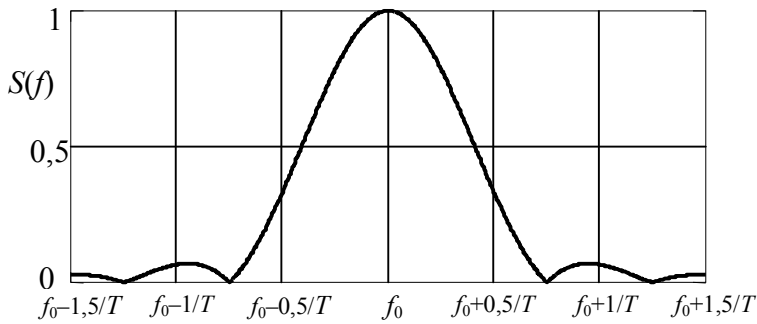


Рисунок 5.28 – Спектр сигналу ММЗ

Збільшення швидкості убування спектра можна досягти шляхом згладжування “зломів” функції $\Delta\phi(t)$. Досягається це у схемі модулятора (рис. 5.27) пропусканням П-імпульсів з виходу схеми перетворення символів у П-імпульси через ФНЧ. Так, у відповідності до стандарту GSM

на системи мобільного зв'язку використовується ММЗ і гауссів фільтр (фільтр, АЧХ якого описується гауссовою залежністю). Такий метод модуляції отримав назву гауссова модуляція мінімального зсуву (ГММЗ).

Приклад 5.3. Побудуємо часові діаграми сигналів у всіх точках схеми модулятора сигналу ЧМ-2, поданої на рис. 5.25, за таких умов: $b(t) = \{1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\}$; $T_6 = 1$ с; $\alpha = 0$.

Як і в попередньому прикладі поставлене завдання будемо вирішувати, використовуючи середовище Matlab. Відповідний програмний код наведено в додатку Г, а результати його виконання наведено на рис. 5.29...5.31.

Вправа 5.8. Використовуючи середовище Matlab або інше за аналогією до прикладу 5.3 побудуйте часові діаграми, аналогічні тим, що зображені на рис. 5.29 – 5.31, при іншому цифровому сигналі.

Вправа 5.9. Визначте у скільки разів відрізняється ширина спектра сигналу ЧМ-2 на основі імпульсів Найквіста та сигналу ММЗ. Використайте граничні та типові значення коефіцієнта скату спектра.

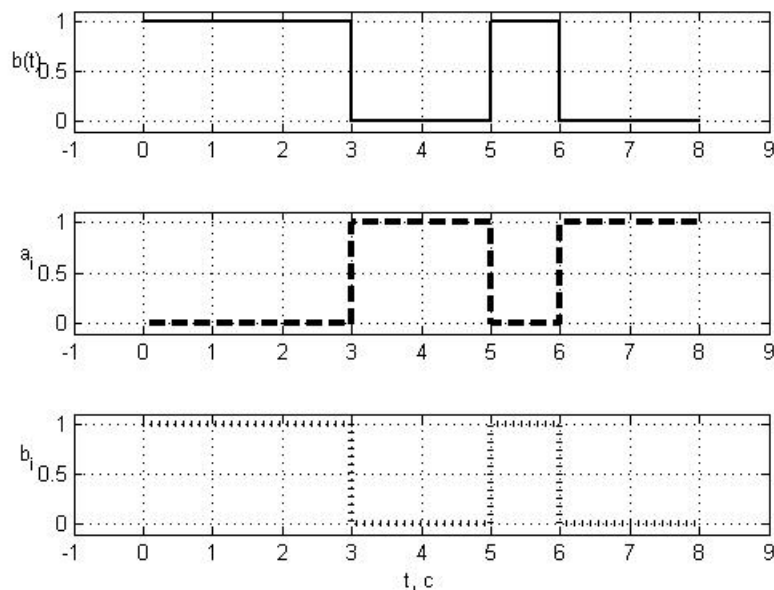


Рисунок 5.29 – Цифровий сигнал та сигнал на виходах КМК

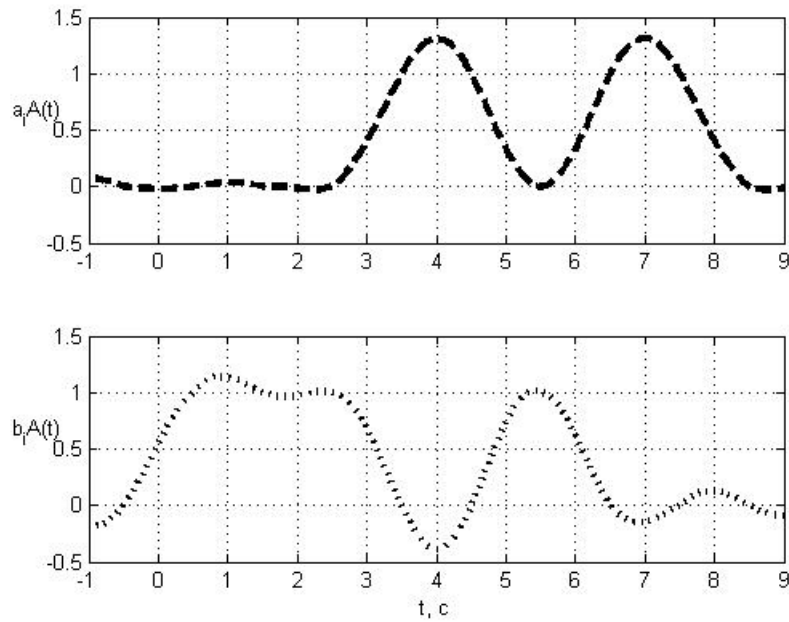


Рисунок 5.30 – Фільтровані послідовності імпульсів з виходів КМК

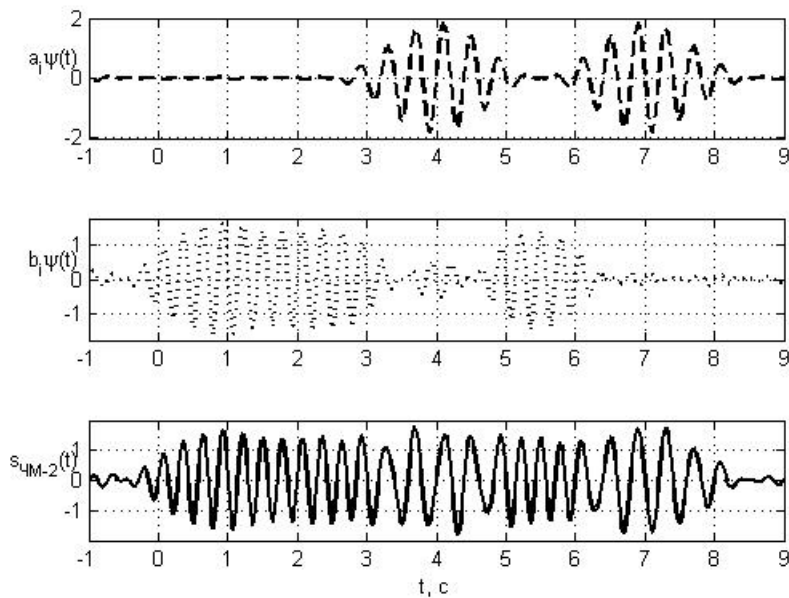


Рисунок 5.31 – Сигнали на виходах перемножувачів та модульований сигнал ЧМ-2

5.7 Дистанційні властивості сигналів цифрової модуляції

Відстань між канальними символами характеризує їх розрізняваність під час демодуляції. Відстань між i -м та j -м канальними символами визначається

$$d(\bar{s}_i, \bar{s}_j) = \sqrt{\int_0^{T_s} (s_i(t) - s_j(t))^2 dt}.$$

Якщо використати аналітичні вирази для канальних символів, то відстань між i -м та j -м канальними символами можна визначити за їх координатами:

– для одновимірних сигналів виразом

$$d(s_i, s_j) = |a_i - a_j|, \quad i, j = 0, 1, \dots, M-1, i \neq j; \quad (5.47)$$

– для двовимірних сигналів виразом

$$d(s_i, s_j) = \sqrt{(a_{ci} - a_{cj})^2 + (a_{si} - a_{sj})^2}, \quad i, j = 0, 1, \dots, M-1, i \neq j. \quad (5.48)$$

Для порівняння різних видів модуляції використовують *мінімальну відстань*

$$d = \min_{i,j} d(s_i, s_j). \quad (5.49)$$

Відстань d не є фізичним параметром, тому передусім необхідно виразити її через фізичні параметри. Параметром, зручним для порівняння різних видів модуляції, є **середня енергія сигналу, що витрачається на передавання одного біта, E_6** . Значення E_6 виражається через фізичні параметри

$$E_6 = P_s T_6 = P_s / R. \quad (5.50)$$

Порядок визначення мінімальної відстані наступний.

1. Визначаємо візуально на сигнальному сузір'ї мінімальну відстань між канальними символами і позначаємо її d .

2. Виражаємо координати канальних символів на сигнальному сузір'ї через мінімальну відстань d .

3. Визначаємо енергії канальних символів:

– для одновимірних сигналів

$$E_i = a_i^2, \quad i = 0, 1, \dots, M-1; \quad (5.51)$$

– для двовимірних сигналів

$$E_i = a_{ci}^2 + a_{si}^2, \quad i = 0, 1, \dots, M-1. \quad (5.52)$$

4. Визначаємо середню енергію канального символу

$$E_{\text{сеп}} = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E_i. \quad (5.53)$$

Визначення $E_{\text{сеп}}$ як середнє арифметичне випливає з того, що двійкові символи є рівноймовірними, однакову ймовірність $1/M$ мають і канальні символи.

