МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ ім. О.С. ПОПОВА
Кафедра теорії електричного зв'язку ім. А.Г. Зюко

П. В. Іващенко

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІНФОРМАЦІЇ

Навчальний посібник

Одеса – 2015

УДК 621.391 План НМВ 2015 р.
ББК 32.881

Рецензент д-р техн. наук, проф. Проценко М.Б.

Іващенко П.В. Основи теорії інформації: навч. посіб. / П.В. Іващенко – Одеса: ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2015. – 56 с.

Посібник містить навчальний матеріал до вивчення розділу «Основи теорії передавання інформації» дисциплін: «Теорія електрозв'язку» (підготовка бакалаврів за напрямом «Телекомунікації»), «Теорія інформації» (підготовка бакалаврів за напрямом «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології»), «Теорія інформації та кодування» (підготовка бакалаврів за напрямом «Програмна інженерія»), «Інформаційні радіосистеми» (підготовка бакалаврів за напрямом «Радіотехніка»).

Крім теоретичного матеріалу посібник містить вправи, приклади, контрольні питання та задачі для самостійної роботи студентів.

Затверджено
методичною радою
академії зв'язку.
Протокол № __
від __.__.2015 р.

Схвалено
на засіданні кафедри теорії
електричного зв'язку ім. А.Г. Зюко
і ***рекомендовано до друку.***
Протокол № 6 від 26.12.2014 р.

Зміст

Вступ

Задача передавання інформації на відстань формулюється в такий спосіб: є джерело інформації (людина, комп'ютер тощо), що має деяку інформацію, яку необхідно передати віддаленому одержувачеві. Ця інформація повинна бути передана із заданим рівнем вірогідності й із прийнятною затримкою. Для обговорення розв'язання цієї задачі розглянемо поняття *інформація*, *повідомлення, сигнал* і *канал зв'язку*.

Під **інформацією** розуміють сукупність відомостей, наданих про будь-які події, явища або предмети. Для *передавання* або *зберігання* інформації використовують різні знаки (символи), що дозволяють виразити (надати) її в деякій формі. Сукупність знаків, що відображають ту або іншу інформацію, називають **повідомленням**. Передавання повідомлень на відстань здійснюється за допомогою будь-якого матеріального носія або фізичного процесу. Фізичний процес, що відображає передане повідомлення, називається **сигналом**. У теорії електричного зв'язку під сигналом розуміють електричні коливання. **Каналом зв'язку** називається сукупність засобів для передавання електричних сигналів на відстань.

Джерело інформації видає інформацію у вигляді повідомлень. Саме характеристики повідомлень значною мірою визначають побудову апаратури для їхнього передавання, тому говорять "джерело повідомлень", а не "джерело інформації".

Всі повідомлення поділяються на *неперервні* й *дискретні*.

Дискретні повідомлення складаються з послідовності окремих знаків, число яких скінченне. Ці знаки утворюють алфавіт джерела. Приклад типового дискретного повідомлення – текст. Перетворення дискретних повідомлень в електричні сигнали полягає в їхньому кодуванні й провадиться за допомогою кодера джерела. У результаті кодування утворюється **цифровий первинний сигнал** (рис. 1, *а*). Зворотне перетворення цифрових первинних сигналів у повідомлення провадиться за допомогою декодера джерела. Основною характеристикою цифрового сигналу є його швидкість R, біт/с. На рис. 1, *а* показано $T_б = 1/R$ – тривалість біта (двійкового символу).

Неперервні повідомлення являють собою зміну деякої величини із часом, причому час неперервний (наприклад, звуковий тиск). Перетворення неперервних повідомлень в електричні сигнали провадиться за допомогою тих або інших датчиків (наприклад, мікрофон). У результаті перетворення утворюється **неперервний первинний (аналоговий) сигнал** (рис. 1, *б)*. Основною характеристикою неперервного первинного сигналу є максимальна частота його спектра F_{max}, що характеризує його швидкість зміни.

Якщо первинний сигнал цифровий, то для його передавання потрібний **цифровий канал зв'язку**, якщо ж первинний сигнал неперервний, то для його передавання потрібний **неперервний канал зв'язку**. Неперервний первинний сигнал може бути перетворений у цифровий сигнал для передавання цифровим каналом зв'язку. У такому випадку матиме місце **цифрове передавання неперервних сигналів**, що має цілу низку переваг порівняно з аналоговим передаванням. Саме із цієї причини протягом декількох останніх десятиліть відбувається цифровізація систем передавання. Отже, при цифровому передаванні неперервних повідомлень кодер джерела перетворить їх спочатку в первинний неперервний сигнал, а потім у цифровий.

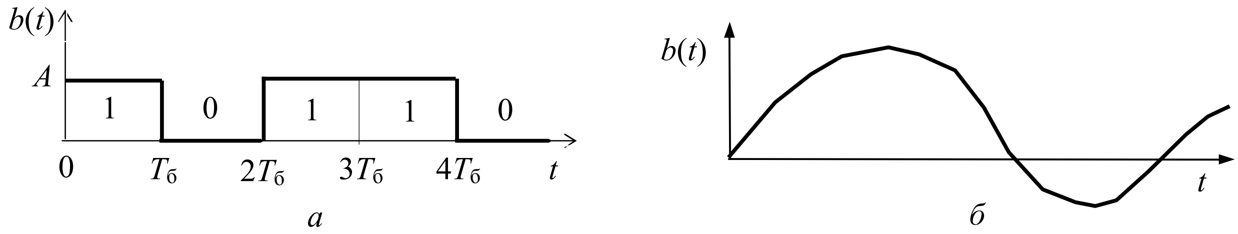


Рисунок 1 – Первинні сигнали: *а* – цифровий сигнал; *б* – неперервний сигнал

Обговорювані вище перетворення відображені на рис. 2.

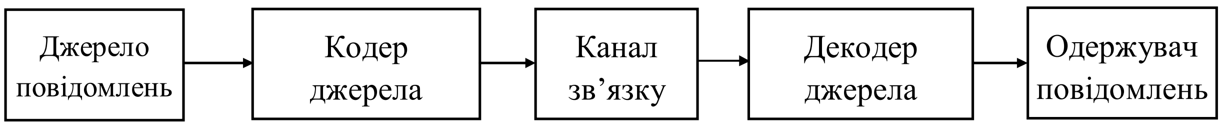


Рисунок 2 – Система електричного зв’язку

Поєднаємо обговорювані перетворення, що мають місце при передаванні інформації, з побудовою телекомунікаційної мережі. Мережа складається із сукупності *вузлів* і з'єднуючих їх *ліній,* взаємне розташування яких характеризує здатність мережі забезпечувати інформаційний обмін між пунктами. Розрізняють вузли користувачів (ВКр), де знаходиться термінальне обладнання, і вузли комутації (ВК), де відбувається комутація каналів або пакетів. На рис. 3 показано фрагмент логічної топології мережі, що бере участь у передаванні інформації між розглянутими вузлами користувачів, а саме джерелом і одержувачем. В одному ВКр знаходиться джерело повідомлень і кодер джерела, а в іншому ВКр – декодер джерела й одержувач повідомлень. Пунктиром обведені лінії, що утворюють канал зв'язку.

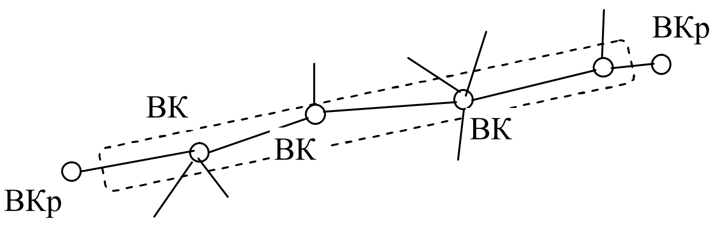


Рисунок 3 – Фрагмент топології мережі

Основними характеристиками системи електричного зв'язку є *точність передавання повідомлень* або *якість* передавання й *швидкість передавання інформації*, або *кількість* переданої інформації за 1 с.

Про точність передавання повідомлень доводиться говорити, тому що при передаванні сигналів каналами зв'язку вони спотворюються через дію завад у каналах. Спотворення цифрових сигналів полягають у виникненні помилок – замість фактично переданих символів одержувачеві надходять інші символи. Такого виду спотворення кількісно характеризуються ймовірністю помилки символу. Спотворення неперервних сигналів полягають у зміні їхньої форми через накладення завад. Спотворення неперервних сигналів прийнято характеризувати середнім квадратом різниці між прийнятими й переданим нормованими сигналами або відношенням сигнал/шум.

У цьому посібнику розглядаються: розрахунки інформаційних характеристик джерел повідомлень, методи ефективного кодування повідомлень, розрахунки пропускної здатності каналів зв’язку та теореми Шеннона.

1 Кількісна міра інформації

Системи передачі створюються для передавання інформації. Необхідно вміти розраховувати кількість інформації, яку видає джерело повідомлень чи передається каналом зв'язку. Необхідно також уміти розраховувати граничні значення швидкості передавання інформації каналом зв'язку.

Для розв'язання цих задач необхідно визначитись з кількісною мірою інформації. На сьогодні використовується міра інформації, введена К. Шенноном ще у 1948 р.

Кількість інформації в деякім повідомленні a (це може бути знак, слово, фраза, рисунок тощо) визначається його ймовірністю $P(a)$:

$$I(a) = \log_2 \frac{1}{P(a)} = -\log_2 P(a). \qquad (1.1)$$

Це співвідношення введено К. Шенноном аксіоматично. З нього випливає: чим менша ймовірність повідомлення a, тим більше інформації міститься у цьому повідомленні.

Логарифмічна функція забезпечує виконання двох очевидних властивостей кількісної міри інформації:

1. Якщо повідомлення a відоме, тобто $P(a) = 1$, то кількість інформації в повідомленні a дорівнює нулю: $I(a) = \log_2 1 = 0$.

2. Розглянемо два незалежні повідомлення a_j і a_k. Ймовірність цих двох повідомлень $P(a_j, a_k) = P(a_j)\,P(a_k)$. Тоді

$$I(a_j, a_k) = -\log_2(P(a_j, a_k)) = -\log_2(P(a_j)P(a_k)) = -\log_2(P(a_j)) - \log_2(P(a_k)) = I(a_j) + I(a_k) \qquad (1.2)$$

– кількість інформації в двох незалежних повідомленнях дорівнює сумі кількості інформації у кожному з повідомлень (міра є адитивною).

Як правило, основа логарифма у співвідношенні (1.1) дорівнює 2, і одиницею виміру інформації є двійкова одиниця (дв. од.) або біт. ***1 дв.од.*** **(*біт*)** – кількість інформації у повідомленні, ймовірність якого дорівнює 0,5.

При інших основах логарифма будуть інші одиниці виміру: у разі натурального логарифма – це натуральна одиниця (нат), у разі десяткового логарифма – це десяткова одиниця (дес. од.).

Приклад 1.1. Імовірність повідомлення a дорівнює 1/16. Визначити кількість інформації в цьому повідомленні.

Розв'язання. $I(a) = -\log_2 (1/16) = 4$ дв. ед.

Контрольні питання

1.1. Дати визначення поняття „інформація”.

1.2. Чому застосовується логарифмічна міра кількості інформації?

ЗАДАЧА для самостійної роботи студентів

1.1. Знайти кількість інформації у слові ***ентропія***, вважаючи, що літери незалежні. Ймовірності літер українського змістовного тексту надані в табл. 1.1.

Таблиця 1.1 – Розподіл імовірностей літер в українських текстах

Літера	Імовір-ність	Літера	Імовір-ність	Літера	Імовір-ність	Літера	Імовір-ність
Пропуск	0,122	Р	0,040	З	0,018	Ж	0,007
О	0,090	С	0,034	Й	0,017	Ц	0,006
А	0,074	Л	0,034	Б	0,016	Ю	0,006
И	0,059	К	0,032	Я	0,015	Ї	0,006
І	0,055	У	0,032	Г	0,013	Є	0,003
Н	0,053	Д	0,026	Ч	0,012	Ф	0,002
В	0,047	П	0,026	Ш	0,010		
Т	0,044	М	0,023	Х	0,008		
Е	0,041	Ь	0,021	Щ	0,008		

2 Інформаційні характеристики джерел дискретних повідомлень

2.1 Моделі джерел дискретних повідомлень

Джерело дискретних повідомлень видає дискретні повідомлення (рис. 2.1). *Дискретне повідомлення* – це послідовність окремих знаків, кількість яких є скінченна. Знаки $\{a_k\} = a_1, a_2, ..., a_{M\text{A}}$ утворюють алфавіт джерела. Кількість знаків в алфавіті називається обсягом алфавіту M_A. Знаками можуть бути окремі літери, цифри, символи або їх сполучення, наприклад, слова чи навіть речення.

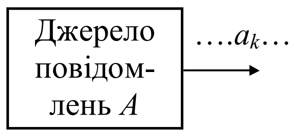


Рисунок 2.1 – Джерело повідомлень *A*

Найчастіше зустрічаються джерела таких дискретних повідомлень:

– *текстові повідомлення* складаються з послідовності літер, цифр та символів алфавіту, що визначає певну мову, наприклад, українську. Обсяг алфавіту M_A, особливо алфавітів східних мов, може бути значним – сотні та тисячі;

– *цифрові повідомлення* для обміну інформацією між комп'ютерами та повідомлення, отримані після перетворення аналогових сигналів у цифрові (у зв'язку, мовленні, при запису на електронні носії). Як правило, цифрові повідомлення двійкові, тобто $M_\text{A} = 2$.

Для опису джерела необхідно перелічити знаки алфавіту та задати їх імовірності. Джерела дискретних повідомлень діляться на:

– *джерела незалежних повідомлень* (джерела без пам'яті), коли поява будь-якого знака a_k ніяк не зумовлена знаками, що з'явились до нього;

– *джерела залежних повідомлень* (джерела з пам'яттю), коли поява знака a_k пов'язана з попереднім або кількома попередніми знаками.

Джерело ***незалежних повідомлень*** задається переліком знаків a_k та їх імовірностей $P(a_k)$, $k = 1, 2, ..., M_\text{A}$, при цьому ймовірності задовольняють умові

$$\sum_{k=1}^{MA} P(a_k) = 1.$$

Кількість інформації у будь-якому знаку a_k визначається за формулою (1.1)

$$I(a_k) = -\log_2 P(a_k). \qquad (2.1)$$

Джерело ***залежних повідомлень*** задається умовними ймовірностями; так, якщо залежність між знаками простягається в межах двох знаків a_k і a_j, то джерело задається ймовірностями $P(a_k/a_j)$, k, j = 1, 2, ..., $M_А$; $P(a_k/a_j)$ – імовірність знака a_k за умови, що попередній знак a_j відомий. У цьому разі кількість інформації у знака a_k визначається умовною кількістю інформації

$$I\left(a_k/a_j\right) = -\log_2 P\left(a_k/a_j\right). \tag{2.2}$$

Кількість інформації у знака a_k визначається шляхом усереднення умовної кількості інформації (2.2)

$$I\left(a_k\right) = -\sum_{j=1}^{M\text{А}} \left(P\left(a_j\right)\log_2 P\left(a_k/a_j\right)\right). \tag{2.3}$$

Якщо залежність між знаками простягається в межах трьох знаків a_k, a_j і a_l, то джерело задається ймовірностями $P(a_k/a_j,a_l)$, k, j, l = 1, 2, ..., $M_А$ і так далі.

Джерело дискретних повідомлень задається також значеннями тривалості видачі кожного знака T_k, k = 1, 2, ..., $M_А$. Коли тривалості видачі всіх знаків однакові, джерело називають синхронним, у протилежному випадку – асинхронним.

Розглянемо приклади обчислення кількості інформації на виході джерела.

Приклад 2.1. Знайти кількість інформації в послідовності з шести знаків від деякого датчика, за умови, що знаки джерела рівноймовірні та незалежні, а обсяг алфавіту $M_А$ = 16.

Розв'язання. Оскільки знаки рівноймовірні, то ймовірність кожного з них $P(a_k) = 1/M_А = 1/16$, кожен знак за формулою (1.1) містить $I(a_k) = -\log_2 16 = 4$ дв. од. інформації. Знаки незалежні, тому кількість інформації в послідовності з N = 6 знаків $I_{\text{посл}} = \sum_k I(a_k) = 6{\cdot}4 = 24$ дв. од.

Приклад 2.2. Знайти кількість інформації у слові українського тексту ***Одеса***, вважаючи, що літери в тексті незалежні.

Розв'язання. Ймовірності літер українського тексту наведено в табл. 1.1. За формулою (1.1) вони містять такі значення кількості інформації: I(о) = 3,47 дв. од.; I(д) = 5,27 дв. од.; I(е) = 4,61 дв. од.; I(с) = 5,09 дв. од.; I(а) = 3,76 дв. од. Таким чином, кількість інформації у слові ***Одеса*** через адитивність міри інформації дорівнює

$$I_{\text{сл}} = 3{,}47 + 5{,}27 + 4{,}61 + 5{,}09 + 3{,}76 = 22{,}20 \text{ дв. од.}$$

2.2 Ентропія джерела дискретних повідомлень

Ентропія джерела повідомлень – середня кількість інформації в одному знаку повідомлень, що видає джерело. Нехай $M_А$ – обсяг алфавіту джерела A, ***знаки незалежні***, а їхні ймовірності $P(a_k)$, k = 1, 2, …, $M_А$ задані. Тоді ентропія визначається

$$H(A) = \overline{I(a_k)} = -\sum_{k=1}^{M_\text{А}} P(a_k)\log_2 P(a_k). \tag{2.4}$$

Розмірність ентропії дв. од./знак або просто дв. од.

Ентропія **максимальна**, якщо знаки повідомлення незалежні і рівноймовірні, і обчислюється

$$H_{\max}(A) = \log_2 M_А. \tag{2.5}$$

Приклад 2.3. Джерело дискретних незалежних знаків A використовує 4 знаки: *а*, *б*, *в* і *г* з імовірностями: $P(а) = 0,7$; $P(б) = P(в) = P(г) = 0,1$. Знайти ентропію джерела і максимальне значення ентропії при заданому обсязі алфавіту джерела.

Розв'язання. $H(A) = -\sum_{k=1}^{M_A} P(a_k)\log_2 P(a_k) = -0,7\cdot\log_2 0,7 - 3\cdot 0,1\cdot\log_2 0,1 = 1,36$ дв. од.

$$H_{\max}(A) = \log_2 M_A = \log_2 4 = 2 \text{ дв. од.}$$

Важливо відзначити, що для двійкового джерела ($M_A = 2$) $H_{\max}(A) = 1$ дв. од., тобто двійковий символ може переносити не більше 1 дв. од. інформації. Причому, це досягається, коли знаки незалежні і рівноймовірні.

Вправа 2.1. Довести, що ентропія джерела дискретних повідомлень набуває лише невід'ємні значення.

Розв'язання. Оскільки ймовірності знаків $P(a_k) \le 1$, а логарифм числа, що не перевищує одиницю, від'ємний або нуль, то кількість інформації за формулою (2.1) завжди невід'ємна. Середнє значення невід'ємних чисел, що визначає ентропію, також число невід'ємне.

Обчислення ***ентропії джерела залежних повідомлень***, коли статистичний зв'язок має місце тільки в межах двох знаків a_i і a_j, виконується за формулою

$$\begin{aligned} H_2(A) &= -\overline{I(a_k/a_j)} = -\sum_{k=1}^{MA}\sum_{j=1}^{MA} P(a_k, a_j)\log_2 P(a_k/a_j) = \\ &= -\sum_{k=1}^{MA}\sum_{j=1}^{MA} P(a_j)P(a_k/a_j)\log_2 P(a_k/a_j). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Нижній індекс n в запису ентропії $H_n(A)$ вказує кількість знаків, в межах яких враховується залежність. З урахуванням цього зауваження ентропію незалежних знаків – формула (2.4) можна позначити $H_1(A)$.

