

**Міністерство інфраструктури України
Державна служба зв'язку**

**ОДЕСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ ЗВ'ЯЗКУ
ім. О.С. ПОПОВА**

Кафедра теорії електричного зв'язку ім. А. Г. Зюко

В.Л. Банкет, П.В. Іващенко, М.О. Іщенко

ЗАВАДОСТІЙКЕ КОДУВАННЯ В ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

Модуль 4

Навчальний посібник з вивчення дисципліни

«ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗВ'ЯЗКУ»

для студентів, що
навчаються за напрямком **6.050903 – Телекомунікації**

Одеса 2011

УДК 621.391
ББК 318

План НМВ 2011 р.

Рецензент проф. Дирда В.Ю.

Банкет В. Л. Завадостійке кодування в телекомунікаційних системах: навч. посіб. з вивчення модуля 4 дисципліни ТЕЗ / В.Л. Банкет, П.В. Іващенко, М.О. Іщенко. – Одеса: ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2011. – 104 с.

Навчальний посібник містить матеріали модуля 4 дисципліни «Теорія електричного зв'язку». У посібнику викладені теоретичні основи методів завадостійкого кодування, призначених для використання в сучасних телекомунікаційних системах. Розділи посібника супроводжуються посиланнями на рекомендовані розділи літератури, а також контрольними питаннями, задачами й вказівками до самостійної роботи студентів.

Навчальний посібник призначений для студентів, що навчаються за напрямком 6.050903 – Телекомунікації.

Затверджено

методичною радою
академії зв'язку.
Протокол № 8
від 11.02.2011 р.

Схвалено

на засіданні кафедри теорії
електричного зв'язку ім. А.Г. Зюко
и ***рекомендовано до друку.***
Протокол № 9 від 25.04. 2010 р.

Зміст

ВСТУП.....	5
1. ПРИЗНАЧЕННЯ, СТРУКТУРА Й КЛАСИФІКАЦІЯ КОРЕКТУВАЛЬНИХ КОДІВ	6
1.1 Коректувальні коди в телекомунікаційних системах.....	6
1.2. Класифікація коректувальних кодів.....	7
2. ПАРАМЕТРИ БЛОКОВИХ КОРЕКТУВАЛЬНИХ КОДІВ.....	9
3. ЗДАТНІСТЬ БЛОКОВИХ КОДІВ ВІЯВЛЯТИ Й ВИПРАВЛЯТИ ПОМИЛКИ.....	12
4. АЛГЕБРАЇЧНИЙ ОПИС БЛОКОВИХ КОДІВ	17
5. КОДУВАННЯ Й ДЕКОДУВАННЯ БЛОКОВИХ КОДІВ.....	22
5.1. Кодування й декодування блокових кодів.....	22
5.2. Синдромне декодування блокових кодів.....	24
5.3. Мажоритарне декодування блокових кодів.....	26
6. ГРАНИЦІ ПАРАМЕТРІВ БЛОКОВИХ КОДІВ	29
6.1 Верхня границя Хеммінга.....	29
6.2. Нижня границя Варшимова-Гілберта.....	30
6.3 Складність реалізації алгоритмів кодування й декодування	31
7. ВАЖЛИВІ КЛАСИ БЛОКОВИХ КОРЕКТУВАЛЬНИХ КОДІВ.....	32
7.1. Коди Хеммінга.....	32
7.2. Циклічні коди	34
8. ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ ДЕКОДУВАННЯ БЛОКОВИХ КОДІВ.....	40
8.1. Завадостійкість декодування блокових кодів	40
8.2. Енергетичний виграш кодування	42
9. СТРУКТУРА Й ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗГОРТКОВИХ КОДІВ	46
9.1.Методи опису згорткових кодів	46
9.2. Основні параметри й класифікація ЗК.....	49
10. АЛГОРИТМИ ДЕКОДУВАННЯ ЗГОРТКОВИХ КОДІВ	52
10.1. Класифікація алгоритмів декодування.....	53
10.2. Алгоритм Вітербі для декодування згорткових кодів.....	55
11. ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ ДЕКОДУВАННЯ ЗГОРТКОВИХ КОДІВ.....	60
12. КРИТЕРІЇ ЕФЕКТИВНОСТІ Й ШЛЯХИ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЦИФРОВИХ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМ.....	64
12.1. Теорія ефективності А.Г. Зюко. Інформаційна, енергетична й частотна ефективності телекомунікаційних систем	64
12.2. Гранична ефективність телекомунікаційних систем і границя К. Шеннона	66
12.3. Перспективні шляхи подальшого підвищення ефективності телекомунікаційних систем	67
13. ПЕРСПЕКТИВНІ МЕТОДИ КОДУВАННЯ В ЦИФРОВИХ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ.....	70
13.1. Сигнально-кодові конструкції.....	70
13.2. Перспективні методи коректувального кодування	73
13.3. Просторово-часове кодування.....	78

13.4. Застосування коректувальних кодів у телекомунікаційних системах .	82
ДОДАТКИ	85
А. Характеристики коректувальних кодів	85
Б. Методичні вказівки й завдання на виконання курсової роботи	88
В. Перелік знань і вмінь, які повинен придбати студент у процесі вивчення матеріалів модуля 4	93
Г. Примітні віхи в розвитку теорії електричного зв'язку	94
Д. Видатні вчені, що зробили важливий внесок у становлення й розвиток теорії зв'язку	96
ЛІТЕРАТУРА	98

ВСТУП

У сучасних телекомунікаційних системах інформація, як правило, передається в цифровому виді й обробляється цифровими методами. При цьому важливу роль грають методи кодування інформації.

У навчальному посібнику викладені основи теорії завадостійкого кодування цифрової інформації. Теоретичний матеріал пояснюється прикладами й вправами. Для перевірки засвоєння знань рекомендується використовувати переліки контрольних питань, розміщені наприкінці кожного розділу.

Перелік знань і вмінь, необхідних для вивчення навчального матеріалу, які повинен одержати студент у процесі вивчення попередніх дисциплін, наведені нижче в табл. В.1.

Таблиця В.1 – Перелік знань і вмінь

Найменування	Зміст	Попередня дисципліна
З н а н н я		
Зн. 1	Лінійна й векторна алгебра (теорія матриць)	Вища математика
Зн. 2	Теорія ймовірностей (випадкові величини, функції розподілу ймовірностей випадкових величин)	Вища математика
Зн. 3	Структури загальної алгебри (групи, кільця, поля)	Дискретна математика
Зн. 4	Елементи загальної теорії сигналів	Модуль 1 дисципліни «Теорія електричного зв'язку»
Зн. 5	Інформаційні характеристики каналів електрозв'язку	Модуль 2 дисципліни «Теорія електричного зв'язку»
У м і н н я		
Ум. 1	Виконання елементарних дій над матрицями	Вища математика
Ум. 2	Обчислення ймовірностей випадкових подій (на основі правил додавання й множення ймовірностей)	Вища математика
Ум. 3	Дії з об'єктами дискретної математики (на основі аксіом груп, кілець і полів)	Дискретна математика
Ум. 4	Виконувати обчислення характеристик завадостійкості дискретних сигналів	Модуль 1 дисципліни «Теорія електричного зв'язку»
Ум. 5	Виконувати обчислення пропускну здатності дискретних каналів	Модуль 2 дисципліни «Теорія електричного зв'язку»

1. ПРИЗНАЧЕННЯ, СТРУКТУРА Й КЛАСИФІКАЦІЯ КОРЕКТУВАЛЬНИХ КОДІВ

1.1. Коректувальні коди в телекомунікаційних системах [1, розд. 10]

1.2. Класифікація коректувальних кодів [1, розд. 10.1]

1.1 Коректувальні коди в телекомунікаційних системах

У теорії сучасних телекомунікаційних систем значна увага приділяється вивченню методів кодування інформації. У техніці електричного зв'язку широко використовують результати теорії кодування.

Кодування – операція ототожнення символів або груп символів одного коду із символами або групами символів іншого коду. Необхідність кодування виникає, насамперед, з потреби пристосувати форму повідомлення до даного каналу зв'язку або до якого-небудь іншого пристрою, призначеному для перетворення або зберігання інформації.

Типова структурна схема системи передавання дискретної інформації (СПДІ) наведена на рис. 1.1. Джерело виробляє повідомлення, які необхідно передавати по каналу СПДІ. Це можуть бути послідовності дискретних повідомлень (дані, телеграфні повідомлення тощо) або неперервні повідомлення (мова, телебачення, результати телевимірювань тощо), перетворені в цифрову форму.

Реальні повідомлення містять надмірність і для узгодження джерела з каналом передачі інформації використовують кодер джерела. Разом з декодером вони утворюють кодек джерела. Методи кодування джерел вивчалися в модулі 2. Основна задача будь-якої СДПІ – передавання інформації із заданими вірністю й швидкістю передавання. Ці вимоги перебувають у протиріччі, причому, підвищення швидкості передавання інформації в реальних СПДІ приводить до зниження завадостійкості й вірності передавання.

Згідно відомих теорем К. Шеннона, у принципі можливе як завгодно велике підвищення вірності передавання інформації, якщо швидкість передавання по каналу $R_{\text{кан}}$ не перевищує пропускну здатності каналу C_k . Досягається це застосуванням досить довгих коректувальних кодів (КК).

Коректувальні коди – це коди, що дозволяють виявляти або виправляти помилки, що виникають під час передавання повідомлень по каналах зв'язку.

З цією метою в структуру КК вводиться **надмірність**.

Кодек КК (кодер і декодер каналу) наведені на рис. 1.1. У реальних умовах довжина коду обмежена припустимою складністю пристроїв кодування й, насамперед, декодування, тому ефект від застосування коректувальних кодів залежить від параметрів коду й обмежень на реалізацію кодека каналу.

Сучасна теорія пропонує широкий набір коректувальних кодів, різних за структурою, принципами побудови й коригувальною здатністю. У наступних розділах розглянуті класи кодів, для яких розроблені досить прості й ефективні

алгоритми кодування/декодування і які найбільш перспективні для використання в каналах телекомунікаційних систем.

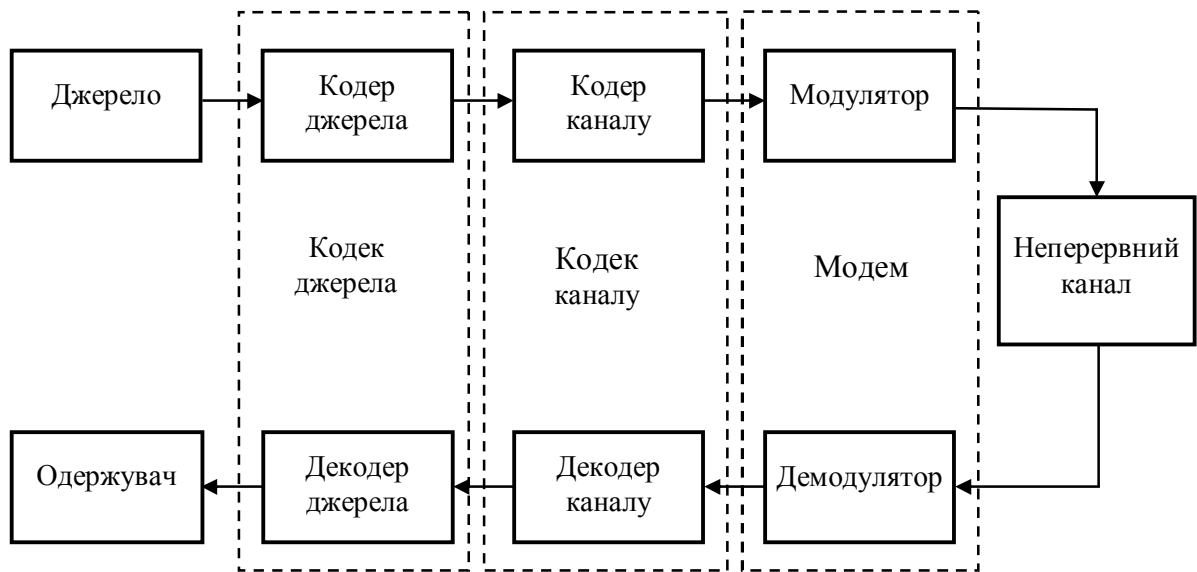


Рисунок 1.1 – Структурна схема СПДІ

1.2. Класифікація коректувальних кодів

У теорії й техніці завадостійкого кодування відома множина коректувальних кодів, які можуть бути класифіковані за різними ознаками. Класифікація кодів наведена на рис. 1.2.

За способом формування КК підрозділяються на блокові й неперервні. Формування **блокових кодів** передбачає розбивку переданих цифрових послідовностей на окремі блоки, які подаються на вхід кодера. Кожному такому блоку на виході кодера відповідає блок кодових символів, робота кодера визначається правилом, або **алгоритмом кодування**. Формування **неперервних кодів** здійснюється неперервно в часі, без поділу на блоки, що й визначає найменування цього класу кодів. Блокові коди історично були запропоновані й вивчені раніше, на зорі розвитку теорії кодування.

У класі неперервних кодів слід зазначити **згорткові коди**, які за характеристиками перевершують блокові коди, і, з цієї причини, знаходять широке застосування в телекомунікаційних системах. Багато кодів носять імена вчених, які їх запропонували й досліджували. Таким прикладом є неперервний код Фінка-Хагельбаргера, запропонований радянським ученим Л.М. Фінком і німецьким фахівцем Р. Хагельбаргером. Тривалий час цей код служив у літературі показовим прикладом неперервного коду із простим алгоритмом кодування/декодування, але після відкриття згорткових кодів поступився їм місце.

Для опису процедур кодування/декодування як блокових, так і згорткових кодів використовують адекватний математичний апарат. Для опису **лінійних кодів** використовується добре розроблений апарат лінійної алгебри. Формування нелінійних кодів виконується із застосуванням нелінійних процедур. Такий підхід дозволяє в деяких випадках одержати **нелінійні коди** з рядом спеціальних властивостей. У теорії й техніці кодування важливою є проблема складності

реалізації процедур кодування/декодування й, особливо, процедур декодування. Тому деякі класи кодів (коди Хеммінга, циклічні коди Боуза-Чоудхурі-Хоквінгема, Ріда-Соломона, Файра й ін.) були розроблені разом з алгоритмами декодування, зв'язаними зі структурними властивостями цих кодів. І, навпаки, розробка нових алгоритмів декодування згорткових кодів (алгоритм А. Вітербі, послідовне декодування, порогове декодування) ініціювала пошуки відповідних згорткових кодів. Відмітні переваги коректувальних кодів (як блокових, так і згорткових) спонукували пошуки нових підходів до реалізації шляхів підвищення завадостійкості й ефективності телекомунікаційних систем. На рис. 1.2 відзначені, відповідно, **нові методи кодування**: сигнально-кодові конструкції, турбокоди, просторово-часові коди й т.п.