5. Визначаємо енергію, що витрачається на передавання одного біта,

$$E_6 = E_{\text{сеп}} / n, \quad (5.54)$$

де n – число біт, що передається одним канальним символом.

6. Оскільки після проведення перерахованих дій отримаємо значення E_6 , виражене через d , то на цьому кроці необхідно виразити d через E_6 і визначити чисельне значення d , застосувавши формулу (5.50).

При порівнянні мінімальних відстаней між канальними символами різних методів модуляції слід враховувати, що, чим більша відстань, тим вища ймовірність правильної демодуляції канальних символів.

При порівнянні ширини спектрів сигналів різних методів модуляції слід враховувати, що, чим ширший спектр, тим більший вимагається необхідний частотний ресурс каналу зв'язку для передавання сигналу.

Приклад 5.4. Для сигналів ФМ-4 та ФМ-8 визначимо і порівняємо мінімальні відстань.

З сигнальних сузір'їв (рис. 5.20, а, в) видно, що мінімальна відстань між канальними символами – це відстань від довільної точки сигнального сузір'я до найближчих точок.

З сигнального сузір'я ФМ-4 видно, що $d = 2a$. Тепер виразимо координати усіх точок через величину d та результат занесемо до табл. 5.2. Також до цієї таблиці заносимо значення енергії канальних символів розраховані відповідно до виразу (5.52).

Таблиця 5.2 – Координати канальних символів сигналу ФМ-4

s_i	Кодова комбінація	a_{ci}	a_{si}	E_i
s_1	01	$0,5d$	$0,5d$	$0,5d^2$
s_0	00	$-0,5d$	$0,5d$	$0,5d^2$
s_2	10	$-0,5d$	$-0,5d$	$0,5d^2$
s_3	11	$0,5d$	$-0,5d$	$0,5d^2$

Таблиця 5.3 – Координати канальних символів сигналу ФМ-8

s_i	Кодова комбінація	a_{ci}	a_{si}	E_i
s_1	001	$1,31d$	0	$1,71d^2$
s_0	000	$0,93d$	$0,93d$	$1,71d^2$
s_2	010	0	$1,31d$	$1,71d^2$
s_3	011	$-0,93d$	$0,93d$	$1,71d^2$
s_7	111	$-1,31d$	0	$1,71d^2$
s_6	110	$-0,93d$	$-0,93d$	$1,71d^2$
s_4	100	0	$-1,31d$	$1,71d^2$
s_5	101	$0,93d$	$-0,93d$	$1,71d^2$

У випадку сигналу ФМ-8 через величину d варто спочатку виразити радіус кола r , на якому лежать точки сигнального сузір'я. Для цього розглянемо рівнобедрений трикутник, який утворюється початком координат на сигнальному сузір'ї та канальними символами з початковою фазою 135° та 180° . Основа цього трикутника дорівнює d , дві інші сторони r . Висота рівнобічного трикутника ділить його основу навпіл, таким чином маємо два прямокутних трикутника. Кут, що знаходиться біля початку координат дорівнює $22,5^\circ$. Відповідно до визначення функції синус можемо записати $\sin(22,5^\circ) = (d/2)/r$, виразимо звідси $r = d/(2\sin(22,5^\circ)) = 1,31d$. Тепер легко знайти координати канальних символів (табл. 5.3), як координати точок, що лежать на колі

$$a_{ci} = r\cos(\varphi_i), \quad a_{si} = r\sin(\varphi_i), \quad (5.55)$$

де φ_i – початкова фаза i -го канального символу.

Очевидно, що середня енергія в обох випадках дорівнює енергії довільного канального символу: при ФМ-4 $E_{\text{сер}} = 0,5d^2$, при ФМ-8 $E_{\text{сер}} = 1,71d^2$. Пояснюється це тим, що координати канальних символів рівновіддалені від початку координат.

Тепер за виразом (5.54) визначимо енергію, що витрачається на передавання одного біту:

при ФМ-4

$$E_6 = 0,5d^2/2 = 0,25d^2,$$

при ФМ-8

$$E_6 = 1,71d^2/3 = 0,57d^2.$$

І в кінці виражаємо d через E_6

при ФМ-4

$$d = 2\sqrt{E_6},$$

при ФМ-8

$$d = 1,33\sqrt{E_6}.$$

Порівнюючи отримані мінімальні відстані бачимо, що вони відрізняються у 1,5 раза.

Приклад 5.5. Визначимо у скільки разів відрізняються значення ширини спектра сигналів ФМ-4 та ФМ-8.

Відповідно до виразу (5.28) при фіксованій швидкості цифрового сигналу ширина спектра сигналів різних видів цифрової модуляції відрізняється лише множителем у знаменнику $\log_2 M$. Таким чином, ширина спектра сигналу ФМ-8 менша ширини спектра сигналу ФМ-4 у

$$\frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ раза.}$$

Отже, за рахунок збільшення числа рівнів модульованого сигналу (кількості канальних символів) зменшується ширина його спектра, однак зменшується і відстань між канальними символами, тобто погіршується їх розрізняючість під час демодуляції, що проявляється збільшенням ймовірності помилок у демодульованому сигналі.

Вправа 5.10. Задано двійкові сигнали АМ-2, ФМ-2 та ЧМ-2. Побудуйте сигнальні сузір'я заданих сигналів. Визначте величину відстані, виражену через середню енергію модульованого сигналу, що витрачається на передавання одного біта. Порівняйте отримані результати. Порівняйте у скільки разів відрізняються значення ширини спектра заданих сигналів.

Вправа 5.11. Виконати завдання вправи 5.8 для сигналів ФМ-16 та КАМ-16.

5.8 Широкопasmові сигнали

Широкопasmовими називають **сигнали**, ширина спектра яких набагато більша мінімальної смуги частот, необхідної для передавання цифрового сигналу заданої швидкості:

$$\Delta f_{\text{шс}} \gg \Delta f_{\text{мін}}, \quad (5.56)$$

де $\Delta f_{\text{шс}}$ – ширина спектра широкопasmового сигналу (ШСС);

$\Delta f_{\text{мін}}$ – мінімальна смуга частот, яка необхідна для передавання і визначається виразом (5.28) при $\alpha = 0$.

Історія використання ШСС. Широкосмугові сигнали (ШСС) використовуються у системах електрозв'язку, починаючи з 50-х років. Уперше властивості цих сигналів були використані у системах радіозв'язку для усунення ефекту багатопроменевого поширення радіохвиль.

Наступним етапом впровадження ШСС у системах електрозв'язку став початок 90-х років, коли ці сигнали були використані у системах зв'язку з рухомими об'єктами 2-го покоління стандарту IS-95 для реалізації множинного доступу з кодовим розділенням (МДКР), відомою є англomовна аббревіатура CDMA (Code Division Multiple Access). МДКР виявився надзвичайно ефективним у системах зв'язку з рухомими об'єктами, тому системи 3-го покоління CDMA2000 і UMTS також використовують ШСС.

Відомою властивістю ШСС є їхня висока стійкість до вузькосмугових завад, які створюються іншими пристроями радіозв'язку. Із середини 90-х років почалося впровадження безпроводових портів доступу, які дозволяють з'єднати різноманітні пристрої, наприклад, мобільний телефон і комп'ютер. Прикладом такого порту є Bluetooth, що забезпечує з'єднання різноманітних пристроїв у радіусі до 10...20 м. Вказана вище властивість у системах Bluetooth стала в нагоді, оскільки вони використовують вільний від ліцензування діапазон частот і, відповідно, працюють в умовах ненавмисних завад, що створюються іншими системами зв'язку і не тільки (зокрема мікрохвильовими печами).

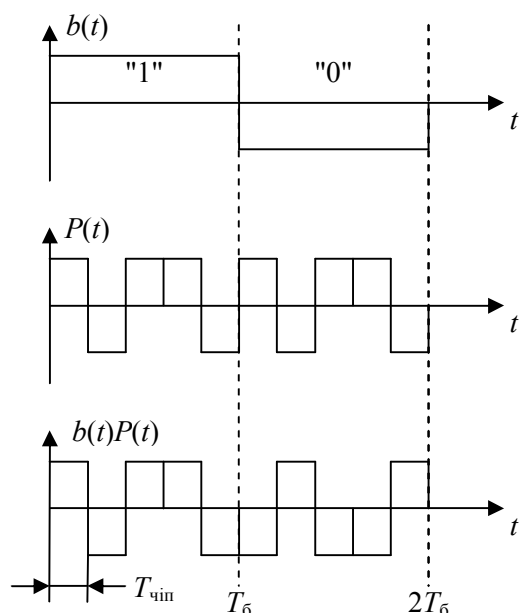


Рисунок 5.32 – Пряме розширення спектра: $b(t)$ – цифровий сигнал; $P(t)$ – ПВП

Метод формування ШСС. Одним з розповсюджених методів формування ШСС є пряме розширення спектра (використовується у системах IS-95 і UMTS).

Принцип прямого розширення спектра полягає в тому, що інформаційний символ перемножується з так званою псевдовипадковою послідовністю (ПВП), період якої дорівнює тривалості символу $T_с$ (рис. 5.32). Розширення спектра відбувається за рахунок того, що тривалість елемента ПВП, який називають чіпом, значно менша тривалості інформаційного символу, тобто $T_{\text{чип}} \ll T_с$.

Псевдовипадкова послідовність – це певна послідовність двійкових символів,

в якій ймовірність появи будь-якого блока з n символів дорівнює $1/2^n$. Завдяки цій властивості ПВП схожа на випадкову послідовність. Такими ПВП є функції Уолша, m -послідовності й ін.