Приклад 2.4. Знаки на виході двійкового джерела рівноймовірні: $P(a_1) = P(a_2) = 0,5$ і залежні у межах двох знаків, що описується ймовірностями: $P(a_1/a_1) = 0,9$; $P(a_2/a_2) = 0,8$ («заїка»). Знайти ентропію джерела.

Розв'язання. Підстановка вихідних даних у формулу (2.6) і обчислення дають

$$H_2(A) = -0,5[0,9\cdot\log_2 0,9 + 0,1\cdot\log_2 0,1 + 0,2\cdot\log_2 0,2 + 0,8\cdot\log_2 0,8] = 0,595 \text{ дв. од.}$$

Ентропія джерела залежних повідомлень менше ентропії джерела незалежних повідомлень, тобто $H_n(A) \le \ldots \le H_2(A) \le H_1(A) \le H_{\max}(A)$.

2.3 Надмірність джерела дискретних повідомлень

Надмірність джерела повідомлень – це його властивість видавати інформацію більшою кількістю знаків, ніж можна було б.

Приклад 2.5. Розглянемо два повідомлення:

– перше повідомлення «У понеділок на другій парі буде лабораторне заняття з Теорії зв'язку»;

– друге повідомлення «Пн. 2 п. лб. ТЗ».

Обидва повідомлення містять одну і ту ж інформацію, але першому повідомленню властива велика надмірність.

Дві причини надмірності джерел повідомлень – залежність між знаками повідомлень та/або їх різна ймовірність.

Кількісно надмірність джерела повідомлень A характеризується ***коефіцієнтом надмірності***, який розраховується за формулою

$$K_{\text{надм}} = \frac{H_{\text{макс}}(A) - H_n(A)}{H_{\text{макс}}(A)} = 1 - \frac{H_n(A)}{H_{\text{макс}}(A)}. \quad (2.7)$$

Цю формулу можна тлумачити так: чисельник визначає наскільки у середньому «недовантажені» знаки інформацією, а коефіцієнт надмірності – відносне (на один знак) «недовантаження» знаків інформацією.

Значення коефіцієнта надмірності знаходяться межах: $0 \le K_{\text{надм}} < 1$. Крайні значення: $K_{\text{надм}} = 0$ – надмірність відсутня; $K_{\text{надм}} \to 1$ – велика надмірність.

Надмірність джерела повідомлень можна вважати ***негативною властивістю***, оскільки джерело для видавання певної кількості інформації використовує більше знаків, ніж можна було б, через що надмірно навантажується канал зв'язку для передавання повідомлень чи пристрій пам'яті для запам'ятовування повідомлень. Для зменшення надмірності повідомлень використовують ***ефективне (економне) кодування повідомлень***.

Надмірність джерела повідомлень можна розглядати і як ***позитивну властивість*** у випадках, коли завдяки цій властивості можна проаналізувати повідомлення, яке було передано каналом зв'язку з помилками, і виявити та/або виправити у ньому помилки. Для досягнення такої властивості надмірність спеціально вводять за певними правилами – таке перетворення називають ***кодуванням коректувальним кодом***.

Приклад 2.6 Обчислити коефіцієнт надмірності джерела повідомлень, заданого в прикладі 2.3.

Розв'язання. Ентропія джерела обчислена в прикладі 2.3 і дорівнює 1,36 дв.од. Там же знайдено $H_{\max}(A) = 2$ дв.од. За формулою (2.7) коефіцієнт надмірності

$$K_{\text{надм}} = 1 - H(A)/H_{\max}(A) = 1 - 1{,}36/2 = 0{,}32.$$

2.4 Продуктивність джерела дискретних повідомлень

Продуктивність джерела повідомлень – це середня швидкість видавання інформації джерелом, тобто середня кількість інформації, що виробляється джерелом за секунду. Продуктивність джерела визначається

$$R_{\text{дж}} = H_n(A) / \overline{T}, \quad (2.8)$$

де $\overline{T}$ – середня тривалість видавання знака джерелом:

$$\overline{T} = \sum_{k=1}^{MA} P(a_k) T_k. \quad (2.9)$$

Приклад 2.7. Обчислити продуктивність джерела дискретних повідомлень, заданого в прикладі 2.3, якщо тривалості знаків 1, 2, 3 і 4 мс відповідно.

Розв'язання. Ентропія цього джерела обчислена в прикладі 2.3 і дорівнює 1,36 дв.од., середня тривалість знаків обчислюється як математичне сподівання (формула (2.9)).

$$\overline{T} = 0{,}7 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 2 + 0{,}1\ 3 + 0{,}1\ 4 = 1{,}6 \text{ мс}.$$

Тоді за формулою (2.8) $R_{\text{дж}} = 1{,}36/(1{,}6\cdot10^{-3}) = 850$ дв.од./с.

2.5 Інформаційні характеристики двох джерел дискретних повідомлень

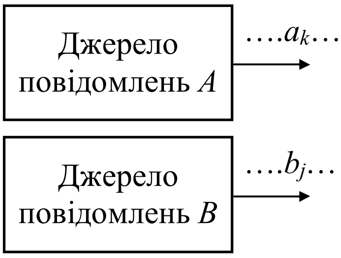


Рисунок 2.2 – Два джерела повідомлень

Деякі задачі вимагають одночасного розгляду двох джерел повідомлень (рис. 2.2). Будемо вважати, що джерела A і B без пам'яті, тривалості знаків на виходах джерел однакові і дорівнюють T, однакові також обсяги алфавітів джерел і дорівнюють $M_{\text{А}}$. Джерела задані алфавітами та наступними ймовірностями:

– безумовними ймовірностями знаків $P(a_k)$ та $P(b_j)$, $k, j = 1, 2, ..., M_{\text{А}}$;

– умовними ймовірностями знаків $P(a_k/b_j)$, $P(b_j/a_k)$, $k, j = 1, 2, ..., M_{\text{А}}$;

– спільними ймовірностями знаків $P(a_k, b_j) = P(a_k)P(b_j/a_k) = P(b_j)P(a_k/b_j)$, $k, j = 1, 2, ..., M_{\text{А}}$.

Нас цікавлять наступні інформаційні характеристики двох джерел повідомлень:

– ***спільна інформація*** – загальна кількість інформації від цих джерел;

– ***взаємна інформація*** – кількість інформації, яку можна отримати про джерело A, спостерігаючи джерело B, або навпаки.

Ці характеристики подають, розраховуючи спільну ентропію та взаємну ентропію – середню кількість відповідної інформації в одному знаку.

Спільна ентропія розраховується

$$H(A, B) = H(A) + H(B/A) = H(B) + H(A/B). \tag{2.10}$$

Взаємна ентропія розраховується

$$H_{\text{вз}}(A, B) = H(A) - H(A/B) = H(B) - H(B/A). \tag{2.11}$$

У співвідношеннях (2.10) і (2.11):

– $H(A)$ і $H(B)$ – ентропії джерел A і B, визначаються за формулою (2.4);

– $H(A/B)$ – ентропія джерела A за умови, що повідомлення від джерела B відоме:

$$H(A/B) = -\overline{I(a_k/b_j)} = -\sum_{k=1}^{MA}\sum_{j=1}^{MA} P(a_k, b_j)\log_2 P(a_k/b_j); \tag{2.12}$$

– $H(B/A)$ – ентропія джерела B за умови, що повідомлення від джерела A відоме:

$$H(A/B) = -\overline{I(b_j/a_k)} = -\sum_{k=1}^{MA}\sum_{j=1}^{MA} P(a_k, b_j)\log_2 P(b_j/a_k). \tag{2.13}$$

Вправа 2.2. Довести, що спільна ентропія двох джерел незалежних повідомлень A і B дорівнює сумі їх власних ентропій, тобто $H(A, B) = H(A) + H(B)$.

Розв'язання. Оскільки спільна ймовірність незалежних повідомлень $P(a_k, b_j) =$ $= P(a_k)P(b_j)$, то $H(B/A) = H(B)$ і з формули (2.10) випливає, що $H(A, B) = H(A) + H(B)$.

Вправа 2.3. Довести, що взаємна ентропія двох джерел незалежних повідомлень A і B дорівнює нулю, тобто $H_{\text{вз}}(A, B) = 0$.

Розв'язання. Оскільки для незалежних повідомлень $P(a_k/b_j) = P(a_k)$ і $P(b_j/a_k) = P(b_j)$, то $H(B/A) = H(B)$ і $H(A/B) = H(A)$. Тоді з формули (2.11) випливає, що $H_{вз}(A, B) = 0$.

Приклад 2.8. Два джерела повідомлень A і B мають ентропії: $H(A) = 5{,}2$ дв.од.; $H(A/B) = 2{,}2$ дв.од.; $H(B) = 5{,}3$ дв.од.; $H(B/A) = 2{,}3$ дв.од. Обчислити спільну та взаємну ентропії цих двох джерел.

Розв'язання. За формулами (2.10) та (2.11)

спільна ентропія $H(A, B) = H(A) + H(B/A) = H(B) + H(A/B) = 5{,}2 + 2{,}3 = 7{,}5$ дв.од.;

взаємна ентропія $H_{вз}(A, B) = H(A) – H(A/B) = H(B) – H(B/A) = 5{,}3 – 2{,}3 = 3{,}0$ дв.од.

Контрольні питання

2.1. Що в теорії інформації називають ентропією джерела та як вона визначається для джерел незалежних і залежних повідомлень?

2.2. Дати визначення поняття надмірність джерела повідомлень.

2.3. Дати визначення поняття продуктивність джерела повідомлень.

2.4. Назвати причини наявності надмірності джерела.

2.5. Чому дорівнює максимальна ентропія двійкового джерела незалежних повідомлень і за яких умов вона має місце?

2.6. Дати визначення понять – сумісна та взаємна ентропія двох джерел повідомлень.

2.7. Назвати основні властивості сумісної та взаємної ентропії двох джерел повідомлень.

ЗАДАЧІ для самостійної роботи студентів

2.1. Алфавіт джерела складають три знаки a_1, a_2 та a_3 з імовірностями $P(a_1) = 0{,}1$ та $P(a_2) = 0{,}3$. Тривалості видачі повідомлень 1,0 мс, 2,0 мс та 3,0 мс відповідно. Обчислити кількість інформації в кожному знаку, ентропію, продуктивність і надмірність джерела.

2.2. Джерело дискретних повідомлень видає повідомлення, використовуючи $M_A = 8$ знаків. Ентропія джерела 2,5 дв.од. Обчислити коефіцієнт надмірності джерела.

2.3. Обчислити продуктивність джерела дискретних повідомлень, якщо його ентропія $H(A) = 2{,}25$ дв.од.; середня тривалість знака 10 мс.

2.4. Два джерела повідомлень A і B мають ентропії: $H(A) = 4{,}2$ дв.од.; $H(A/B) = 1{,}2$ дв.од.; $H(B) = 4{,}3$ дв.од.; $H(B/A) = 1{,}3$ дв.од.. Обчислити спільну та взаємну ентропії двох джерел повідомлень.

3. Кодування джерел дискретних повідомлень

3.1 Примітивні коди

Як правило, повідомлення, що видаються джерелом, не пристосовані для їх передавання каналами зв'язку без певних перетворень. Тому вони піддаються кодуванню і, дуже часто, неодноразово. Мета кодування – пристосувати форму повідомлення до характеристик даного каналу зв'язку чи пристрою, призначеному для перетворення чи збереження інформації. У цьому розділі розглядаються ***кодери джерела***, які забезпечують:

– просте подання (двійковими символами) повідомлень;
– зменшення надмірності повідомлення, а вона, як правило, є.

Зазначимо, що у системах передавання використовуються ***кодери каналу***. Вони виконують кодування повідомлень коректувальними (завадостійкими) кодами. Тим самим забезпечується можливість виявлення чи виправлення помилок декодерами (помилок, що виникають під час передавання сигналів каналами зв'язку).

Коди джерел дискретних повідомлень забезпечують перетворення повідомлень (знаків) джерела у символи вторинного алфавіту. Кожному знаку присвоюється кодова комбінація за певним правилом. ***Кодування джерела*** дискретних повідомлень здійснюється без втрат інформації, тому воно не змінює ні кількості інформації від джерела.

Спочатку розглянемо коди джерел, які забезпечують лише просте подання повідомлень. Такі коди рівномірні і називають їх примітивними. ***Рівномірний код*** має постійне число кодових символів вторинного алфавіту в кожній кодовій комбінації.

За своєю структурою коди джерел можна поділити на дві групи: натуральні та стандартні коди.

Натуральні коди – це подання числового номера знака (перед кодуванням знаки джерела необхідно певним чином перенумерувати) у будь-якій позиційній системі числення з основою *m*. Приклад такого кодування надає табл. 3.1.

Основа коду m (синонім – *обсяг вторинного алфавіту*)– кількість символів вторинного алфавіту, що використовуються для кодування. Основа (обсяг) коду може бути будь-якою, але найбільше поширення мають *двійкові коди*, тобто $m = 2$, які дуже просто формуються і легко обробляються цифровими пристроями.

Таблиця 3.1 – Натуральні коди джерела з різною основою *m*

Знаки повідомлень	Код з $m = 10$	Код з $m = 8$	Код з $m = 4$	Код з $m = 2$
a_0	0	00	00	0000
a_1	1	01	01	0001
a_2	2	02	02	0010
a_3	3	03	03	0011
a_4	4	04	10	0100
a_5	5	05	11	0101
a_6	6	06	12	0110
a_7	7	07	13	0111
a_8	8	10	20	1000

Кількість кодових комбінацій рівномірного коду

$$M = m^n, \tag{3.1}$$

де n – довжина (розрядність) рівномірного коду,

або *довжина рівномірного двійкового коду*

$$n = \log_2 M. \tag{3.2}$$

Ясно, що повинно виконуватись співвідношення між обсягом алфавіту (кількістю знаків) джерела та кількістю кодових комбінацій коду

$$M_{\text{А}} \leq M\ . \tag{3.3}$$

Кодування джерела дискретних повідомлень виконується за схемою, рис. 3.1.

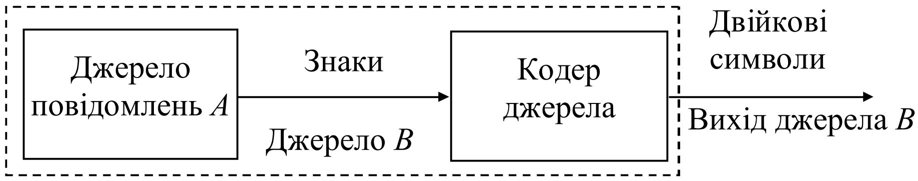


Рисунок 3.1 – Кодування джерела дискретних повідомлень

Стандартні коди – це подання знаків джерела стандартизованими тим чи іншим чином кодовими комбінаціями. Стандартизація провадиться національними або міжнародними організаціями зі стандартизації.

Перелік стандартних кодів за більш як 170-річну історію існування електричного зв’язку досить великий. До них відносяться коди: Морзе; Бодо (перший міжнародний п’ятирозрядний телеграфний код); МТА № 2 (Міжнародний телеграфний алфавіт № 2); МТК № 2 (Міжнародний телеграфний код № 2, який відрізняється від МТА № 2 наявністю кирилиці); МТА № 3; МТК № 5; російські – КОИ-7 (код отображения информации – код відображення інформації); ДКОИ-8 (двоичный код отображения информации –двійковий код відображення інформації); американські – ASCII (American Standard Code for Information Interchange – американський стандартний код для обміну інформацією) та EBCDIC (Extended Binary Coded Decimal Interchange) – розширений двійководесятковий код обміну інформацією тощо.

Деякі зі стандартних кодів уже не застосовуються чи знаходять обмежене застосування, наприклад, коди Морзе, Бодо, МТК-2, КОИ-7, ДКОИ-8 та ін.

Код МТК № 2 – рівномірний, п’ятирозрядний. Оскільки загальне число кодових комбінацій цього коду M = 32, то для кодування більшого числа знаків джерела застосовується регістровий принцип, за якого кодер і декодер містять три кодових таблиці, що можуть перемикатись, і одна і та ж кодова комбінація слугує для кодування різних знаків.

Код ASCII – рівномірний, семирозрядний. Оскільки загальне число кодових комбінацій цього коду M = 128, то для кодування знаків джерела можна не застосовувати регістровий принцип. Але якщо його застосовувати для кодування кирилицею (російською чи українською мовами), то семи розрядів уже мало. Використовується восьмий розряд. Під кирилицю відводяться двійкові комбінації, які не зайняті в загальноприйнятім коді, щоб зберегти незмінним кодування латинських літер та інших знаків. Так виник російський код ДОКИ-8, потім із появою персональних комп’ютерів – альтернативний код Windows – код 1251. Крім того, код ASCII досить гнучкий. Він може бути і шестирозрядним (один розряд не застосовується), і восьмирозрядним (додається розряд перевірки кодових комбінацій на парність для знаходження помилок).

Простим способом подання кодів є кодові таблиці, що ставлять у відповідність знакам повідомлення кодові комбінації (див. табл. 3.1).

Застосовується також подання кодів певною формулою та у вигляді кодового дерева. Кодове дерево являє собою граф, із кожного **вузла** якого виходить m **віток**. Для двійкового коду m = 2, тобто виходять дві вітки, які кодуються як “0” та “1”. Приклад кодового дерева подано під час розгляду коду Хаффмана.

Рівномірні двійкові коди надто широко використовуються через свою простоту і зручність процедур кодування-декодування: кожному знаку відповідає однакова кількість кодових символів.

Декодування нерівномірних кодів – процедура набагато складніша, ніж для рівномірних. При цьому ускладнюється апаратура декодування і синхронізації, оскільки декодування знаків стає нерегулярним. Так, наприклад, якщо до входу декодера надійшов кодовий символ, наприклад, „0“, то декодер повинен подивитися в кодову таблицю і з’ясувати, якому знаку відповідає така кодова комбінація. Якщо такої комбінації немає, декодер чекає надходження наступного кодового символу. Якщо з наступним кодовим символом комбінацію буде знайдено, то декодування комбінації з двох символів завершиться. Якщо за другим символом комбінацію знову не буде знайдено, треба чекати третього символу і т.д.

3.2 Ефективні коди

Як правило, вихід кодера джерела (рис. 3.1) – це вихід двійкового джерела повідомлень *B*. В якому співвідношенні знаходяться інформаційні характеристики джерел *A* і *B*?. Продуктивності джерел *A* і *B* однакові, а ентропії і коефіцієнти надмірності різні (у загальному випадку), оскільки різні алфавіти джерел і різні ймовірнісні характеристики знаків.

Вправа 3.1. Довести, що при використанні рівномірних кодів коефіцієнт надмірності джерела *B* не менший за коефіцієнт надмірності джерела *A*.

Довжина рівномірного коду $n \geq \log_2 M_{\text{A}}$.

Коефіцієнт надмірності джерела *A* $K_{\text{надм}}(A) = 1 - H(A)/\log_2 M_{\text{A}}$.

Коефіцієнт надмірності джерела *B* $K_{\text{надм}}(B) = 1 - H(B)/\log_2 m = 1 - H(B)$.

Очевидні співвідношення: $H(B) = H(A)/n \leq H(A)/\log_2 M_{\text{A}}$.

$$K_{\text{надм}}(B) \geq 1 - H(A)/\log_2 M_{\text{A}} = K_{\text{надм}}(A).$$

Отже, в результаті кодування рівномірним кодом надмірність повідомлень може лише залишитись незмінною чи збільшитись.

Ефективними (економними) називають коди джерел повідомлень, які забезпечують зменшення надмірності повідомлень під час кодування. Завдяки зменшенню надмірності повідомлень ефективні коди надають можливість більш ефективно використовувати канали зв’язку чи пристрої пам’яті. Ефективне кодування повідомлень в обчислювальній техніці називають також ***стисненням інформації***.

Принципи побудови ефективних кодів. Для того, щоб сформулювати принципи побудови ефективних кодів, необхідно згадати причини надмірності повідомлень:

– статистична залежність між знаками в повідомленнях джерела;

– нерівноймовірність знаків у повідомленнях джерела.