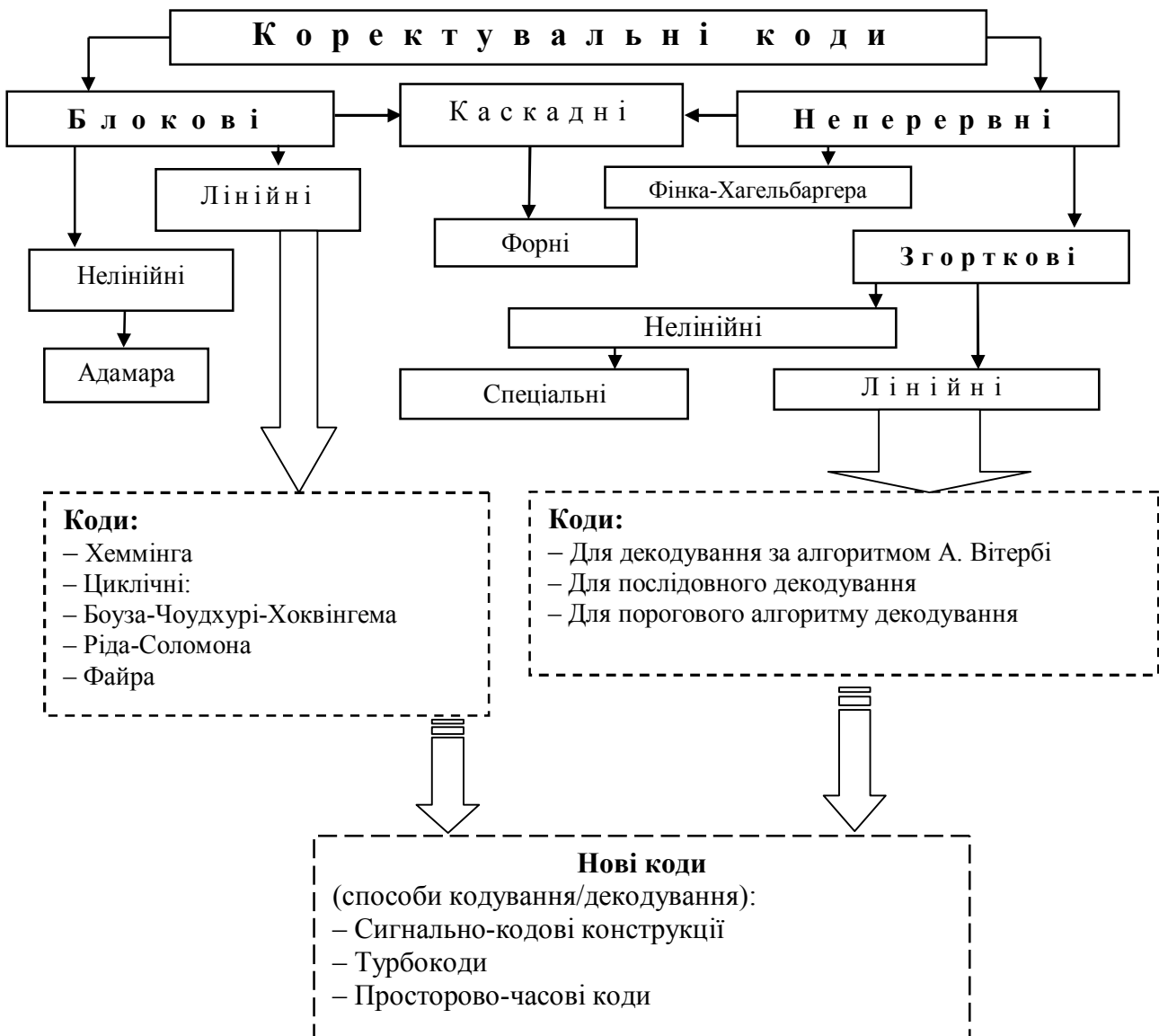


Рисунок 1.2 – Класифікація коректувальних кодів

Контрольні питання

1.1. Яке призначення коректувального кодування при передаванні дискретної інформації?

1.2. З яких елементів складається кодек коректувального коду?

1.3. У чому полягає відмінність процедур кодування блоковим і неперервним кодами?

Завдання

1.1. Зобразіть структурну схему системи передавання дискретної інформації й опишіть призначення її окремих блоків.

1.2. Приведіть класифікацію коректувальних кодів за способами формування й структурними властивостями.

1.3. Приведіть схему включення кодера й декодера коректувального коду до складу цифрової телекомунікаційної системи. Поясніть призначення елементів схеми.

2. ПАРАМЕТРИ БЛОКОВИХ КОРЕКТУВАЛЬНИХ КОДІВ

Розрізняють наступні параметри блокових кодів:

||| **Основа коду m** – число різних символів, використовуваних при кодуванні.

На практиці широко використовують коди з підставою $m = 2$. Це двійкові коди. Для побудови кодових комбінацій двійкових кодів використовується *двійковий алфавіт*, що містить символи $\{0, 1\}$. Широке практичне використання двійкових кодів визначається простотою побудови двійкових логічних елементів і пристроїв пам'яті, використовуваних у кодах.

||| **Довжина коду n** – кількість символів (знаків) у кодовій комбінації.

Надмірність у кодовій комбінації блокових кодів може вводиться в такий спосіб. Нехай на вхід кодера блокового КК надходить інформаційний блок $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k\}$. При блоковому кодуванні кодові комбінації на виході кодера КК можуть мати вигляд:

$$\mathbf{b} = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-k}\}, \quad (2.1)$$

де: $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_{n-k}\}$ – додаткові символи. Значення додаткових символів визначаються *правилами кодування*.

Довжина такої кодової комбінації дорівнює n .

Такий код називається *систематичним*.

||| У **систематичних кодах** кожна кодова комбінація довжиною n символів містить k *інформаційних символів*. При цьому до інформаційних символів додаються $r = n - k$ додаткових символів, які залежать від інформаційних символів і використовуються при декодуванні для виявлення або виправлення помилок.

||| У **несистематичних кодах** інформаційні символи в явному виді в кодовій комбінації не містяться.

Загальна кількість кодових комбінацій блокового коректувального коду визначається формулою:

$$M = m^n. \quad (2.2)$$

Для забезпечення можливості виявлення або виправлення помилок ці M комбінацій не повністю використовують для передачі інформації. Частина з них називають *дозволеними*, оскільки саме вони дозволені для передачі інформації. Їхня кількість строго погоджена із числом варіантів блоків переданих інформаційних символів.

Кількість *дозволених* кодових комбінацій дорівнює

$$M_{\text{дозв}} = m^k.$$

У коректувальному коді використовуються не всі можливі комбінації, тобто $M_{\text{дозв}} < M$. Це ілюструє надмірність коду.

Вводять поняття швидкість коректувального коду.

Швидкість коректувального коду визначається відношенням:

$$R_{\text{код}} = \frac{\log_m M_{\text{дозв}}}{\log_m M}.$$

У ненадлишкових кодів $M_{\text{дозв}} = M$ (або $k = n$) і швидкість коду

$$R_{\text{код}} = 1.$$

Для систематичних кодів швидкість $R_{\text{код}} = k/n$.

Для характеристики коректувальних кодів вводять поняття надмірність (надлишковість) коду.

Коефіцієнт надмірності систематичних кодів $K_{\text{надм}}$ є відносна частка числа додаткових символів $(n - k)$ у кодовій комбінації на її довжині n символів:

$$K_{\text{надм}} = 1 - R_{\text{код}} = (n - k)/n.$$

У простих (ненадлишкових) кодів $n = k$ і $K_{\text{надм}} = 0$.

Вправа 2.1. Як відомо, у двійкових каналах під дією завад відбуваються помилки у вигляді переходів переданих символів у протилежні символи. Наприклад, при передачі символу 1 можливий перехід $(1 \rightarrow 0)$ і, відповідно, можливі також переходи виду $(0 \rightarrow 1)$. Розгляньте можливості побудови двійкового коректувального коду, призначеного для передавання символів повідомлень із об'ємом алфавіту M_A , і, який дозволяє на приймальній стороні виявляти помилки в каналі. Укажіть методи кодування й декодування такого коду. Для розробленого алгоритму кодування визначте швидкість і надмірність КК.

Вказівка. Забезпечити можливість виявлення помилок у переданій кодовій комбінації вдається, якщо в процесі кодування дозволеним комбінаціям коду надавати вид, що змінюється при дії помилок у символах цієї комбінації. Тоді виявлення помилок (тобто декодування) може бути зведене до перевірки відповідності комбінації на вході декодера цьому заздалегідь відомому виду. На перших етапах розробки кодів, що виявляють помилки, простим способом уважалася підтримка в переданих дозволених комбінаціях *парного числа одиниць*.

Так був винайдений «код з парним числом одиниць». Наступним був код, у якому кожна дозволена комбінація містила певне число одиниць і нулів (так званий «код з постійною вагою», у якому в дозволених комбінаціях містилося фіксоване відношення числа одиниць і числа нулів).

Рішення. Розглянемо варіант побудови двійкового систематичного коду, призначеного для передавання букв, обраних з алфавіту об'єму M_A . Відповідно до викладеного вище правилом побудови кодових комбінацій блокового систематичного коду інформаційний блок $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_k\}$ кожної комбінації повинен містити k двійкових символів a_i . Загальна кількість інформаційних блоків повинна дорівнювати об'єму алфавіту джерела M_A , тобто виконання умови $M_A = 2^k$ гарантує передавання кожного символу джерела, відповідною йому кодовою комбінацією систематичного коду. Кількість одиниць в інформаційних блоках залежить від виду первинного простого коду й може бути як парним, так і непарним. Виявляється, що для реалізації процесу кодування й декодування комбінацій такого коду зручно використовувати процедуру додавання двійкових символів «за модулем 2», визначену в розділі П.2.1.2 навчального посібника [3]. Ця процедура зручна тим, що дозволяє простим способом з'ясовувати парність числа одиниць у кодовій комбінації. Будемо до кожного інформаційного блоку приписувати один додатковий символ ($r = 1$) таким чином, щоб кількість одиниць у знову утвореній комбінації була парною. Кодування робимо в такій послідовності.

1. Заданий інформаційний символ X представляємо первинним кодом:

$$X \rightarrow 101010.$$

2. Послідовним додаванням за модулем 2 символів первинного коду визначаємо додатковий символ $c = 1$.

3. Формуємо дозволена комбінацію КК, дописуючи додатковий символ до блоку інформаційних символів $\mathbf{b} \rightarrow 1010101$. Видно, що правило кодування виконується, тому що число одиниць залишається парним.

4. При іншій формі первинного коду одержуємо: $Y \rightarrow 101011$, $c = 0$ і $\mathbf{b} \rightarrow 1010110$.

Очевидно, що будь-який перехід ((1→0) або (0→1)) змінює число одиниць у комбінаціях на вході декодера. Якщо при декодуванні використовувати процедуру підрахунку числа одиниць, то можна виявляти помилки.

Зауваження. Виявляється, такий код дозволяє виявляти *не будь-які конфігурації помилок*. Простий аналіз показує, що зміна двох символів не може змінити парність і такі помилки виявити цим кодом неможливо. Рекомендується провести такий аналіз для інших варіантів комбінацій помилок самостійно.

Швидкість і надмірність коду з парним числом одиниць, у якому кількість інформаційних і додаткових символів перебувають у співвідношенні: $r = 1$, $n = k + r = k + 1$ визначаються формулами:

$$R_{\text{код}} = \frac{k}{n} = \frac{k}{k+1} \quad \text{і} \quad K_{\text{надм}} = \frac{n-k}{n} = \frac{1}{k+1}.$$

Видно, що при великих довжинах інформаційного блоку $k \gg 1$ швидкість такого коду близька до 1, а надмірність при передаванні, наприклад, букв російського тексту з об'ємом алфавіту $M_A = 32$ ($k = 5$) буде невеликою $K_{\text{надм}} = 1/6$.

Контрольні питання

2.1. Чим пояснюється широке застосування двійкових кодів у телекомунікаційних системах?

2.2. Дайте визначення систематичного блокового коду.

2.3. Чи можливе розміщення додаткових символів перед блоком інформаційних символів систематичного коду? Чи змінить це надмірність коду?

Завдання

2.1. За аналогією із вправою 2.1 розгляньте можливості побудови коду з постійною вагою й довжиною дозволених кодових комбінацій n , при цьому дайте відповіді на такі питання:

а) Нехай кількість одиниць у дозволеній комбінації позначається як n_1 , а кількість нулів у дозволеній комбінації позначається як n_0 , тобто $n_1 + n_0 = n$. Якщо задано об'єм алфавіту повідомлень джерела M_A , то як вибрати значення n_1 і n_0 , щоб задовольнити умовам сталості ваги $w = n_1/n_0$?

б) Які конфігурації помилок можна виявляти, застосовуючи таке кодування, і які конфігурації не виявляються?

в) Визначте набір параметрів коду (n, n_1, n_0), які зручні для побудови коду з постійною вагою, призначеної для передачі букв російського тексту.

г) Чи можна вважати код з постійною вагою систематичним?

3. ЗДАТНІСТЬ БЛОКОВИХ КОДІВ ВИЯВЛЯТИ Й ВИПРАВЛЯТИ ПОМИЛКИ

Установимо залежність здатності блокових кодів виявляти й виправляти помилки від параметрів коду. З цією метою корисно розглянути двійковий код з параметрами $n = 3, k = 2$. Усі можливі комбінації цього коду ($M = 8$) можна розділити за ознакою «парність числа одиниць у кодовій комбінації» на дві групи:

а) комбінації з **парним** числом одиниць;

б) комбінації з **непарним** числом одиниць.

Код, побудований за цим принципом, називають «**кодом з парним числом одиниць**», він розглянутий вище у вправі 2.1.

Приклад 3.1. Двійковий тризначний код з парним числом одиниць.

У табл. 3.1 наведено набір всіх можливих двійкових тризначних кодових комбінацій ($M = 8$), що розділений на набір дозволених кодових комбінацій ($M_{\text{дозв}} = 4$), що містить комбінації з парним числом одиниць (включаючи комбінацію 000 (число 0 – парне)), і на набір заборонених кодових комбінацій з непарним числом одиниць. Їхня загальна кількість дорівнює різниці $M_{\text{забор}} = M - M_{\text{разр}} = 4$.

Дозволені кодові комбінації використовуються для передавання інформації каналом (дозволені для передавання).

Заборонені кодові комбінації для передавання інформації каналом не використовуються (заборонені для передавання).

Таблиця 3.1 – Код з парним числом одиниць

Повний набір кодових комбінацій коду ($M = 8$): {000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111}	
Дозволені комбінації (з парним числом одиниць): $M_{\text{дозв}} = 4$ {000, 011, 101, 110}	Заборонені комбінації (з непарним числом одиниць): $M_{\text{забор}} = M - M_{\text{дозв}} = 4$ {001, 010, 100, 111}
Параметри коду: швидкість коду $R_{\text{код}} = 1/2$; кодова віддаль $d_{\text{min}} = 2$; кратність помилок, що виявляються, $q_{\text{вияв}} = 1$	

У теорії кодування важливу роль грає поняття віддалі між кодовими комбінаціями. Кожний двійковий блоковий коректувальний код характеризується параметром *кодова віддаль*.

Кодова віддаль d_{min} – це найменша віддаль Хеммінга* між дозволеними кодовими комбінаціями.

Величина кодової віддалі d_{min} є одним з найважливіших параметрів блокових кодів. Перебираючи пари дозволених кодових комбінацій коду з табл. 3.1 можна встановити, що в цього коду кодова віддаль дорівнює $d_{\text{min}} = 2$. Така віддаль дозволяє виявляти в процесі декодування однократні помилки. Якщо передана кодова комбінація є $\mathbf{b} = 1\ 1\ 0$, а помилки, що виникають у каналі зв'язку, характеризуються комбінацією (**вектором помилки**) $\mathbf{e} = 1\ 0\ 1$, то комбінація з помилкою на виході каналу $\hat{\mathbf{b}}$ визначається на основі посимвольного додавання за модулем 2:

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{a} \oplus \mathbf{e} = 0\ 1\ 1.$$

Із цього запису видно, що символ 1 у записі вектора помилки \mathbf{e} змінює відповідний символ переданої комбінації на протилежний символ. Для опису кількості помилок, внесених каналом, вводять поняття кратності помилки.

Кратність помилки q – кількість помилок, внесених каналом у межах кодової комбінації блокового коду.

Для розглянутого в прикладі 3.1 тризначного коду комбінації **однократних помилок**, що відображають помилкове передавання першого, другого й третього символів кодової комбінації, мають вигляд:

$$\mathbf{e} = 100, 010, 001,$$

а комбінації **двократних помилок**, що відображають одночасне помилкове передавання двох символів у різних сполученнях у межах кодової комбінації, мають вигляд: 110, 011, 101.

* Визначення віддалі Хеммінга між кодовими комбінаціями див. в посібнику [3, с. 10].

Коректувальна здатність коду (здатність виявляти або виправляти помилки) залежить від співвідношення кодової віддалі d_{\min} і кратності помилки q .

Виявлення помилки – фіксація в процесі декодування факту наявності помилки певної кратності в кодовій комбінації на вході декодера $\hat{\mathbf{b}}$.

Виправлення помилок – виявлення в процесі декодування помилок у певних символах комбінації на вході декодера й наступне їхнє виправлення.

Відповідно до цих визначень коректувальні коди підрозділяються на наступні класи:

1. Коди, що виявляють помилки, використовуються в системах передавання цифрової інформації, у яких для виправлення помилок передбачені інші (не-кодові) методи (наприклад, телекомунікаційні системи з виявленням помилок, наступним автозапитом і повторним передаванням інформації, у якій були виявлені помилки).

2. Коди, що виправляють помилки, називані в літературі кодами із прямим виправленням помилок (тобто з виправленням помилок кодовими методами).

Взаємозв'язок між величиною кодової віддалі й коректувальною здатністю коду встановимо на прикладі коду з парним числом одиниць (див. табл. 3.1). Для пояснень зручно використовувати геометричне подання кодових комбінацій коду, зображене на рис. 3.1. Якщо кодову комбінацію тризначного коду представляти набором із трьох символів (x, y, z) , і значення цих символів вибирати із двійкового алфавіту $\{0,1\}$, то всі можливі кодові комбінації можна представити точками в декартовій системі координат (x, y, z) . При цьому комбінації будуть утворювати вершини тривимірного куба. На рис. 3.1 ці вершини позначені в такий спосіб:

- знаком \bullet – «крапка» відзначені **дозволені** кодові комбінації;
- знаком \times – «хрестик» відзначені **заборонені** кодові комбінації.