Після перемноження ЦС і ПВП сигнал подається на вхід звичайного модулятора ФМ-2, на виході якого утворюється ШСС із прямим розширенням спектра:

$$s_{\text{прс}}(t) = b(t)P(t)\sqrt{2}A(t)\cos(2\pi f_0 t), \quad (5.57)$$

де $b(t)$ – цифровий сигнал;

$P(t)$ – ПВП;

$A(t)$ – функція, що визначає форму елемента широкосмугового сигналу;

f_0 – частота несівної.

Схему модулятора сигналу із прямим розширенням спектра наведено на рис. 5.33. Модулятор містить у собі формуючий ФНЧ, завдання якого сформувати імпульси $A(t)$ для передавання чіпів з компактним спектром. Як і раніше АЧХ ФФ вибирається такою, щоб на його виході спектр елемента ПВП був спектром Найквіста. У такому випадку, ширина спектра сигналу із прямим розширенням спектра розраховується:

$$\Delta F_{\text{прс}} = (1 + \alpha) R_{\text{чип}} = (1 + \alpha) NR, \quad (5.58)$$

де $R_{\text{чип}} = 1/T_{\text{чип}}$ – чіпова швидкість, тобто швидкість передавання елементів ПВП;

$R = 1/T_{\text{с}}$ – швидкість цифрового сигналу;

N – число чіпів на один інформаційний символ;

α – коефіцієнт скату спектра Найквіста $0 \leq \alpha \leq 1$.

З виразу (5.58) випливає, що спектр сигналу із прямим розширенням в N раз ширший, ніж сигналу без розширення спектра, тому число N часто називають *коефіцієнтом розширення спектра*.

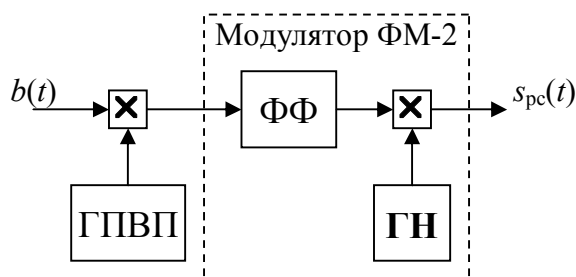


Рисунок 5.33 – Модулятор сигналу з прямим розширенням спектра (ГПВП – генератор ПВП, ГН – генератор несівної)

Властивості ШСС та їх застосування. Розширення спектра дозволяє отримати деякі корисні властивості модульованих сигналів.

Рис. 5.34 демонструє спектральні властивості ШСС. З рисунка випливає, що при розширенні спектра сигналу значення його спектральної густини $G(f)$ зменшуються. Значення спектральної густини ШСС при значному розширенні спектра (у сотні й тисячі разів) на виході каналу зв'язку стають близькими до значення спектральної

густини шуму. У такому випадку *складно відрізнити ШСС від шуму, якщо невідомі параметри сигналу, наприклад, невідома частота несівної, це може використовуватись спеціальними службами та військовими.*

Близькість значень спектральної густини ШСС до значення спектральної густини шуму означає, що ці сигнали не створюють значних завад сигналам без розширення спектра. З іншого боку, рис. 5.34 демонструє вже згадану вище властивість ШСС, а саме стійкість до вузькосмугових завад. З рисунка видно, що спектр вузькосмугового сигналу (крива б) вражає незначну частину спектра ШСС (заштрихована частина), що дозволяє ефективно усунути вплив такої завади режекторним фільтром. Отже, *в одній смузі частот можуть працювати як системи, в яких використовуються ШСС, так і системи, в яких використовуються сигнали без розширення спектра.*

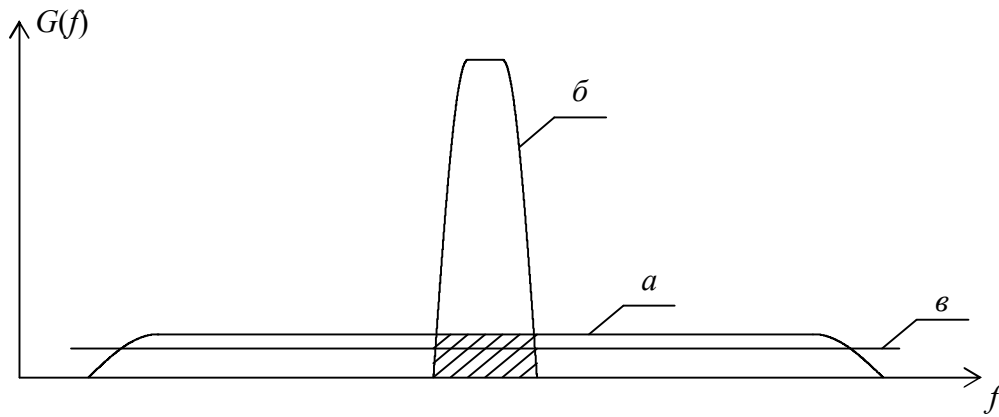


Рисунок 5.34 – Спектри: *a* – широкосмугового сигналу; *б* – сигналу без розширення спектра; *в* – білого шуму

При демодуляції сигналів з розширеним спектром використовуються так звані узгоджені фільтри (УФ), які мають наступні властивості:

- 1) якщо на вхід фільтра подається сигнал, з яким фільтр узгоджений, то вихідна напруга повторює кореляційну функцію цього сигналу;
- 2) якщо на вхід фільтра подається сигнал, з яким фільтр не узгоджений, то вихідна напруга повторює взаємну кореляційну функцію вхідного сигналу й сигналу, з яким фільтр узгоджений.

На рис. 5.35 і 5.36 демонструються кореляційні властивості ШСС. Кореляційна функція $K_s(\tau)$ деякого сигналу $s(t)$ і взаємна кореляційна функція $K_{s_1s_2}(\tau)$ сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$ визначаються виразами (2.10) і (2.15).

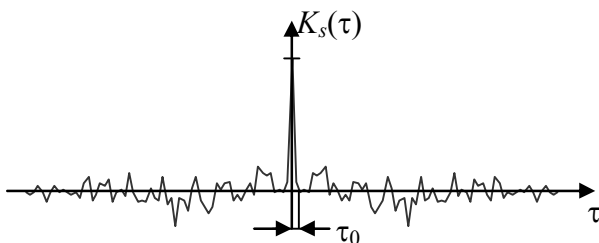


Рисунок 5.35 – Кореляційна функція деякого широкосмугового сигналу

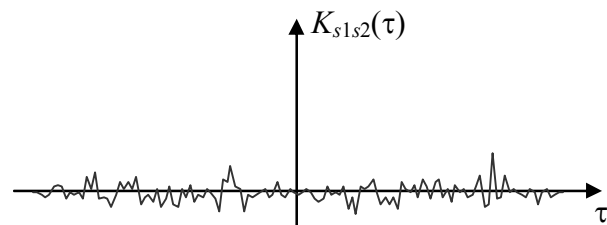


Рисунок 5.36 – Взаємна кореляційна функція двох ШСС

Як видно з рис. 5.35, кореляційна функція ШСС має головний вузький викид і малі за значеннями бічні викиди. Тривалість головного викиду кореляційної функції τ_0 обернено пропорційна смузі частот ШСС, тобто:

$$\tau_0 \approx \frac{1}{\Delta f_{\text{шсс}}}. \quad (5.59)$$

Взаємна кореляційна функція двох ШСС має малі за значеннями викиди (рис. 5.36). Це дозволяє реалізувати кодове розділення сигналів (розділення за формою) – CDMA.

У системах зв'язку із множинним доступом з кодовим розділенням на вхід узгодженого фільтра надходять кілька ШСС різних користувачів $s_i^{(k)}(t)$, які передаються одночасно й в одній і тій же смузі частот:

$$s_{y\Phi}(t) = \sum_{i=1}^{M_k} s_i^{(k)}(t), \quad (5.60)$$

де M_k – кількість активних користувачів.

При розділенні ШСС за формою для виділення з сумарного сигналу (5.60) сигналів окремих користувачів використовуються окремі фільтри, узгоджені з сигналами цих користувачів. Оскільки значення взаємної кореляційної функції ШСС прямують до нуля, то сигнали, з якими фільтр не узгоджений, не будуть створювати значних завад для сигналу, з яким фільтр узгоджений.

Багатопроменеве поширення радіохвиль характерне для систем радіозв'язку й приводить до того, що на виході каналу зв'язку мають місце кілька копій переданого сигналу $s_i^{(k)}(t)$, які попадають в антену приймача у результаті відбиття електромагнітної хвилі від різноманітних об'єктів. Ці копії переданого сигналу попадають на вхід демодулятора з різними затримками t_l :

$$s_{y\Phi}(t) = \sum_{l=1}^L s_i^{(k)}(t - t_l), \quad (5.61)$$

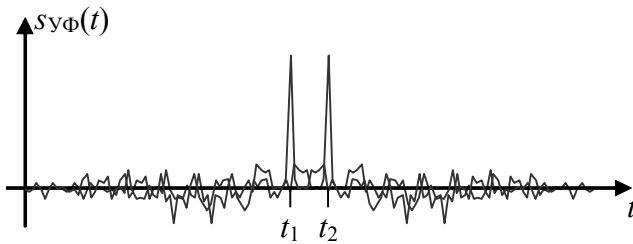


Рисунок 5.37 – Сигнал на виході УФ, якщо на вході сума двох ШСС

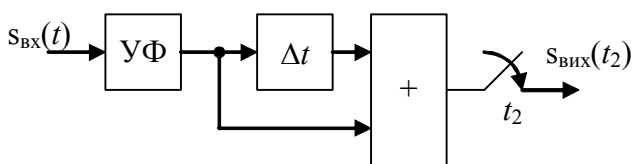


Рисунок 5.38 – Rake-приймач

де l – номер променя; променем називається шлях поширення електромагнітної хвилі;

L – кількість променів.