Тому побудова ефективного коду проводиться двома етапами. На ***першому етапі*** усувається статистична залежність між знаками, що підлягають кодуванню, шляхом укрупнення алфавіту. Укрупнення алфавіту полягає в тому, що деякі знаки джерела *A* об’єднуються в знакосполучення з кількох знаків (у слова). Об'єднання виконується так, щоб знакосполучення в повідомленнях були незалежними. Якщо знаки джерела A незалежні, то перший етап не потрібний.

На ***другому етапі*** побудови коду необхідно врахувати наступні особливості:

– у вправі 3.1 доведено, що зменшення надмірності можливе лише при використанні нерівномірних кодів;

– чим менша ймовірність знака a_k, тим менше інформації він несе, тим менше двійкових символів (меншу довжину) повинна мати кодова комбінація, що відповідає знаку a_k. Наприклад, $i(a_k)$ = 3 дв.од., тоді недоцільно використовувати для знака a_k комбінацію довжини $n_k \geq 4$, оскільки це породжує надмірність;

– щоб ентропія повідомлення на виході кодера була близька до максимального значення (1 дв. од.), ймовірності символів „1" і „0" на виході кодера повинні бути якомога більш близькими до 0,5;

– код повинен бути *префіксним – ніяка з коротких кодових комбінацій не повинна бути початком більш довгої кодової комбінації.* Тоді для правильного декодування послідовності не потрібно передавати розділові знаки між кодовими комбінаціями.

Оскільки для побудови ефективного коду використовують імовірності знаків, то ефективні коди називають також *статистичними.*

Числовими характеристиками ефективного коду є:

– *коефіцієнт ефективності коду*

$$\eta = H(A)/\ \overline{n}\,, \tag{3.4}$$

тобто відношення ентропії джерела $H(A)$ до середньої довжини кодових комбінацій

– *середня довжина кодових комбінацій* нерівномірного коду

$$\overline{n} = \sum_{k=1}^{M_A} n_k P(a_k)\,. \tag{3.5}$$

Згідно з теоремою кодування Шеннона (див. розд. 3.3) $\eta \leq 1$;

– *коефіцієнт стиснення повідомлень*

$$\mu = n/\overline{n}\,, \tag{3.6}$$

тобто відношення довжини рівномірного коду n до середньої довжини кодових комбінацій $\overline{n}$. Набуває значення $\mu \geq 1$, і чим краще стиснення, тим значення μ є більшим.

Середня тривалість видачі знака джерелом і кодером $\overline{T} = \overline{n} \cdot T_б$, де $T_б$ – тривалість двійкового символу (біта) на виході кодера. Швидкість цифрового сигналу на виході кодера $R = 1/T_б$. Звідси $R = \overline{n}/\overline{T}$. Отже, за фіксованої середньої тривалості видачі знака джерелом ефективне кодування зменшує швидкість цифрового сигналу R на виході кодера.

Застосовувані на другому етапі кодування ефективні коди. Першим ефективним статистичним кодом був код Морзе (1837 р.), але він не префіксний, тому його коефіцієнт ефективності незначний. Нині його застосування дуже обмежене.

Першим ефективним префіксним кодом став запропонований ***код Шеннона-Фано*** (1951 р.). Алгоритм побудови коду Шеннона-Фано має таку послідовність процедур за кроками:

1. Упорядкування шляхом розміщення знаків джерела в порядку убування їхніх імовірностей.
2. Поділ знаків на 2 групи з приблизно рівними ймовірностями. Ця процедура призводить до різних кінцевих результатів, залежно від поділу знаків на групи.
3. Знакам верхньої групи (в таблиці) приписується символ „0“, знакам нижньої групи – символ „1“ (або навпаки, це не має істотного значення).
4. Повторення кроків 2 і 3 – доки поділ знаків на групи не закінчиться і їм не будуть приписані символи „0“ чи „1“.
5. Кодова комбінація знака формується шляхом виписування символів, приписаних цьому знаку, зліва направо.

Приклад 3.1. Алфавіт джерела має обсяг $M_A = 6$, знаки в повідомленнях незалежні і мають такі ймовірності: $P(a_1) = 0{,}4$; $P(a_2) = 0{,}2$; $P(a_3) = P(a_4) = 0{,}15$; $P(a_5) = P(a_6) = 0{,}05$, а тривалість видачі одного знака 1 мс. Побудувати код Шеннона-Фано. Обчислити ентропію джерела, середню довжину кодових комбінацій, швидкість цифрового сигналу на виході кодера, порівняти коефіцієнти надмірності на вході та виході кодера, обчислити коефіцієнт ефективності та коефіцієнт стиснення отриманого коду.

Розв'язання. З числа можливих варіантів побудови коду розглянемо алгоритм, показаний в табл. 3.2.

Таблиця 3.2 – Приклад побудови коду Шеннона-Фано

<table>
<tr><th>a_i</th><th>$P(a_i)$</th><th colspan="4">Поділ на групи</th><th>Кодові комбінації</th><th>n_k</th></tr>
<tr><td>a_1</td><td>0,4</td><td>0</td><td colspan="3"></td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>a_2</td><td>0,2</td><td rowspan="5">1</td><td rowspan="2">0</td><td colspan="2">0</td><td>100</td><td>3</td></tr>
<tr><td>a_3</td><td>0,15</td><td colspan="2">1</td><td>101</td><td>3</td></tr>
<tr><td>a_4</td><td>0,15</td><td rowspan="3">1</td><td colspan="2">0</td><td>110</td><td>3</td></tr>
<tr><td>a_5</td><td>0,05</td><td rowspan="2">1</td><td>0</td><td>1110</td><td>4</td></tr>
<tr><td>a_6</td><td>0,05</td><td>1</td><td>1111</td><td>4</td></tr>
</table>

Ентропія джерела

$$H(A) = -\sum_{i=1}^{M_A} P(a_i)\cdot\log_2 P(a_i) = -\left(0{,}4\cdot\log_2 0{,}4 + 0{,}2\cdot\log_2 0{,}2 + 2\cdot 0{,}15\cdot\log_2 0{,}15 + 2\cdot 0{,}05\cdot\log_2 0{,}05\right) =$$

$$= 2{,}25 \text{ дв. од.}$$

Середня довжина кодових комбінацій:

$$\bar{n} = \sum_{k=1}^{M_A} n_k \cdot P(a_k) = 1\cdot 0{,}4 + 3\cdot(0{,}2 + 0{,}15 + 0{,}15) + 4\cdot 2\cdot 0{,}05 = 2{,}3 \text{ дв. симв.}$$

Швидкість цифрового сигналу на виході кодера

$$R = \bar{n}/\bar{T} = 2{,}3/10^{-3} = 2300 \text{ дв.симв./с } (\text{біт/с}).$$

Коефіцієнт надмірності джерела A

$$K_{\text{надм}}(A) = 1 - \frac{2{,}25}{\log_2 6} = 0{,}13\,.$$

Для розрахунку коефіцієнта надмірності джерела B (по виходу кодера) необхідно обчислити ентропію цього джерела $H(B)$. Знайдемо ймовірності символів „1“ і „0“ на виході джерела B.

$$P(1) = 0{,}2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 0{,}15 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}05 \cdot \frac{3}{4} + 0{,}05 = 0{,}354;$$

$$P(0) = 0{,}4 + 0{,}2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot 0{,}15 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}05 \cdot \frac{1}{4} = 0{,}646.$$

Ентропія джерела B

$$H(B) = -(0{,}354 \cdot \log_2 0{,}354 + 0{,}646 \cdot \log_2 0{,}646) = 0{,}94 \text{ дв. од.}$$

Коефіцієнт надмірності джерела B

$$K_{\text{надм}}(B) = 1 - 0{,}94 = 0{,}06.$$

Отримані значення показують, що кодування зменшує надмірність.

Для порівняння отриманого коду з іншими кодами обчислимо:

коефіцієнт ефективності коду $\mu = \dfrac{H(A)}{\bar{n}} = \dfrac{2{,}25}{2{,}3} = 0{,}98$;

коефіцієнт стиснення нерівномірного коду $\eta = \dfrac{n}{\bar{n}} = \dfrac{3}{2{,}3} = 1{,}3$,

де n – довжина рівномірного коду, яка визначається як ціле число, що задовольняє умові

$$n \geq \log_2 M_A.$$

Другим ефективним префіксним кодом є ***код Хаффмана*** (1952 р.). Цей код є оптимальним префіксним кодом для дискретних джерел без пам’яті за критерієм – мінімальна середня довжина кодової комбінації знака.

Код Хаффмана відіграє важливу роль у кодуванні зображень. Він є основною частиною алгоритму кодування за стандартами JPEG, MPEG і H.261. Є стандартним для кодування факсимільних повідомлень згідно з Рекомендацією E.452 Міжнародного союзу електрозв’язку. Крім того, код Хаффмана використовуються для кодування аудіо сигналів.

Розглянемо детально алгоритм побудови коду Хаффмана. Він базується на кодовому дереві і має таку послідовність процедур:

1. Упорядкування знаків шляхом розміщення їх у порядку спадання їхніх імовірностей.

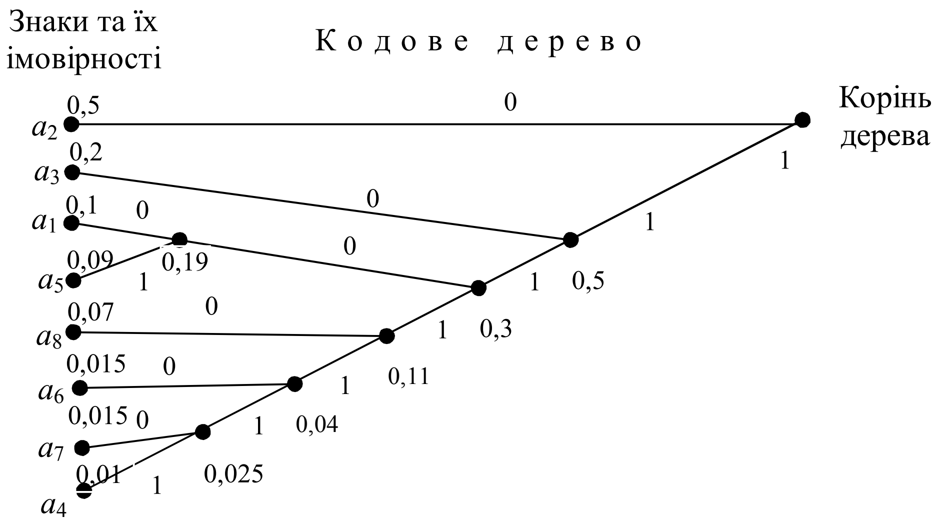
2. Вибирають два вузли (знаки) з найменшими ймовірностями. З них будують дві вітки, які сходяться в один вузол, що відповідає складеному знаку, а його ймовірність дорівнює сумі ймовірностей вузлів, з яких вийшли вітки. Віткам приписують символи 1 і 0, наприклад, верхній вітці 1, а нижній вітці 0.

3. Повторення кроків 1 і 2 – доки не буде досягнуто кореня кодового дерева.

4. Кодова комбінація знака формується шляхом виписування символів, починаючи з кореня кодового дерева, проходячи по вітках до цього знака, тобто справа наліво.

Приклад 3.2. Задано джерело дискретних повідомлень з $M_{\text{A}} = 8$. Знаки джерела незалежні і мають такі ймовірності: $P(a_1) = 0{,}1$; $P(a_2) = 0{,}5$; $P(a_3) = 0{,}2$; $P(a_4) = 0{,}01$; $P(a_5) = 0{,}09$; $P(a_6) = P(a_7) = 0{,}015$; $P(a_8) = 0{,}07$. Побудувати код Хаффмана. Обчислити ентропію джерела, середню довжину кодових комбінацій, коефіцієнт ефективності та коефіцієнт стиснення отриманого коду, порівняти коефіцієнти надмірності на вході та виході кодера.

Розв'язання. Побудову коду Хаффмана наочно показано на рис. 3.2. Перегрупування не відображено на рисунку – в такому простому прикладі це зроблено «у розумі».



Кодова таблиця

Знак	$P(a_k)$	Код. комб.
a_2	0,5	**0**
a_3	0,2	**10**
a_1	0,1	**1100**
a_5	0,09	**1101**
a_8	0,07	**1110**
a_6	0,015	**11110**
a_7	0,015	**111110**
a_4	0,01	**111111**

Рисунок 3.2 – Приклад побудови кодового дерева

$$\bar{n} = \sum_{i=1}^{M_A} n_i \cdot P(a_i) = 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}2 + 4(0{,}1 + 0{,}09 + 0{,}07) + 5 \cdot 0{,}015 + 6(0{,}015 + 0{,}01) = 2{,}17 \text{ дв. симв.}$$

Ентропія джерела

$$H(A) = -\sum_{k=1}^{M_A} P(a_k) \cdot \log_2 P(a_k) = -(0{,}1 \cdot \log_2 0{,}1 + 0{,}5 \cdot \log_2 0{,}5 + 0{,}2 \cdot \log_2 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}01 \cdot \log_2 0{,}01 +$$
$$+ 0{,}09 \cdot \log_2 0{,}09 + 2 \cdot 0{,}015 \cdot \log_2 0{,}015 + 0{,}07 \cdot \log_2 0{,}07) = 2{,}12 \text{ дв.од.}$$

Порівняємо надмірність повідомлень на вході та на виході кодера. Коефіцієнт надмірності джерела A

$$K_{\text{надм}}(A) = 1 - \frac{2{,}12}{\log_2 8} = 0{,}29\,.$$

Для розрахунку коефіцієнта надмірності джерела B (по виходу кодера) необхідно обчислити ентропію цього джерела $H(B)$. Знайдемо ймовірності символів 1 і 0 на виході джерела B.

$P(1) = 0{,}2 \cdot 1/2 + 0{,}1 \cdot 2/4 + 0{,}09 \cdot 3/4 + 0{,}07 \cdot 3/4 + 0{,}015 \cdot 4/5 + 0{,}015 \cdot 5/6 + 0{,}01 = 0{,}305$;

$P(0) = 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 1/2 + 0{,}1 \cdot 2/4 + 0{,}09 \cdot 1/4 + 0{,}07 \cdot 1/4 + 0{,}015 \cdot 1/5 + 0{,}015 \cdot 1/6 = 0{,}695$.

Ентропія джерела B

$$H(B) = -(0{,}305 \cdot \log_2 0{,}305 + 0{,}695 \cdot \log_2 0{,}695) = 0{,}89 \text{ дв. од.}$$

Коефіцієнт надмірності джерела B

$$K_{\text{надм}}(B) = 1 - 0{,}89 = 0{,}11.$$

Отже,

$$K_{\text{надм}}(B) < K_{\text{надм}}(A) -$$

ефективне кодування зменшує надмірність.

Для порівняння отриманого коду з іншими кодами розрахуємо:

коефіцієнт ефективності коду $\mu = \dfrac{H(A)}{\bar{n}} = \dfrac{2{,}12}{2{,}17} = 0{,}98$;

коефіцієнт стиснення нерівномірного коду $\eta = \dfrac{n}{\bar{n}} = \dfrac{3}{2{,}17} = 1{,}38$,

де n – довжина рівномірного коду, яка визначається як ціле число, що задовольняє умові

$$n \geq \log_2 M_A.$$

З прикладів 3.1 і 3.2 випливає, що коефіцієнти стиснення ефективних кодів не надто значні. Це тому, що обсяги алфавітів джерел невеликі. Для джерел з більшим числом знаків і більшою різноманітністю ймовірностей цей показник підвищується.

Звичайно параметри коду Хаффмана дещо кращі, ніж параметри коду Шеннона-Фано для одного і того ж джерела. Це пояснюється тим, що алгоритм побудови коду Хаффмана дає можливість повторного упорядкування знаків у порядку убування їхніх імовірностей і вибору пар знаків з близькими ймовірностями (п. 2 алгоритму). Тому вважають, що код Хаффмана оптимальний, а код Шеннона-Фано не завжди є оптимальним.

3.3 Теорема Шеннона про кодування джерела

Якщо ***кодування джерела*** ведеться двійковим кодом, то $\overline{n} = H(A) + \varepsilon$, де ε – як завгодно мала додатна величина.

Із порівняння формул (2.4) і (3.5) легко помітити, коли $n_k = -\log_2 P(a_k)$ для всіх k, середня довжина кодової комбінації $\overline{n} = H(A)$. Зазначимо, що це мінімально можливе значення $\overline{n}$, оскільки один двійковий символ при рівноймовірних символах не може переносити більше однієї двійкової одиниці інформації. З іншого боку, рівність $\overline{n} = H(A)$ досягається, коли ймовірності знаків, що кодуються, задовольняють рівності $P(a_k) = 2^{-n_k}$ для всіх k, тобто ймовірності є цілими степенями числа 2. У загальному випадку це не виконується. До цього можна лише наближатись під час укрупнення алфавіту (на першому етапі кодування).

Отже, будь-яке джерело можна закодувати двійковим кодом при середній кількості двійкових символів на знак джерела, як завгодно близькій до ентропії, і неможливо домогтися середньої довжини кодових комбінацій, меншої за ентропію. Рівність $\overline{n} = H(A)$ буде досягнута, якщо повністю видалити надмірність, а саме, за ймовірностей символів „1“ і „0“ рівних 0,5. Таким чином, теорема Шеннона установлює границі компактності подання інформації, яких можна досягти при ефективному кодуванні.

Контрольні питання

1. Чому знаки дискретного джерела підлягають кодуванню перед їх передаванням чи запам’ятовуванням?
2. Як визначаються основні параметри коду: обсяг (основа) вторинного алфавіту, довжина (розрядність) коду?
3. Яке число розрядів має бути в рівномірному коді, призначеному для кодування первинного алфавіту, що складається із 128 знаків, при основі коду $m = 2, 4, 8, 16, 32$.
4. Пояснити принцип ефективного кодування.
5. Як визначити коефіцієнти стиснення та ефективності нерівномірного коду?

ЗАДАЧІ для самостійної роботи студентів

1. Задано три коди

Номер коду	Знаки							
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	000	001	010	011	100	101	110	111
2	0	1	00	01	10	11	110	111
3	00	01	100	101	1100	1101	1110	1111

Необхідно: 1) визначити вид коду; 2) визначити, які з цих кодів є префіксними та чому; 3) закодувати послідовність $a_6a_0a_3a_3a_7a_2a_1$ усіма трьома кодами; 4) декодувати двійкову послідовність: а) коду 1 – 111010011101000110; б) коду 3 – 1111001011110.

2. Закодувати число 47 натуральними кодами з основою m = 2, 4, 8, 10. Як змінюється число розрядів кодових комбінацій для різних основ коду.

3. Обсяг алфавіту джерела $M_А$ = 18 знаків, тривалість видачі одного знака $T_{зн}$ = 0,01 с. Визначити довжину (розрядність) рівномірного коду та швидкість цифрового сигналу (біт/с).

4. Джерело видає повідомлення (знаки) двійковими символами рівномірного коду: довжина коду 8 розрядів, тривалість видачі одного знака $T_{зн}$ = 0,1 мс. Визначити максимально можливе число кодових комбінацій, які можна закодувати цим кодом, тривалість видачі одного символу та швидкість цифрового сигналу (біт/с).

5. Імовірності повідомлень (знаків) джерела такі: $P(a_1) = 0{,}04$; $P(a_2) = 0{,}50$; $P(a_3) = 0{,}10$; $P(a_4) = 0{,}20$; $P(a_5) = 0{,}06$; $P(a_5) = 0{,}10$. Побудувати оптимальні нерівномірні двійкові коди Хаффмана чи Шеннона-Фано. Обчислити середню довжину кодової комбінації та вказати, на скільки вона менша за довжину рівномірного коду.

6. Декодувати послідовність 01101011111, яка була закодована кодом Хаффмана чи Шеннона-Фано: a_1 – 11111; a_2 – 0; a_3 – 110; a_4 – 10; a_5 – 11110; a_6 – 1110.