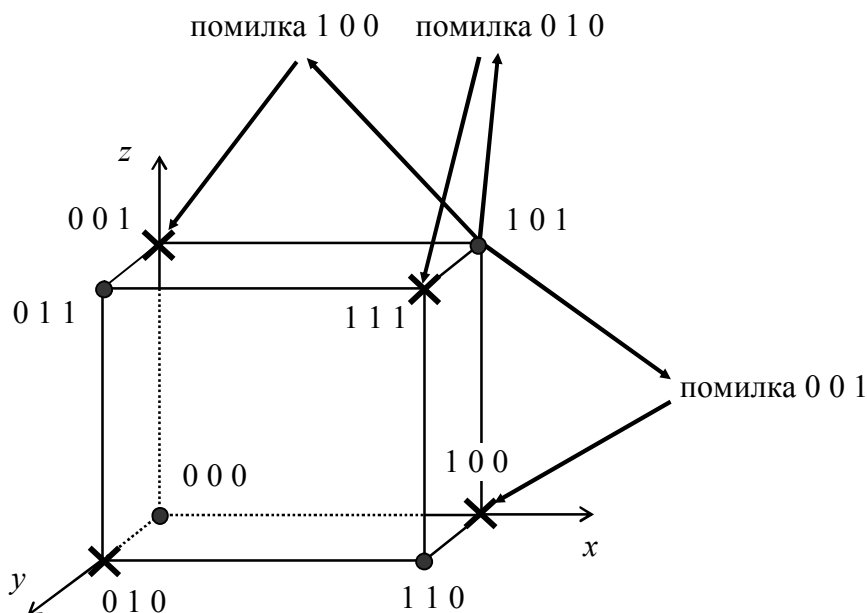


Рисунок 3.1 – До пояснення коректувальної здатності блокового коду

Видно, що структура коду така, що між дозволеними комбінаціями розташовуються заборонені, створюючи своєрідний «захисний проміжок», причому, дія будь-якої однократної помилки переводить кожну з дозволених комбінацій у сусідні заборонені.

Ця властивість підказує **правило декодування** коду з парним числом одиниць із виявленням будь-яких однократних помилок:

Одержання декодером забороненої кодової комбінації дозволяє стверджувати, що комбінація містить одну чи кілька помилок.

Неважко переконатися в тім, що цей код не дозволяє виявляти помилки кратності 2 (недостатній «захисний проміжок»). По індукції можна довести, що будь-який двійковий код з парним числом одиниць дозволяє виявляти будь-які помилки непарної кратності, і не дозволяє виявляти будь-які помилки парної кратності.

Концепція «захисного проміжку» легко застосовна для встановлення зв'язку між кодовою віддаллю й здатністю коду виправляти помилки.

Якщо мінімальна віддаль між дозволеними комбінаціями (кодова віддаль) d_{\min} , то, як показано на рис.3.2, захисний проміжок містить $(d_{\min} - 1)$ заборонених комбінацій і для «переведення» кожної дозволеної комбінації в найближчу дозволена комбінацію необхідно зробити $(d_{\min} - 1)$ «кроків».

Ясно, що всі помилки кратності $[1, 2, 3, \dots, (d_{\min}-1)]$ можуть бути виявлені, звідки випливає, що

якщо кодова віддаль двійкового коду d_{\min} , то **кратність помилок, що виявляються**, визначається:

$$q_{\text{виявл}} \leq d_{\min} - 1.$$

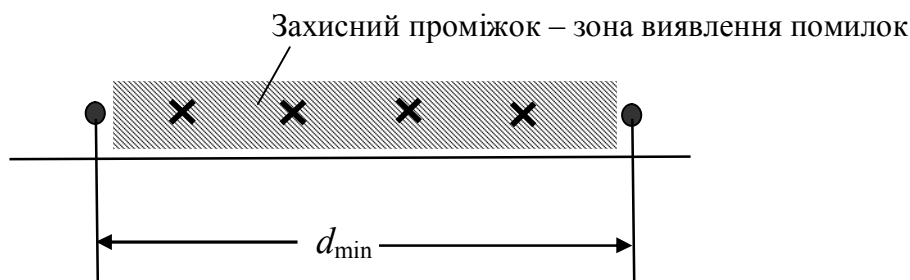


Рисунок 3.2 – До пояснення виявлення помилок

Скористаємося подібним поданням для встановлення здатності коду виправляти помилки. На рис. 3.3 показане розташування дозволених кодових комбінацій $\mathbf{b}_{\text{дозв.1}}$ і $\mathbf{b}_{\text{дозв.2}}$ між якими розташовані $(d_{\min} - 1)$ заборонених комбінацій. Розіб'ємо всю множину комбінацій на дві зони, як показано на рис. 3.3.

Якщо, наприклад, комбінація на вході декодера $\hat{\mathbf{b}}$ розташована в «зоні декодування комбінації $\mathbf{b}_{\text{дозв.1}}$ », то при декодуванні виноситься рішення про передавання комбінації $\mathbf{b}_{\text{дозв.1}}$, тобто тим самим виправляються помилки, що спричиняють перехід $\mathbf{b}_{\text{дозв.1}}$ у найближчі заборонені комбінації.

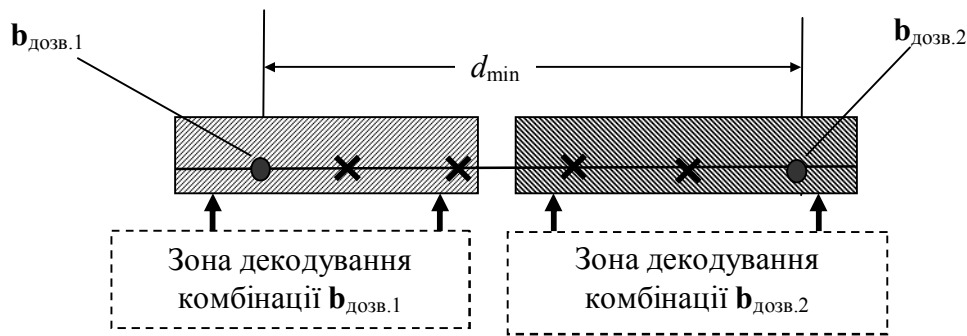


Рисунок 3.3 – До пояснення виправлення помилок

Якщо, наприклад, комбінація на вході декодера $\hat{\mathbf{b}}$ розташована в «зоні декодування комбінації $\mathbf{b}_{\text{доzv.1}}$ », то при декодуванні виноситься рішення про передавання комбінації $\mathbf{b}_{\text{доzv.1}}$, тобто тим самим виправляються помилки, що спричиняють перехід $\mathbf{b}_{\text{доzv.1}}$ у найближчі заборонені комбінації. Аналогічно можна пояснити процес виправлення помилок при передаванні комбінації $\mathbf{b}_{\text{доzv.2}}$. Видно, що довжина кожної зони є $(d_{\min} - 1) / 2$, де d_{\min} – непарна, що й визначає здатність коду виправляти помилки.

Для парних значень d_{\min} довжина кожної зони $[(d_{\min} / 2) - 1]$, що також визначає здатність коду виправляти помилки.

Таким чином:

якщо кодова віддаль двійкового коректувального коду d_{\min} , то **кратність помилок, що виправляються**, визначається **виразами**:

$$q_{\text{испр}} \leq \frac{d_{\min} - 1}{2} \quad (d_{\min} - \text{непарна});$$

$$q_{\text{испр}} \leq \frac{d_{\min}}{2} - 1 \quad (d_{\min} - \text{парна}).$$

Контрольні питання

- 3.1. Чи можна використовувати для побудови кодів, що дозволяють виявляти помилки, інший метод, ніж розглянутий у розділі метод відбору дозволених комбінацій за ознакою парності числа одиниць?
- 3.2. Які можливості коду з перевіркою на парність одиниць?
- 3.3. Які можливості коду з $d_{\min} = 5$ при виявленні помилок?
- 3.4. Які можливості коду з $d_{\min} = 7$ при виправленні помилок?
- 3.5. Чим визначається коректувальна здатність коду?

Завдання

- 3.1. Запропонуйте простий спосіб формування дозволених комбінацій коду з парним числом одиниць.
- 3.2. Запропонуйте простий спосіб декодування комбінацій коду з парним числом одиниць.

4. АЛГЕБРАЇЧНИЙ ОПИС БЛОКОВИХ КОДІВ

Для опису лінійних блокових кодів використовують математичний апарат загальної алгебри. При блоковому кодуванні набори кодових символів утворюють кодові комбінації $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Символи комбінацій \mathbf{b} двійкових кодів вибирають із *поля Галуа* $GF(2)$. Множина комбінацій довжини n утворить n -вимірний векторний простір над полем $GF(2)$. Для елементів цього простору (векторів) визначені операції додавання й множення, операція множення вектора на елемент поля, а також скалярний добуток векторів. Сукупність лінійно незалежних векторів утворює *базис*, що породжує n -вимірний векторний простір \mathbf{B}_n , причому кожен з векторів цього простору може бути отриманий, як лінійна комбінація базисних векторів. Деяка підмножина векторів простору \mathbf{B}_n , що задовольняє аксіомам векторного простору, утворює підпростір \mathbf{A}_k .

Двійковий блоковий код довжини n з 2^k дозволеними кодовими комбінаціями називається *лінійним (n, k) кодом*, якщо його кодові слова утворюють k -вимірний підпростір \mathbf{A}_k векторного n -вимірного простору \mathbf{B}_n .

Підпростір \mathbf{A}_k породжується базисом з k лінійно незалежних векторів, які утворюють рядки *матриці, що породжує (n, k) код*:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_0 \\ \mathbf{g}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{g}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & \cdots & g_{0,n} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{k,0} & g_{k,1} & g_{k,2} & \cdots & g_{k,n} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Кодові комбінації можна представити в систематичній формі, створюючи окремо *інформаційну частину* з k символів і *перевірну частину* з $r = (n - k)$ додаткових символів.

Матриця, що породжує систематичний код, має вигляд:

$$\mathbf{G}_c = [\mathbf{I}_k : \mathbf{P}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & g_{1,n-r} & \cdots & g_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & g_{2,n-r} & \cdots & g_{2,n} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g_{k,n-r} & \cdots & g_{k,n} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{I}_k} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{P}}$

Матриця \mathbf{G}_c містить *одиничну матрицю* \mathbf{I}_k , що визначає інформаційну частину кодової комбінації, і матрицю \mathbf{P} , що визначає *додаткові символи*. Перехід до систематичної форми виконується лінійною комбінацією рядків матриці (4.1). Такий перехід ілюструємо наступним прикладом.

Приклад 4.1. *Перетворення матриці несистематичного коду.*

Несистематичний блоковий код $(7, 4)$ заданий матрицею, що породжує:

$$\mathbf{G}_H = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.3)$$

Використовуючи метод лінійної комбінації рядків матриці (4.3) перетворимо її до систематичної форми виду (4.2). Для формування матриці, що породжує систематичний код, рядки вихідної матриці (4.3) зручно представити у вигляді табл. 4.1, у якій показані рядки $\mathbf{g1}_H$, $\mathbf{g2}_H$, $\mathbf{g3}_H$ и $\mathbf{g4}_H$.

Таблиця 4.1 – Рядки матриці, що породжує несистематичний код

$\mathbf{g1}_H$	1	0	1	1	0	1	0
$\mathbf{g2}_H$	0	1	0	0	1	0	1
$\mathbf{g3}_H$	0	0	1	0	0	1	1
$\mathbf{g4}_H$	0	0	0	1	1	1	1

Використовуючи правила додавання за модулем 2 елементів цих рядків перебором рядків у різних комбінаціях, установлюємо, що найбільш підходящими варіантами для формування рядків матриці систематичного коду $\mathbf{g1}_C$, $\mathbf{g2}_C$, $\mathbf{g3}_C$ и $\mathbf{g4}_C$ є наступні:

$$\mathbf{g1}_C = (\mathbf{g1}_H \oplus \mathbf{g3}_H \oplus \mathbf{g4}_H), \quad \mathbf{g2}_C = \mathbf{g2}_H, \quad \mathbf{g3}_C = \mathbf{g3}_H, \quad \mathbf{g4}_C = \mathbf{g4}_H.$$

Результат обчислення рядків матриці систематичного коду наведений у табл. 4.2.

Таблиця 4.2 – Рядки матриці, що породжує систематичний код

$\mathbf{g1}_C$	1	0	0	0	1	1	0
$\mathbf{g2}_C$	0	1	0	0	1	0	1
$\mathbf{g3}_C$	0	0	1	0	0	1	1
$\mathbf{g4}_C$	0	0	0	1	1	1	1

Нижче дана матриця систематичного коду в стандартній формі запису:

$$\mathbf{G}_C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.4)$$

У теорії блокових кодів важливу роль грає поняття вага кодової комбінації.

Вага Хеммінга w кодової комбінації двійкового коду дорівнює кількості одиниць у кодовій комбінації.

Приклад 4.2. Обчислення ваг Хеммінга кодових комбінацій.

Визначимо значення ваг Хеммінга для комбінацій, що задаються табл. 4.3:

Таблиця 4.3 – Обчислення ваг Хеммінга кодових комбінацій

Кодові комбінації двійкового коду							Вага $w(\mathbf{b}_i)$
\mathbf{b}_1	1	0	1	1	0	1	4
\mathbf{b}_2	0	1	0	0	0	1	2

Вид матриці, що породжує код, дозволяє визначати мінімальні віддалі блокових кодів. Це положення ілюструється наступною вправою.

Вправа 4.1. Визначення кодової віддалі блокового коду по його матриці, що породжує.

Задано матриці, що породжують блоковий коректувальний код, виду (4.3) або (4.4). Покажіть, як визначати кодова віддаль коду по відомій матриці, що породжує код.

Вказівка. Для розробки методу визначення кодової віддалі блокового коду по його матриці, що породжує, необхідно врахувати, що повністю нульова комбінація $\mathbf{b}_0 = (00\dots 0\dots 0)$ також є дозволеною.

Рішення. Вище відзначено, що дозволені комбінації блокового коду визначаються як лінійні комбінації рядків матриці, що породжує. Оскільки повністю нульова комбінація $\mathbf{b}_0 = (00\dots 0\dots 0)$ є дозволеною, а рядки матриці, що породжує, $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3, \mathbf{g}_4$ також є дозволеними комбінаціями, то віддалі Хеммінга цих комбінацій до нульової комбінації \mathbf{b}_0 визначається їхніми вагами $d_H(\mathbf{g}_i, \mathbf{b}_0) = w_H(\mathbf{g}_i)$, $i = (1, \dots, k)$. Залишається з'ясувати мінімальну вагу, тобто мінімальну віддаль. Звідси випливає такий висновок:

Кодова віддаль, як величина мінімальної віддалі між дозволеними комбінаціями, визначається **найменшою вагою рядків** матриці, що породжує блоковий код.

Приклад 4.3. Визначення ваг Хеммінга рядків матриці, що породжує систематичний код.

Для ілюстрації цього твердження визначимо значення ваг рядків матриці, що породжує систематичний код із прикладу 4.1 (табл. 4.2). Результати обчислень наведені в табл. 4.4.

Таблиця 4.4 – Розподіл ваг Хеммінга рядків матриці, що породжує систематичний код

Рядки матриці, що породжує код								Вага $w(\mathbf{g}_i)$
\mathbf{g}_{1c}	1	0	0	0	1	1	0	3
\mathbf{g}_{2c}	0	1	0	0	1	0	1	3
\mathbf{g}_{3c}	0	0	1	0	0	1	1	3
\mathbf{g}_{4c}	0	0	0	1	1	1	1	4

Аналіз даних дає визначення мінімальної віддалі систематичного коду з табл. 4.4 $d_{\min(\text{сист})} = \min\{w(\mathbf{g}_i)\} = 3$.

Вправа 4.2. Визначте таким же способом кодову віддаль несистематичного коду із прикладу 4.1 (табл. 4.1).

Вказівка. Твердження про кодову віддаль блокового коду із вправи 4.1 справедливе як для систематичних, так і для несистематичних кодів.

Рішення. Застосуємо методику із прикладу 4.3. Результати обчислень ваг рядків наведені в табл. 4.5.

Таблиця 4.5 – Розподіл ваг Хеммінга рядків матриці, що породжує несистематичний код

Рядки матриці, що породжує код								Вага $w(g_i)$
$g1_n$	1	0	1	1	0	1	0	4
$g2_n$	0	1	0	0	1	0	1	4
$g3_n$	0	0	1	0	0	1	1	3
$g4_n$	0	0	0	1	1	1	1	4

Аналіз цих даних дає визначення мінімальної віддалі несистематичного коду з табл. 4.5 $d_{H\min(\text{несист})} = \min\{w(g_i)\} = 3$. Отримані результати дозволяють стверджувати, що систематичний і несистематичний коди із прикладу 4.1 за величиною кодової віддалі *еквівалентні*.