На виході УФ демодулятора буде спостерігатися сума кореляційних функцій (на рис. 5.37 окремо показані сигнали від двох променів з затримками t_1 і t_2). Оскільки кореляційна функція ШСС має вузький головний викид і малі за значеннями бічні викиди, то сигнали окремих променів можна скласти – обробити Rake-приймачем. Реалізація Rake-приймача для обробки сигналів двох променів зображена на рис. 5.38 ($\Delta t = t_2 - t_1$).

Приклад 5.6. Сигналом КАМ-16 передається цифровий сигнал зі швидкістю 10 Мбіт/с. Функція, що визначає форму радіоімпульсів сигналу КАМ-16, є імпульсом Найквіста з $\alpha = 0,2$. Відношення середніх потужностей сигналу і шуму, який є білим і гауссовим та додається до сигналу в каналі, дорівнює $P_s / P_n = 10$. Визначимо коефіцієнт розширення спектра ШСС, що займає смугу частот сигналу КАМ-16, за умови, що $P_s / (P_n + P_{\text{шис}}) \geq 5$. Швидкість цифрового сигналу, який передається ШСС, 2 Мбіт/с. Потужності сигналу КАМ-16 і ШСС однакові.

Через появу спектральних складових ШСС у смузі частот сигналу КАМ-16 $P_s / (P_n + P_{\text{шсс}})$ має бути не менша 5. Отже, якщо потужність шуму у першому випадку складала 1/10 потужності сигналу КАМ-16, то при одночасному передаванні ШСС і сигналу КАМ-16 сума потужностей шуму і ШСС у смузі частот сигналу КАМ-16 має бути не більша за $1/5 = 2/10$. А отже, потужність ШСС у смузі сигналу КАМ-16 має бути не більша за $0,1P_s$.

Оскільки за умовою потужності сигналів однакові $P_{\text{шсс}} = P_s$, то, очевидно, що

$$\Delta F_{\text{шсс}} \geq 10\Delta F_{\text{КАМ-16}}. \quad (5.62)$$

Ширина смуги частот сигналів обчислюється за формулами

$$\Delta F_{\text{КАМ-16}} = \frac{R(1+\alpha)}{\log_2 M},$$

$$\Delta F_{\text{шсс}} = (1+\alpha)NR.$$

Враховуючи (5.40), отримуємо:

$$N \cdot 2 \cdot 10^6 (1 + 0,2) \geq 10 \frac{10 \cdot 10^6 (1 + 0,2)}{\log_2 16}; \quad N \geq 12,5; \quad \text{прийmemo } N = 16.$$

Значення $N = 16$ обрано, оскільки в практичних додатках найчастіше в якості ПВП використовуються так звані функції Уолша, довжина яких є цілим степенем 2.

Вправа 5.12. ШСС формується за схемою, наведеною на рис. 5.33 ($\alpha = 0,35$). Ставиться задача маскування сигналу на фоні шуму каналу, СГП якого $10^{-6} \text{ В}^2/\text{Гц}$. Визначте параметри ШСС та побудуйте графіки СГП шуму та ШСС. Частоту несівної оберіть самостійно.

5.9 Паралельно-послідовне передавання

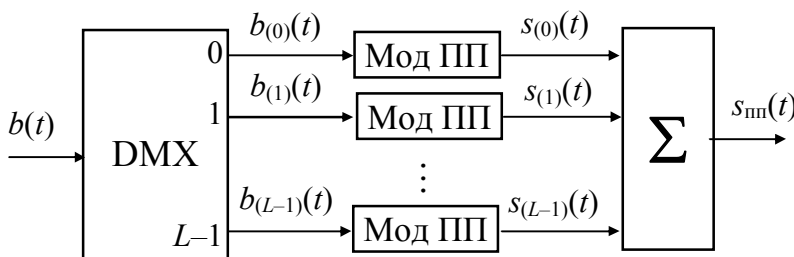


Рисунок 5.39 – Модулятор паралельно-послідовного передавання:

DMX – демультиплексор;

Мод ПП – модулятор послідовного передавання

Як вже вказувалось на початку розд. 5, при паралельно-послідовному передаванні (рис. 5.39) каналом зв'язку одночасно передаються L модульованих сигналів з послідовним передаванням, варіанти якого розглянуті вище. Для цього послідовність двійкових символів демультиплексу-

ється в L паралельних послідовностей $b_{(0)}(t), b_{(1)}(t), \dots, b_{(L-1)}(t)$... На основі кожної з цих послідовностей формуються модульовані сигнали $s_{(0)}(t), s_{(1)}(t), \dots, s_{(L-1)}(t)$ як і при послідовному передаванні. Сума сигналів $s_{(l)}(t), l = 0, 1, \dots, L-1$ утворює модульований сигнал паралельно-послідовного передавання

$$s_{\text{пп}}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} s_{(l)}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{(l)i}^{(k)}(t - kT), \quad (5.63)$$

де $s_{(l)i}^{(k)}(t - kT)$ – i -й символ, що передається l -м підканалом на k -му тактовому інтервалі.

Особливостями паралельно-послідовного передавання є:

- швидкість цифрових сигналів $b_{(l)}(t)$ в L рази нижча, ніж сигналу $b(t)$;
- на виході модулятора одночасно присутні L модульованих сигналів $s_{(l)}(t)$;

- модульовані сигнали окремих підканалів $s_{(l)}(t)$ повинні бути такими, щоб їх можна було розділити із суми (5.63) для роздільної демодуляції; як правило, сигнали окремих підканалів займають різні смуги частот.

Історія використання паралельно-послідовного передавання. На початку створення телефонного зв'язку для передавання розмовних сигналів окремих користувачів необхідні були окремі лінії передавання, що накладало суттєві обмеження на пропускну здатність магістральних ліній передавання. На початку двадцятого століття виникла ідея здійснення паралельного (одночасного) передавання декількох сигналів однією лінією, використовуючи різні смуги використовуваного частотного діапазону – на різних піднесівних, що суттєво спростило і здешевило розв'язання задачі одночасного передавання багатьох повідомлень. Надалі ця ідея також широко використовувалась в так званих радіорелейних лініях багатоканального зв'язку.

На сьогодні здійснювати паралельно-послідовне передавання в цифрових системах передавання в тому сенсі, як це робилося в аналогових системах, як правило, немає потреби, оскільки низькошвидкісні цифрові сигнали від різних користувачів об'єднуються в один високошвидкісний сигнал, який передається на одній несівній. Проте в деяких лініях передавання може виявитись, що їх АЧХ і ФЧХ суттєво відрізняються від характеристик, які забезпечують неспотворене передавання. Таке явище особливо суттєво проявляється в каналах мобільного зв'язку, де мають місце частотно-селективні завмирання, особливо при високих швидкостях цифрових сигналів і, відповідно, великих смугах частот модульованих сигналів.

Спотворення в лініях передавання можуть бути компенсовані еквалайзерами (вирівнювачами), але в умовах швидкої зміни у часі характеристик лінії передавання таке технічне рішення може бути доволі складним або навіть не забезпечувати компенсацію спотворень. Іншим шляхом вирішення вказаної проблеми є паралельно-послідовне передавання у суміжних смугах частот, за умови, що їх ширина менша ширини смуги, в якій спотворення є суттєвими (ширина смуги частот, в межах якої відсутні суттєві спотворення сигналу, називається смугою когерентності та позначається $F_{\text{ког}}$). Проте величина відношення смуги пропускання лінії передавання і смуги, в межах якої спотворення не суттєві, реально може складати сотні і тисячі. Реалізація відповідного обладнання (рис. 5.39) є проблемною, оскільки необхідно мати сотні або тисячі окремих модуляторів і демодуляторів послідовного передавання. Ідея вирішення цієї проблеми з'явилася багато десятиліть тому – це використання для формуван-

ня сигналу з багатьма піднесівними зворотного дискретного перетворення Фур'є (ЗДПФ). Втілити цю ідею в життя змогли лише після відносно недавньої появи цифрових сигнальних процесорів. Формування сигналу з використанням ЗДПФ отримало англomовну назву "Orthogonal Frequency-Division Multiplexing" (OFDM).

Метод формування сигналу OFDM. У випадку послідовного передавання двовимірних смугових сигналів цифрової модуляції каналні символи описуються виразом (5.4). Нехай символи, що передаються різними підканалами, відрізняються частотами піднесівних на Δf , тоді їх можна переписати наступним чином

$$s_{(l)i}(t) = a_{c(l)i} A(t) \sqrt{2} \cos 2\pi(f_0 + l\Delta f)t + a_{s(l)i} A(t) \sqrt{2} \sin 2\pi(f_0 + l\Delta f)t, i = 0, 1, \dots, M-1, l = 0, 1, \dots, L-1. \quad (5.64)$$

Відразу формувати L сигналів з частотами піднесівних $f_0 + l\Delta f$ важко, більш раціонально сформувати сигнали з частотами $l\Delta f$, просумувати їх (формула (5.63)), а потім сигнал $s_{\text{пп}}(t)$ змістити на частоту f_0 . Тому приймаємо: $f_0 = 0$, $A(t)$ – П-імпульс одиничної амплітуди на інтервалі $(0, T)$ та відповідно перепишемо вираз (5.64)

$$s_{(l)i}(t) = a_{c(l)i} \sqrt{2} \cos 2\pi l\Delta f t + a_{s(l)i} \sqrt{2} \sin 2\pi l\Delta f t, i = 0, 1, \dots, M-1, l = 0, 1, \dots, L-1. \quad (5.65)$$

Позначимо пару коефіцієнтів $a_{c(l)i}$ і $a_{s(l)i}$ комплексною величиною $S(l) = a_{c(l)i} + ja_{s(l)i}$, а гармонічні коливання комплексною експонентою, тоді

$$s_{(l)}(t) = \text{Re} \left\{ \sqrt{2} S(l) e^{j2\pi l\Delta f t} \right\}, l = 0, 1, \dots, L-1. \quad (5.66)$$

У виразі (5.66) і далі для наочності записів індекс i та $\sqrt{2}$ опущено.