4. Інформаційні характеристики джерела неперервних повідомлень

4.1 Математичні моделі джерел неперервних повідомлень

У телекомунікаційних системах неперервне повідомлення $a(t)$ перетворюється пропорційно (без втрат інформації) у первинний сигнал $b(t) = ka(t)$. Виявилось зручним замість аналізу інформаційних характеристик джерела неперервних повідомлень аналізувати інформаційні характеристики первинного сигналу $b(t)$. Тому в подальшому мова йде лише про первинний неперервний сигнал $b(t)$.

Сигнал $b(t)$ – це реалізації стаціонарного ергодичного неперервного за рівнем випадкового процесу $B(t)$ з характеристиками: одномірними ймовірнісними характеристиками – функцією розподілу ймовірності $F(b)$ та густиною ймовірності $p(b)$; середнім значенням $\overline{B(t)}$ та дисперсією $D\{B(t)\}$; функцією кореляції $K_B(\tau)$ та спектральною густиною потужності $G_B(\omega)$; спектром, зосередженим в обмеженій смузі частот $0...F_{max}$. Вважаємо, що для аналізу і розрахунку інформаційних характеристик джерел неперервних повідомлень необхідні з перелічених характеристик відомі.

4.2 Інформаційні характеристики джерела неперервних повідомлень

Кількість інформації у відліку $b(t^*)$ визначимо за формулою (2.1)

$$I\big(b(t^*)\big) = -\log_2 P\big(b(t^*)\big). \tag{4.1}$$

Оскільки сигнал $b(t)$ неперервний за рівнем, то $P(b(t^*)) \to 0$, а $I(b(t^*)) \to \infty$. Результат не є несподіваним – кількість інформації в неперервному сигналі $b(t)$ прямує до нескінченності. А це тому, що неперервне повідомлення має нескінченну множину реалізацій, імовірність появи будь-якої з них прямує до нуля.

Інтуїтивно зрозуміло, що різні сигнали містять різну кількість інформації. Тому для числової оцінки середньої кількості інформації неперервного джерела (за аналогією з дискретним джерелом) було введено поняття ***диференціальна ентропія.*** До цього поняття прийдемо наступним чином. Виконаємо квантування відліків на L рівнів. Для k-го квантованого відліку можна записати

$$P(b_k) = p(b_k)\Delta b, \tag{4.2}$$

де Δb – крок квантування.

Кількість інформації у цьому відліку

$$I(b_k) = -\log_2(p(b_k)\Delta b). \tag{4.3}$$

Ентропія квантованих відліків

$$H_{\text{кв}}(B) = -\sum_{k=1}^{L} P(b_k)\log_2 P(b_k) \tag{4.4}$$

Ентропія неквантованих відліків визначається

$$H(B) = \lim_{\Delta b \to 0} H_{\text{кв}}(B). \tag{4.5}$$

Підставимо (4.4) в (4.5), а потім підставимо (4.2). Враховуючи, що логарифм добутку дорівнює сумі логарифмів, з (4.5) отримаємо два доданки.

Перший доданок

$$h(B) = \int_{-\infty}^{\infty} p(b)\log_2 p(b)db. \tag{4.6}$$

Другий доданок $\lim\limits_{\Delta b \to 0}(-\log_2 \Delta b)$ прямує в ∞. Цей доданок однаковий для усіх сигналів (не залежить від характеристик сигналу), тому його не враховують, а перший доданок (4.6) називають диференціальною ентропією.

Диференціальна ентропія джерела неперервного сигналу $b(t)$ є аналогом ентропії джерела дискретного повідомлення, формально обчислюється як математичне сподівання кількості інформації у відліку за густиною ймовірності, характеризує ступінь невизначеності джерела. Розмірність диференціальної ентропії – дв.од./відлік або просто дв.од.

Звертаємо увагу на те, що диференціальна ентропія:

– обчислюється на відлік, а відліки сигналу можуть бути незалежними або залежними;

– залежить від дисперсії сигналу $b(t)$;

– не показує середньої кількості інформації у відліку, але надає можливість порівнювати кількості інформації різних джерел.

Нижче наведені виведення формул диференціальної ентропії для деяких розподілів імовірностей сигналів $b(t)$.

Вправа 4.1. Вивести формулу для обчислення диференціальної ентропії сигналу $b(t)$, якщо він має гауссів розподіл імовірності з нульовим середнім значенням.

Розв'язання. Якщо у формулу (4.6) підставити вираз $p(b)$ для гауссового розподілу ймовірностей, отримаємо

$$h(B)=\int_{-\infty}^{\infty} p(b)\log_2\frac{1}{p(b)}db=\int_{-\infty}^{\infty} p(b)\log_2\left[\sqrt{2\pi D\{B(t)\}}\exp\left(\frac{b^2}{2D\{B(t)\}}\right)\right]db=$$

$$=\log_2\sqrt{2\pi D\{B(t)\}}\int_{-\infty}^{\infty} p(b)db+\int_{-\infty}^{\infty} p(b)\log_2\left[\exp\left(\frac{b^2}{2D\{B(t)\}}\right)\right]db.$$

Оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} p(b)db=1$, $\log_2 e^z=z\cdot\log_2 e$ та $\int_{-\infty}^{\infty} b^2 p(b)db=D\{B(t)\}$,

то $$h(B)=\log_2\sqrt{2\pi D\{B(t)\}}+0{,}5\log_2 e=\log_2\sqrt{2\pi eD\{B(t)\}}.$$

Вправа 4.2. Вивести формулу для обчислення диференціальної ентропії сигналу $b(t)$ з рівномірним розподілом імовірності і нульовим середнім значенням.

Розв'язання. Якщо у формулу (4.2) підставити вираз $p(b)$ для рівномірного розподілу, отримаємо

$$h(b)=\int_{-b_{\max}}^{b_{\max}} p(b)\log_2(2b_{\max})db=\log_2(2b_{\max})\int_{-b_{\min}}^{b_{\max}} p(b)db.$$

Оскільки $\int_{-\infty}^{\infty} p(b)db=1$ та для рівномірного розподілу ймовірності $D\{B(t)\}=(2b_{\max})^2/12$,

то $h(B)=\log_2\sqrt{12D(B(t))}$.

У таблиці 4.1 наведено формули для диференціальної ентропії поширених розподілів ймовірностей.

Таблиця 4.1 – Розрахункові формули для диференціальної ентропії

Розподіл імовірностей сигналу $b(t)$	Диференціальна ентропія $h(B)$
Гауссів: $p(b)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi D\{B\}}}\exp\left(-\dfrac{b^2}{2D\{B(t)\}}\right)$	$\log_2\sqrt{2\pi eD\{B(t)\}}$
Односторонній експоненціальний: $p(b)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{D\{B(t)\}}}\exp\left(-\dfrac{b}{\sqrt{D\{B(t)\}}}\right), & b\ge 0,\\ 0, & b<0\end{cases}$	$\log_2\sqrt{e^2D\{B(t)\}}$
Двосторонній експоненціальний (Лапласа): $p(b)=\dfrac{1}{\sqrt{2D\{B(t)\}}}\exp\left(-\dfrac{\sqrt{2}\lvert b\rvert}{\sqrt{D\{B(t)\}}}\right)$	$\log_2\sqrt{2e^2D\{B(t)\}}$
Рівномірний: $p(b)=\begin{cases}1/(2b_{\max}), & \lvert b\rvert\le b_{\max}\\ 0, & \lvert b\rvert>b_{\max}\end{cases}$	$\log_2\sqrt{12D\{B(t)\}}$

Приклад 4.1. Розрахувати диференціальну ентропію сигналів $b(t)$ з такими розподілами ймовірності: *а*) гауссів; *б*) односторонній експоненціальний; *в*) двосторонній експоненціальний; *г*) рівномірний. Відліки незалежні, дисперсія сигналу $D\{B(t)\}=10^{-4}$ В^2.

Розв'язання. За формулами з табл. 4.1 маємо:

а) для гауссового розподілу

$$h(B) = \log_2 \sqrt{2\pi e D\{B(t)\}} = 0{,}5 \log_2(2\pi e\cdot 10^{-4}) = -4{,}60 \text{ дв.од.};$$

б) для одностороннього експоненціального розподілу

$$h(B) = \log_2 \sqrt{e^2 D\{B(t)\}} = 0{,}5 \log_2(e^2\cdot 10^{-4}) = -5{,}20 \text{ дв.од.};$$

в) для двостороннього експоненціального розподілу

$$h(B) = \log_2 \sqrt{2e^2 D\{B(t)\}} = 0{,}5 \log_2(2e^2\cdot 10^{-4}) = -4{,}70 \text{ дв.од.};$$

г) для рівномірного розподілу

$$h(B) = \log_2 \sqrt{12 D\{B(t)\}} = 0{,}5 \log_2(12\cdot 10^{-4}) = -4{,}85 \text{ дв.од.}$$

За результатами розрахунків прикладу 4.1 випливає, що, по-перше, ***диференціальна ентропія*** може бути ***від'ємною*** (визначається значенням дисперсії); по-друге, ***найбільша*** диференціальна ентропія при однаковій дисперсії має місце в разі гауссового розподілу сигналу

Ентропію джерела неперервного сигналу b(t), яка характеризує кількість інформації у відліку, пропонувалось обчислювати за різними співвідношеннями. В основу покладено той очевидний факт, що сигнал $b(t)$ завжди можна подати наближеним до нього сигналом $\hat{b}(t)$ з деякою похибкою $\varepsilon(t) = \hat{b}(t) - b(t)$. Допустимий середній квадрат похибки $\overline{\varepsilon^2(t)}$ можна задати.

Академік А.М. Колмогоров увів поняття ***епсилон-ентропії***, використавши поняття еквівалентність сигналу $b(t)$ і його наближеного подання $\hat{b}(t)$. Сигнали $b(t)$ і $\hat{b}(t)$ називаються ***еквівалентними***, якщо середній квадрат похибки $\overline{\varepsilon^2(t)}$ не перевищує задане число ε_0^2.

Епсилон-ентропією $H_\varepsilon(B)$ називається мінімальна середня кількість інформації в одному незалежному відліку сигналу $\hat{b}(t)$ відносно сигналу $b(t)$, коли вони еквівалентні при заданому значенні похибки ε_0^2. При цьому розподіл імовірності похибки $\varepsilon(t)$ має бути таким, що забезпечує мінімальну середню кількість інформації у відліку (за обмеженої дисперсії похибки це гауссів розподіл імовірності). Тобто, ***епсилон-ентропія*** – мінімальна взаємна інформація між $\hat{b}(t)$ і $b(t)$, яку можна отримати про сигнал $b(t)$, спостерігаючи його наближене подання $\hat{b}(t)$:

$$H_\varepsilon(B) = \min h_{\text{вз}}(\hat{B}, B) = \min[h(B) - h(\mathrm{E})] = h(B) - \max h(\mathrm{E}). \tag{4.7}$$

Приклади виведення формул епсилон-ентропії подані у вправах 4.3, 4.4, підсумкові розрахункові формули подані у табл. 4.2 для різних розподілів імовірностей сигналу.

Вправа 4.3. Вивести формулу для обчислення епсилон-ентропії джерела неперервного сигналу $b(t)$ в загальному випадку.

Розв'язання. Використаємо формулу (4.7).

При заданій дисперсії похибки $D\{\mathrm{E}(t)\} = \varepsilon_0^2$ мінімальне значення $h(\mathrm{E})$ має місце лише в разі гауссового розподілу похибки $\varepsilon(t)$. Тоді

$$H_\varepsilon(B) = h(B) - \log_2 \sqrt{2\pi e \varepsilon_0^2}\,. \tag{4.8}$$

Вправа 4.4. Вивести формулу для обчислення епсилон-ентропії джерела неперервного сигналу $b(t)$ з гауссовим розподілом імовірностей.

Розв'язання. Якщо у формулу (4.8) підставити вираз $h(B)$ для гауссового розподілу ймовірностей (табл. 4.1), то отримаємо

$$H_\varepsilon(B) = \log_2 \sqrt{2\pi e D\{B(t)\}} - \log_2 \sqrt{2\pi e D\{\mathrm{E}(t)\}} = 0{,}5\log_2\left[D(B(t))/D(\mathrm{E}(t))\right] = 0{,}5\ \log_2 \rho_{с/п},$$

де $\rho_{с/п}$ – відношення дисперсій сигналу та похибки.

Вправа 4.5. Вивести формулу для обчислення епсилон-ентропії джерела неперервного сигналу $b(t)$, якщо сигнал має рівномірний розподіл ймовірностей.

Розв'язання. Якщо у формулу (4.8) підставити вираз $h(B)$ для рівномірного розподілу ймовірностей (табл. 4.1), то отримаємо

$$H_\varepsilon(B) = \log_2 \sqrt{12 D\{B(t)\}} - \log_2 \sqrt{2\pi e D\{\mathrm{E}(t)\}} = 0{,}5\log_2\left[(6/e\pi)D(B(t))/D(\mathrm{E}(t))\right] = 0{,}5\ \log_2(6/e\pi)\rho_{с/п},$$

де $\rho_{с/п}$ – відношення дисперсій сигналу та похибки.

У табл. 4.2 надано формули для диференціальної ентропії поширених розподілів імовірностей.

Таблиця 4.2 – Розрахункові формули епсилон-ентропії

Розподіл імовірностей сигналу $b(t)$	**Епсилон-ентропія $H_\varepsilon(B)$**
Гауссів	$0{,}5\cdot\log_2 \rho_{с/п}$,
Односторонній експоненціальний	$0{,}5\cdot\log_2\left[(e/2\pi)\rho_{с/п}\right]$
Двосторонній експоненціальний (Лапласа)	$0{,}5\cdot\log_2\left[(2e/\pi)\rho_{с/п}\right]$
Рівномірний	$0{,}5\cdot\log_2((6/e\pi)\rho_{с/п})$
Пояснення: $\rho_{с/п}$ – відношення дисперсій сигналу $b(t)$ і похибки $\varepsilon(t)$	

Приклад 4.2. Розрахувати епсилон-ентропію джерел неперервного сигналу, якщо сигнали мають розподіли ймовірностей: *а*) гауссів; *б*) двосторонній експоненціальний; *в*) односторонній експоненціальний; *г*) рівномірний та відношення дисперсій сигналу і похибки $\rho_{с/п}$ = 43 дБ.

Розв'язання. За формулами (табл. 4.2) маємо:

а) для гауссового розподілу

$H_\varepsilon(B) = 0{,}5\cdot\log_2\rho_{с\text{-}п} = 0{,}5\cdot\log_2 10^{4{,}3} = 7{,}14$ дв.од.;

б) для одностороннього експоненціального розподілу

$H_\varepsilon(B) = 0{,}5\cdot\log_2(e\rho_{с\text{-}п}/2\pi) = 0{,}5\cdot\log_2(e\cdot 10^{4{,}3}/2\pi) = 6{,}54$ дв.од.;

в) для двостороннього експоненціального розподілу

$H_\varepsilon(B) = 0{,}5\cdot\log_2(e\rho_{с\text{-}п}/\pi) = 0{,}5\cdot\log_2(2e\cdot 10^{4{,}3}/\pi) = 7{,}54$ дв.од.;

г) для рівномірного розподілу

$H_\varepsilon(B) = 0{,}5\cdot\log_2(6\rho_{с\text{-}п}/\pi e) = 0{,}5\cdot\log_2(6\cdot 10^{4{,}3}/\pi e) = 6{,}89$ дв.од.

Надмірність джерела неперервного сигналу необхідно розраховувати, використовуючи епсилон-ентропією за формулою

$$K_{надм} = 1 - H_\varepsilon\,(B)/\max H_\varepsilon(B). \qquad (4.9)$$

Приклад 4.3. Розрахувати надмірність джерела неперервного сигналу з епсилон-ентропією, розрахованою в прикладі 4.2, *б*, $H_\varepsilon(B)$ = 6,54 дв.од.

Розв'язання. Якщо прийняти, що густина ймовірності сигналу гауссова, то в прикладі 4.2, *б* знайдено max $H_\varepsilon\,(B)$ = 7,14 дв.од. і надмірність джерела $K_{надм}$ = 1 – 6,54/7,14 = 0,084.

Продуктивність джерела неперервного сигналу (швидкість видачі інформації), обчислена за епсилон-ентропією, носить назву – ***епсилон-продуктивність***

$$R_{\varepsilon\ дж} = 2F_{max}H_{\varepsilon}(B). \tag{4.10}$$

Приклад 4.4. Розрахувати епсилон-продуктивність джерела неперервного сигналу з рівномірним спектром і максимальною частотою спектра 15,0 кГц, епсилон-ентропія якого обчислена в прикладі 4.2, *г*.

Розв'язання. Якщо спектр сигналу рівномірний, то інтервал часу між незалежними відліками $T_д = 1/(2F_{max})$ й епсилон-продуктивність буде $R_{\varepsilon\ дж} = H_{\varepsilon}(B)/T_д = 2F_{max}H_{\varepsilon}(B)$. При $H_{\varepsilon}(B) = 7{,}14$ дв.од. $R_{\varepsilon\ дж} = 2 \cdot 15 \cdot 10^3 \cdot 7{,}14 = 214{,}2 \cdot 10^3$ дв.од./с.

З прикладів 4.2…4.4 випливає, що ***найбільше значення*** епсилон-ентропії має сигнал із гауссовим розподілом ймовірності при однаковій похибці його подання і, як наслідок, найбільшу епсилон-продуктивність.

Контрольні питання

4.1. Чому дорівнює кількість інформації від джерела неперервного сигналу?

4.2. Чи може диференціальна ентропія набувати від'ємних значень?

4.3. Чим відрізняється диференціальна ентропія від ентропії дискретного джерела?

4.4. Нехай $b(t)$ – первинний сигнал, що має обмежений спектр. У дискретизаторі він замінюється відліками, взятими через інтервал Котельникова. Втрачається чи ні при такому перетворенні інформація?

4.5. Дати визначення понять відносна ентропія, епсилон-ентропія джерела неперервного сигналу.

4.6. Дати визначення поняття епсилон-продуктивність джерела неперервного сигналу.

ЗАДАЧІ для самостійної роботи студентів

4.1. Диференціальна ентропія джерела неперервного сигналу $h(B) = 3{,}8$ дв.од. та диференціальна ентропія похибки $h(\mathrm{E}) = -2{,}6$ дв.од. Обчислити епсилон-ентропію цього джерела.

4.2. Розрахувати диференціальну ентропію джерела неперервного сигналу, що має гауссів (односторонній чи двосторонній експоненціальний) розподіл імовірності з дисперсією 0,25 $В^2$.

4.3. Розрахувати епсилон-ентропію джерела неперервного сигналу, що має гауссів розподіл імовірності з дисперсією 2,5 $В^2$. Дисперсія похибки 0,0025 $В^2$.

4.4. Розрахувати епсилон-продуктивність джерела неперервного сигналу, що має гауссів розподіл імовірності з дисперсією 2,5 $В^2$, дисперсія похибки 0,0025 $В^2$. Спектр сигналу рівномірний у смузі частот від 0 до 5,0 кГц.

4.5. Розрахувати епсилон-продуктивність джерела неперервного сигналу, що має гауссів розподіл імовірностей, відношення дисперсій сигналу і похибки 40 дБ. Спектр сигналу рівномірний у смузі частот від 0 до 15,0 кГц.

5. Кодування неперервних повідомлень

5.1 Загальні принципи кодування неперервних повідомлень

При ***кодуванні*** неперервних повідомлень враховують той факт, що джерело неперервних повідомлень виконує перетворення повідомлення $a(t)$ в електричний первинний сигнал $b(t)$, який прийнято називати ***аналоговим***. Кодування неперервного (аналогового) первинного сигналу $b(t)$ призначене для його передавання цифровими каналами чи запам'ятовування.

Передавання аналогових сигналів цифровими сигналами того чи іншого алфавіту отримало назву ***цифрового методу передавання*** (ЦМП). Для організації ЦМП аналоговий сигнал перетворюється в цифровий за допомогою ***кодера джерела*** аналогових сигналів, який названо – ***аналого-цифровий перетворювач*** (АЦП), тобто поняття кодер джерела аналогових сигналів і АЦП, це різні назви (синоніми) одного і того ж процесу і широко використовуються в літературі. Для видачі одержувачу аналогового сигналу здійснюється зворотне перетворення цифрового сигналу в аналоговий декодером – ***цифроаналоговим перетворювачем*** (ЦАП) (друга назва – декодером джерела аналогового сигналу).