Таким чином:

Кодова віддаль блокового коду дорівнює найменшій вазі ненульових рядків матриці, що породжує код.

Відзначений вище зв'язок між мінімальною віддаллю блокових кодів і вагами рядків матриць, що породжують, може бути використана для формування матриці, що породжує блоковий код із заданою кодовою віддаллю. Це положення ілюструється результатами рішення задач у прикладах 4.4 і 4.5.

Приклад 4.4. Матриця, що породжує код з парним числом одиниць.

Сформуємо матрицю, що породжує систематичний (n, k) код, який виявляє однократні помилки. Код, що виявляє помилки кратності $q = 1$, повинен мати кодову віддаль $d_{\min} = q + 1 = 2$. Отже, ненульові рядки матриці, що породжує цей код, повинні мати мінімальну вагу $w = 2$. Оскільки формуванню підлягає матриця систематичного (n, k) коду, то у відповідності до стандартної форми запису (4.4) кожний рядок такої матриці вже містить символ 1 (обумовлений видом одиничної підматриці I_k), вагу кожного рядка слід збільшити до 2, додавши в останніх символах кожного рядка (у складі підматриці P) символ 1. Для прикладу матриця, що породжує такий код $(7, 4)$ з $k = 4$, буде мати вигляд:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

причому, одиниця в підматриці P може розташовуватись в будь-якому місці рядка.

Вправа 4.3. Матриці, що породжують коди, які виявляють двократні помилки.

Сформууйте матрицю, що породжує систематичний код, який виявляє двократні помилки.

Вказівка. З теорії не випливає, що такий код може бути тільки один. Рекомендується спочатку розглянути принцип побудови матриці хоча б одного коду, а потім на цій основі дати узагальнення й знайти матриці ще декількох кодів.

Рішення. Код, що виявляє помилки кратності $q = 2$, повинен мати кодову віддаль $d_{\min} = q + 1 = 3$. Отже, рядки матриці, що породжує такий код, повинен мати мінімальна вагу $w = 3$. Із загального виду матриці, що породжує систематичний код (4.2), випливає, що одержати таку вагу можна вибором рядків підматриці додаткових символів \mathbf{P} , причому один з рядків цієї підматриці повинен мати вагу, що дорівнює 2. Можливі наступні варіанти підматриці \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{P}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad (4.6)$$

які відрізняються перестановкою рядків. Оскільки мінімальна вага рядків кожної із цих матриць дорівнює 2, їх можна використовувати для формування систематичних кодів з кодовою віддаллю $d_{\min} = 3$. Зокрема матриця, що породжує один з таких кодів, має вигляд:

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

Контрольні питання

- 4.1. Коди з матрицями, що породжують, (4.3) і (4.4) мають однакову мінімальну віддаль. Чим це пояснюється?
- 4.2. Чи змінюються коректувальні властивості блокового коду при перестановці стовпців матриці, що породжує?
- 4.3. Чи єдиним є спосіб перетворення матриці, що породжує несистематичний код, для одержання матриці систематичного коду, який розглянуто у прикладі 4.1?
- 4.4. Який вид має матриця, що породжує систематичний блоковий код?

Завдання

- 4.1. Запропонуйте спосіб перетворення матриці, що породжує несистематичний код (4.3), для одержання матриці систематичного коду, альтернативний способу із прикладу 4.1.
- 4.2. Дотримуючись методу, викладеного у вправі 4.3, сформууйте матрицю, що породжує систематичний код, який виявляє трикратні помилки. Чи є знайдений Вами код єдиним?

5. КОДУВАННЯ Й ДЕКОДУВАННЯ БЛОКОВИХ КОДІВ

- 5.1. Кодування й декодування блокових кодів [2, розд. 3.3].
 5.2. Синдромне декодування блокових кодів [2, розд. 3.3].
 5.3. Мажоритарне декодування блокових кодів [2, розд. 3.3].

5.1. Кодування й декодування блокових кодів

В основі теорії кодування блокових кодів лежить поняття матриці, що породжує код виду (4.1) і (4.2).

Якщо $\mathbf{a} = |a_0, a_1, \dots, a_k|$ – матриця-рядок первинного коду, то **правило кодування блокового коду** визначається добутком:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{G}, \quad (5.1)$$

де: $\mathbf{a} = |a_0, a_1, \dots, a_k|$ – матриця-рядок первинного коду на вході кодера;

$\mathbf{b} = |b_0, b_1, \dots, b_n|$ – матриця-рядок кодового слова на виході кодера;

\mathbf{G} – матриця, що породжує лінійний (n, k) код.

Приклад 5.1. Кодер коду (7, 4). Структура кодера систематичного коду (7, 4) визначається матрицею, що породжує, (4.4) і правилом кодування (5.1). Якщо на вході кодера діє рядок символів первинного коду $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, то символи дозволених кодової комбінації на його виході $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$ визначаються наступними рівностями:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1, \quad b_2 = a_2, \quad b_3 = a_3, \quad b_4 = a_4, \\ b_5 &= a_1 \oplus a_2 \oplus a_4, \quad b_6 = a_1 \oplus a_2 \oplus a_4, \quad b_7 = a_1 \oplus a_3 \oplus a_4. \end{aligned} \quad (5.2)$$

На рис. 5.1 показана структура кодера систематичного коду (7, 4), у якій реалізовані рівності (5.2).

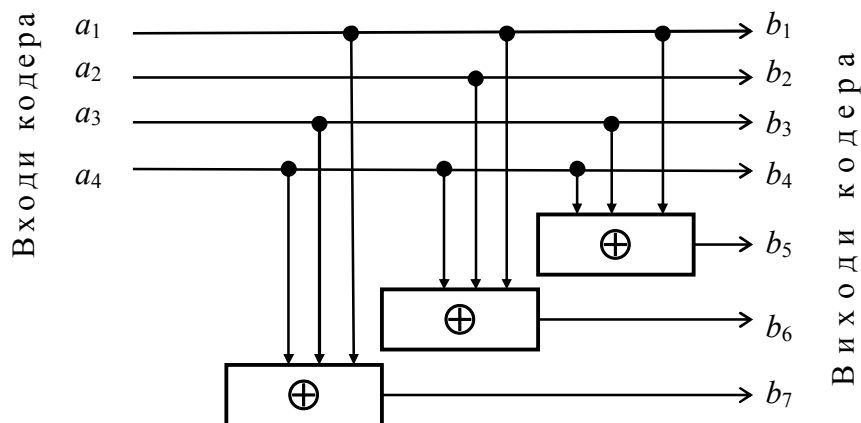


Рисунок 5.1 – Структура кодера систематичного коду
 (\oplus – суматор за модулем 2)

При декодуванні блокових кодів *перевірочні співвідношення* встановлюють із використанням **перевірної матриці** \mathbf{H} , простір рядків якої *ортогональний* простору рядків матриці, що породжує, тобто:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}. \quad (5.3)$$

Тут індекс T – символ транспонування.

Простір рядків *перевірної матриці* H блокового коду *ортогональний* простору рядків матриці, що **породжує**, G :

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}.$$

Якщо матриця, що породжує, задана у формі (4.2), то для виконання умови ортогональності **перевірної матриці** повинна мати вигляд:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{P}^T; \mathbf{I}_{n-k}], \quad (5.4)$$

де \mathbf{P}^T – транспонована підматриця \mathbf{P} матриці \mathbf{G} , що породжує;

\mathbf{I}_{n-k} – одинична матриця розміром $[(n-k) \times (n-k)]$.

Вправа 5.1. *Перевірні матриці систематичного коду (7, 4).*

Задано матрицю, що породжує систематичний код, виду (4.6):

$$\mathbf{G}_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Відповідно до правил формування перевірної матриці (5.4) сформууйте перевірну матрицю цього коду.

Рішення. Послідовно знаходимо підматриці, що входять у формулу (5.4):

– транспонована підматриця розміром $[(n-k) \times k]$:

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

– одинична підматриця розміром $[(n-k) \times (n-k)]$:

$$\mathbf{I}_{n-k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поєднуємо підматриці в єдину перевірну матрицю коду:

$$\mathbf{H}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

З умови ортогональності матриці, що породжує, й перевірної матриці лінійного коду (5.3) випливає, що кожна дозволена комбінація лінійного коду, сформована за правилом $\mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{G}$, також задовольняє умові ортогональності:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{a} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}. \quad (5.6)$$

При передаванні каналом кодові символи спотворюються. Комбінації на вході декодера мають вигляд $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} \oplus \mathbf{e}$, де $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$, а *вектор помилки* $\mathbf{e} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$.

При декодуванні обчислюють *вектор синдрому*

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{H}^T = (s_0, s_1, \dots, s_{n-k-1}). \quad (5.7)$$

Синдром залежить тільки від вектора помилок:

$$\mathbf{S} = \hat{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{H}^T = (\mathbf{b} \oplus \mathbf{e}) \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{b} \cdot \mathbf{H}^T \oplus \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}^T.$$

Оскільки виконується умова ортогональності $\mathbf{b} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{0}$, синдром дорівнює:

$$\mathbf{S} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{H}^T. \quad (5.8)$$

Звідси випливає просте правило виявлення помилок:

Якщо синдром $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ (вектор помилки $\mathbf{e} = \mathbf{0}$), то комбінація на вході декодера належить до множини **дозволених** кодових комбінацій. Це може бути, якщо в каналі не було помилок або помилки перевели передану дозволена комбінацію в іншу дозволена комбінацію.

При $\mathbf{S} \neq \mathbf{0}$ комбінація $\hat{\mathbf{b}}$ **містить помилки**. За значеннями символів синдрому судять про конфігурацію вектора помилок.

Цей принцип лежить в основі синдромного декодування.

5.2. Синдромне декодування блокових кодів

Принцип синдромного декодування розглянемо на прикладі нескладного блокового коду.

Приклад 5.3. Синдромний декодер систематичного коду (7, 4).

Відповідно до правила обчислення синдрому (5.8) для реалізації синдромного декодера необхідно сформулювати транспоновану перевірну матрицю коду (7, 4). Перевірна матриця цього коду має вигляд (5.5). Застосовуючи до неї правило транспонування матриць, одержуємо:

$$\mathbf{H}_c = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{H}_c^T = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.9)$$

Якщо в каналі зв'язку діють однократні помилки, то вектори помилок зручно записувати так:

$$\mathbf{e}_1 = (1000000), \mathbf{e}_2 = (0100000), \mathbf{e}_3 = (0010000), \dots, \mathbf{e}_n = (0000001) \dots \quad (5.10)$$

У такому записі вектор помилки \mathbf{e}_i представляє набір n символів, у якому на місці з номером i (рахунок зліва) розташований символ помилки 1, а на інших місцях розташовані нульові символи.

Вектори помилки можуть бути представлені у вигляді одиничної матриці:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_i \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix} = \mathbf{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.11)$$

кожний рядок якої є *вектор однократної помилки*. Використовуючи властивості одиничних матриць, неважко показати, що матриця синдромів збігається із транспонованою перевіркою матрицею цього коду (5.9):

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{H}^T = \mathbf{H}^T. \quad (5.12)$$

При синдромному декодуванні блокового коду **матриця синдромів \mathbf{S} збігається із транспонованою перевіркою матрицею коду \mathbf{H}^T .**

Це є підставою для складання **таблиці синдромів**. Нижче наведена табл. 5.1 синдромів для коду (7,4), складена за даними рядків транспонованої перевіркою матриці (5.9). У таблиці *кожному вектору помилки відповідає свій вектор синдрому*, що вказує місце розташування помилкового символу в кодовій комбінації на вході декодера.

Таблиця 5.1 – Таблиця синдромів для декодування коду (7, 4)

Синдром	011	110	101	111	100	010	001
Вектор помилки	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3	\mathbf{e}_4	\mathbf{e}_5	\mathbf{e}_6	\mathbf{e}_7

Це дозволяє сформулювати алгоритм синдромного декодування:

Алгоритм синдромного декодування блокових кодів полягає в наступному:

1. Формування транспонованої перевіркою матриці коду \mathbf{H}^T .
2. Складання таблиці синдромів для декодування коду (n, k) .
3. Обчислення синдромів (типу табл. 5.1) за структурою транспонованої перевіркою матриці коду \mathbf{H}^T і вектору символів кодової комбінації, що декодується, по правилу (5.12).
4. Формування вектора помилки \mathbf{e}_i на основі таблиці синдромів.
5. **Виправлення помилки** в кодовій комбінації на вході декодера за правилом

$$\mathbf{b}_i = \hat{\mathbf{b}} \oplus \mathbf{e}_i.$$

6. Відкидання додаткових символів дає комбінацію $\hat{\mathbf{a}}$.

Структура синдромного декодера коду (7, 4), що реалізує цей алгоритм, наведена на рис. 5.2.

Відповідно до правил формування синдромів (5.12) на суматори за модулем 2 подаються прийняті з каналу символи, причому зв'язки з лініями каналних символів є там, де в рядках транспонованої перевірної матриці розташований символ 1. У схемі аналізатора синдромів відповідно до даних табл. 5.1 відбувається перетворення векторів синдромів $S = (s_0, s_1, \dots, s_{n-k-1})$ у відповідні їм вектори помилки e , які потім подаються на суматори коректора помилок. У результаті додавання вектора прийнятих з каналу символів з відповідними їм векторами помилки e відбувається виправлення каналних помилок.

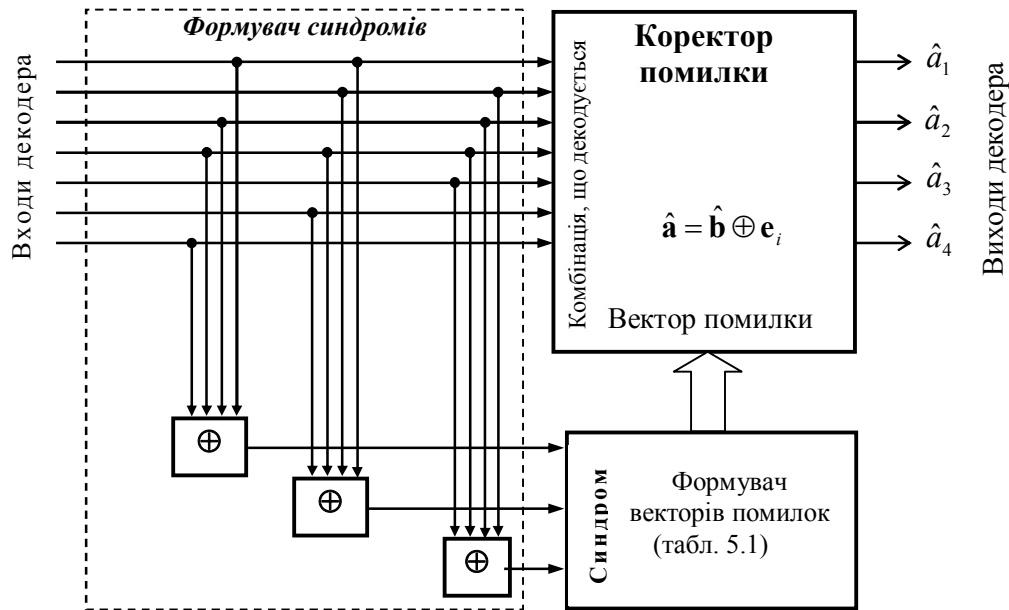


Рисунок 5.2 – Структура синдромного декодера коду (7, 4)

5.3. Мажоритарне декодування блокових кодів

Деякі блокові коди допускають реалізацію простого алгоритму декодування – алгоритму *мажоритарного декодування* (*majority* – більшість), що заснована на можливості виразити кожний інформаційний символ кодової комбінації декількома способами через інші прийняті символи. Для ілюстрації цього алгоритму розглянемо систематичний код (7, 3) з матрицею, що породжує:

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (5.13)$$

Цій матриці відповідають перевірні матриця

$$\mathbf{H} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5.14)$$

і транспонована перевірна матриця

$$\mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Позначимо прийняту з каналу кодову комбінацію як $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$.

Оскільки розглянутий код – систематичний, перші три символи (b_1, b_2, b_3) є *інформаційними*. Використовуючи структурні властивості цього коду, можна при декодуванні сформувавши як *тривіальні*, так і *складені оцінки інформаційних символів*, які представлені в табл. 5.2. На основі стовпців перевірної матриці (5.15) запишемо *перевірні співвідношення*:

$$b_1 \oplus b_3 \oplus b_4 = 0, b_1 \oplus b_2 \oplus b_3 \oplus b_5 = 0, b_1 \oplus b_2 \oplus b_6 = 0, b_2 \oplus b_3 \oplus b_7 = 0, \quad (5.16)$$

які дозволяють сформувавши *складені оцінки*.