Нехай на тактовому інтервалі T каналні символи підканалів подаються відліками через інтервал T_d , при цьому $T = LT_d = 1/\Delta f$. Враховуючи прийняте, перепишемо вираз (5.66)

$$s_{(l)}(kT_d) = \text{Re} \left\{ S(l) e^{j\frac{2\pi}{L}lk} \right\}, l = 0, 1, \dots, L-1. \quad (5.67)$$

Якщо у виразі (5.67) замінити l на k , L на N і k на n , то ми отримаємо одну зі складових виразу (2.66) – зворотного дискретного перетворення Фур'є. Очевидно, що формування сигналу з L піднесівними за виразом (2.55) (його дійсна частина) дасть дискретний низькочастотний еквівалент виразу (5.63) (множник $1/N$ опущено)

$$s_{\text{нч пп}}(kT_d) = \text{Re} \left\{ \sum_{l=0}^{L-1} S(l) e^{j\frac{2\pi}{L}lk} \right\}. \quad (5.68)$$

Перед перенесенням спектра сигналу (5.68) в область частоти f_0 має бути здійснене цифро-аналогове перетворення, в результаті якого, з урахуванням прийнятих позначень, отримаємо

$$s_{\text{НЧ III}}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=0}^{L-1} S(l) e^{j2\pi l \Delta f t} \right\}. \quad (5.69)$$

Легко впевнитись у тому, що формування односмугового сигналу з частотою несівної f_0 для *паралельно-последовного передавання* здійснюється за наступним виразом

$$\begin{aligned} s_{\text{III}}(t) &= \operatorname{Re} \left\{ e^{j2\pi f_0 t} \sum_{l=0}^{L-1} S(l) e^{j2\pi l \Delta f t} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=0}^{L-1} S(l) e^{j2\pi l \Delta f t} \right\} \cos 2\pi f_0 t - \operatorname{Im} \left\{ \sum_{l=0}^{L-1} S(l) e^{j2\pi l \Delta f t} \right\} \sin 2\pi f_0 t. \end{aligned} \quad (5.70)$$

Сигнал, сформований за виразом (5.70), називається **OFDM-сигналом**, далі будемо його позначати $s_{\text{OFDM}}(t)$.

На рис. 5.40 показана схема формування OFDM-сигналу, де для зручності використані позначення

$$\begin{aligned} I(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=0}^{L-1} S(l) e^{j2\pi l \Delta f t} \right\} \text{ і } Q(t) = \operatorname{Im} \left\{ \sum_{l=0}^{L-1} S(l) e^{j2\pi l \Delta f t} \right\}, \\ I(k) &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{l=0}^{L-1} S(l) e^{j\frac{2\pi}{L} l k} \right\} \text{ і } Q(k) = \operatorname{Im} \left\{ \sum_{l=0}^{L-1} S(l) e^{j\frac{2\pi}{L} l k} \right\}. \end{aligned}$$

Формування сигналу OFDM відповідно до схеми здійснюється наступними етапами:

- 1) в буфері накопичується $Ln = L \log_2 M$ значень цифрового сигналу, які розбиваються на L груп по $n = \log_2 M$ символів;
- 2) кожна із L груп подається на відповідний КМК, в якому здійснюється відображення n бітів у коефіцієнти a_{ci} і a_{si} ;
- 3) на виході КМК мають місце комплексні амплітуди сигналів різних частотних підканалів; відносно операції ЗДПФ ці амплітуди по суті є коефіцієнтами розкладання в ряд Фур'є сигналу, що буде передаватися ;
- 4) в результаті ЗДПФ паралельно отримують L комплексних відліків сигналу з L піднесівними, які за допомогою процедури зворотної буферизації (позначена як " $^{-1}$ ") перетворюються в послідовний дискретний комплексний сигнал, що складається з дійсної $I(k)$ й уявної $Q(k)$ складових ;
- 5) за допомогою цифро-аналогових перетворювачів послідовності $I(k)$ і $Q(k)$ перетворюються в неперервні сигнали і шляхом множення на ортогональні гармонічні переносники частоти f_0 (5.70) їх спектри переносяться у відповідну смугу частот.

Спектральні і часові характеристики OFDM-сигналів. Слід відзначити, якщо в класичному розумінні паралельне передавання ведеться суміжними, але такими, що не перекриваються, частотними підканалами, то у випадку OFDM-сигналу спектри підканалів перекриваються, проте за рахунок того, що вибрано рознесення частот $\Delta f = 1/T$, підканали можна розділити – їх сигнали є ортогональними, і це підкреслює буква "O" (Orthogonal) в аббревіатурі OFDM.

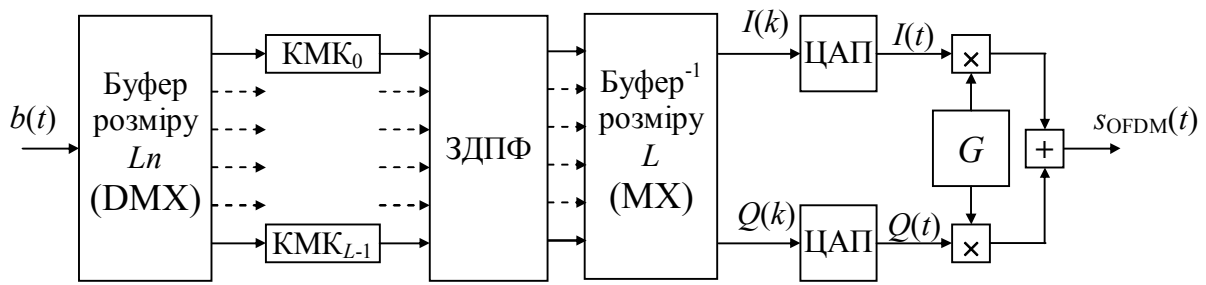


Рисунок 5.40 – Схема формування сигналу OFDM (MX – мультиплексор)

Перекриття спектрів підканалів відбувається з тієї причини (рис. 5.41), що обвідна каналних символів підканалів є П-імпульсом, спектр якого описується залежністю (5.16). Функція $\sin x/x$ спадає повільно, зі швидкістю $1/x$, і теоретично спектр прямує до нуля у нескінченності.

Оскільки на приймальній стороні розділення сигналів підканалів здійснюється прямим дискретним перетворенням Фур'є, то будуть отримані комплексні амплітуди піднесівних. Завдяки рознесенню частот підканалів $\Delta f = 1/T$, максимум спектральної густини сигналу одного підканалу супроводжується нульовими значеннями спектральної густини усіх інших підканалів. Таким чином здійснюється розділення підканалів, незважаючи на їх перекриття.

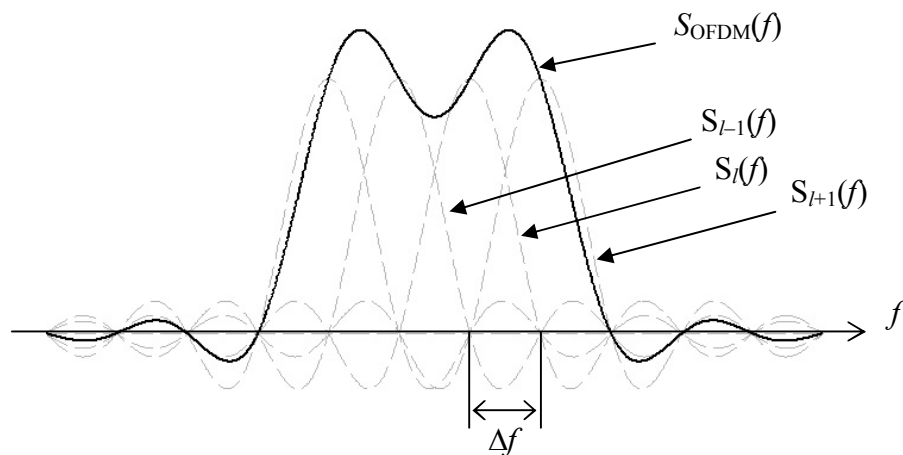


Рисунок 5.41 – Спектральна густина OFDM-сигналу з 4-ма піднесівними

Отримані комплексні амплітуди піднесівних OFDM-сигналу є оцінками комплексних значень, що були сформовані на виходах КМК на рис. 5.40.

Із рис. 5.31 видно, що *затухання спектральної густини OFDM-сигналу поза займаною смугою частот відбувається швидше, ніж у окремих його елементів*. Таке явище має місце через те, що частина «хвостів» від спектральних густин підканалів має додатний знак, частина – від'ємний знак, в результаті вони частково компенсують один одного. При великій кількості підканалів, як це показано на рис. 5.42, затухання хвостів OFDM-сигналу відбувається дуже швидко, а в смузі частот сигналу спектральна густина стає рівномірною та загалом прямує до прямокутної форми.