Основні ***переваги*** ЦМП порівняно з аналоговими методами передавання:

– більш висока завадостійкість, що яскраво виявляється в системах зв'язку з багаторазовою ретрансляцією (переприйманням);

– можливість широкого застосування новітньої елементної бази цифрової обчислювальної техніки та мікропроцесорів;

– із впровадженням ЦМП з'явились умови для об'єднання методів передавання різних повідомлень на цифровій основі;

– простота спряження цифрового каналу та цифрових систем комутації.

До 90-х років минулого століття у літературі відмічався основний ***недолік*** ЦМП – необхідна широка смуга пропускання каналу зв'язку порівняно з аналоговим передаванням. Нині цей недолік усувається використанням ефективних методів кодування аналогових сигналів та використанням частотно-ефективних методів цифрової модуляції.

Будь-який ЦМП характеризується швидкістю цифрового сигналу (біт/с) і якістю відновлення переданого повідомлення. Звичайно ставиться задача – задовольнити вимогу з якості відновлення повідомлення при мінімальній швидкості цифрового сигналу (зменшення швидкості цифрового сигналу призводить до зменшення витрат основних ресурсів каналу зв'язку – смуги пропускання каналу і потужності сигналу в каналі). Це призвело до розроблення значної кількості ЦМП.

З ***інформаційної*** точки зору всі *запропоновані нині ЦМП*, в принципі, можна поділити на дві групи:

– ***без втрат*** інформації, що міститься в аналоговому сигналі;

– ***з втратами*** частини інформації, що міститься в аналоговому сигналі

Хоча кількість інформації в аналоговому повідомленні нескінченна, але для практичної оцінки кількості інформації джерела аналогового сигналу використовуються поняття – епсилон-ентропія й епсилон-продуктивність.

Отже, враховуючи ці поняття, можна дати таку оцінку ЦМП:

– якщо швидкість цифрового сигналу із виходу АЦП R більша за епсилон-продуктивність джерела $R_{дж}$, тобто $R \geq R_{дж}$, то кодування джерела здійснено без втрат інформації;

– і, навпаки, якщо швидкість цифрового сигналу R менша за епсилон-продуктивність джерела $R_{дж}$, тобто $R \le R_{дж,}$ то кодування джерела здійснено з втратами інформації.

Під ***втратами інформації*** розуміється той факт, що епсилон-ентропія джерела аналогового сигналу більша, ніж ентропія отриманого в кодері цифрового сигналу (частина інформації не передається). Але це не означає, що якість відновлення в ЦАП (декодері) аналогового сигналу погіршується. Для обчислення епсилон-ентропії використовується середньоквадратичний критерій, а для оцінки якості сприймання відновленого сигналу споживачем (наприклад, людиною) можуть бути використані інші критерії, наприклад, середньої експертної оцінки суб'єктивного сприймання мови (див. розд. 6).

5.2 Кодування за методом імпульсно-кодової модуляції

Аналого-цифрове та цифроаналогове перетворення. Принципи аналого-цифрового перетворення під назвою ІКМ[1] були запропоновані в 1938 р.

Особливістю ***методу ІКМ*** є те, що кожний відлік аналогового сигналу $b(kT_д)$ подається цифровим сигналом незалежно від інших відліків.

Аналогово-цифровий перетворювач, як мінімум, містить три блоки: дискретизатор, квантувач, кодер.

Цифроаналоговий перетворювач, як мінімум, містить два блоки, що виконують зворотне перетворення: декодер та інтерполюючий (відновлюючий) фільтр. Операція квантування в принципі не має зворотного перетворення.

Наведемо розрахункові формули, що відносяться до АЦП і ЦАП.

Частота дискретизації (на основі теореми Котельникова)

$$f_д = 1/T_д \ge 2F_{max}, \tag{5.1}$$

де F_{max} – максимальна частота спектра аналогового сигналу.

Інтервал дискретизації

$$T_д = 1/f_д. \tag{5.2}$$

Крок квантування

$$\Delta b = (b_{max} - b_{min})/(L - 1) = 2\, b_{max}/(L - 1), \tag{5.3}$$

де b_{max} та b_{min} – максимальне та мінімальне значення аналогового сигналу відповідно;

L – число рівнів квантування.

Квантовані відліки

$$b_{кв}(kT_д) = L_i(kT_д)\Delta b, \tag{5.4}$$

де L_i – номери рівнів квантування, що набувають значення 0, ±1, ±2, ±3, …, ±0,5(L – 1);

Відліки шуму квантування

[1] Незважаючи на наявність у назві ІКМ слова "модуляція", цей метод перетворення аналог-цифра не має ніякого відношення ні до аналогової, ні до цифрової модуляції.

$$\varepsilon_{\text{кв}}(kT_{\text{д}}) = b_{\text{кв}}(kT_{\text{д}}) - b(kT_{\text{д}}). \tag{5.5}$$

Середня потужність шуму квантування

$$\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2} = (\Delta b)^2/12. \tag{5.6}$$

Відношення сигнал/шум квантування

$$\rho_{\text{кв}} = 3(L-1)^2/K_{\text{А}}^2, \tag{5.7}$$

де $K_{\text{А}}$ – коефіцієнт амплітуди аналогового сигналу.

Допустиме число рівнів квантування при рівномірному кодуванні відліків для заданого відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв доп}}$

$$L_{\text{доп}} \geq K_{\text{А}}\sqrt{\rho_{\text{кв доп}}/3} + 1. \tag{5.8}$$

Довжина (розрядність) коду АЦП

$$n \geq \log_2 L_{\text{доп}}. \tag{5.9}$$

Тривалість двійкового символу на виході АЦП

$$T_{\text{б}} = T_{\text{д}}/n. \tag{5.10}$$

Швидкість цифрового сигналу на виході АЦП, біт/с

$$R = 1/T_{\text{б}} = nf_{\text{д}}. \tag{5.11}$$

Похибка на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку

$$\varepsilon_{\text{цк}}(kT_{\text{д}}) = \hat{b}_{\text{кв}}(kT_{\text{д}}) - b_{\text{кв}}(kT_{\text{д}}), \tag{5.12}$$

де $\hat{b}_{\text{кв}}(kT_{\text{д}})$ – відновлений у ЦАП квантований відлік, що відрізняється від квантованого відліку в АЦП через помилки в каналі зв’язку.

Потужність шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку

$$\overline{\varepsilon_{\text{цк}}^2} = p(\Delta b)^2 \cdot (4^n - 1)/3, \tag{5.13}$$

де p – імовірність помилки символу на вході ЦАП (виході каналу зв’язку).

Співвідношення між $\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2}$ і $\overline{\varepsilon_{\text{цк}}^2}$

$$\overline{\varepsilon_{\text{цк}}^2} = \overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2}\left(\rho_{\text{кв}}/\rho_{\text{вих}} - 1\right), \tag{5.14}$$

де $\rho_{\text{вих}} = \dfrac{P_b}{\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2} + \overline{\varepsilon_{\text{цк}}^2}}$ – відношення сигнал/завада на виході ЦАП;

P_b – середня потужність аналогового сигналу.

Коди ІКМ. Нині в ІКМ застосовуються такі коди: натуральний, симетричний та рефлексний.

Натуральний двійковий код є записом номера рівня квантування L_i у двійковій системі числення. *Старший розряд* відводиться для кодування знака, при цьому додатні рівні кодуються одиницею “1”, а від’ємні – нулем “0”.

Симетричний двійковий код (передбачений Рекомендацією МСЕ G.711 для передавання цифрового сигналу ІКМ каналами електрозв'язку) відрізняється від натурального тим, що має *симетрію* верхньої та нижньої частин кодової таблиці в усіх розрядах, крім старшого, відносно осі $L/2$, де $L = 2^k$ – загальне число рівнів квантування.

Рефлексний код (*код Грея*) будується так, щоб при зміні рівня квантування на одиницю, змінювалося значення тільки одного розряду кодової комбінації.

Який із цих кодів застосовувати, залежить від статистичних характеристик аналогового сигналу, параметрів каналу зв'язку та вимог до якості відновлення аналогового сигналу.

Завадостійкість ІКМ. Визначається, здебільшого, двома факторами – шумом квантування в АЦП та помилками в цифровому каналі зв'язку. Для оцінки впливу помилок на виході цифрового каналу зв'язку сьогодні використовуються різні методики:

1. Середньоквадратична оцінка відхилення відновлених у ЦАП квантованих відліків від переданих квантованих відліків, яка визначається як потужність шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку $\overline{\varepsilon^2_{цк}}$ – формула (5.13).

2. Під час відновлення в ЦАП мовного сигналу помилки на виході цифрового каналу зв'язку призводять до значного відхилення відновленого сигналу від переданого, що сприймається на слух як клацання. Для цифрових каналів передавання мови встановлюють норми на допустиму ймовірність помилки, виходячи з середнього інтервалу часу між клацаннями, наприклад, 30 с.

3. Під час відновлення в ЦАП відеосигналу помилки на виході цифрового каналу теж призводять до відхилення прийнятого сигналу від переданого і, залежно від методу формування цифрового відеосигналу, проявляються як яскраві точки (спалахи) на екрані, смужки на рядках (так звані "треки"), зриви рядкової та кадрової синхронізації (це найбільш вагома похибка). Тому для цифрових каналів передавання відеосигналів установлена норма на допустиму ймовірність помилки $p \le 10^{-10}\ldots10^{-11}$. За такої малої ймовірності помилки її впливом на якість відновлення відеосигналу можна нехтувати.

Приклад 5.1. Швидкість цифрового сигналу передавання мови R = 64 кбіт/с. Знайти допустиму ймовірність помилки $p_{доп}$.

Розв'язання. Якщо прийняти, що середній інтервал часу між клацаннями дорівнює $T_{кл}$ = 30 с, то ймовірність помилки

$$p_{доп} = 1/(RT_{кл}) = 1/(64\cdot10^3\cdot30) = 5\cdot10^{-7}.$$

Нижче наведено вправи та приклади розрахунків параметрів АЦП і ЦАП.

Вправа 5.1. Вивести формулу дисперсії шуму квантування $D\{\mathrm{E}_{кв}\}$ при рівномірному квантуванні в АЦП з кроком Δb.

Розв'язання. Якщо прийняти, що шум квантування має рівномірний розподіл імовірності в інтервалі $-\Delta b/2 \le \varepsilon \le \Delta b/2$, то дисперсія шуму квантування – це дисперсія величини з рівномірним розподілом імовірності, яка дорівнює

$$D\{\mathrm{E}_{кв}\} = (\Delta b)^2/12.$$

Оскільки середнє значення шуму квантування дорівнює нулю, то потужність шуму квантування $\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2} = D\{\text{Е}_{\text{кв}}\}$.

Вправа 5.2. Вивести формулу відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}}$ при рівномірному квантуванні з кроком Δb та числом рівнів квантування L.

Розв'язання. Відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}} = P_b/\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2}$. Потужність сигналу $P_b = b_{\max}^2 / K_{\text{А}}^2$. За формулою (5.3) $(\Delta b)^2 = 4\ b_{\max}^2/(L-1)^2$. Тоді відношення сигнал/шум квантування буде $\rho_{\text{кв}} = \dfrac{12 b_{\max}^2 (L-1)^2}{4K_{\text{А}}^2\ b_{\max}^2} = \dfrac{3}{K_{\text{А}}^2}(L-1)^2$.

Вправа 5.3. Вивести формулу потужності шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку, за відомими кроком квантування Δb, числом рівнів квантування L, довжиною коду АЦП n, імовірністю помилки символу p.

Розв'язання. Помилково прийняті символи в кодових комбінаціях призводить до зміни рівня квантування L_i на значення L_{i+m} з похибкою $\varepsilon_{\text{цк}} = L_{i+m} - L_i$, яка залежить від розряду k в кодовій комбінації, де виникла помилка, а значення похибки (тобто її "вага") визначається як $\varepsilon_{\text{цк}}(k) = 2^{(k-1)}\cdot\Delta b$, $k = 1, 2, 3,..., n$.

Помилки у розрядах кодових комбінацій рівноймовірні. В реальних системах передавання $p \ll 1$. Тоді ймовірність того, що кодова комбінація містить помилку, дорівнює np. Отже, потужність шуму, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку, визначається

$$\overline{\varepsilon_{\text{цк}}^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_{\text{цк}}^2(k)np = \sum_{k=1}^{n}2^{2(k-1)}(\Delta b)^2.$$

Якщо врахувати рівність $\sum\limits_{k=1}^{n}2^{2(k-1)} = \left(4^n - 1\right)/3$, отримаємо наступну формулу

$$\overline{\varepsilon_{\text{цк}}^2} = p(\Delta b)^2\,\frac{4^n - 1}{3}.$$

Вправа 5.4. За заданими відношеннями сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}}$ та сигнал/завада на виході ЦАП $\rho_{\text{вих}}$ знайти співвідношення між потужністю шуму квантування $\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2}$ та потужністю шуму, викликаного помилками в цифровому каналі, $\overline{\varepsilon_{\text{цк}}^2}$.

Розв'язання. За визначенням маємо

$$\rho_{\text{кв}} = \frac{P_b}{\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2}} \text{ та } \rho_{\text{вих}} = \frac{P_b}{\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2} + \overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2}}.$$

З цих співвідношень випливає, що

$$\overline{\varepsilon_{\text{цк}}^2} = \overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2}\left(\rho_{\text{кв}}/\rho_{\text{вих}} - 1\right).$$

Вправа 5.5. Показати, якщо відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}}$ та відношення сигнал/завада $\rho_{\text{вих}}$ відрізняються на 3 дБ, то $\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2} = \overline{\varepsilon_{\text{цк}}^2}$.

Розв'язання. Різниця між $\rho_{\text{кв}}$ і $\rho_{\text{вих}}$ на 3 дБ означає, що $\rho_{\text{кв}}/\rho_{\text{вих}} = 10^{\,0,3} = 2$. Тоді з отриманої у вправі 2.4 формули випливає, що $\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2} = \overline{\varepsilon_{\text{цк}}^2}$.

Приклад 5.2. Знайти потужність шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку, якщо $\overline{\varepsilon_{\text{кв}}^2} = 10^{-4}$ В^2, відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}} = 45$ дБ та відношення сигнал/завада $\rho_{\text{вих}} = 40$ дБ.

Розв'язання. За формулою, отриманою у вправі 2.4, $\overline{\varepsilon^2_{\text{цк}}} = \overline{\varepsilon^2_{\text{кв}}}\left(\rho_{\text{кв}}/\rho_{\text{вих}} - 1\right)$. Оскільки $\rho_{\text{кв}}/\rho_{\text{вих}} = 10^{4,5}/10^{4,0} = 10^{0,5} = 3{,}16$, то $\overline{\varepsilon^2_{\text{цк}}} = 10^{-4} \cdot 3{,}16 = 3{,}16 \cdot 10^{-4}$ В^2.

Нерівномірне квантування. Необхідність нерівномірного квантування випливає з того, що при кроці квантування Δb = const відношення сигнал/шум квантування буде різним за великих та малих рівнів аналогового сигналу. Тому малі рівні сигналу слід квантувати з малим кроком Δb, а великі рівні – з більшим кроком Δb.

Цей метод кодування технічно реалізується при поєднанні компресора аналогового сигналу і квантувача з рівномірним кроком. Найчастіше застосовується для мовних повідомлень (ІКМ для розмовних сигналів з нерівномірним квантуванням стандартизована Рекомендацією МККТТ G.711: частота дискретизації 8 кГц; довжина коду на виході кодера ІКМ 8 розрядів), тому що вони мають такі особливості:

– розподіл імовірностей – гауссів, тобто, малі рівні сигналу зустрічаються частіше, ніж великі;

– людське вухо сприймає звук нелінійно – краще розрізняє значення звукового тиску на малих рівнях.

Компресія розмовного сигналу забезпечує зменшення коефіцієнта амплітуди аналогового сигналу $K_{\text{А}}$. Відповідно до формули (5.7) збільшується відношення сигнал/шум квантування (або відповідно можна зменшити швидкість цифрового сигналу).

Оптимальним законом компандування є логарифмічний закон компресії, але його складно технічно забезпечити. Тому застосовують закони компандування:

A-закон (в Європі й Азії)

$$y = y_{\max} \frac{[A(|x|/x_{\max})]}{1 + \ln A} \operatorname{sgn} x \ \text{ при } 0 < |x|/x_{\max} \le 1/A;$$

$$y = y_{\max} \frac{1 + \ln[A(|x|/x_{\max})]}{1 + \ln A} \operatorname{sgn} x \ \text{ при } 1/A < |x|/x_{\max} < 1,$$

де x та y – значення сигналу на вході та виході компресора відповідно;

$x_{\max}$ та $y_{\max}$ – максимальні додатні значення сигналу на вході і виході компресора відповідно;

A – додатна константа, її типове значення A = 87,6;

$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad x \ge 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0 \end{cases}$ – знакова функція;

μ-закон (у США, Канаді, Японії і в деяких інших країнах)

$$y = y_{\max} \frac{\ln\left(1 + \mu(x/x_{\max})\right)}{\ln(1 + \mu)},$$

де μ – додатна константи, її типове значення μ = 255.

Існуючі сьогодні два алгоритми ІКМ-кодування з нерівномірним квантуванням (A-закон і μ-закон) забезпечують необхідну якість цифрового передавання телефонних сигналів. Але відсутність єдиного міжнародного стандарту створює незручності, тому що вимагає перекодування мови при передаванні розмовного сигналу з однієї мережі зв'язку в іншу. Змушене перекодування вносить додаткові похибки і знижує якість передавання.

Технічне виконання АЦП та ЦАП при ІКМ. Як випливає з наведених вище пояснень, розрахункових формул, вправ та прикладів, АЦП та ЦАП при ІКМ можуть мати різні параметри: частоту дискретизації, число рівнів квантування і відповідну довжину коду, різні коди та закони компандування. Та й компресор (і відповідно – експандер) можна вмикати або в колі аналогового сигналу, або в колі цифрового сигналу.

З технологічної точки зору, особливо при масовому виробництві, таке різноманіття АЦП і ЦАП є незручним. Тому сьогодні через масове впровадження цифрових технологій виник такий компромісний варіант: фірми виготовляють типовий АЦП (і відповідно ЦАП) з мінімальним набором блоків (дискретизатор, квантувач, кодер) і довжиною коду, як правило, n = 16 (два байти)). Після АЦП вмикається ще один кодер, який у цифровому форматі виконує всі необхідні надалі операції (перетворення коду, зменшення довжини кодових комбінацій, компресію, нерівномірне квантування тощо) (рис. 5.1).

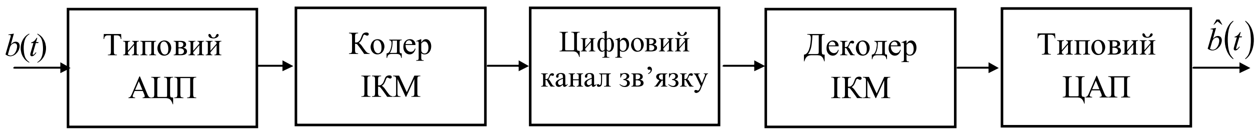


Рисунок 5.1 – Узагальнена схема передавання аналогових сигналів методом ІКМ

Порядок розрахунків параметрів АЦП та ЦАП при ІКМ. Порядок та послідовність розрахунків параметрів АЦП і ЦАП та які саме параметри розраховуються значною мірою залежать від вихідних даних. Але обов'язковими мають бути параметри аналогового сигналу та вимоги до точності відновлення аналогового сигналу на виході ЦАП.