Наприклад, на основі першої рівності з (5.16) маємо *складену оцінку* першого інформаційного символу $b_1 = b_3 \oplus b_4$. *Тривіальна оцінка* цього символу і є, власне, цей символ $b_1 = b_1$, оскільки код систематичний.

Таблиця 5.2 - Мажоритарне декодування блокового коду

Оцінки інформаційних символів		
Оцінки символу b_1	Оцінки символу b_2	Оцінки символу b_3
<i>Т р и в і а л ь н і</i>		
$b_1 = b_1$	$b_2 = b_2$	$b_3 = b_3$
<i>С к л а д е н і</i>		
$b_1 = b_3 \oplus b_4$	$b_2 = b_4 \oplus b_5$	$b_3 = b_5 \oplus b_6$
$b_1 = b_5 \oplus b_7$	$b_2 = b_6 \oplus b_1$	$b_3 = b_7 \oplus b_2$
$b_1 = b_2 \oplus b_6$	$b_2 = b_3 \oplus b_7$	$b_3 = b_4 \oplus b_1$

Вирази для інших інформаційних символів складені аналогічно. Вони представлені в цій же таблиці.

Після формування оцінок вони подаються на *мажоритарний елемент*, у якому рішення про кожний інформаційний символ виноситься «по більшості голосів». Приміром, якщо оцінки інформаційного символу b_1 мають вигляд:

$$b_1 = b_1 = 1, b_1 = b_3 \oplus b_4 = 1, b_1 = b_5 \oplus b_7 = 1, b_1 = b_2 \oplus b_6 = 0,$$

серед яких кількість оцінок «1» перевищує кількість оцінок «0», то мажоритарний елемент виносить рішення «по більшості»: $b_1 = 1$. Перераховані в табл. 5.2 складені оцінки називаються *ортогональними* перевірками, оскільки в них входять *незбіжні символи*. Число ортогональних перевірок N і кратність помилок

$q_{\text{випр}}$, що виправляються при мажоритарному декодуванні, перебувають у співвідношенні:

$$q_{\text{випр}} \leq (N - 1)/2. \quad (5.11)$$

Код з матрицею, що породжує, (5.14) дозволяє сформувати $N = 3$ ортогональні перевірки й, відповідно, *виправляти однократні помилки в інформаційних символах при значному спрощенні алгоритму декодування*. Необхідно відзначити, що правила формування перевірок можуть мати *циклічні властивості*, що спрощує процедуру декодування.

Приклад 5.4. Структура мажоритарного декодера систематичного коду (7, 3).

Сформуємо структуру мажоритарного декодера коду (7, 3) на основі системи перевірок з табл. 5.2. Неважко бачити, що перевірки мають *циклічні властивості*. Наприклад, індекси в складених перевірках $b_1 = b_3 \oplus b_4$, $b_2 = b_4 \oplus b_5$ і $b_3 = b_5 \oplus b_6$ змінюються на 1 убік зростання. З урахуванням цього структура декодера коду (7, 3), що реалізує мажоритарний алгоритм декодування, має вигляд, показаний на рис. 5.3.

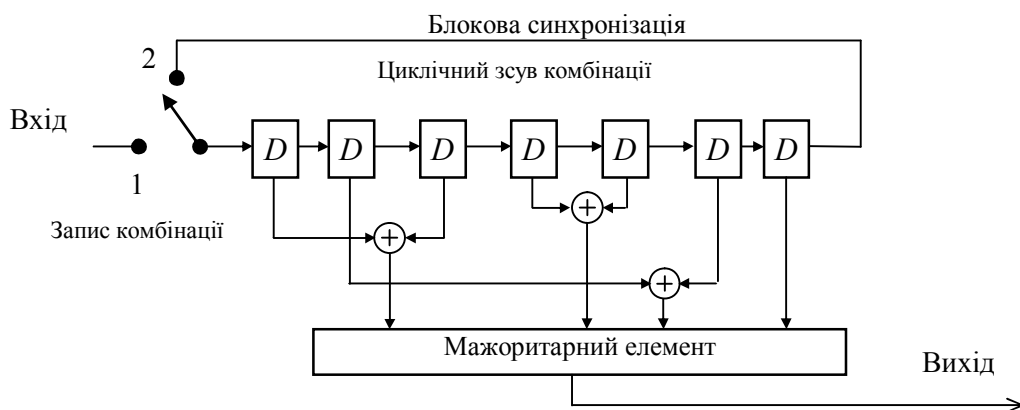


Рисунок 5.3 – Структура мажоритарного декодера коду (7, 3)

Декодер складається з регістра зсуву, комутатора на вході, керованого системою блокової синхронізації, схем формування перевірок і мажоритарного елемента.

Декодер працює в такий спосіб. Спочатку комутатор на вході встановлюється в положення «1» і кодова комбінація, що декодується $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7)$ уписується в комірки регістра зсуву. При цьому на входах мажоритарного елемента діють як тривіальні, так і складені перевірки, обумовлені табл. 5.2. Рішення про переданий інформаційний символ b_1 зчитується з виходу мажоритарного елемента. Потім комутатор установлюється в положення «2» і відбувається зсув комбінації на один символ. На цьому такті, у силу циклічних властивостей перевірок, формуються перевірки щодо другого інформаційного символу й рішення про інформаційний символ b_2 зчитується з виходу мажоритарного елемента. Далі процес повторюється аж до одержання на виході символу b_3 .

Контрольні питання

5.1. Який вид буде мати матриця двократних помилок. Як вона зміниться в порівнянні з матрицею однократних помилок (5.11)?

5.2. Як зв'язані параметри двійкового подання синдромів (див. табл. 5.11) із загальним числом варіантів можливих конфігурацій, що виявляються, й помилок, що виправляються, при синдромному декодуванні?

5.3. Як зміниться формат синдромів, якщо застосувати метод синдромного декодування для декодування двократних помилок?

5.4. Приведіть узагальнену структурну схему синдромного декодера блокового коду (n, k) . Яку функцію виконує аналізатор синдрому?

Завдання

5.1. За принципом, що викладений у прикладі 5.1, зобразіть структуру систематичного блокового коду, призначеного для виявлення двократних помилок з матрицею, що породжує, (4.6).

5.2. Задана матриця, що породжує код $(7, 4)$:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначте дозволену кодову комбінацію цього коду \mathbf{b} , якщо задано комбінацію первинного коду на вході кодера $\mathbf{a} = (1110)$.

5.3. Визначте кодову віддаль коду $(7, 4)$ з матрицею, що породжує, із завдання 5.2.

5.4. Зобразіть функціональну схему кодера коду $(7, 4)$ із цією матрицею, що породжує.

6. ГРАНИЦІ ПАРАМЕТРІВ БЛОКОВИХ КОДІВ

6.1. Верхня границя Хеммінга [2, розд.3.2]

6.2. Нижня границя Варшимова-Гілберта [2, розд.3.2]

6.3. Складність реалізації алгоритмів кодування й декодування.

6.1 Верхня границя Хеммінга

Одна із проблем теорії кодування полягає в пошуку кодів, які при заданій довжині блоку n і швидкості коду $R_{\text{код}}$ забезпечують максимум кодової віддалі d_{min} . Межі цих параметрів визначаються *кодовими границями*, які розглянуті нижче.

Виведення верхньої границі засноване на міркуваннях сферичного упакування (*границя сферичного упакування*). При заданій мінімальній віддалі між дозволеними комбінаціями коду d_{min} *найбільша швидкість* може бути досягнута, якщо сфери, що оточують кожну комбінацію, будуть *найбільш щільно* упа-

ковані. Об'єм кожної сфери дорівнює $\sum_{i=0}^{d_{\min}-1} C_n^i$, число сфер (число кодових комбінацій коду) дорівнює 2^k . Для кращого коду сумарна кількість сфер і число всіх можливих комбінацій (2^n) повинні збігатися. Рівність досягається для **щільноупакованих (досконалих)** кодів. Область кожної кодової комбінації являє собою сферу радіуса $(d_{\min} - 1)/2$, і ці області таких кодів, не перетинаючись, щільно заповнюють собою весь n -вимірний простір кодових комбінацій. Звідси випливає нерівність:

$$2^k \sum_{i=0}^{d_{\min}-1} C_n^i \leq 2^n.$$

Після нескладних перетворень можна одержати явний вираз для швидкості досконалого коду:

$$1 - R_{\text{код}} \geq \frac{1}{n} \log_2 \sum_{i=0}^{d_{\min}-1} C_n^i. \quad (6.1)$$

Графік *верхньої границі Хеммінга* для двійкових кодів показано на рис. 6.1 (крива ВГХ). Границя Хеммінга справедлива як для лінійних, так і для нелінійних кодів.

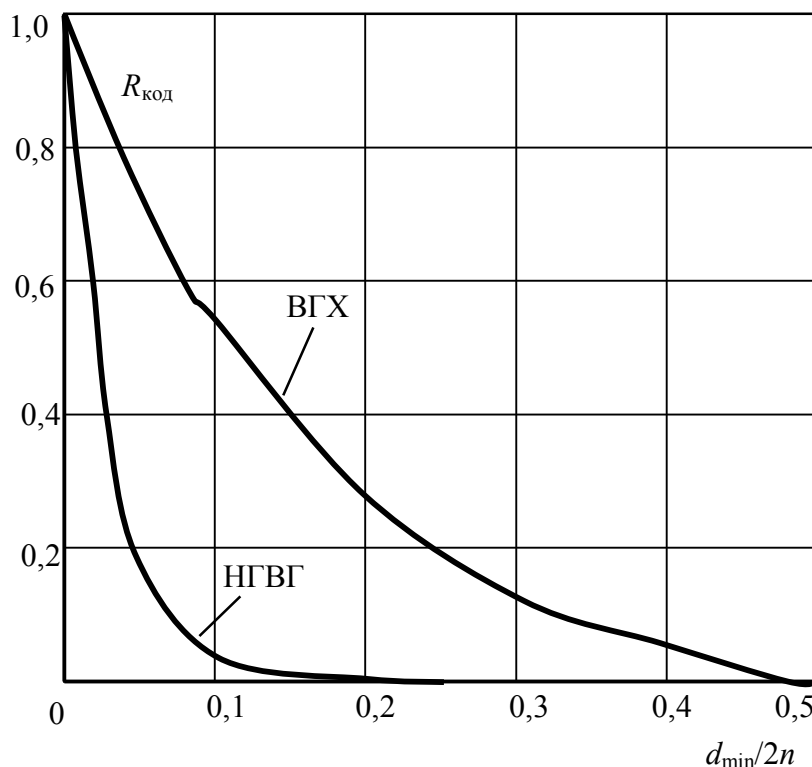


Рисунок 6.1 – Кодові границі блокових кодів

6.2. Нижня границя Варшамова-Гілберта

Для блокових кодів можна одержати нижню границю Варшамова-Гілберта, яка визначає **можливість існування кодів** з параметрами $R_{\text{код}}$ і d_{\min} . Асимптотична (для досить довгих кодів) форма цієї границі має вигляд:

$$R_{\text{код}} \geq 1 - H(d/n), \quad (6.2)$$

де $H(x)$ – двійкова ентропія. Графік *нижньої границі Варшамова-Гілберта* для двійкових кодів показано на рис. 6.1 (крива НГВГ). **Границя гарантує існування кодів**, характеристики яких відповідають точкам, розташованим принаймні на кривій (або вище її). Аналіз показує, що більшість використовуваних на практиці кодів кінцевої довжини розташовані вище границі Варшамова-Гілберта.

Пошук кодів, які забезпечують задану мінімальну віддаль d_{\min} і досить високу швидкість $R_{\text{код}}$ при $n \rightarrow \infty$, що забезпечують у той же час можливість реалізації алгоритмів декодування прийнятної складності, *є однією з важливих задач теорії кодування*.

6.3 Складність реалізації алгоритмів кодування й декодування

Ступінь використання коректувальної здатності коду залежить від алгоритму декодування. При *повнім декодуванні* використовують всі можливості виправляти помилки, що впливають із властивостей коду. Відповідно до фундаментальної теореми К. Шеннона **коректувальні коди**, використовувані для виправлення помилок каналу, повинні вибиратися *досить довгими*. Однак з ростом довжини кодової комбінації n зростає **складність реалізації процедур кодування й декодування**, що спричиняє *труднощі практичної реалізації кодів*. У прикладній теорії кодування поряд з оцінками коректувальної здатності кодів прийнято оцінювати **складність реалізації процедур кодування/декодування**, які можуть бути реалізовані програмними або апаратними засобами. При цьому аргументом функції складності повинна виступати довжина кодової комбінації n .

Складність кодування блокових кодів C_k з використанням матриці, що породжує (n, k) код розміром $n \cdot k = n^2(1 - R_{\text{код}})$ звичайно оцінюють величиною, пропорційною числу елементів матриці, що породжує,

$$C_k = n \cdot k = n^2(1 - R_{\text{код}}). \quad (6.3)$$

Алгоритми декодування виявляються складнішими. Серед них найбільш складним алгоритмом прийнято вважати **алгоритм повного перебору**, відповідно до якого декодер переборно зіставляє кодову комбінацію на вході декодера із множиною всіх можливих комбінацій і виносить рішення про передавання тієї з дозволених комбінацій, що виявляється на *мінімальній віддалі* від комбінації на вході декодера (**декодування по мінімуму віддалі**). **Складність алгоритму переборного декодування** прийнято вважати пропорційною кількості всіх можливих комбінацій коду (**об'єму повного перебору**):

$$C_{\text{д-експ}} = t^n. \quad (6.4)$$

Говорять, що складність переборного декодування зростає *«експоненціально»* з ростом довжини коду. Ясно, що **переборні алгоритми практично важко реалізувати для довгих кодів**. У зв'язку із цим у фахівців із прикладної теорії кодування існує жаргонний вираз *«проклин розмірності»*: будь-яка

спроба реалізувати декодування довгих кодів виявляється безуспішною через **катастрофічний ріст складності** програмної або апаратної реалізації алгоритму декодування. Тому *мірилом* реалізаційних можливостей алгоритмів декодування блокових кодів є зіставлення складності алгоритму з верхньою границею складності (6.4). Кращими вважаються коди з показником складності, **пропорційним малому степеню довжини коду**:

$$C_{\text{д-степ}} = n^k \quad (k - \text{мале}). \quad (6.5)$$

У таких випадках говорять, що алгоритм характеризується «**ступінною**» **складністю**.

Контрольні питання

6.1. Яке практичне значення використання нижньої границі Варшамова-Гілберта й верхньої границі Хеммінга для оцінки характеристик блокових коректувальних кодів?

6.2. До якої границі (верхньої чи нижньої) варто прагнути при розробці нових блокових кодів?

7. ВАЖЛИВІ КЛАСИ БЛОКОВИХ КОРЕКТУВАЛЬНИХ КОДІВ

7.1. Коди Хеммінга [1, розд. 10.2; 5, розд.5.2; 7, розд. 19.2]

7.2. Циклічні коди [1, розд. 10.3; 5, розд.5.4; 7, розд. 19.5]

Загальні відомості. Відома велика кількість кодів, різних за структурою, принципами побудови й коректувальною здатністю. У цьому розділі розглянуті класи блокових кодів, для яких розроблені досить прості й ефективні алгоритми декодування.

Багато блокових кодів мають *циклічні властивості*, що дозволяє використовувати при кодуванні й декодуванні регістри зсуву і спрощує побудову кодів, реалізуючи тим самим алгоритми декодування зі ступінною оцінкою складності (6.5). До *алгебраїчних* відносяться алгоритми декодування, робота яких заснована на використанні *алгебраїчних властивостей кодових комбінацій*. При цьому в демодуляторі виробляється **жорстке рішення** про прийняті сигнали й на вхід декодера надходять дискретні символи, алфавіт яких збігається з алфавітом символів на передачі. При **імовірнісному декодуванні** істотним є більш *повне використання інформації* з виходу каналу. У цьому випадку в демодуляторі виробляється **м'яке рішення***, що містить інформацію про *апостеріорні ймовірності прийнятих символів*. Можливі також і проміжні варіанти побудови алгоритмів. У прикладній теорії кодування відомий широкий набір коректувальних кодів, що розрізняються як способами кодування/декодування, так і коригувальними властивостями. Нижче розглянуті найбільш типові приклади.

7.1. Коди Хеммінга

Коди Хеммінга (*R. Hamming*) – систематичні блокові коди з параметрами:

* Пояснення роботи демодулятора при *жорсткому* і *м'якому* рішеннях наведені далі в розд. 10.1 і на рис. 10.1.