Отже, *смуга OFDM-сигналу дорівнює сумі смуг усіх підканалів, які можна вважати рівними величині рознесення частот Δf*

$$\Delta F_{\text{OFDM}} = L\Delta f. \quad (5.71)$$

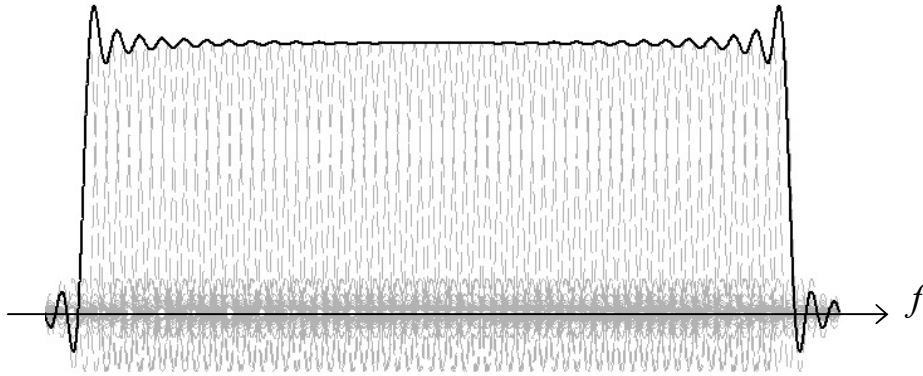


Рисунок 5.42 – Спектральна густина OFDM-сигналу з 64-ма піднесівними

Нагадаємо, що прийнято

$$\Delta f = \frac{1}{T}, \quad (5.72)$$

причому кожний OFDM-символ формується з Ln бітів цифрового потоку, тобто

$$T = T_g L \log_2 M = \frac{L \log_2 M}{R}. \quad (5.73)$$

В результаті отримаємо наступне подання виразу (5.73)

$$\Delta F_{\text{OFDM}} = \frac{R}{\log_2 M}. \quad (5.74)$$

Отже, *теоретично ширина спектра OFDM-сигналу збігається з шириною спектра сигналу з однією несівною при $\alpha = 0$* – має місце ефективне використання частотного ресурсу. Оскільки за межами вказаної смуги частот все ж таки присутні частотні складові сигналу, зазвичай в практичних використаннях передбачається захисний частотний інтервал або деяка кількість крайніх піднесівних не модулюються – вони мають нульові значення.

Приклад 5.7. Необхідно здійснювати передавання цифрового сигналу багатопроменим радіоканалом мобільного користувача методом OFDM.

Вихідні дані: швидкість цифрового сигналу $R = 6$ Мбіт/с; смуга пропускання каналу зв'язку $F_k = 3,5$ МГц; частота несівної $f_0 = 2,5$ ГГц; швидкість переміщення мобільного користувача $v = 30$ км/год; смуга когерентності каналу $F_{\text{ког}} = 80$ кГц.

Необхідно визначити: ширину смуги частот, в якій можливе неспотворене передавання; кількість піднесівних L і рознесення частот між ними Δf ; вид модуляції на піднесівних.

Завдання має три етапи розв'язання.

1. *Визначення ширини смуги частот для неспотвореного передавання.*

Оскільки канал багатопромений, то на модульований сигнал накладається умова – ширина спектра сигналу (підканалу) повинна бути менше смуги когерентності каналу $\Delta f \leq F_{\text{ког}}$, в іншому разі сигнал отримає лінійні спотворення.

Оскільки користувач є мобільним, то тривалість каналних символів повинна бути меншою часу когерентності каналу (аналог смуги когерентності у часовій області): $T \leq T_{\text{ког}}$, в іншому разі буде мати місце так звана мультиплікативна завада.

Враховуючи, що частота і час мають обернено пропорційну залежність, останню умову можна переписати таким чином $\Delta f = 1/T \geq 1/T_{\text{ког}}$, і дві умови об'єднати в одну

$$1/T_{\text{ког}} \leq \Delta f \leq F_{\text{ког}}. \quad (5.75)$$

Час когерентності залежить від швидкості руху мобільного користувача і частоти несінної, вираз, що пов'язує ці параметри, наступний:

$$T_{\text{ког}} = 1/F_{\text{доп}}, \quad (5.76)$$

де $F_{\text{ког}} = v/\lambda$ – зсув частоти сигналу через ефект Доплера,

$\lambda = c/f_0$ – довжина хвилі сигналу;

$c = 3 \cdot 10^8$ м/с – швидкість світла.

З урахуванням (5.76) вираз (5.75) можна переписати

$$F_{\text{доп}} \leq \Delta f \leq F_{\text{ког}}. \quad (5.77)$$

Для того щоб мінімізувати вплив мультиплікативної завади та лінійних спотворень у виразі (5.77) прийемо, що ліва межа значно більше $F_{\text{доп}}$, а права – значно менше $F_{\text{ког}}$, таким чином отримаємо нову умову

$$F_{\text{доп}} \ll \Delta f \ll F_{\text{ког}}. \quad (5.78)$$

Згідно з завданням швидкість мобільного користувача задана в км/год, перерахуємо її в м/с

$$v_{\text{м/с}} = v_{\text{км/год}} \frac{1000}{3600} = 30 \frac{1000}{3600} = 8,3 \text{ м/с}.$$

Визначимо середню довжину хвилі модульованого сигналу

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{2,5 \cdot 10^9} = 0,12 \text{ м}.$$

Тепер знайдемо зсув частот сигналу, викликаний ефектом Доплера

$$F_{\text{доп}} = \frac{8,3}{0,12} = 70 \text{ Гц}.$$

Підставимо отримане значення $F_{\text{доп}}$ і задане $F_{\text{ког}}$ у вираз (5.78)

$$70 \ll \Delta f \ll 80 \cdot 10^3.$$

Знаки «значно більше» замінимо на «більше», а ліву та праву межі збільшимо та зменшимо у 10 разів, відповідно:

$$\min \Delta f = 700 < \Delta f < \max \Delta f = 8 \cdot 10^3.$$

Перший етап завдання виконано.

2. *Визначення кількості піднесівних та рознесення частот між ними.*

Кількість піднесівних дорівнює кількості смуг шириною Δf , що укладаються в смузі пропускання каналу зв'язку $F_{\text{к}}$. В той самий час для того, щоб при

формуванні OFDM сигналу мінімізувати обчислювальне навантаження, кількість піднесівних має бути цілим степенем числа 2.

Знайдемо мінімальне та максимальне значення кількості піднесівних L :

$$\max L = \frac{F_k}{\min \Delta f} = \frac{3,5 \cdot 10^6}{700} = 5000,$$

$$\min L = \frac{F_k}{\max \Delta f} = \frac{3,5 \cdot 10^6}{8 \cdot 10^3} = 0,438 \cdot 10^3 = 438.$$

Щоб не вийти за межі відведеної смуги пропускання каналу необхідно задовольнити умові $\min L \leq L = 2^x \leq \max L$, а також врахуємо, що чим менше L , тим менша обчислювальна складність ДПФ. З ряду цілих степенів числа 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096 – обираємо значення $L = 512$.

Визначимо величину рознесення частот між піднесівними, використовуючи повністю смугу пропускання каналу – приймаючи $\Delta F_{\text{OFDM}} = F_k$:

$$\Delta f = \frac{F_k}{L} = \frac{3,5 \cdot 10^6}{512} = 6,84 \cdot 10^3 \text{ Гц.}$$

3. Визначення виду модуляції на піднесівних.

Метод передавання OFDM – це реалізація паралельно-послідовного методу передавання, відповідно, швидкість цифрового сигналу в кожному підканалі в L разів менша швидкості вихідного цифрового сигналу

$$R_{\text{пк}} = \frac{R}{L} = \frac{6 \cdot 10^6}{512} = 11,72 \cdot 10^3 \text{ біт/с.}$$

За рахунок використання багатопозиційних видів модуляції символна швидкість у кожному підканалі зменшується в $n = \log_2 M$ раз

$$B_{\text{пк}} = R_{\text{пк}} / \log_2 M.$$

Враховуючи, що $B_{\text{пк}} = 1/T = \Delta f$, число рівнів модульованого сигналу M визначається

$$M = 2^{R_{\text{пк}} / \Delta f} = 2^{1,71} = 3,27.$$

Оскільки M має дорівнювати цілому степеню 2, обираємо $M = 4$. Серед вивчених видів модуляції обираємо ФМ-4.

Вправа 5.13. Вирішіть задачу аналогічну прикладу 5.7 за наступних вихідних даних: швидкість цифрового сигналу $R = 2$ Мбіт/с; смуга пропускання каналу зв'язку $F_k = 1,5$ МГц; частота несівної $f_0 = 2,3$ ГГц; швидкість переміщення мобільного користувача $v = 30$ км/год; смуга когерентності $F_{\text{ког}} = 100$ кГц.

Контрольні питання до розділу 5

1. Дайте визначення цифрового сигналу. Який цифровий сигнал називається двійковим, що є його основною характеристикою?
2. Що є причиною відмови від використання імпульсів П-подібної форми при передаванні каналом зв'язку?
3. Якій умові мають задовольняти імпульси з компактним спектром, що передаються каналами зв'язку? Як називаються відповідні імпульси?