Типові вихідні дані для розрахунків АЦП та ЦАП при ІКМ:

– максимальна частота спектра аналогового сигналу $F_{\max}$;

– середня потужність аналогового сигналу P_b або його максимальне $b_{\max}$;

– коефіцієнт амплітуди аналогового сигналу $K_{\text{А}}$;

– допустиме відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв.доп}}$;

– допустиме відношення сигнал/завада на виході ЦАП $\rho_{\text{вих.доп}}$;

– середній інтервал часу між клацаннями $T_{\text{кл}}$;

– в АЦП виконується рівномірне чи нерівномірне квантування.

***Вимагається розрахувати*:**

– частоту дискретизації $f_{\text{д}}$ та інтервал дискретизації $T_{\text{д}}$;

– число рівнів квантування L, довжину двійкового коду n, швидкість цифрового сигналу R;

– відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}}$ при вибраних параметрах АЦП;

– допустиму ймовірність помилки символу (біта) p на вході ЦАП;

– робочі параметри інтерполюючого фільтра ЦАП.

Слід вирішити – вмикати чи не вмикати ФНЧ перед АЦП, так званий передфільтр? Відповідь проста:

– якщо спектр аналогового сигналу вже обмежений (задано F_{max}) і подальше зменшення F_{max} не допустиме, то вмикати ФНЧ до АЦП немає потреби;

– якщо спектр аналогового сигналу необмежений, то з метою зменшення значення F_{max} сигнал пропускають через ФНЧ. Як правило, параметри передфільтра й інтерполюючого (відновлюючого) ФНЧ в ЦАП вибирають однаковими. Приклади розрахунків наведено нижче.

Приклад 5.3. Розрахувати параметри АЦП з рівномірним квантуванням за такими вихідними даними:

– максимальна частота спектра аналогового сигналу F_{max} = 14 кГц;

– максимальне значення аналогового сигналу b_{max} = 1,5 В;

– коефіцієнт амплітуди аналогового сигналу $K_А^2$ = 9,0 дБ або $K_А^2 = 10^{0,9} = 7,94$;

– допустиме відношення сигнал/шум квантування $\rho_{кв.доп}$ = 48 дБ або $\rho_{кв.доп} = 10^{4,8} =$ $= 63096$.

Розв'язання.

1. Згідно з теоремою Котельникова частота дискретизації $f_д = 1/T_д$ повинна задовольняти умові (формула (5.1)) $f_д \geq 2F_{max}$.

Для заданого F_{max} = 14,0 кГц можна вибрати $f_д$ = 32 кГц. (запас на використання нескладного ФНЧ в ЦАП 10…15%)

2. За заданим допустимим відношенням сигнал/шум квантування $\rho_{кв.доп}$ з формули (5.8) число допустимих рівнів квантування

$$L_{доп} \geq \sqrt{K_А^2 \rho_{кв\ доп}/3} + 1 = \sqrt{7{,}94 \cdot 63096/3} + 1 = 410.$$

Вибирається для реалізації АЦП число рівнів квантування як найближче більше значення з ряду степенів числа 2 (2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 і т.д.), у нашому прикладі L = 512. Тоді за формулою (5.9) довжина (розрядність) коду АЦП $n = \log_2 512 = 9$.

3. Крок квантування за формулою (5.3)

$$\Delta b = 2 \cdot 1{,}5/511 = 5{,}87 \cdot 10^{-3}\ В.$$

4. За розрахованими та вибраними значеннями $f_д$, L та n інші параметри АЦП будуть такими:

– відношенням сигнал/шум квантування за формулою (5.7)

$$\rho_{кв} = 3 \cdot 511^2/7{,}94 = 98660 \text{ або } 49{,}9 \text{ дБ};$$

– швидкість цифрового сигналу за формулою (5.11)

$$R = 9 \cdot 32 \cdot 10^3 = 288 \cdot 10^3 \text{ біт/с};$$

– потужність шуму квантування за формулою (5.6)

$$\overline{\varepsilon_{кв}^2} = (5{,}87 \cdot 10^{-3})^2/12 = 2{,}87 \cdot 10^{-6}\ В^2.$$

Приклад 2.4. Розрахувати параметри ЦАП за такими вихідними даними (деякі з них отримані під час розрахунків АЦП у прикладі 5.3) та вимогами до цифрового каналу зв'язку:

– максимальна частота спектра аналогового сигналу F_{max} = 14 кГц;

– частота дискретизації $f_д$ = 32 кГц;

– крок квантування $\Delta b = 5{,}87 \cdot 10^{-3}$ В;

– відношення сигнал/шум квантування $\rho_{кв}$ = 49,9 дБ або $\rho_{кв} = 10^{4,99} = 98156$;

– потужність шуму квантування $\overline{\varepsilon^2_{\text{кв}}} = 2{,}87\cdot10^{-6}$ В^2;

– допустиме відношення сигнал/завада на виході ЦАП $\rho_{\text{вих доп}}$ = 45 дБ або 31623.

Розв'язання.

1. За формулою, отриманою у вправі 5.4,

$$\overline{\varepsilon^2_{\text{цк}}} = \overline{\varepsilon^2_{\text{кв}}}\left(\rho_{\text{кв}}/\rho_{\text{вих}} - 1\right) = 2{,}87\cdot10^{-6}\cdot(98156/31623 - 1) = 6{,}04\cdot10^{-6}\ \text{В}^2.$$

2. Потужність шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку, залежить від імовірності помилки p на вході ЦАП і визначається формулою (5.13) $\overline{\varepsilon^2_{\text{цк}}} = p(\Delta b)^2(4^n - 1)/3$. Звідси

$$p_{\text{доп}} = 3\,\overline{\varepsilon^2_{\text{цк}}}\,/(\Delta b)^2(4^n - 1) = 3\cdot6{,}04\cdot10^{-6}/[(5{,}87\cdot10^{-3})^2\cdot(4^9 - 1)] = 2\cdot10^{-6}.$$

3. Вимоги до інтерполюючого ФНЧ в ЦАП такі:

– гранична частота смуги пропускання $F_{\text{с п}} = F_{\max}$ = 14 кГц з ослабленням 3 дБ;

– гранична частота смуги затримки $F_{\text{с з}} = f_{\text{д}} - F_{\max}$ = 32 – 14 = 18 кГц з ослабленням, не меншим за 10…20 дБ.

Примітки. 1. Якщо задано, що помилки в каналі оцінюються клацаннями і задано середній інтервал між клацаннями, то аналогічно прикладу 5.1 можна обчислити ймовірність помилки символу на виході каналу зв'язку.

2. За отриманими даними можна розрахувати параметри реалізовуваного інтерполюючого ФНЧ – аналогового пасивного чи активного.

Приклад 2.5. Розрахувати параметри інтерполюючого фільтра ЦАП за такими вихідними даними:

– максимальна частота спектра аналогового сигналу $F_{\max}$ = 3,4 кГц;

– частота дискретизації $f_{\text{д}}$ = 8,0 кГц;

– на граничній частоті смуги пропускання $F_{\text{с.п}}$ ослаблення $A(F_{\text{с.п}})$ = 3,0 дБ;

– на граничній частоті смуги затримки $F_{\text{с.з}}$ ослаблення не менше за $A(F_{\text{с.з}})$ = 15 дБ;

–як інтерполюючий фільтр використовується фільтр Баттерворта.

Необхідно визначити порядок фільтра.

Розв'язання.

1. Гранична частота смуги пропускання $F_{\text{с.п}} = F_{\max}$ = 3,4 кГц.

2. Гранична (мінімальна) частота смуги затримки $F_{\text{с.з}} = f_{\text{д}} - F_{\max}$ = 8,0 – 3,4 = 4,6 кГц.

3. Нормована АЧХ фільтра Баттерворта описується виразом

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f\,/\,F_{\text{с.п}})^{2n}}}, \tag{5.15}$$

де n – порядок фільтра (ціле додатне число); $F_{\text{с.п}}$ – гранична частота смуги пропускання на рівні 3,0 дБ.

4. Ослаблення, забезпечуване фільтром Баттерворта на частоті $F_{\text{сз}}$,

$$A\left(F_{\text{сз}}\right) = 20\lg\frac{1}{H\left(F_{\text{сз}}\right)} = 10\lg\left(1 + \left(F_{\text{сз}}/F_{\text{сп}}\right)^{2n}\right). \tag{5.16}$$

5. Необхідний порядок фільтра визначається шляхом рішення рівності (5.16) відносно n

$$n \ge \frac{\lg\,(10^{0{,}1A(F_{\text{сз}})} - 1)}{2\lg(F_{\text{сз}}\,/\,F_{\text{сп}})}. \tag{5.17}$$

Знак нерівності з'являється, оскільки n – ціле число.

6. Якщо підставити в отриману формулу для n значення $F_{\text{с.з}}$ = 4,6 кГц, $F_{\text{с.п}}$ = 3,4 кГц, $A(F_{\text{с.з}})$= 15 дБ, отримаємо

$$n \geq \frac{\lg(10^{1,5} - 1)}{2\lg(4,6/3,4)} = 5,66, \text{ тобто } n = 6.$$

При n = 6 фільтр Баттерворта достатньо складний, тому для зменшення порядку фільтра слід застосувати як інтерполюючий фільтр Чебишева, який буде мати менший порядок, чи підвищити частоту дискретизації.

Висновок. ІКМ не відноситься до методів низькошвидкісного кодування неперервних повідомлень і використовується у системах, де не ставиться задача економного використання частотних ресурсів каналів зв'язку (наприклад, у кабельних та волоконно-оптичних багатоканальних системах передавання мовних сигналів), а переважає простота реалізації АЦП та ЦАП. Сьогодні ІКМ є також певним еталоном, за яким порівнюють якісні показники всіх інших методів передавання мовних повідомлень цифровими методами.

Контрольні питання

5.1. З якою метою застосовуються цифрові методи передавання аналогових сигналів?

5.2. Перелічити основні переваги цифрових систем передавання неперервних сигналів порівняно з аналоговими методами передавання.

5.3. Дати визначення: АЦП, ЦАП, шум квантування, шум, викликаний помилками у цифровому каналі зв'язку.

5.4. Дати визначення: дискретизація, квантування відліків, кодування квантованих відліків.

5.5. Як визначаються інтервал дискретизації та частота дискретизації?

5.6. Що таке крок квантування та як він вибирається?

5.7. Яким чином можна збільшити відношення сигнал-шум квантування?

5.8. У чому полягають переваги кодування з компандуванням?

5.9. Як визначається швидкість цифрового сигналу при кодуванні за методом ІКМ?

ЗАДАЧІ для самостійної роботи студентів

5.1. Задано необхідне відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}}$ = 50 дБ для АЦП з рівномірним квантуванням, призначеного для перетворення мовного сигналу в цифровий. Визначити швидкість цифрового сигналу.

5.2. Розрядність коду АЦП з рівномірним квантуванням зменшили на два розряди. Визначити, як при цьому зміниться відношення сигнал/шум квантування на виході.

5.3. Задано, що під час перетворення мовного сигналу в цифровий за допомогою АЦП з рівномірним квантуванням використано 8 рівнів квантування. Визначити відношення сигнал/шум квантування $\rho_{\text{кв}}$.

5.4. У результаті дискретизації аналогового сигналу отримана така послідовність відліків: 0,28; 0,52; 1,23; 0,47; 0,02; –0,42; –0,96 В. Перетворити цю послідовність в ІКМ-сигнал у симетричному коді, якщо крок квантування Δb = 0,1 В.

5.5. Задано, що в АЦП застосовано 8-розрядний код і частота дискретизації $f_{\text{д}}$ = 16,0 кГц. Обчислити швидкість цифрового сигналу R на виході АЦП.

5.6. Використавши компандування, зменшили коефіцієнт амплітуди аналогового сигналу на 7 дБ. Як при цьому зміниться відношення сигнал/шум квантування на виході ЦАП?

5.7. Визначити ймовірність помилки на вході ЦАП, щоб забезпечити потужність шуму на виході ЦАП, викликаного помилками в цифровому каналі зв'язку, $\overline{\varepsilon_{\text{цк}}^2} = 10^{-4}$ В^2 за таких параметрів АЦП: число рівнів квантування $L = 256$, крок квантування $\Delta b = 0{,}015$ В.

6. Кодування неперервних повідомлень із передбаченням

6.1 Кодування аналогових сигналів із лінійним передбаченням

При цифрових методах передавання частота дискретизації вибирається за умови відсутності накладення складових спектра дискретного сигналу (див. доказ теореми Котельникова). За такої умови відліки реальних аналогових сигналів є корельованими. Так, стандартизоване значення інтервалу дискретизації для мовного сигналу $T_\text{д} = 125$ мкс. Для такого інтервалу дискретизації значення нормованої кореляційної функції сусідніх відліків мовного сигналу $R_b(T_\text{д}) = 0{,}85$, тобто відліки суттєво корельовані. Це дозволяє з тією чи іншою точністю передбачати значення чергового відліку сигналу за значеннями попередніх відліків. У кодері системи передавання з передбаченням обчислюється похибка передбачення (рис. 6.1)

$$d(kT_\text{д}) = b(kT_\text{д}) - \tilde{b}\left(kT_\text{д}\right), \tag{6.1}$$

де $b(kT_\text{д})$ – відлік аналогового сигналу, що надходить від дискретизатора;

$\tilde{b}\left(kT_\text{д}\right)$ – передбачений відлік, сформований передбачником на основі N попередніх відліків $b((k-1)T_\text{д}),\ b((k-2)T_\text{д}), \cdots, b((k-N)T_\text{д})$.

Похибка передбачення передається каналом зв'язку цифровим сигналом, тому у схемі кодера системи (рис. 6.1) є квантувач і кодер відліків похибки передбачення. У схемі декодера системи декодер відліків відновлює відліки похибки передбачення; у декодері системи є точно такий самий передбачник, як і в схемі кодера системи; передбачений відлік сумується з переданим відліком похибки передбачення й, тим самим, відновлюються відліки переданого аналогового сигналу.

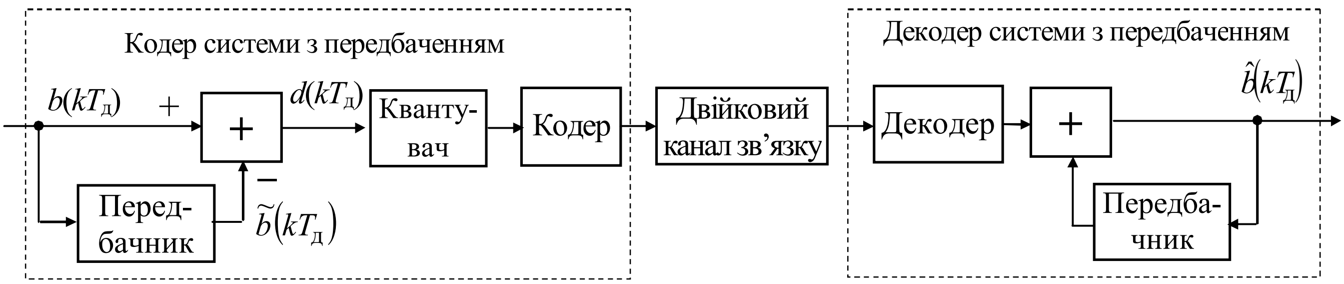


Рисунок 6.1 – Кодер і декодер системи з передбаченням

Розмах дискретного сигналу $d(kT_\text{д})$ менший, ніж розмах сигналу $b(kT_\text{д})$, тому число рівнів квантування L при незмінному кроці квантування Δd буде меншим, ніж при передаванні відліків $b(kT_\text{д})$ методом ІКМ. Зменшення числа рівнів квантування зменшує довжину коду n і швидкість цифрового сигналу

$R = nf_д$. Або, при незмінному числі рівнів квантування L зменшується крок квантування $\Delta d = (d_{max} - d_{min})/L$, зменшується потужність шуму квантування $P_{ш.кв} = \Delta d^2/12$, зростає відношення сигнал/шум квантування $\rho_{кв.}$

6.2 Принцип кодування аналогових сигналів за методом ДІКМ.

Найпоширеніша система з передбаченням – система з диференціальною ІКМ (ДІКМ). У різних варіантах використання методу ДІКМ число відліків N, на основі яких визначаються передбачені відліки, перебуває в межах від 1 до 6.

У випадку $N = 1$ передбаченим є попередній відлік:

$$\tilde{b}\left(kT_д\right) = b\left((k-1)T_д\right). \tag{6.2}$$

Середня потужність похибки передбачення

$$P_d = \overline{d^2\left(kT_д\right)} = \overline{\left[b\left(kT_д\right) - b\left((k-1)T_д\right)\right]^2} = \overline{b^2\left(kT_д\right)} - 2\overline{b\left(kT_д\right)b\left((k-1)T_д\right)} + \overline{b^2\left((k-1)T_д\right)} =$$

$$= P_b - 2P_b R_b\left(T_д\right) + P_b = 2P_b\left(1 - R_b\left(T_д\right)\right), \tag{6.3}$$

де P_b – середня потужність сигналу $b(t)$;

$R_b(T_д)$ – значення нормованої кореляційної функції мовного сигналу.

Оцінимо, у скільки разів середня потужність похибки передбачення менша за середню потужність мовного сигналу, якщо $T_д$ = 125 мкс та $R_b(T_д)$ = 0,85. Тоді $P_b/P_d = 2(1 - R_b(T_д)) = 3{,}3$. У першому наближенні можна вважати, що розмах дискретного сигналу $d(kT_д)$ менший за розмах сигналу $b(kT_д)$ у $\sqrt{3{,}3} = 1{,}8$ раз, тобто приблизно удвічі.

Передбачник при $N \geq 2$ виконується за схемою нерекурсивного фільтра, і передбачені відліки визначаються

$$\tilde{b}\left(kT_д\right) = \sum_{i=1}^{N} a_i b\left((k-i)T_д\right). \tag{6.4}$$

Схеми кодера й декодера ДІКМ, використовувані в реальній апаратурі, наведені на рис. 6.2. У кодері похибка передбачення надходить на квантувач, аналогічний квантувачу системи з ІКМ, потім похибка квантування $d_{кв}(kT_д)$ передається цифровим сигналом каналом зв’язку (на рис. 6.2 не показані кодер для подання $d_{кв}(kT_д)$ двійковим кодом і декодер для відновлення $d_{кв}(kT_д)$ – вони включені до складу каналу зв’язку). Передбачники в кодері й декодері повністю ідентичні.

На відміну від схеми, наведеної на рис. 6.1, передбачник у кодері увімкнений у коло зворотного зв’язку. Завдяки цьому передбачені відліки $\tilde{b}\left(kT_д\right)$ як у схемі кодера, так і у схемі декодера виробляються з тих самих відліків $\hat{b}\left(kT_д\right)$ (якщо в каналі зв’язку не було помилок під час передавання).

Крім того, слід звернути увагу на те, що в декодері передбачник увімкнений у колі зворотного зв’язку і тому під час декодування можуть накопичуватись шуми квантування. Похибка квантування при ДІКМ за схемою рис. 6.2

$$\varepsilon_{кв}\left(kT_{д}\right)=\hat{b}\left(kT_{д}\right)-b\left(kT_{д}\right)=\left[\tilde{b}\left(kT_{д}\right)+d_{кв}\left(kT_{д}\right)\right]-\left[\tilde{b}\left(kT_{д}\right)+d\left(kT_{д}\right)\right]=d_{кв}\left(kT_{д}\right)-d\left(kT_{д}\right).(6.5)$$

З останнього співвідношення видно, що, завдяки увімкненню передбачника в кодері в коло зворотного зв'язку, похибка квантування визначається лише параметрами квантувача, і немає ефекту накопичення шумів квантування в декодері.

Широко застосовуються методи адаптивної ДІКМ (АДІКМ). У процесі роботи кодера АДІКМ адаптивними є:

– передбачник з $N = 4\ldots6$ – його коефіцієнти (а це нерекурсивний фільтр) автоматично налаштовуються так, щоб дисперсія сигналу $d(kT_{д})$ мінімізувалася, коефіцієнти передбачника передаються каналом зв'язку, щоб у передбачнику декодера встановлювалися такі ж коефіцієнти, як і в передбачнику кодера;

– квантувач – розмах його характеристики (d_{max}, d_{min}) і відповідно крок квантування змінюються відповідно до розмаху поточної реалізації сигналу $d(kT_{д})$, відомості про крок квантування передаються каналом зв'язку, щоб у декодері встановлювався крок квантування такий самий, як і в квантувачі.