- довжина кодового блоку $n = 2^r - 1$;
- кількість інформаційних символів $k = 2^r - r - 1$;
- число додаткових символів $r = n - k$, $r = 2, 3, 4$;
- кодова віддаль $d_{\min} = 3$.

Коди Хеммінга – досконалі коди, що виправляють однократні помилки.

Вибором параметра $r = 2, 3, 4$ відповідно до формул (7.1) можна задати відомі двійкові коди Хеммінга. Наприклад, при $r = 3$ параметри коду Хеммінга (7, 4) будуть наступними:

- довжина коду $n = 7$;
- кількість інформаційних символів у кодовому блоці $k = 4$;
- кодова віддаль $d_{\min} = 3$;
- швидкість коду $R_{\text{код}} = (2^r - r - 1)/(2^r - 1) = 4/7$.

Перевірні матриця і матриця, що породжує цей код, були розглянуті раніше, у розд. 4.1 (формули (4.4) і (4.7)). Як було відзначено раніше, цей код дозволяє також виявляти двократні помилки. Структури кодера й синдромного декодера коду Хеммінга були розглянуті раніше в розд. 5.1 (рис. 5.1 і рис. 5.2). Відповідно до формули (5.3) транспонована перевірна матриця цього коду має вигляд:

$$\mathbf{H}^T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.2)$$

Із цієї формули видно, що розмір перевірної матриці коду Хеммінга дорівнює $kn = n^2(1 - R_{\text{код}})$. Це дозволяє зробити висновок, що складність алгоритму декодування коду Хеммінга оцінюється степінною функцією виду (6.5).

У теорії блокових кодів часто для знаходження нових кодів використовують процедури *модифікації матриць*, що породжують відомі коди. Однієї з таких процедур є *процедура вкорочення коду*. Зокрема, будь-який систематичний (n, k) код можна вкоротити, перейшовши до $(n - b, k - b)$ коду відкиданням b інформаційних символів у кожній дозволений комбінації на виході кодера (наприклад, відкиданням b старших розрядів). При такому вкороченні відкидаються символи, що замінюються нулями, які не передаються. Але при декодуванні декодер їх відновлює, так що декодування здійснюється на повній довжині коду. Якщо мінімальна віддаль вихідного коду дорівнює d_{\min}^* , то мінімальна віддаль укороченого коду буде не менша d_{\min}^* . Сказане ілюструється наступним прикладом.

Приклад 7.1. Укорочений код Хеммінга.

Розглянемо код (7, 4) з матрицею, що породжує,

$$\mathbf{G} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.8)$$

Швидкість такого коду дорівнює $R_{\text{код}} = 4/7$. Укоротимо код, вилучивши в цій матриці перший рядок ($b = 1$). Результатом такого вкорочення буде матриця:

$$\mathbf{G}^* = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (7.9)$$

Видно, що процедура вкорочення змінила швидкість коду: $R_{\text{код}}^* = 3/6$. При цьому мінімальні віддалі вихідного коду (7.8) і вкороченого коду (7.9) збігаються. До вкорочення іноді вдаються із метою змінити формат блокового коду (зменшити довжину блоку, наприклад), якщо це необхідно, щоб «вмонтувати» комбінації коректувального коду в потік символів у телекомунікаційній системі, або погодити формат даного блокового коду з форматом іншого коду.

7.2. Циклічні коди

Значна частина використовуваних на практиці блокових кодів відноситься до класу *циклічних кодів* (ЦК).

Це *спрощує процедури* кодування й декодування на *основі використання циклічних властивостей кодових комбінацій*.

Якщо $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ – дозволена кодова комбінація ЦК, то її *циклічний зсув* на довільне число символів також є *дозволеною кодовою комбінацією*. Наприклад, слово $\mathbf{b}^{(1)} = (b_n, b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$ відповідає циклічному зсуву комбінації $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n)$ на один символ вправо. При цьому, відповідно до правила циклічної перестановки, символи комбінації \mathbf{b} зміщуються на один символ вправо, а крайній правий символ b_n займає місце крайнього лівого символу b_0 . Властивості ЦК зручно вивчати, представляючи кодові слова у вигляді *багаточленів по степенях формальної змінної x* , коефіцієнтами яких є символи кодової комбінації: $\mathbf{b}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$. Математичні операції (додавання, множення й ділення багаточленів) виконують за правилами алгебри багаточленів, викладеними у розд. 5 посібника [3]. Якщо додавання й множення багаточленів виконується за модулем багаточлена $(x^n - 1)$, то всі можливі багаточлени степеня $(n - 1)$ і менше утворюють *алгебраїчне кільце* багаточленів R_n* із властивостями, викладеними там же.

* Визначення алгебраїчного кільця дано в посібнику [3, розд. 2.2].

Для **побудови циклічного коду** в кільці R_n вибирають підмножину багаточленів – **ідеал I** . Багаточлен мінімального степеня $g(x)$ у цій підмножині називається **багаточленом, що породжує ЦК**. У якості багаточленів, що породжують ЦК, вибирають **багаточлени, що не приводяться^{**}**.

В алгебрі багаточленів цілого степеня **багаточлени, що не приводяться**, грають таку ж роль, яку прості числа грають в алгебрі цілих чисел. Докладна таблиця багаточленів, що породжують циклічні коди, наведена в додатку А.1. Багаточлени, що породжують короткі циклічні коди, наведені в табл. 7.1.

Таблиця 7.1 – Багаточлени, що породжують короткі циклічні коди

Максимальний степінь багаточлена, що породжує	Багаточлен $g(x)$, що породжує код		
3	x^3+x^2+1	x^3+x+1	
4	x^4+x+1	x^4+x^3+1	
5	x^5+x^2+1	x^5+x^3+1	$x^5+x^4+x^2+1$
6	x^6+x+1	x^6+x^5+1	$x^6+x^5+x^3+x^2+1$

Всі багаточлени **ідеалу I** , що відповідають дозволеним кодовим комбінаціям ЦК, діляться на багаточлен $g(x)$, що **породжує**, без остачі, що дозволяє сформулювати наступне правило кодування:

Правило кодування несистематичного ЦК має вигляд:

$$b(x) = a(x) \cdot g(x). \quad (7.3)$$

На практиці часто використовують систематичні циклічні коди. **Правило кодування систематичного циклічного (n, k) коду** має вигляд:

$$b(x) = a(x) \cdot x^{n-k} + r(x), \quad (7.4)$$

де $r(x)$ – остача від ділення $a(x) \cdot x^{n-k}$ на $g(x)$.

Правило кодування (7.4) може бути реалізовано таким **алгоритмом** кодування **систематичним циклічним кодом**:

1. До комбінації первинного коду **a** дописується праворуч $(n - k)$ нулів, що еквівалентно множенню багаточлена $a(x)$ на x^{n-k} .

2. Добуток $a(x) \cdot x^{n-k}$ ділиться на багаточлен $g(x)$, що **породжує**, у результаті ділення визначається **остача $r(x)$** .

3. Обчислена остача складається зі зміщеною комбінацією $a(x) \cdot x^{n-k}$, у результаті чого формується **дозволена кодова комбінація**:

$$b(x) = a(x) \cdot x^{n-k} + r(x). \quad (7.5)$$

Приклад 7.2 Формування кодової комбінації ЦК (10, 5).

Для заданої первинної кодової комбінації $a = (10110)$ сформуємо кодову комбінацію циклічного коду (10, 5). Багаточленне подання заданої комбінації буде: $a(x) = x^4 + x^2 + x$.

^{**} Визначення багаточленів, що не приводяться, наведено в посібнику [3, с. 30].

У заданого ЦК параметри $n = 10, k = 5, r = (n - k) = 5$. З табл. 7.1 вибираємо багаточлен, що породжує, наприклад, $g(x) = x^5 + x^4 + x^2 + 1$. Виконаємо математичні операції відповідно до алгоритму (7.5):

$$1) a(x) x^{n-k} = (x^4 + x^2 + x) \cdot x^5 = x^9 + x^7 + x^6;$$

$$2) a(x) x^{n-k} / g(x)$$

$$\begin{array}{r} \oplus \quad \begin{array}{l} x^9 + x^7 + x^6 \\ x^9 + x^8 + x^6 + x^4 \\ \hline x^8 + x^7 + x^4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^5 + x^4 + x^2 + 1 \\ x^4 + x^3 + 1 \\ \hline \end{array} \\ \oplus \quad \begin{array}{l} x^8 + x^7 + x^4 \\ x^8 + x^7 + x^5 + x^3 \\ \hline x^5 + x^4 + x^3 \end{array} \\ \oplus \quad \begin{array}{l} x^5 + x^4 + x^3 \\ x^5 + x^4 + x^2 + 1 \\ \hline x^3 + x^2 + 1 = r(x) \end{array} \end{array}$$

3) Багаточлен дозволеної кодової комбінації

$$b(x) = a(x) x^{n-k} \oplus r(x) = x^9 + x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + 1.$$

Багаточлену $b(x) = x^9 + x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + 1$ відповідає комбінація двійкових символів $\mathbf{b} = (1011001101)$, у якій перші чотири символи є *інформаційними*, а інші – *додатковими*.

Властивість подільності дозволених кодових комбінацій циклічних кодів на багаточлен, що породжує, *широко використовується для виявлення помилок у телекомунікаційних системах, у яких передбачене виправлення помилок некодовими методами (системи зі зворотним зв'язком, наприклад).*

Якщо $\hat{b}(x) = b(x) \oplus e(x)$ – прийнята кодова комбінація на вході декодера, що містить багаточлен помилок $e(x) = e_0 + e_1x + \dots + e_nx^n$, то в результаті ділення отримаємо:

$$\hat{b}(x)/g(x) = q(x) + s(x)/g(x). \quad (7.6)$$

Тут: $q(x)$ – багаточлен, що відображає ціле від ділення, $s(x)$ – *багаточлен синдрому*, дорівнює *остачі від ділення* $\hat{b}(x)$ на $g(x)$. Він має степінь не вищу $(n - k - 1)$.

За *відсутності помилок* синдром $s(x) = 0$. По виду ненульового синдрому можна встановити місце розташування помилок у кодовій комбінації на вході декодера й використати цю інформацію для *декодування з виправленням помилок*.

Приклад 7.3. Синдромне декодування комбінацій циклічного коду (7, 4).

Задано кодову комбінацію двійкового первинного коду $\mathbf{a} = (1010)$, що підлягає передаванню по каналу з помилками. Виберемо циклічний код, що забезпечує безпомилкове передавання цієї комбінації в умовах однократних помилок. По табл. А.1 додатка А визначаємо, що поставлену задачу можна вирі-

шити при використанні ЦК із багаточленом, що породжує, $g(x) = (x^3 + x^2 + 1)$ і параметрами $n = 7$, $k = 4$, $q_{\text{випр}} = 1$. Покажемо, як реалізується **метод синдромного декодування** для виправлення однократних помилок.

Використовуючи алгоритм кодування (7.5), сформуємо дозволу комбінацію обраного ЦК: $b(x) = x^6 + x^4 + 1$. Припустимо, що в каналі діє однократна помилка $e(x) = x^6$. У цьому випадку комбінація на вході декодера має вигляд $\hat{b}(x) = b(x) \oplus e(x) = x^4 + 1$. Використовуємо правило знаходження синдрому (7.6). При синдромному декодуванні по виду синдрому можна встановити місце розташування помилки (тобто виконати *синдромне декодування*). Для цього необхідно скласти **таблицю синдромів** і відповідних їм багаточленів помилок. Для складання такої таблиці необхідно скористатися рівністю, що випливає з (7.6) при $q(x) = 0$:

$$s(x) = e(x)/g(x) \quad (7.7)$$

У табл.7.2 представлені результати обчислень по цій формулі багаточленів синдрому $s(x)$ для різних багаточленів помилок. З метою наочності значення синдромів представлені у вигляді двійкових комбінацій.

Таблиця 7.2 – Відповідність між синдромами й багаточленами помилок

Багаточлен помилки $e(x)$	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x	1
Синдром $s(x)$	$x^2 + x$	$x + 1$	$x^2 + x + 1$	$x^2 + 1$	x^4	x^2	1
Двійкове подання синдрому s	110	011	111	101	100	010	001

Нехай багаточлен прийнятої з каналу комбінації має вигляд $\hat{b}(x) = x^4 + 1$. Виконаємо операцію ділення $\hat{b}(x)/g(x)$:

$$\begin{array}{r}
 \oplus \begin{array}{l} x^4 + 1 \\ x^4 + x^3 + x \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \\ x + 1 \end{array} \right. \\
 \hline
 x^3 + x + 1 \\
 \oplus \begin{array}{l} x^3 + x^2 + 1 \end{array} \\
 \hline
 x^2 + x = s(x) - \text{синдром}
 \end{array}$$

По табл. 7.2 знаходимо, що такому синдрому відповідає багаточлен помилки $e(x) = x^6$. *Виправлення помилки* полягає в додаванні кодової комбінації на вході декодера з багаточленом помилки $\hat{b}(x) \oplus e(x) = x^4 + 1 + x^6 = x^6 + x^4 + 1$, що збігається з переданою дозволеною комбінацією $b(x) = x^6 + x^4 + 1$. Цьому відповідає двійкова комбінація $\mathbf{b} = (1010101)$, у якій перші чотири символи є *безпомилково передані* символи первинного коду $\mathbf{a} = (1010)$ (оскільки використовуваний ЦК – *систематичний*).

На практиці знаходять застосування коди із циклічними властивостями*:

* Детальні відомості про ці коди можна знайти в монографії [4].

**Класифікація алгебраїчних полів дана в розд.2.3.3 посібника [3].

1. **Код Голя** (Goley) (23, 12) – досконалий циклічний код з багаточленом, що породжує, $g(x) = x^{11} + x^{10} + x^6 + x^5 + x^4 + x^2 + 1$ і кодовою віддаллю $d_{\min} = 7$.

2. **Розширений код Голя** (24, 12) з кодовою віддаллю $d_{\min} = 8$ одержують при добавлянні загальної перевірки на парність.

3. **Коди Боуза-Чоудхурі-Хоквінгема (БЧХ)** (Bose, Ray-Chaudhuri, Hocchuenghem), які утворюють великий клас ЦК. Двійкові коди БЧХ мають параметри: $n = 2^m - 1$, $(n - k) \leq m \cdot t$, $d_{\min} = 2t + 1$, де m ($m \geq 3$) і t – довільні позитивні цілі числа. Теоретичні відомості про коди БЧХ наведені в розд. 10.4 підручника [1].

4. **Коди Ріда-Соломона (РС)** (Reed-Solomon) – підклас недвійкових кодів БЧХ із параметрами: символи коду вибираються з поля $GF(q)$, $q = 2^m$, m – ціле, довжина блоку (число q -їчних символів) $N = (q - 1)$, кількість інформаційних символів $k = (N - 2q_{\text{випр}})$, кодова віддаль $d_{\min} = (2q_{\text{исп}} + 1)$. Можливо також розширення коду до $N = q$ або до $N = (q + 1)$. Алгебраїчна структура коду РС описується з використанням арифметики поля Галуа $GF(2^m)$. При фіксованій швидкості коду й довжині блоку коди РС забезпечують *найбільшу мінімальну віддаль* між комбінаціями. Їх зручно використовувати для виправлення пакетів помилок, а також у каскадних системах кодування як зовнішні коди.

Ефективне використання циклічних властивостей дозволених комбінацій циклічних кодів дозволяє реалізувати досить прості алгоритми декодування ЦК. Уважається, що *складність реалізації алгоритмів декодування циклічних кодів описується степінною функцією* $C_d = n^k$, де k – мале число, величина якого залежить від конкретної реалізації алгоритму. Нижче наведені приклади реалізації алгоритмів кодування й декодування ЦК. При цьому широко використовується математичний апарат алгебри степінних багаточленів і описи багатотактних лінійних фільтрів, які представлені в розд. 5 і 6 рекомендованого навчального посібника [3].

Приклад 7.4. Структура кодера систематичного ЦК.

Використовуючи алгоритм кодування систематичним ЦК (7.5), сформуємо структурну схему кодера циклічного коду (15, 11) з багаточленом, що породжує, $g(x) = x^4 + x + 1$, вибраний з табл. 7.1. Схема систематичного кодера наведена на рис. 7.1.