4. Що називається "косою симетрією" спектра? Чому в практичних додатках скат спектра імпульсів, що подаються до каналу зв'язку, є згладженим?
5. Наведіть приклад форми імпульсу Найквіста та відповідного йому спектра. Які параметри описують імпульс Найквіста, яка ширина його спектра?
6. Дайте визначення сигналу амплітудноімпульсної модуляції. Наведіть сигнальні сузір'я сигналів АІМ- M ($M = 2, 4, 8$), схему їх формування і формулу розрахунку ширини спектра.
7. Дайте визначення модуляційного коду та поясніть, що таке модуляційний код Грея.
8. Який пристрій називають формуючим фільтром? Яка мета його використання?
9. Дайте визначення одновимірних смугових сигналів цифрової модуляції. Наведіть сигнальні сузір'я сигналів АМ- M ($M = 2, 4, 8$) і ФМ-2, схему їх формування і формулу розрахунку ширини спектра.
10. Дайте визначення двовимірних смугових сигналів цифрової модуляції. Наведіть сигнальні сузір'я сигналів ФМ- M ($M \geq 4$) і КАМ-16, схему їх формування і формулу розрахунку ширини спектра.
11. В чому принципова різниця методів формування сигналів ЧМ-2 з обвідною у вигляді П-імпульсу та імпульсу Найквіста?
12. Поясніть залежність між кількістю каналних символів і шириною спектра сигналів цифрової модуляції.
13. Поясніть, яким чином збільшення кількості каналних символів впливає на дистанційні властивості модульованих сигналів і як це проявляється на якості де модульованого сигналу?
14. Запишіть аналітичний вираз для визначення відстані між каналними символами. Що називається мінімальною відстанню між каналними символами?
15. Через який параметр виражають мінімальну відстань між каналними символами для порівняння різних методів модуляції?
16. Дайте визначення широкосмугового сигналу. З якою метою такі сигнали використовуються у системах передавання?
17. Наведіть приклад формування широкосмугових сигналів.
18. Дайте визначення паралельно-послідовного передавання. Якими особливостями воно характеризується?
19. Яким чином у сучасних системах передавання реалізується задача паралельно-послідовного передавання?

РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Самостійна робота студентів над матеріалом модуля має такі складові:

- опрацювання додаткового матеріалу, що задається на лекціях;
- підготовка до лабораторних та практичних занять;
- виконання індивідуального завдання; індивідуальне завдання викладач видає на початку семестру на електронних або паперових носіях;
- підготовка до іспиту.

Перелік питань до іспиту

1. Узагальнена структурна схема системи передавання повідомлень електричними сигналами.
2. Інформація, повідомлення, сигнал. Класифікація повідомлень. Перетворення повідомлень у сигнали та зворотне перетворення.
3. Класифікація сигналів і завад на детерміновані та випадкові.
4. Енергетичні та кореляційні характеристики детермінованих сигналів.
5. Функціональні простори та їх базиси. Приклади ортогональних базисів (тригонометричний, експоненціальний, базис функцій відліків, Уолша тощо).
6. Подання сигналів в ортогональних базисах. Метрики в теорії сигналів.
7. Спектральне представлення детермінованих сигналів – перетворення Фур'є. Класифікація сигналів на низькочастотні та смугові. Визначення ширини спектра сигналу.
8. Теорема відліків (Котельникова): часове та частотне подання.
9. Комплексне та квазігармонічне подання вузькосмугових сигналів. Обвідна та фаза вузькосмугового сигналу. Квадратурне подання вузькосмугових сигналів.
10. Виділення (детектування) обвідної, амплітуди, миттєвої частоти, миттєвої фази вузькосмугового сигналу.
11. Аналітичний сигнал.
12. Дискретизація смугових сигналів.
13. Визначення випадкового процесу, реалізації процесу. Класифікація випадкових процесів на стаціонарні та ергодичні.
14. Імовірнісні характеристики випадкових процесів (функції розподілу ймовірностей та густини ймовірності).
15. Числові характеристики випадкових процесів (середнє значення, середня потужність, дисперсія, середнє квадратичне відхилення).
16. Кореляційна функція випадкового процесу та її властивості.
17. Спектральна густина потужності процесу та її зв'язок з кореляційною функцією – теорема Хінчина-Вінера. Інтервал кореляції та ширина спектра процесу.
18. Статистичні характеристики типових випадкових процесів: білий та квазібілий НЧ і смуговий шуми, низькочастотний та смуговий гаусові (флуктуаційні).

19. Перетворення випадкових процесів у лінійних електричних колах. Методи розрахунків статистичних характеристик випадкових процесів на виході лінійних електричних кіл.

20. Перетворення випадкових процесів у нелінійних електричних колах. Методи розрахунків статистичних характеристик випадкових процесів на виході нелінійних електричних кіл.

21. Принцип аналогової модуляції. Методи аналогової модуляції на основі гармонічного переносника: АМ, БМ і ОМ – визначення, аналітичні вирази сигналів, часові і спектральні діаграми сигналів, оцінювання ширини спектра сигналів.

22. Принцип аналогової модуляції. Методи аналогової модуляції на основі гармонічного переносника: ЧМ і ФМ – визначення, аналітичні вирази сигналів, часові і спектральні діаграми сигналів, оцінювання ширини спектра сигналів.

23. Алгоритми формування сигналів аналогових видів модуляції.

24. Алгоритми детектування сигналів АМ, БМ, ОМ, ЧМ і ФМ.

25. Принцип цифрової модуляції при послідовному передаванні. Умова відліковості канальних символів. Спектр Найквіста. Мінімальна смуга частот модульованого сигналу – межа Найквіста.

26. Одновимірні сигнали АІМ-М, АМ-М, ФМ-2 – сигнальні сузір'я, ширина спектра сигналів.

27. Двовимірні сигнали ФМ-М, АФМ-М, КАМ-М, ЧМ-2 – сигнальні сузір'я, ширина спектра сигналів.

28. Формування сигналів АІМ-М, АМ-М, ФМ-М, АФМ-М, КАМ-М, ЧМ-2.

29. Передавання цифрових сигналів широкосмуговими сигналами (ШСС). Спектральні та кореляційні властивості ШСС. Формування ШСС.

30. Паралельно-послідовне передавання методом OFDM – часові та спектральні властивості, формування сигналу.

ПЕРЕЛІК ЗНАНЬ І УМІНЬ, ЯКІ ПОВИНЕН НАБУТИ СТУДЕНТ ПІД ЧАС ВИВЧЕННЯ МОДУЛЯ 1

Знання:

1. Математичний опис і параметри детермінованих електричних сигналів
2. Математичний опис випадкових електричних сигналів (завад)
3. Математичний опис, параметри та застосування в електрозв'язку сигналів аналогових видів модуляції (АМ та її різновиди, ЧМ, ФМ)
4. Математичний опис, параметри та застосування в електрозв'язку сигналів цифрових видів модуляції (АМ-М, ЧМ-М, ФМ-М, АФМ-М, КАМ-М)
5. Математичний опис, параметри та застосування в електрозв'язку модульованих сигналів на основі негармонічних переносників (імпульсних, широко-смугових)

Уміння:

1. Розраховувати параметри випадкових сигналів, ймовірності подій, пов'язаних з випадковими сигналами.
2. Розраховувати ширину спектра сигналів аналогових видів модуляції.
3. Розраховувати ширину спектра сигналів цифрових видів модуляції.

ЛІТЕРАТУРА

Основна

1. **Стеклов В.К.** Теорія електричного зв'язку: [підручник для ВНЗ] / В.К.Стеклов, Л.Н. Беркман; за ред. В.К. Стеклова. – К.: Техніка, 2006.
2. **Теория** электрической связи: [учебник для вузов] / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.И. Коржик, М.В. Назаров; под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1998.

Додаткова

3. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / Скляр Б. – [2-е изд., испр.]; пер. с англ. – М.: Изд. дом "Вильямс", 2003. – 1104 с.
4. **Теория** передачи сигналов: [учебник для вузов] / [А.Г. Зюко и др.]; под ред. А.Г. Зюко. – М.: Радио и связь, 1986.
5. **Панфілов І.П.** Теорія електричного зв'язку: [підручник для вузів першого та другого рівнів акредитації] / Панфілов І.П., Дирда В.Ю., Капацін А.В. – К.: Техніка, 1998.
6. **Методичні** вказівки до виконання лабораторних робіт з дисципліни "Теорія електричного зв'язку" – Частина 1 та 2/ [П.В. Іващенко та ін.]. – Одеса: ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2004.

ДОДАТКИ

Додаток А

Текст програмного коду М-файла
 "Визначення густини ймовірностей миттєвих значень обвідної
 випадкового гауссового процесу"

```
N = 10000;
Xc = randn(1,N);
Xs = randn(1,N);
A = sqrt(Xc.^2 + Xs.^2);
step_x = 0.1;
x = -5:step_x:5;
H_Xc = hist(Xc,x);
H_Xs = hist(Xs,x);
a = x;
H_A = hist(A,a);
figure; stairs(x - step_x/2, H_Xc/N/step_x, 'k--','LineWidth',2);
hold on;
stairs(x - step_x/2, H_Xs/N/step_x, 'k:', 'LineWidth',2);
stairs(x - step_x/2, H_A/N/step_x, 'k-', 'LineWidth',2);
N_a = length(a);
p_a = zeros(1,N_a);
p_a(1,ceil(N_a/2) + 1:N_a) = a(1,ceil(N_a/2) + 1:N_a).*exp(-
a(1,ceil(N_a/2) + 1:N_a).^2/2);
plot(a, p_a, 'k-'); hold off;
grid on;
xlabel('x, B, a, B');
legend('H_X_c(x)', 'H_X_s(x)', 'H_A(a)', 'p(a)');
```