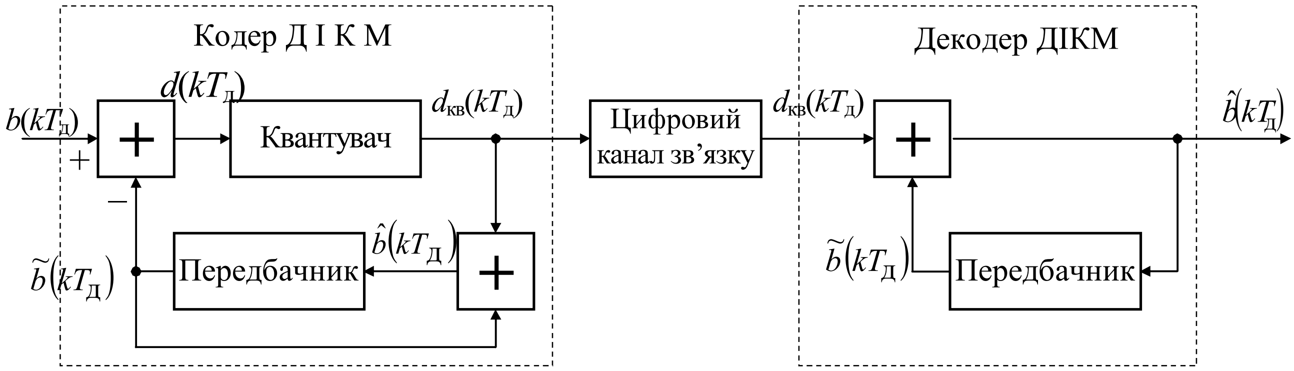


Рисунок 6.2 – Кодер і декодер системи передавання з ДІКМ

6.3 Принцип кодування аналогових сигналів за методом ДМ

Методи ДМ також відносяться до методів передавання з передбаченням. Методи ДМ відрізняються від ІКМ і ДІКМ тим, що використовуються дворівневі квантувачі ($L = 2$). Це стає можливим, якщо частота дискретизації вибирається в кілька разів більшою, ніж $2F_{max}$, і сусідні відліки з дискретизатора мало відрізняються. На рис. 6.3 наведені схеми кодера й декодера, що пояснюють один із методів ДМ.

Похибка передбачення обчислюється так само, як і при ДІКМ – формула (6.1), а передбачений відлік є результатом роботи накопичувача

$$\tilde{b}\left(kT_{д}\right)=\sum_{i=0}^{k-1}d_{кв}\left(iT_{д}\right)\Delta b\,, \tag{6.6}$$

де Δb – коефіцієнт пропорційності;

$$d_{кв}(kT_{д})=\begin{cases}+1, & \text{якщо } d(kT_{д})\geq 0,\\ -1, & \text{якщо } d(kT_{д})<0\end{cases} - \tag{6.7}$$

похибка передбачення квантується на два рівні, які передаються двійковим каналом зв'язку.

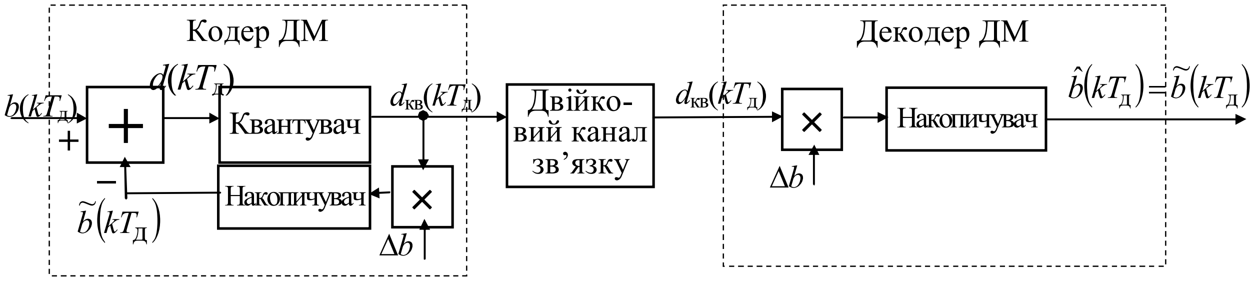


Рисунок 6.3 – Кодер і декодер системи передавання з ДМ

Описаний метод кодування ілюструється часовими діаграмами на рис. 6.4. Тут передбачений сигнал і сигнал квантованої похибки передбачення представлені сигналами неперервного часу. Видно, що передбачений сигнал $\tilde{b}(t)$ "відслідковує" зміни вхідного сигналу. Із рисунка випливає суть коефіцієнта Δb – це крок квантування, тому що з цим кроком квантується сигнал $\tilde{b}(t)$. На рисунку видно дві області:

1) область, де спостерігаються спотворення перевантаження за нахилом – передбачений сигнал $\tilde{b}(t)$ не встигає відслідковувати зміни вхідного сигналу;

2) область, де спостерігається шум дроблення – при незмінному вхідному сигналі передбачений сигнал змінюється з розмахом Δb.

Зрозуміло, що для зменшення першого ефекту необхідно збільшувати крок квантування, а для зменшення другого ефекту – зменшувати крок квантування. Очевидно, що існує оптимальний крок квантування, за якого мінімізується сумарний ефект прояву перевантаження за нахилом і шуму дроблення на реалізаціях сигналу $b(t)$ великої тривалості.

Робота декодера ДМ (рис. 6.4) зводиться до обчислення відліків передбачуваного сигналу за формулою (6.6).

На основі опису роботи кодера і декодера ДМ можна сформулювати особливості методів передачі з ДМ:

– частота дискретизації $f_д$ (рис. 6.4) у кілька разів більша за $2F_{max}$;

– оскільки квантувач дворівневий, то код має довжину $n = 1$, і швидкість цифрового сигналу $R = f_д$;

– оскільки $n = 1$, то відпадає необхідність синхронізації декодера.

При адаптивній дельта-модуляції (АДМ) може змінюватися крок квантування. Виконується це в такий спосіб. На виході кодера вмикається аналізатор послідовності двійкових символів. Якщо зустрілася послідовність 111 або 000, то крок квантування збільшується, щоб зменшити спотворення від перевантаження за нахилом. Якщо зустрілася послідовність 101 або 010, то крок квантування зменшується, щоб зменшити спотворення від шумів дроблення.

Аналогічний аналізатор вмикається на вході декодера й у такий самий спосіб змінюється крок квантування в декодері.

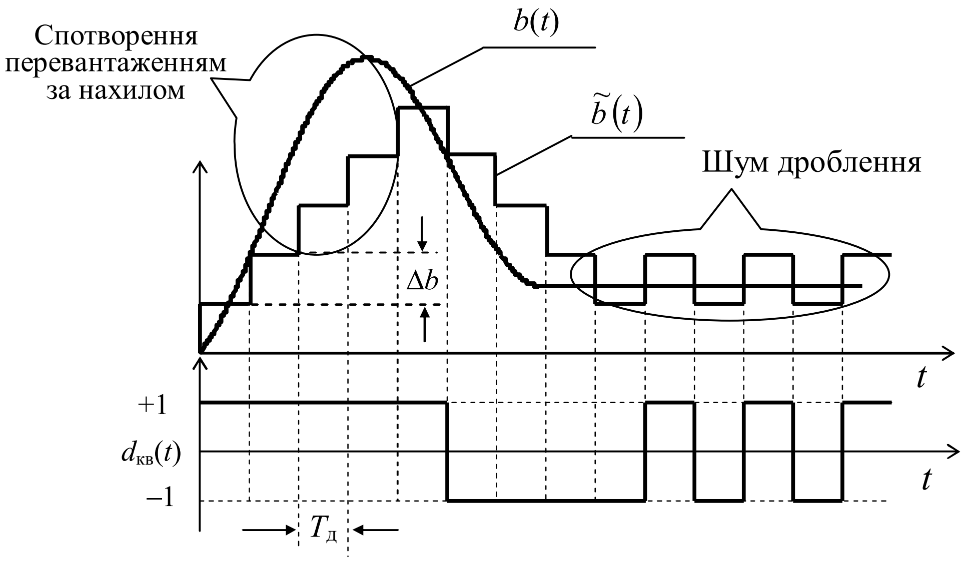


Рисунок 6.4 – Ілюстрація роботи кодера ДМ

6.4 Кодування джерел мовних повідомлень

Розглянутий вище процес перетворення аналогового сигналу в цифровий є кодуванням "форми" сигналу. Але для кодування мови можливі (і сьогодні застосовуються) й інші способи. Кодер виконує аналіз параметрів механізму мовоутворення і подає їх цифровим сигналом. Декодер виконує синтез мовного сигналу за отриманими параметрами механізму мовоутворення. Такі методи кодування мовних повідомлень отримали назву вокодерів або передавання на основі аналізу і синтезу.

Вокодер на основі лінійного передбачування. Механізм мовоутворення моделюється породжувальним фільтром, який збуджується відповідним вхідним сигналом. Кодер аналізує відрізок мовного сигналу $b(kT_д)$, який повинен передаватись, тривалістю 20...30 мс ($N_{відр}$ = 160...240 відліків). У вокодерах, які запропоновані десятки років тому, кодер визначає тип відрізка – тон (у разі голосних та дзвінких приголосних) чи шум (у разі глухих та шиплячих приголосних); якщо тон, то оцінюється період проходження й амплітуда основного тону; якщо шум, то оцінюється його дисперсія. Якщо тип відрізка тон, то на вхід породжувального фільтра від генератора подаються відліки послідовності імпульсів з оціненими частотою і амплітудою. Якщо ж тип відрізка шум, то на вхід породжувального фільтра подаються відліки шуму від генератора шуму з оціненою дисперсією.

Породжувальний фільтр виконується за схемою нерекурсивного фільтра, і вихідні відліки визначаються

$$\hat{b}(kT_д) = \sum_{i=1}^{N} a_i g((k-i)T_д), \ k = 1, 2, \ldots, N_{відр}, \tag{6.8}$$

де N – порядок фільтра (звичайно $N = 10...20$);

$g(kT_д)$ – відліки від генератора імпульсів чи шуму на вході фільтра;

a_i – коефіцієнти фільтра.

Породжувальний фільтр є адаптивним, тобто його коефіцієнти a_i налаштовуються так, щоб мінімізувати середній квадрат різниці

$$\varepsilon(kT_д) = \hat{b}(kT_д) - b(kT_д). \tag{6.9}$$

На виході кодера для передавання цифровим каналом зв'язку формуються дані, які є параметрами механізму мовоутворення:

1) характер збудження породжувального фільтра (імпульси або шум);
2) період і амплітуда основного тону (у разі збудження імпульсами);
3) дисперсія шуму (у разі збудження шумом);
4) коефіцієнти породжувального фільтра.

У декодері використовуються генератори імпульсів і шуму. Період і амплітуда імпульсів та дисперсія шуму задаються даними від кодера. Декодер містить також породжувальний фільтр, ідентичний фільтру кодера, його коефіцієнти поступають від кодера. Вхідний сигнал фільтра (імпульси чи шум) задається даними від кодера.

Описаний алгоритм кодування джерела дозволяє отримати досить низьку швидкість цифрового сигналу (порядку 2400 біт/с), але з низькою якістю відтворення. Відтворена мова має синтетичне звучання, для неї характерна низька пізнаваність мовця.

При подальшому розвитку методів кодування якість відтворення була підвищена у змішаних алгоритмах кодування, коли крім перелічених вище даних (1...4) каналом зв'язку передається різниця (6.9), закодована одним із методів кодування аналогових сигналів (наприклад, методом АДІКМ).

Алгоритм CELP. Це змішаний алгоритм кодування, який полягає в тому, що в кодері замість двох типів збуджень використовується 512 або 1024 збуджуючих послідовностей, які записані в пам'яті кодера і декодера. Отримавши фрагмент мовного сигналу, кодер шукає послідовність, що мінімально відрізняється від фрагмента сигналу. Каналом зв'язку передається номер послідовності і різниця (6.9), вважаючи, що $\hat{b}(kT_д)$ – послідовність, що мінімально відрізняється від фрагмента сигналу $b(kT_д)$.

Оцінка якості передавання мовних сигналів. Оскільки людина, як одержувач інформації, є ключовим елементом будь-якої системи передавання мови, то якість передавання часто оцінюється за суб'єктивним сприйняттям мови. Критерій середньої експертної оцінки (СЕО) (MOS – mean opinion score) використовується як альтернатива об'єктивному середньоквадратичному критерію, який не повною мірою відображає дійсну якість відновленої мови. Випробування для отримання СЕО групою експертів проводяться на репрезентативному мовному матеріалі, який вимовляється дикторами з різними голосами. У тестах повинна брати участь достатня кількість непідготовлених слухачів (мінімум 40), щоб отримані ними висновки були представницькими.

Методика обчислення СЕО регламентована рекомендаціями Європейського інституту стандартів у галузі телекомунікацій для оцінки якості передавання мовних сигналів у телефонних мережах. У відповідності з цими рекомендаціями виділено 5 рівнів, які пов'язані зі стандартизованим описом "відмінний", "хороший", "допустимий", "слабий", "поганий" (табл. 6.1).

Таблиця 6.1 – Опис рівнів якості

Опис рівня	Оцінка	Ступінь зусиль при сприйнятті
Відмінний	5	Без зусиль
Хороший	4	Немає відчутних зусиль
Допустимий	3	Помірні зусилля
Слабий	2	Значні зусилля
Поганий	1	Губиться сприйняття при фізично можливих зусиллях

Оцінки якості від 5 до 4 рекомендовані для телефонних мереж, значення від 4 до 3,5 вважаються допустимими в таких додатках, як голосова пошта і рухомий зв'язок, значення від 3,5 до 2,5 допустимі для синтезованої мови.

У загальному випадку значення СЕО якості мовного сигналу спадає при зниженні швидкості цифрового сигналу. У табл. 6.2 наведені значення СЕО для деяких типів кодеків, що використовуються в сучасних цифрових системах передавання мовних сигналів.

Таблиця 6.2 – Значення СЕО розповсюджених типів кодерів мови

Тип кодера	Значення СЕО	Скорочення у таблиці
64 кбіт/с; ІКМ	4,3	**QCELP** – Qualcom Code Excited Linear Predictor (кодер на основі лінійного передбачення з кодовим збудженням фірми Qualcom) **ITU-CELP** – International Telecommunication Union – Code Excited Linear Predictor (Міжнародний союз електрозв'язку – кодер на основі лінійного передбачення з кодовим збудженням) **GSM** – Global System Mobile (глобальна система рухомого зв'язку) **LPC** – Linear Predictive Coder (кодер на основі лінійного передбачення)
14,4 кбіт/с; QCELP13	4,2	
32 кбіт/с; АДІКМ	4,1	
8 кбіт/с; ITU-CELP	3,9	
8 кбіт/с; CELP	3,7	
13 кбіт/с; GSM	3,54	
9,6 кбіт/с; QCELP	3,45	
4,8 кбіт/с; CELP	3,0	
2,4 кбіт/с; LPC	2,5	

Контрольні питання

6.1 Пояснити принцип дії цифрових систем із передбаченням.

6.2 Пояснити принцип кодування за методом ДІКМ.

6.3 Як визначається інтервал дискретизації або частота дискретизації при кодуванні аналогових сигналів методом ДІКМ?

6.4 Від чого залежить довжина коду при ДІКМ?

6.5 Як визначається швидкість цифрового сигналу під час кодування за методом ДІКМ?

6.6 У чому відмінність кодування за методами ДІКМ і ІКМ?

6.7 Що таке АДІКМ?

6.8 Пояснити кодування за методом ДМ.

6.9 Як визначається інтервал дискретизації та частота дискретизації при ДМ?

6.10 Пояснити принцип дії, переваги та недоліки передачі з дельта-модуляцією.

6.11 Пояснити принцип дії та переваги передачі з адаптивною дельта-модуляцією.

6.12 У чому відмінність систем передачі методами ДІКМ і ДМ?

6.13 Що таке спотворення перевантаження за нахилом? Як їх зменшити?

6.14 Що таке шум дроблення? Як його зменшити?
6.15 Як визначається інтервал дискретизації та частота дискретизації при ДМ?
6.16 Пояснити принцип дії, переваги та недоліки передачі з дельта-модуляцією.
6.17 Пояснити принцип дії та переваги передачі з адаптивною дельта-модуляцією.
6.18 У чому відмінність систем передачі методами ДІКМ і ДМ?
6.19 Що таке спотворення перевантаження за нахилом? Як їх зменшити?
6.20 Що таке шум дроблення та як його зменшити?

7. Інформаційні характеристики каналів електрозв'язку

7.1 Математичні моделі каналів зв'язку

У літературі має місце велике розмаїття опису каналів зв'язку та їх математичних моделей. Слід мати на увазі, що математична модель створюється, виходячи з її призначення. Для розрахунків інформаційних характеристик каналів зв'язку користуються наступними простими математичними моделями – це цифрові та неперервні канали зв'язку.

Цифровий канал має різновиди – симетричний без пам'яті, несиметричний без пам'яті, марківський тощо. Основними характеристиками цифрового каналу є:

– кількість можливих символів на вході та виході каналу (не обов'язково однакова);

– умовні ймовірності переходів вхідних символів у вихідні (визначають імовірності помилок та правильного відтворення);

– швидкість модуляції, симв./с.

Математичну модель цифрового каналу надають формулою

$$\widehat{B} = B \oplus E\,, \tag{7.1}$$

де B – послідовність символів на вході каналу;
E – послідовність помилок, що набуті в каналі;
$\widehat{B}$ – послідовність символів на виході каналу;
$\oplus$ – сума за модулем m.

Найбільш простою і поширеною моделлю цифрового каналу є ***двійковий симетричний канал без пам'яті*** (скорочено – ДСК), коли ймовірності помилок символів „0“ та „1“ однакові

Неперервний канал має різновиди – ідеальний без завад, із постійними параметрами, з адитивним гауссовим шумом, із загальними завмираннями тощо. Основними характеристиками неперервного каналу є:

– ослаблення (підсилення) μ та затримка сигналу τ;

– смуга пропускання каналу;

– статистичні характеристики завад в каналі – густина ймовірності, спектральна густина потужності тощо.

Математичну модель неперервного каналу з постійними параметрами надають формулою.

$$z(t) = \mu s(t-\tau) + n(t)\,. \tag{7.2}$$

Найбільш простою і поширеною моделлю неперервного каналу є канал з ***адитивним білим гауссовим шумом*** (скорочено – АБГШ) – шум є гауссовим білим шумом.

7.2 Інформаційні характеристики цифрових каналів зв'язку

Під час обчислення ***інформаційних характеристик*** цифрового каналу необхідно враховувати, що каналом передаються послідовності кодових символів з виходу кодера джерела. Інформаційні характеристики цифрового каналу обчислюються ***за взаємною інформацією*** між кодовими символами на вході і виході каналу

Вправа 7.1. Показати, що у ДСК без пам'яті ентропія джерела помилок (ентропія втрат інформації) визначається виразом

$$H(\hat{B}/B) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p). \tag{7.3}$$

Розв'язання. У ДСК джерело помилок видає два символи: "1" – помилка є з імовірністю $P(1) = p$; "0" – помилки немає з імовірністю $P(0) = 1 - p$. За таких умов ентропія джерела помилок за формулою (2.4) буде

$$H(\hat{B}/B) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p).$$

Основними інформаційними характеристиками як цифрового, так і неперервного каналів є швидкість передавання інформації каналом та його пропускна здатність.

Швидкість передавання інформації каналом зв'язку $R_к$ визначається за взаємною ентропією між входом і виходом каналу:

$$R_к = H_{вз}(B, \hat{B})/\overline{T}. \tag{7.4}$$

Пропускна здатність каналу С – максимальна швидкість передавання інформації каналом зв'язку при заданих обмеженнях:

$$C = \max R_{к.}. \tag{7.5}$$

Під обмеженнями розуміють характеристики каналу, що впливають на швидкість передавання інформації цим каналом.