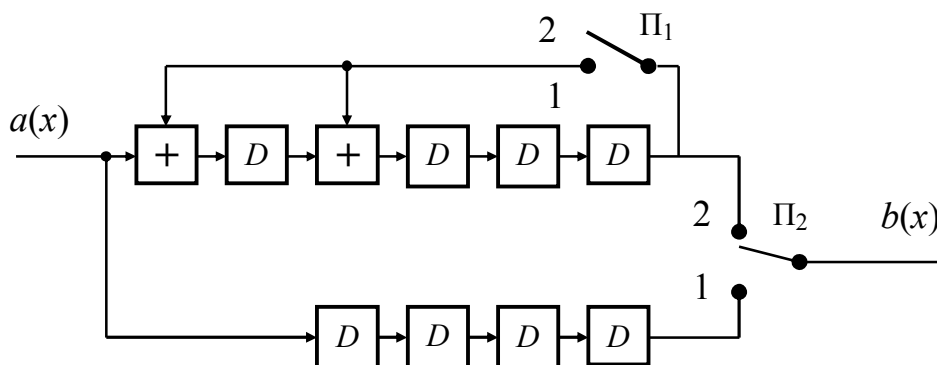


Рисунок 7.1 – Схема кодера систематичного ЦК, (+) – суматор за модулем 2

Відповідно до алгоритму (7.5) кодер працює в такий спосіб. Спочатку перемикачі П1 і П2 перебувають у положенні 1. Одинадцять інформаційних символів комбінації $a(x)$, що кодується, вводяться ліворуч у ланцюг ділення на багаточлен $g(x) = x^4 + x + 1$. Одночасно вони через послідовно з'єднані елементи затримки надходять на вихід кодера, створюючи інформаційну частину дозволеної кодової комбінації $a(x) \cdot x^{n-k}$. За перші чотири такти в комірках регістра зсуву схеми дільника на багаточлен, що породжує, *утворюється остача від ділення* $r(x)$.

Потім перемикачі П1 і П2 встановлюються в положення 2, процес ділення припиняється, і остача зчитується з виходу дільника й дописується в перевірну частину вихідної кодової комбінації $b(x) = a(x) \cdot x^{n-k} + r(x)$.

Приклад 7.5. Структура кодера несистематичного ЦК.

Використовуючи правило кодування (7.3) несистематичного ЦК сформуємо структурну схему кодера з багаточленом, що *породжує*, $g(x) = x^4 + x + 1$.

Правило кодування (7.3) передбачає *перемножування багаточленів* $a(x)$ і $g(x)$. Використовуючи структуру перемножувача багаточленів з розд. П.6.1 навчального посібника [3], схему кодера представимо на рис. 7.2.

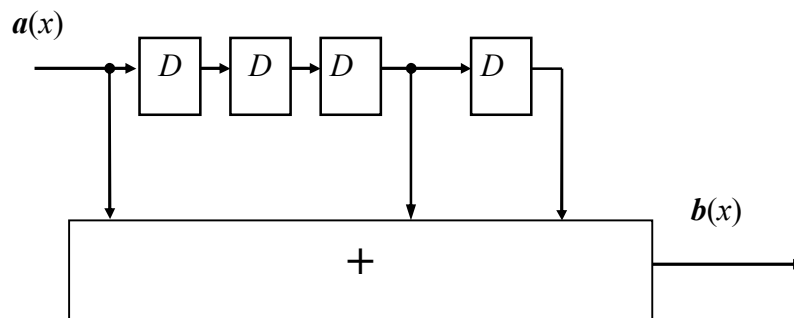


Рисунок 7.2 – Схема кодера несистематичного ЦК з породжуючим многочленом $g(x) = x^4 + x + 1$; (+) – суматор по модулю 2

Неодмінним елементом схем кодерів і декодерів циклічних кодів є *схема ділення багаточлена на багаточлен* для обчислення остачі від ділення при кодуванні систематичним кодом за алгоритмом (7.5), а також для обчислення синдрому при синдромному декодуванні за алгоритмом (7.6). Структура таких схем дільників розглянута в розд. П.6.1 навчального посібника [3].

Контрольні питання

- 7.1. Приведіть основні параметри коду Хеммінга.
- 7.2. У чому полягають переваги циклічних кодів?
- 7.3. Чи можна використовувати коди Хеммінга й циклічні коди для виправлення однократних помилок? Якими будуть параметри цих кодів?

Завдання

- 7.1. Задана матриця, що породжує код (7, 4):

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначте дозволена кодову комбінацію цього коду \mathbf{b} , якщо задано комбінацію простого коду на вході кодера $\mathbf{a} = (1110)$.

7.2. Який вид має перевірна матриця коду з матрицею, що породжує, із завдання 7.1?

7.3. Задана перевірна матриця коду (7, 4)

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & \cdot & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \cdot & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведіть функціональну схему декодера цього коду.

7.4. Розгляньте приклад формування дозвільної кодової комбінації, якщо комбінація простого коду $\mathbf{a} = (10010)$.

7.5. За аналогією із прикладом з розд. 7.1 складіть таблицю параметрів кодів Хеммінга для значень $r = 2, 3, 4$. Оскільки ці коди мають однакову кодову віддачу, порівняйте їх по ступеню придатності для реалізації в практичних системах. Сформулюйте рекомендацію й обґрунтування застосування кращого (на вашу думку) коду із цього переліку.

7.6. Для коду Хеммінга, рекомендованого в попередньому розділі, сформулюйте матрицю, що породжує, й перевірну матрицю.

7.7. За правилами, викладеним у вправі 4.1, визначте значення кодової віддачі по матриці, що породжує код Хеммінга із завдання 7.5.

8. ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ ДЕКОДУВАННЯ БЛОКОВИХ КОДІВ

8.1. Завадостійкість декодування блокових кодів [1, розд. 10.7; 7, розд. 19.6].

8.2. Енергетичний виграш кодування.

8.1. Завадостійкість декодування блокових кодів

Визначимо ймовірність помилки при декодуванні блокових кодів у двійковому симетричному каналі. Розглянемо кодування блоковим кодом (n, k) з кодовою віддаллю d_{\min} . У такому каналі *помилки* в послідовно переданих кодових символах (сигналах) відбуваються *незалежно* з ймовірністю p (*дискретний канал без пам'яті*). Тоді ймовірність того, що на довжині блоку n відбудеться q помилок, дорівнює

$$P(q) = C_n^q p^q (1-p)^{n-q}.$$

Тут C_n^q – число сполучень із n елементів по q . Якщо код виправляє всі помилки кратності $q_{\text{випр}} = (d_{\min} - 1)/2$ (d_{\min} – непарна) і менш, то ймовірність одержання на виході декодера блоку з невиправленими помилками визначається

$$P_{\text{п.д.}} \leq \sum_{q=q_{\text{випр}}+1}^n P(q).$$

Отже, імовірність помилкового декодування блоку буде визначатись:

$$P_{\text{п.д.}} \leq \sum_{q=q_{\text{випр}}+1}^n C_n^q p^q (1-p)^{n-q}. \quad (8.1)$$

У цьому виразі рівність має місце, якщо використовується *досконалий код*. Співвідношення між параметрами n , k і $q_{\text{випр}}$ визначаються конкретним обраним кодом. Вираз (8.1) дозволяє визначити верхню оцінку ймовірності помилки декодування блоку при використанні блокових кодів у двійковому симетричному каналі без пам'яті. Для розрахунку ймовірності помилки в кожному інформаційному (або додатковому) символі необхідно знати *використовуваний алгоритм декодування й структуру коректувального коду*, зокрема, набір віддалей від переданої кодової комбінації до всіх дозволених комбінацій. Такі дані в таблицях блокових кодів не публікуються й для розрахунків ймовірності помилкового декодування кодових символів (інформаційних або додаткових) використовують наближену формулу [11]:

$$p_{\text{д}} = \frac{d_{\text{min}}}{n} \sum_{q=q_{\text{випр}}+1}^n C_n^q p^q (1-p)^{n-q}. \quad (8.2)$$

Для каналів з когерентним прийманням сигналів двійкової фазової модуляції (ФМ-2) імовірність помилки сигналу визначається формулою:

$$p = Q(\sqrt{2}h_s), \quad (8.3)$$

де $h_s^2 = E_s/N_0$ – відношення енергії двійкового сигналу E_s до спектральної густини потужності шуму N_0 на вході демодулятора;

$$Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad \text{— гауссова } Q\text{-функція (інтеграл імовірності),}$$

таблиці значень якої містять довідники по теорії ймовірностей і статистичних розрахунках. Для практичних розрахунків зручно користуватися досить точною апроксимацією:

$$Q(z) = 0,65 \exp[-0,44(z + 0,75)^2]. \quad (8.4)$$

Введення надмірності при використанні коректувального кодування приводить до розширення смуги частот, займаної сигналом. Так, якщо смуга частот у системі без кодування становила ΔF_s (Гц), то застосування коду зі швидкістю $R_{\text{код}} = k/n$ вимагає розширення смуги частот до величини:

$$F_{\text{код}} = \Delta F_s / R_{\text{код}}, \quad (8.5)$$

тобто відбувається розширення смуги частот у $K_F = n/k$ раз. Для кодів з низькою швидкістю ($n/k \gg 1$) таке розширення може виявитися відчутним. Тому

задача вибору коду при проектуванні телекомунікаційної системи полягає в пошуку *компромісу* між *бажаними* ступенем підвищення завадостійкості й *неминучим* розширенням смуги частот кодованого сигналу.

Аналіз результатів розрахунків імовірності помилки декодування за формулами (8.2) і (8.3) з урахуванням розширення смуги частот кодованого сигналу відповідно до формули (8.4) дозволяють зробити наступні *висновки про ефективність застосування завадостійкого кодування*:

1. З ростом довжини кодової комбінації n імовірність помилки декодування p_d знижується.

2. *Коди з великою надмірністю* (малою швидкістю коду $R_{\text{код}}$) *забезпечують значне зниження ймовірності помилки декодування*.

3. При використанні коректувальних кодів у телекомунікаційних системах *платою за підвищення завадостійкості є розширення смуги частот* переданого сигналу, обумовлене надмірністю, що вводиться при кодуванні, в

$$K_F = n/k \text{ раз.} \quad (8.6)$$

8.2. Енергетичний виграш кодування

Важливим для практики є питання про *доцільність застосування коректувальних кодів* для підвищення завадостійкості передавання інформації каналами телекомунікаційних систем. Це питання вирішується з урахуванням наступного.

Введення надмірності при кодуванні змінює не тільки витрати смуги частот на передавання кодованих сигналів, але також вимагає урахування надмірності при виконанні енергетичних розрахунків. Дійсно, відповідно до формули (8.3) імовірність помилки каналних сигналів (кодових символів) визначається їхньою енергією E_s , що, з урахуванням надмірності коду, виявляється трохи менше енергії E_6 , затрачуваної на передавання одного інформаційного символу (біта). Це впливає з рівності $kE_6 = nE_s$, тобто $E_s = E_6 R_{\text{код}}$. Тому у всіх енергетичних розрахунках систем з кодуванням використовують, як правило, величину відношення енергії сигналу, затрачуваної на передавання одного інформаційного двійкового символу (біта) до спектральної густини потужності шуму E_6/N_0 . Імовірність помилкового декодування блоку визначається формулами (8.1) і (8.2), у яких в аргумент функції $Q(z)$ входить величина E_s – енергія сигналу, затрачувана на передавання каналом одного кодового символу. При кодуванні зі швидкістю $R_{\text{код}} = k/n$ енергія сигналу може бути представлена так: $E_s = E_6 R_{\text{код}}$, де E_6 – енергія сигналу, затрачувана на передавання одного двійкового інформаційного символу (біта). Тоді використовуване в енергетичних розрахунках систем з кодуванням відношення енергії E_6 до спектральної густини потужності шуму N_0 можна позначити як $h_6^2 = E_6/N_0$. З урахуванням взаємозв'язку енергії сигналу E_s і енергії E_6 величина, що входить у розрахункову формулу (8.3), буде $h^2 = R_{\text{код}} h_6^2$.

Тоді з урахуванням витрат енергії на передавання додаткових символів надлишкового коду формулу (8.3) можна представити так:

$$p = Q(\sqrt{2R_{\text{код}}}h_6), \quad (8.7)$$

на основі чого ймовірність помилкового декодування біта оцінюється виразом:

$$p_{\text{д}} = \frac{d_{\text{мін}}}{n} \sum_{q=q_{\text{випр}}+1}^n C_n^q p^q (1-p)^{n-q}, \quad (8.8)$$

у якому ймовірність помилки канального сигналу визначається формулою (8.7). При необхідності визначити ймовірність помилки в каналі без кодування досить скористатися формулою (8.7), поклавши $R_{\text{код}} = 1$:

$$p = Q(\sqrt{2}h_6). \quad (8.9)$$

Вправа 8.1. Завадостійкість декодування блокового коду.

Скористаємося формулою (8.9) для розрахунків імовірності помилки оптимального приймання сигналів ФМ-2 у каналі без кодування. Результати розрахунків наведені в табл. 8.1. Вихідним параметром для розрахунків є відношення сигнал/шум на вході демодулятора $h_6^2 = E_6/N_0$. Зв'язок між використуваною на практиці величиною $h_{6\text{дБ}}^2$ визначається формулою $h_{6\text{дБ}}^2 = 10 \lg h_6^2$. У табл. 8.1 зведені розрахункові дані по визначенню ймовірності помилки оптимального приймання сигналу ФМ-2 (8.8), у тому числі аргумент z функції $Q(z)$.

Таблиця 8.1 – Розрахунок завадостійкості приймання сигналу ФМ-2

h_6^2 , дБ	h_6	$R_{\text{код}}$	z	p
1	1,122	1	1,587	$5,8 \cdot 10^{-2}$
2	1,259	1	1,178	$3,9 \cdot 10^{-2}$
3	1,413	1	1,998	$2,4 \cdot 10^{-2}$
4	1,585	1	2,241	$1,3 \cdot 10^{-2}$
5	1,778	1	2,515	$6,1 \cdot 10^{-3}$
6	1,995	1	2,822	$2,4 \cdot 10^{-3}$
7	2,512	1	3,166	$7,9 \cdot 10^{-4}$
8	2,818	1	3,986	$2,0 \cdot 10^{-4}$
10	3,162	1	4,472	$4,2 \cdot 10^{-6}$

Крива залежності $p = f(h_6^2)$, яка побудована за цими даними (ФМ-2), наведена на рис. 8.1. За формулами (8.7), (8.8) визначимо ймовірність помилки біта при декодуванні в каналі із ФМ-2 комбінацій циклічного коду (31, 26) з параметрами $R_{\text{код}} = 0,84$, $q_{\text{випр}} = 1$. Код обрано з табл. А.1 додатка А.1.

Результати розрахунків представлені на рис. 8.1 (крива ЦК).

У всіх енергетичних розрахунках систем з кодуванням використовують, як правило, величину відношення енергії сигналу, затрачуваної на передавання одного інформаційного двійкового символу (біта), до спектральної густини потужності шуму $h_6^2 = E_6/N_0$, що вважається єдиним мірилом енергетичних витрат на передавання інформації каналом з кодуванням і без нього.

По зміні необхідної величини h_6^2 судять про **ефективність застосування коректувального коду**.