Додаток Б

Текст програмного коду М-файла
 "Розподіл імовірностей миттєвих значень випадкового процесу
 на виході лінійного кола"

```

N = 100000;
a = 0;
b = 2;
X = a + (b-a).*rand(1,N);
step_x = (b-a)/101;
x = a - 0.1*(b - a):step_x:b + 0.1*(b - a);
H_X = hist(X,x);
[bb1, aa1] = butter(2,0.50);
Y1 = filter(bb1, aa1, X);
[bb2, aa2] = butter(2,0.25);
Y2 = filter(bb2, aa2, X);
[bb3, aa3] = butter(2,0.10);
Y3 = filter(bb3, aa3, X);
y = x;
H_Y1 = hist(Y1,y);
H_Y2 = hist(Y2,y);
H_Y3 = hist(Y3,y);
figure; stairs(x - step_x/2, H_X/N/step_x, 'k-
','LineWidth',2);hold on;
stairs(x - step_x/2, H_Y1/N/step_x, 'k--','LineWidth',2);
stairs(x - step_x/2,H_Y2/N/step_x, 'k-.','LineWidth',2);
stairs(x - step_x/2,H_Y3/N/step_x, 'k:','LineWidth',2); hold off;
grid on;
xlim([min(x) max(x)]);
xlabel('x, B, y, B');
legend('H_X(x)', 'H_Y(y), F_з_p = 0,5*F_X', 'H_Y(y), F_з_p =
0,25*F_X', 'H_Y(y), F_з_p = 0,1*F_X');

```

Додаток В

Текст програмного коду М-файла
"Формування сигналу АМ-4 на основі імпульсів Найквіста"

```

b = [1 1 1 0 0 1 0 0];
M = 4;
n = log2(M);
a = 1;
a_i = zeros(1,length(b)/n);
i = zeros(1,length(b)/n);
iii = 0;
for ii = 1:n:length(b)
    iii = iii + 1;
    if and(b(ii) == 0, b(ii+1) == 0)
        a_i(1,iii) = - a;
        i(1,iii) = 0;
    elseif and(b(ii) == 0, b(ii+1) == 1)
        a_i(1,iii) = - 3*a;
        i(1,iii) = 1;
    elseif and(b(ii) == 1, b(ii+1) == 0)
        a_i(1,iii) = a;
        i(1,iii) = 2;
    elseif and(b(ii) == 1, b(ii+1) == 1)
        a_i(1,iii) = 3*a;
        i(1,iii) = 3;
    end
end

T_b = 0.5;
T = T_b*n;

figure; stairs(0:T_b:(length(b) - 1)*T_b,b,'k-','LineWidth',2);
hold on; grid on;
stairs(0:T:(length(a_i) - 1)*T,a_i,'k--','LineWidth',3);
stairs([(length(b) - 1)*T_b length(b)*T_b],[b(1,length(b))
b(1,length(b))],'k-','LineWidth',2);
stairs([(length(a_i) - 1)*T length(a_i)*T],[a_i(1,length(a_i))
a_i(1,length(a_i))],'k--','LineWidth',3);
xlim([-T (length(a_i) + 1)*T]);
ylim([1.1*min(a_i) 1.1*max(a_i)]);
xlabel('t, c');
legend('b(t)','a_i');

step_t = T/50;
N_T = 5;
t = -N_T:step_t:N_T;
f_N = 1/(2*T);

A = sin(2*pi*f_N*t)./(2*pi*f_N*t);
A(1,ceil(length(A)/2)) = 1;

```

```

blank_a_A_t = zeros(length(a_i),length(t) + (length(a_i) -
1)*T/step_t);
for iii = 1:length(a_i)
    blank_a_A_t(iii,(iii - 1)*T/step_t + 1:(iii - 1)*T/step_t +
length(t)) = a_i(1,iii).*A(1,:);
end

a_A_t = sum(blank_a_A_t);

tt = -N_T + 0.5*T:step_t:N_T + (length(a_i) - 1) + 0.5*T;
figure; plot(tt,blank_a_A_t(1,:), 'k-', 'LineWidth',2);hold on; grid
on;
plot(tt,blank_a_A_t(2,:), 'k--', 'LineWidth',2);
plot(tt,blank_a_A_t(3,:), 'k-.', 'LineWidth',2);
plot(tt,blank_a_A_t(4,:), 'k:', 'LineWidth',2);
plot(tt,a_A_t, 'k-', 'LineWidth',3);hold off;
xlim([-T (length(a_i) + 1)*T]);
xlabel('t, c');
legend(strcat('a_',num2str(i(1,1)),'A(t)'),strcat('a_',num2str(i(1
,2)),'A(t)'),strcat('a_',num2str(i(1,3)),'A(t)'),strcat('a_',num2s
tr(i(1,4)),'A(t)'), 'a_iA(t)');

f_0 = 3/T;
s = a_A_t*sqrt(2).*sin(2*pi*f_0*tt);
figure; plot(tt,s, 'k-', 'LineWidth',2);hold on; grid on;
plot(tt,a_A_t*sqrt(2), 'k--', 'LineWidth',1.5); hold off;
xlim([-T (length(a_i) + 1)*T]);
xlabel('t, c');
legend('a_iA(t)\surd2cos(2\pif_0t)', 'a_iA(t)\surd2');

```

Додаток Г

Текст програмного коду М-файла
 "Формування сигналу ЧМ-2 на основі імпульсів Найквіста "

```

b = [1 1 1 0 0 1 0 0];
a = 1;
a_i = zeros(1,length(b));
b_i = zeros(1,length(b));
for i = 1:length(b)
    if b(i) == 0
        a_i(1,i) = a;
        b_i(1,i) = 0;
    elseif b(i) == 1
        a_i(1,i) = 0;
        b_i(1,i) = a;
    end
end

T = 1;

figure; subplot(3,1,1);stairs(0:T:(length(b) - 1)*T,b,'k-','LineWidth',2); hold on; grid on;
subplot(3,1,1); stairs([(length(b) - 1)*T length(b)*T],[b(1,length(b)) b(1,length(b))],'k-','LineWidth',2);
hold off;
ylim([-0.1 1.1]);
xlim([-T (length(a_i) + 1)*T]);
ylabel('b(t)','Rotation',0);
subplot(3,1,2); stairs(0:T:(length(a_i) - 1)*T,a_i,'k--','LineWidth',3); hold on; grid on;
subplot(3,1,2); stairs([(length(a_i) - 1)*T length(a_i)*T],[a_i(1,length(a_i)) a_i(1,length(a_i))],'k--','LineWidth',3);hold off;
ylim([-0.1 1.1]);
xlim([-T (length(a_i) + 1)*T]);
ylabel('a_i','Rotation',0);
subplot(3,1,3); stairs(0:T:(length(b_i) - 1)*T,b_i,'k:','LineWidth',3); hold on; grid on;
subplot(3,1,3); stairs([(length(b_i) - 1)*T length(b_i)*T],[b_i(1,length(b_i)) b_i(1,length(b_i))],'k:','LineWidth',3);hold off;
ylim([-0.1 1.1]);
xlim([-T (length(a_i) + 1)*T]);
xlabel('t, c');
ylabel('b_i','Rotation',0);

step_t = T/50;
N_T = 5;
t = -N_T:step_t:N_T;
f_N = 1/(2*T);

```

```

A = sin(2*pi*f_N*t)./(2*pi*f_N*t);
A(1,ceil(length(A)/2)) = 1;

blank_a_A_t = zeros(length(a_i),length(t) + (length(a_i) -
1)*T/step_t);
blank_b_A_t = zeros(length(b_i),length(t) + (length(b_i) -
1)*T/step_t);
for ii = 1:length(a_i)
    blank_a_A_t(ii,(ii - 1)*T/step_t + 1:(ii - 1)*T/step_t +
length(t)) = a_i(1,ii).*A(1,:);
    blank_b_A_t(ii,(ii - 1)*T/step_t + 1:(ii - 1)*T/step_t +
length(t)) = b_i(1,ii).*A(1,:);
end

a_A_t = sum(blank_a_A_t);
b_A_t = sum(blank_b_A_t);

tt = -N_T + 0.5*T:step_t:N_T + (length(a_i) - 1) + 0.5*T;
figure; subplot(2,1,1); plot(tt,a_A_t,'k--','LineWidth',3);grid
on;
xlim([-T (length(a_i) + 1)*T]);
ylabel('a_iA(t)','Rotation',0);
subplot(2,1,2); plot(tt,b_A_t,'k:','LineWidth',3);grid on;
xlim([-T (length(a_i) + 1)*T]);
ylabel('b_iA(t)','Rotation',0);
xlabel('t, c');

f_0 = 3/T;
df = 1/T;

s_0 = a_A_t*sqrt(2).*sin(2*pi*(f_0 - df/2)*tt);
s_1 = b_A_t*sqrt(2).*sin(2*pi*(f_0 + df/2)*tt);
s = s_0 + s_1;
figure; subplot(3,1,1); plot(tt,s_0,'k--','LineWidth',1.5);hold
on; grid on;
xlim([-T (length(a_i) + 1)*T]);
ylim([-1.1*max(s_0) 1.1*max(s_0)]);
ylabel('a_i\psi(t)','Rotation',0);
subplot(3,1,2); plot(tt,s_1,'k:','LineWidth',1.5); grid on;
xlim([-T (length(a_i) + 1)*T]);
ylim([-1.1*max(s_1) 1.1*max(s_1)]);
ylabel('b_i\psi(t)','Rotation',0);
subplot(3,1,3); plot(tt,s,'k-','LineWidth',2); grid on;hold off;
xlim([-T (length(a_i) + 1)*T]);
ylim([-1.1*max(s) 1.1*max(s)]);
ylabel('s_{\psi M} -_2(t) ','Rotation',0);
xlabel('t, c');

```

Навчальне видання

**Іващенко Петро Васильович
Перекрестов Ігор Сергійович**

ТЕОРІЯ ЗВ'ЯЗКУ

Модуль 1. Сигнали електрозв'язку

Навчальний посібник

для студентів, що навчаються

за напрямом вищої освіти **6.050903 – Телекомунікації**

Редактор Л.А. Кодрул
Комп'ютерна верстка