Приклад 7.1. Для передавання інформації використовується ДСК. Символи на вході каналу мають імовірності 0,5. Імовірність помилки символу в ДСК p = 0,01. Визначити середню кількість інформації на один символ $H_{вз}(B, \hat{B})$, що передається каналом.

Розв'язання. Середня кількість інформації, що передається цифровим каналом

$$H_{вз}(B, \hat{B}) = H(B) - H(B/\hat{B}) = H(\hat{B}) - H(\hat{B}/B). \tag{7.6}$$

Оскільки ймовірності символів на вході та виході каналу дорівнюють 0,5, то $H(B) = H(\hat{B}) = 1{,}0$ дв.од. Із вправи 7.1 ентропія помилок

$$H(\hat{B}/B) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p) = 0{,}01\log_2 0{,}01 - (1-0{,}01)\log_2(1-0{,}01) = 0{,}081.$$

Тоді $H_{вз}(B, \hat{B}) = 1{,}0 - 0{,}081 = 0{,}919$ дв.од.

Вправа 7.2. Вивести формулу для обчислення пропускної здатності ДСК при заданих швидкості модуляції в ньому B і ймовірності помилки p.

Розв'язання. Якщо підставити у формулу (7.5) вирази (7.4) та (7.3), отримаємо, що

$$C_{ДСК} = B\max[H(B) - H(B/\overline{B})] = B[\max H(B) - \min H(B/\hat{B})].$$

Значення $\max H(B) = 1$ дв.од. досягається, коли символи на вході каналу зв'язку рівноймовірні і незалежні. Умовну ентропію $H(B/\hat{B})$ легко визначити з таких міркувань: на виході каналу зв'язку з'явився символ $\hat{b}_j$; тоді канал можна розглядати як джерело двійкових символів з імовірностями p і $1 - p$, а ентропія такого джерела (формула (2.4))

$$H(B/\hat{B}) = -p \log_2 p - (1-p) \log_2 (1-p).$$

Оскільки символи рівноймовірні, то це і є мінімум. Тоді остаточно

$$C_{\text{ДСК}} = B\,[1 + p \log_2 p + (1-p) \log_2 (1-p)].$$

Приклад 7.2. Обчислити пропускну здатність четвіркового симетричного каналу при ймовірності помилки символу $p = 0{,}01$ та швидкістю модуляції $B = 1000$ симв./с.

Розв'язання. Пропускну здатність четвіркового симетричного каналу визначимо за формулою

$$C = B\,[\log_2 m + p \log_2(p/(m-1)) + (1-p)\log_2(1-p)]. \tag{7.7}$$

$$C = 1000\,[\log_2 4 + 0{,}01 \cdot \log_2(0{,}01/(4-1)) + (1-0{,}01) \cdot \log_2(1-0{,}01)] = 1903 \text{ дв.од./с.}$$

7.3 Інформаційні характеристики неперервних каналів зв'язку

Інформаційні характеристики неперервного каналу обчислюються за ***взаємною інформацією*** між відліками сигналу $s(t)$ на вході каналу та сигналу $z(t)$ на його виході

$$h_{\text{вз}}(S, Z) = h(S) - h(S/Z) = h(Z) - h(Z/S). \tag{7.8}$$

Приклад 7.3. Каналом зв'язку передається сигнал $s(t)$ з гауссовим розподілом імовірностей, рівномірною густиною потужності і середньою потужністю $P_s = 0{,}001$ В^2, смуга пропускання каналу $F_{\text{к}} = 8{,}0$ кГц. Шум у каналі білий зі спектральною густиною потужності $N_0 = 10^{-9}$ В^2/Гц. Визначити середню на один відлік кількість інформації, що передається каналом.

Розв'язання. Якщо прийняти, що частота дискретизації задовольняє теоремі Котельникова, то відліки як на вході, так і на виході каналу незалежні. Використаємо формулу (7.8). Якщо врахувати, що $h(Z) - h(Z/S)$ – це епсилон-ентропія сигналу $z(t)$, а $h(Z/S)$ – диференціальна ентропія шуму (таблиця (4.1)) для гауссового сигналу та шуму, дістанемо

$$h_{\text{вз}}(S, Z) = h(Z) - h(Z/S) = \log_2 \sqrt{2\pi e P_z} - \log_2 \sqrt{2\pi e P_n} = 0{,}5 \cdot \log_2(P_z/P_n).$$

Оскільки $P_z = P_s + P_n$ і $P_n = N_0 F_{\text{к}}$, отримаємо

$$h_{\text{вз}}(S, Z) = 0{,}5 \log_2 (1 + P_s / P_n) = 0{,}5 \log_2 (1 + 10^{-3}/(10^{-9} \cdot 8 \cdot 10^3)) = 3{,}49 \text{ дв.од.}$$

Вправа 7.3. Вивести формулу для обчислення пропускної здатності каналу з АБГШ.

Розв'язання. Якщо підставити у формулу $R_{\text{к}} = f_{\text{д}}\, h_{\text{вз}}(S, Z)$ значення середньої кількості переданої інформації в неперервному каналі $h_{\text{вз}}(S, Z) = h(S) - h(S/Z) = h(Z) - h(Z/S)$ і максимізувати швидкість $R_{\text{к}}$, то отримаємо, що пропускна здатність каналу з АБГШ $C_{\text{АБГШ}} = f_{\text{д}} \max\,[h(Z) - h(Z/S)]$, де $h(Z/S) = h(N) = \log_2 \sqrt{2\pi e P_n}$ із табл. 4.1.

Оскільки в каналі з АБГШ сигнал і шум незалежні, потужність сигналу на виході каналу $P_z = P_s + P_n$. При фіксованій потужності P_z значення $\max h(Z)$ буде мати місце при гауссовому розподілі процесу $z(t)$, що досягається при гауссовому розподілі сигналу $s(t)$ на вході каналу. Тому

$$C_{\text{АБГШ}} = f_{\text{д}} \cdot (\log_2 \sqrt{2\pi e P_z} - \log_2 \sqrt{2\pi e P_n}\,) = f_{\text{д}} \log_2 (\sqrt{P_z/P_n}\,.$$

Якщо спектри сигналу і завади рівномірні у смузі пропускання каналу $F_{\text{к}}$, то відліки некорельовані при $f_{\text{д}} = 2F_{\text{к}}$. Остаточний вираз для пропускної здатності каналу з АБГШ:

$$C_{\text{АБГШ}} = F_{\text{к}} \cdot \log_2 \cdot (1 + P_s/P_n). \tag{7.9}$$

Вправа 7.4. Вивести формулу для обчислення пропускної здатності гауссового каналу з необмеженою смугою пропускання.

Розв'язання. Скористаємося формулою (7.9) для пропускної здатності гауссового каналу. Оскільки $P_n = N_0 \cdot F_к$, можна записати $C_\infty = \lim\limits_{F_к \to \infty} [F_к \log_2(1 + P_s/(N_0 F_к))]$. При $F_к \to \infty$ виникає невизначеність типу $\infty \cdot 0$. Для розкриття цієї невизначеності скористаємось співвідношенням $\ln(1 + e) \approx e$ при $e \ll 1$. Враховуючи, що $\log_2 x = 1{,}443 \ln x$,

$$C_\infty = 1{,}443 F_к P_s/(N_0 F_к) = 1{,}443\, P_s/N_0.$$

Приклад 7.4. Обчислити пропускну здатність гауссового каналу із заданими: смугою пропускання $F_к = 10{,}0$ кГц і відношенням середніх потужностей сигналу і шуму $P_s/P_n = 36$ дБ.

Розв'язання. За формулою (7.9) пропускна здатність гауссового каналу з АБГШ $C_{АБГШ} = F_к \log_2(1 + P_s/P_n) = 10^4 \log_2(1 + 10^{3,6}) = 119\,590$ дв.од./с (для обчислення децибели переведені в рази).

Контрольні питання

7.1. З якою метою реальний канал зв'язку замінюють його математичною моделлю?

7.2. Надати визначення понять – ненадійність каналу, пропускна здатність каналу.

7.3. В яких випадках важливо знати пропускну здатність каналу?

7.4. Як змінюється пропускна здатність каналу з АБГШ при розширенні його смуги пропускання?

7.5. Що означають поняття – обрив каналу, ентропія шуму?

7.6. Чим пояснюється той факт, що пропускна здатність ДСК максимальна при ймовірності помилки $p = 1$ (всі символи помилкові)?

ЗАДАЧІ для самостійної роботи студентів

7.1. Канал зв'язку між пунктами А і Б складено з каскадного з'єднання трьох парціальних каналів із пропускними здатностями: першого каналу 1200 дв.од./с; другого каналу 1500 дв.од./с; третього каналу 2000 дв.од./с. Знайти пропускну здатність складеного каналу зв'язку.

7.2. Умови ті ж, що і в задачі 7.1, але з'єднання трьох парціальних каналів паралельне. Знайти пропускну здатність складеного каналу зв'язку.

7.3. Обчислити пропускну здатність двійкового симетричного каналу без пам'яті із заданою ймовірністю помилки $p = 0{,}001$ та швидкістю модуляції $B = 600$ симв./с.

7.4. Обчислити пропускну здатність четвіркового симетричного каналу без пам'яті із заданою ймовірністю помилки $p = 0{,}01$ та швидкістю модуляції $B = 1200$ симв./с.

7.5. Розглянемо канал (майже не реальний), в якому спектральна густина потужності шуму на певній ділянці частот від f_1 до f_2 дорівнює нулю ($f_1 \neq f_2$). Чому дорівнює його пропускна здатність?

7.6. Обчислити пропускну здатність гауссового каналу із заданими смугою пропускання $F_к = 4{,}0$ кГц і відношенням середніх потужностей сигналу і шуму $P_s/P_n = 33$ дБ.

7.7. Обчислити пропускну здатність гауссового каналу з необмеженою смугою пропускання і спектральною густиною потужності шуму в ньому $N_0 = 10^{-9}$ В^2/Гц, яким передається сигнал із потужністю $P_s = 0{,}015$ В^2.

8. Потенційні можливості передавання інформації каналами зв’язку

8.1 Потенційні можливості передавання інформації за швидкістю каналами зв’язку

Задача визначення максимальної швидкості передавання інформації каналами зв’язку вирішується досить просто: введене К. Шенноном поняття пропускної здатності каналу дає чітку відповідь.

Швидкість передавання інформації каналом зв’язку не може перевищувати його пропускну здатність, оскільки за визначенням пропускна здатність – це максимально можлива швидкість передавання інформації каналом

Приклад 8.1. З якою максимальною швидкістю можна передавати інформацію четвірковим симетричним каналом зв’язку, параметри якого обчислені в прикладі 7.2.

Розв’язання. Оскільки пропускна здатність цього каналу C = 1903 дв.од./с, то це число і визначає максимальну швидкість передавання інформації каналом.

8.2 Потенційні можливості передачі інформації за якістю цифровими каналами зв’язку

Потенційні можливості передавання інформації за якістю цифровими каналам визначаються теоремами К. Шеннона.

Кількісною мірою якості передавання повідомлень цифровими каналами зв’язку є ймовірність помилки в послідовності символів, що надходять з виходу каналу.

Теорема 1. *Кодування джерела дискретних повідомлень*

Будь-яке джерело дискретних повідомлень без пам’яті можна закодувати двійковою послідовністю ***при середній кількості двійкових символів на знак джерела*** $\bar{n}$ ***як завгодно близькій до ентропії***, і неможливо домогтися середньої довжини коду, меншої, ніж ентропія джерела. Мінімізується $\bar{n}$ усуненням надмірності джерела нерівномірним кодуванням. Таке кодування кодом Шеннона-Фано та Хаффмана розглянуто в розд. 2 цього посібника.

Теорема 2. *Кодування цифрового каналу зв’язку із завадами*

Якщо продуктивність джерела повідомлень $R_{дж}$ менша за пропускну здатність каналу C, тобто $R_{дж} \le C - \varepsilon$, де ε – як завгодно мала додатна величина, то існує **спосіб кодування** (перетворення повідомлення в цифровий сигнал на вході каналу) і **декодування** (перетворення цифрового сигналу в повідомлення на виході каналу), за якого ймовірність помилкового декодування (ненадійність каналу) може бути як завгодно мала. Якщо ж $R_{дж} \ge C$, то такого способу не існує.

Цю теорему часто називають ***основною теоремою кодування Шеннона.*** Математичний доказ цієї теореми оснований на поняттях – типові і нетипові послідовності символів і випадкове кодування. У **типових** послідовностях частота появи символів чи груп символів як завгодно мало відрізняються від їхніх імовірностей. Під випадковим кодуванням розуміють, що вибір послідовностей символів довжини n, що використовуються для кодування, відбувається випадково. Один фрагмент доказу подає вправа 8.1.

Основна теорема кодування Шеннона доказує цікавий факт – завади в каналі та набуті через них помилки обмежують тільки швидкість передавання інформації, якість передавання може бути як завгодно високою, тобто більшість помилок можна знайти і виправити коректувальним кодом.

При ґрунтовному доказі теореми доведено, що оптимальний код має бути випадковим та кодові комбінації повинні мати велику довжину, а також отримана формула для ймовірності помилкового декодування оптимальним випадковим кодом

$$P_{\text{п.д}} = 2^{-T_{\text{к.к}}(C_{\text{кан}} - R_{\text{дж}})}. \tag{8.1}$$

Приклад 8.1. Який запас пропускної здатності $C_{\text{кан}} - R_{\text{дж}}$ повинен мати канал, щоб при використанні оптимального коду з тривалістю кодової комбінації $T_{\text{к.к}}$ = 200 мс імовірність помилкового декодування $P_{\text{п.д}}$ не перевищила величину 10^{-6}?

Розв'язання. З формули (8.1) отримуємо запас пропускної здатності каналу

$$\Delta C_{\text{кан}} = C_{\text{кан}} - R_{\text{дж}} = \frac{\log_2 P_{\text{п.д}}}{-T_{\text{к.к}}} = \frac{\log_2 10^{-6}}{-200 \cdot 10^{-3}} = 90{,}96 \text{ дв.од./с.}$$

Підкреслимо, що чим більший запас пропускної здатності, тим легше реалізується система зв'язку, але водночас погіршується використання пропускної здатності каналу.

Приклад 8.2. У скільки разів зміниться тривалість кодової комбінації $T_{\text{кк}}$ оптимального коду, якщо при незмінній імовірності помилки $P_{\text{п.д}}$ = const запас пропускної здатності каналу $C_{\text{кан}} - R_{\text{дж}}$ зменшується у двічі?

Розв'язання. З формули (8.1) випливає, що при $P_{\text{п.д}}$ = const

$$T_{\text{к.к}} = -\frac{\log_2 P_{\text{п.д}}}{C_{\text{к}} - R_{\text{дж}}}.$$

Тому, при збереженні ймовірності помилкового декодування (якості передавання) зменшення запасу пропускної здатності удвічі призводить до збільшення тривалості кодової комбінації удвічі, що веде до збільшення затримки повідомлень під час передавання.

Висновок. Із формулювання теореми видно, що вона є ***теоремою існування***: не вказує конкретний метод кодування, тобто вибір послідовностей для кодування. Теорема тільки ***гарантує існування*** такого способу.

Відразу ж слідом за опублікуванням теореми Шеннона серед теоретиків розгорнулися дослідження з пошуку таких методів кодування. «Керівною» ідеєю була ідея «*випадкового кодування*», покладена за основу доказу теореми, але протягом кількох років ентузіазм теоретиків зменшився, оскільки практика вимагала не абстрактних розмов про деякі «*випадкові коди*», а конкретних методів кодування-декодування. Вимоги практики вивели теоретиків на пошук *конструктивних* методів кодування (що надають конкретні принципи побудови кодів для *коректування* помилок у реальних каналах). Виникла важлива теоретична наука ***Теорія коректувальних кодів***.

8.3 Потенційні можливості передавання інформації за якістю неперервним каналом зв'язку із завадами

Кількісною мірою якості передавання повідомлень неперервним каналом зв'язку є середньоквадратична похибка $\overline{\varepsilon_0^2}$ між аналоговими сигналами на виході та вході каналу

Теорема 3. *Кодування неперервного каналу зв'язку із завадами*

Якщо при заданій середньоквадратичній похибці $\overline{\varepsilon_0^2}$ відновлення повідомлень джерела його продуктивність $R_{\text{дж}}$ менша за пропускну здатність каналу C, тобто $R_{\text{дж}} \le C - \varepsilon$, де ε – як завгодно мала додатна величина, то існує **спосіб кодування** (перетворення повідомлення в сигнал на вході каналу) і **декодування** (перетворення сигналу в повідомлення на виході каналу), який дозволяє передавати всі неперервні повідомлення джерела з похибкою відтворення на виході каналу, що як завгодно мало відрізняється від $\overline{\varepsilon_0^2}$.

Як випливає з формулювань теорем 2 та 3, їхня сутність майже однакова (за однієї і тієї ж умови можна досягти високої якості передавання повідомлень), різниця в тому:

– кількісна міра ***якості передавання*** повідомлень цифровим і неперервним каналами різна;

– під кодуванням неперервного джерела розуміють не тільки аналого-цифрове перетворення, а також методи модуляції;

– продуктивність неперервного джерела $R_{\text{дж}}$ обчислюється за епсилон-ентропією.

Контрольні питання

8.1. Якщо в m-ій системі зв'язку з ортогональними сигналами середня потужність сигналу і спектральна густина потужності шуму постійні, то як забезпечити наближення до нуля імовірності помилки при збереженні швидкості передавання інформації?

8.2. Що таке кодування і декодування в цифровому і неперервному каналах зв'язку? Що в них спільного і чим вони відрізняються між собою?

8.3. Яке практичне значення має основна теорема кодування Шеннона в каналі із завадами? Чи можна, використовуючи доказ цієї теореми, будувати реальні схеми кодування і декодування?

8.4. Сформулювати теореми Шеннона для цифрових каналів без помилок та з помилками. Порівняти зміст і суть цих теорем та важливість їх результатів для практики.

ЗАДАЧІ для самостійної роботи студентів

8.1. Який запас пропускної здатності $\Delta C = C - R_{\text{дж}}$ повинен мати канал, щоб при використанні оптимального за Шенноном коректувального коду з тривалістю кодової комбінації $T_{\text{к.к}}$ = 100 мс імовірність помилкового декодування $P_{\text{п.д}}$ не перевищувала 10^{-5}?

8.2. У скільки разів зміниться тривалість кодової комбінації оптимального за Шенноном коректувального коду, якщо при незмінній імовірності помилкового декодування $P_{\text{п.д}} = \text{const}$ запас пропускної здатності каналу $\Delta C_{\text{кан}}$ зменшився в 4 рази?

8.3. Визначити, чи можна повідомлення від джерела із продуктивністю 1200 біт/с передавати з високою якістю каналом із пропускною здатністю 1200 біт/с? Відповідь пояснити.

8.4. Визначити, чи можна повідомлення від джерела із продуктивністю 1200 біт/с передавати з високою якістю каналом із пропускною здатністю 1100 біт/с? Відповідь пояснити.

Література

1. **Стеклов В.К.** Теорія електричного зв'язку: підручник [для внз]; за ред. В.К. Стеклова / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман – К.: Техніка, 2006. – 552 с.

2. **Теория** электрической связи: учебник [для вузов] / [А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.И. Коржик, М.В. Назаров]; под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1998. – 432 с.

3. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение [2-е изд.; пер. с англ.] / Б. Скляр/ – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. – 1104 с.

4. **Кудряшов Б.Д.** Теория информации: учебник [для вузов] / Б.Д. Кудряшов– СПб.: Питер, 2009. – 320 с.

Навчальне видання

Іващенко Петро Васильович

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ІНФОРМАЦІЇ

Навчальний посібник

Редактор Л.А. Кодрул
Комп. верстання