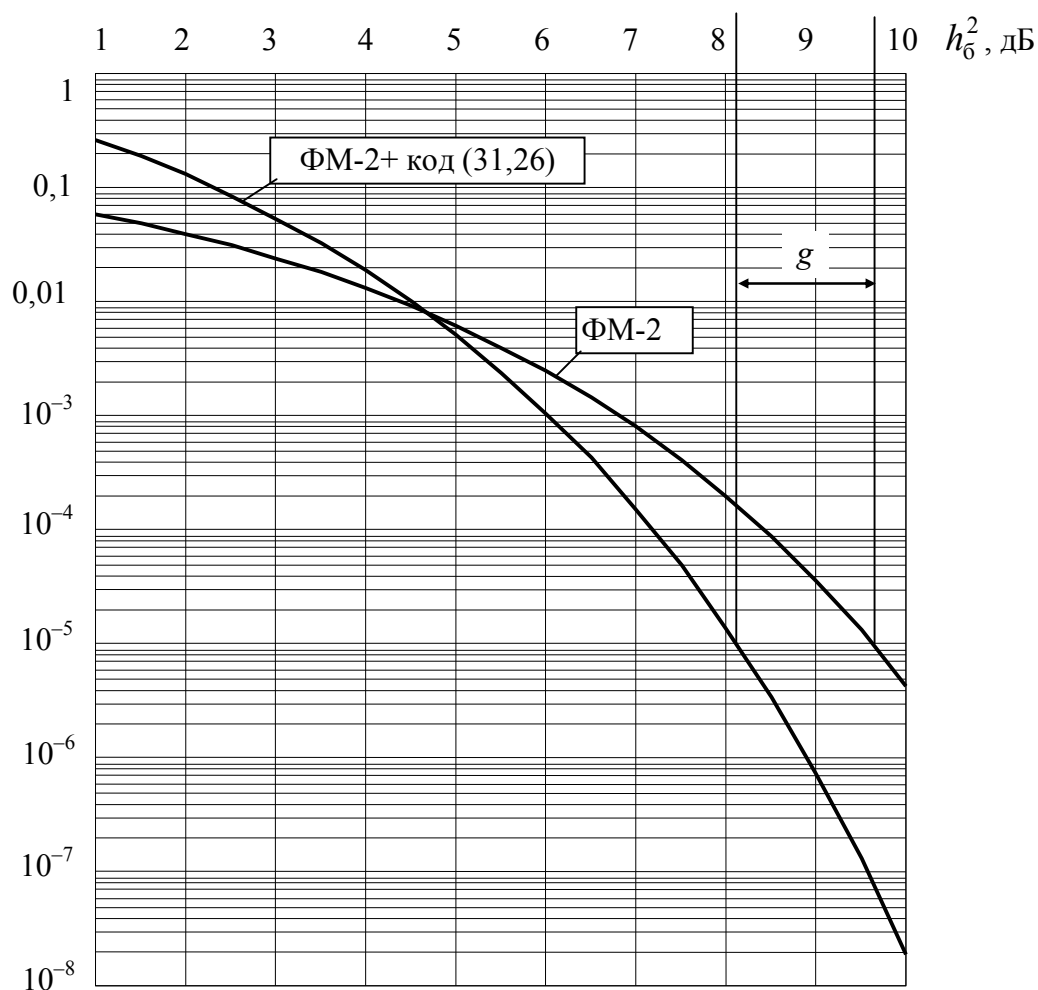


Рисунок 8.1 – Завадостійкість декодування ЦК

Таблиця 8.2 – Розрахунок завадостійкості декодування ЦК

Метод модуляції ФМ-2, циклічний код (31, 26)					
h_0^2 , дБ	h_0	$R_{\text{код}}$	z	C_{31}^2	p_d
1	1,122	0,84	1,454	465	0,26
2	1,259	0,84	1,632	465	0,13
3	1,413	0,84	1,831	465	$5,4 \cdot 10^{-2}$
4	2,585	0,84	2,054	465	$1,9 \cdot 10^{-2}$
5	1,778	0,84	3,305	465	$5,1 \cdot 10^{-3}$
6	1,995	0,84	2,586	465	$1,0 \cdot 10^{-3}$
7	2,239	0,84	2,902	465	$1,5 \cdot 10^{-4}$
8	2,512	0,84	3,562	465	$1,4 \cdot 10^{-5}$
9	2,818	0,84	3,653	465	$7,2 \cdot 10^{-7}$
10	3,162	0,84	4,099	465	$1,9 \cdot 10^{-8}$

Ефектом зниження помилок на виході декодера можна розпорядитися по-різному. Завадостійке кодування забезпечує зменшення ймовірності помилок у прийнятих повідомленнях. Це добре видно з порівняння кривих $p = f(E_0/N_0)$ на рис. 8.1 для випадків передавання інформації методом некодованої ФМ-2 і з застосуванням циклічного коду (31, 26) (крива ФМ-2+код (31, 26)). Видно, що при використанні завадостійкого коду можна допустити певне зниження відносини сигнал/шум у каналі й одержати, відповідно, енергетичний виграш g (дБ).

Величина виграшу може бути визначена на різних рівнях імовірності помилки біта p на виходах демодулятора й декодера. Сказане ілюструється кривими завадостійкості, представленими на рис. 8.1. Застосування кодування приводить до підвищення завадостійкості (зниженню ймовірності помилки декодування). Видно, що крива ЦК імовірності помилки декодування розташовується *нижче* кривої (ФМ-2) для випадку передавання без кодування.

Енергетичний виграш від застосування кодування (ЕВК) g дорівнює різниці значень E_b/N_0 , необхідних для забезпечення заданої ймовірності помилки в зраджуваних даних при відсутності й при використанні кодування.

Зокрема, для даних, наведених на рис. 8.1, значення ЕВК $g = 1,55$ дБ ($p = 10^{-5}$).

Величина ЕВК g широко використовується для вибору кодів при проектуванні телекомунікаційних систем. Значення ЕВК, одержувані при використанні циклічних кодів у каналах із ФМ-2, наведені в табл. А.2 додатка А.1.

Приклад 8.1. Оптимізація параметрів циклічного коду.

Розглянемо процедуру оптимізації параметрів ЦК, використовуваного у двійковому симетричному каналі з сигналами ФМ-2 з метою одержання максимального енергетичного виграшу від кодування за умови, що коефіцієнт розширення спектра сигналу не буде перевищувати $K_F = 2$ (подвійне розширення ширини спектра сигналу в каналі). Попередньо, з табл. А.2 додатка А.1 зробимо відбір циклічних кодів, які можуть задовольнити вимогам за коефіцієнтом розширення спектра ($K_F < 2$, $R_{\text{код}} > 0,5$). Результати такого вибору зведені в табл. 8.3. У стовпцях таблиці зазначені значення швидкості коду, а в комірках по рядках представлені значення ЕВК (у дБ) для різних довжин кодового блоку n . З табл. А.1 додатка А.1 вибираємо ЦК із довжиною блоку $n \leq 255$ і швидкістю $R_{\text{код}} \geq 0,5$. У табл. 8.3 наведені значення ЕВК при використанні ЦК із різними швидкостями $R_{\text{код}}$ і довжинами блоку n .

Таблиця 8.3 – Параметри ЦК, що задовольняють вимогам по швидкості

Довжина блоку n	Швидкість коду $R_{\text{код}}$			
	0,5	0,6	0,7	0,8
63	2,7	2,8	2,7	2,1
127	3,4	3,5	3,3	2,8
255	3,9	4,0	3,8	3,3

Видно, що найбільше значення ЕВК = 4,0 дБ досягається при використанні досить довгого ЦК із довжиною блоку $n = 255$. Обраний код (255, 155) забезпечує енергетичний виграш 4,0 дБ при швидкості коду $R_{\text{код}} = 0,6$ і коефіцієнті розширення смуги $K_F = 1,65$, що не перевищує задане значення $K_{F(\text{макс})} = 2$.

Контрольні питання

8.1. Якими параметрами блокових коректувальних кодів визначається ймовірність помилки декодування у двійковому симетричному каналі?

8.2. Як визначається енергетичний виграш від застосування завадостійкого кодування?

8.3. Які причини розширення спектра сигналу при використанні кодування?

Завдання

8.1. За методикою, викладеною в прикладі 8.1, виберіть параметри й багаточлен, що породжує ЦК, який забезпечує мінімальне розширення смуги частот сигналу й енергетичний виграш $g > 3,0$ дБ.

8.2. За даними табл. А.2 додатка А.2 побудуйте сімейство залежностей енергетичного виграшу g від швидкості коду для різних довжин блоку ЦК. Зробіть висновки про вплив довжини блоку на величину ЕВК.

8.3. За даними табл. А.2 додатка А.2 побудуйте залежності необхідної швидкості коду від необхідного енергетичного виграшу g для різних довжин блоку ЦК. Зробіть висновки про вплив довжини блоку на співвідношення обміну між ЕВК і коефіцієнтом розширення спектра.

9. СТРУКТУРА Й ХАРАКТЕРИСТИКИ ЗГОРТКОВИХ КОДІВ

9.1. Методи опису згорткових кодів [1, розд.10.12; 2, розд. 3.4].

9.2. Основні параметри й класифікація ЗК [2, розд. 3.4].

9.1. Методи опису згорткових кодів

Згорткові коди утворюють *підклас* неперервних кодів. Найменування *згортковий код* походить від того, що результат кодування на виході кодера утворюється як *згортка* інформаційної послідовності, що кодується, з імпульсною реакцією кодера. Кодер ЗК містить один або кілька *регістрів елементів затримки* й *перетворювач* інформаційних послідовностей у кодові послідовності. Процес кодування виконується *неперервно*. Схема простого кодера показана на рис. 9.1.

Інформаційні двійкові символи a надходять на вхід *регістра* з K елементами затримки D . На виходах суматорів за модулем 2 утворюються *кодові символи* $b^{(1)}$ і $b^{(2)}$. Входи суматорів з'єднані з певними входами (виходами) елементів регістра кодера. *Комутатор* K на виході кодера встановлює черговість посилок кодових символів у канал. За час одного інформаційного символу на виході утвориться два кодових символи.

Швидкість коду $R_{\text{код}} = k/n$, де k – число інформаційних символів, що одночасно надходять на входи кодера, а n – число відповідних їм кодових символів на виходах кодера. Швидкість коду в цьому прикладі дорівнює $R_{\text{код}} = 1/2$. Можливе кодування й з іншими швидкостями.

Згортковий кодер, як автомат з кінцевим числом станів, може бути описаний *діаграмою станів*. **Станом** прийнято вважати набір символів на входах елементів затримки регістра. Приміром, символами (S_1, S_2) позначені стани кодера на рис. 9.1.

Діаграма станів являє собою спрямований граф, що описує всі можливі переходи кодера з одного стану в інший, а також містить символи виходів кодера, які супроводжують ці переходи.

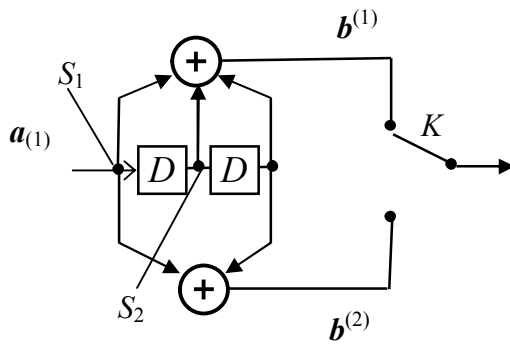


Рисунок 9.1 – Кодер ЗК

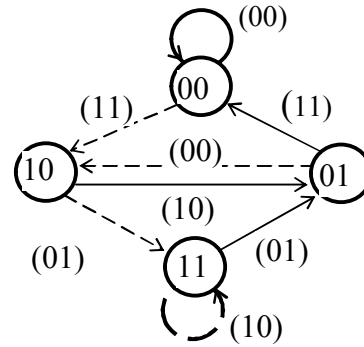


Рисунок 9.2 – Діаграма станів ЗК

Приклад діаграми станів кодера показано на рис. 9.2. У кружках зазначені чотири можливих стани кодера $(S_1S_2) = 00, 10, 11$ і 01 , стрілками – можливі переходи. Символи біля стрілок позначають символи на виході кодера $(b^{(1)}b^{(2)})$, що відповідають даному переходу. Суцільними лініями відзначені переходи, що мають місце при надходженні на вхід кодера інформаційного символу 0, і пунктирними – при надходженні символу 1. Спочатку кодер перебуває в стані 00, і надходження на його вхід інформаційного символу $a = 0$ переводить його також у стан 00. При цьому на виході кодера будуть символи $b^{(1)}b^{(2)} = 00$. На діаграмі цей перехід позначається петлею "00", що виходить зі стану 00 і знову повертається в цей стан. Далі, при надходженні символу $a = 1$ кодер переходить у стан 10, при цьому на виході будуть символи $b^{(1)}b^{(2)} = 11$. Цей перехід позначається пунктирною лінією зі стану 00 у стан 10. Далі, можливе надходження на вхід кодера інформаційних символів 0 або 1. При цьому кодер переходить у стан 01 або 11, а символи на виході будуть 10 або 01, відповідно. Процес побудови діаграми закінчується, коли будуть переглянуті всі можливі переходи з кожного стану в усі інші.

Решітчаста діаграма (решітка) є розгорненням діаграми станів у часі. На решітці стани показані вузлами, а переходи – з'єднуючими їхніми лініями (вітками). Після кожного переходу з одного стану в інший відбувається зсув на один крок вправо. Приклад решітчастої діаграми показано на рис. 9.3. Решітчаста діаграма дає наочне подання всіх *дозволених шляхів*, які є аналогами дозволених кодових комбінацій блокових кодів. По них може просуватися стан кодера при кодуванні.

||| Кожної інформаційної послідовності на вході кодера відповідає **єдиний шлях по решітці**.

Побудову решітчастої діаграми зручно робити з використанням діаграми станів. Вихідним є нульовий стан $S_1S_2 = 00$. Далі, з надходженням чергового інформаційного символу $a = 0$ або 1 можливі переходи в стан 00 або 10, позначувані вітками (00) і (11) відповідно. Процес слід продовжити, причому через 3 кроки (див. рис. 9.3), черговий фрагмент решітки буде повторюватися. Пунктиром показаний **шлях по решітці** 11100001..., що відповідає надходженню на вхід кодера інформаційної послідовності 1011.....

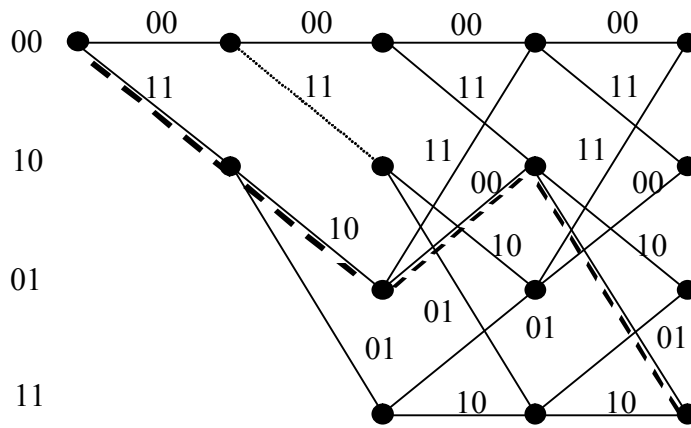


Рисунок 9.3 – Решітчаста діаграма ЗК (7,5)

Для опису роботи кодера послідовності символів на вході й виході зручно представляти з використанням оператора затримки D у вигляді нескінченних рядів:

$$\begin{aligned} a_{(i)}^{(j)}(D) &= a_{(i)0}D^0 + a_{(i)1}D^1 + a_{(i)2}D^2 + \dots, \\ b_{(j)}^{(i)}(D) &= b_{0(j)}D^0 + b_{1(j)}D^1 + b_{2(j)}D^2 + \dots \end{aligned}$$

Тут індекси в дужках позначають:

i – номер входу кодера, $1 \leq i \leq k$;

j – номер виходу кодера, $1 \leq j \leq n$. Індекси без дужок (0, 1, 2, ...) позначають дискретні моменти часу.

Для опису згорткового кодування використовують поняття *багаточлена, що породжує*.

Згортковий код буде повністю задано, якщо відомо схему кодера:

- кількість входів кодера k ;
- кількість виходів кодера n ;
- довжина кожного з регістрів K_i ;
- зазначені зв'язки суматорів з комірками регістрів.

Для кодів зі швидкістю $R_{\text{код}} = 1/n$ зв'язки j -го суматора ($1 \leq j \leq n$) з комірками регістра зсуву описуються шляхом подання *багаточлена, що породжує*:

$$g^{(j)}(D) = g_0^{(j)} + g_1^{(j)}D + g_2^{(j)}D^2 + \dots + g_v^{(j)}D^v, \quad (9.1)$$

причому, $g_k^{(j)} = 1$, якщо зв'язок j -го суматора з k -ою коміркою регістра існує, і $g_k^{(j)} = 0$, якщо такого зв'язку немає.

Процес кодування може бути представлений як множення багаточлена вхідної інформаційної послідовності $a_{(i)}(D)$ на багаточлен, що *породжує*, $g_{(i)}^{(j)}(D)$, що описує зв'язки комірок i -го регістра кодера з входами j -го суматора за модулем 2:

$$b^{(j)}(D) = a_{(i)}(D)g_{(i)}^{(j)}(D), \quad 1 \leq i \leq k, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (9.2)$$

Приміром, кодер рис. 9.1 характеризується багаточленами, що *породжують*, $g^{(1)}(D) = 1 + D + D^2$ і $g^{(2)}(D) = 1 + D^2$ або, записуючи послідовність коефіцієнтів g_k у вигляді двійкових комбінацій, *одержуємо* $g(1) = (111)$ і $g^{(2)} = (101)$.

Для довгих кодів часто використовують *восьмеричну форму запису*. У цьому випадку багаточлени, що породжують, будуть представлені так:

$$g^{(1)} = (7) \text{ і } g^{(2)} = (5), \text{ або } G = (g^{(1)}, g^{(2)}) = (7, 5).$$

Процес кодування ЗК можна описати також із застосуванням *матриць, що породжують* (відповідно, *перевірних матриць*). Докладніше із цим матеріалом можна ознайомитися по додатковій літературі [2, розд.3.4, стор. 114].

9.2. Основні параметри й класифікація ЗК

Швидкість коду визначається як

$$R_{\text{код}} = k/n, \quad (9.3)$$

де k – кількість інформаційних символів, що одночасно надходять на k входів кодера, n – кількість відповідних їм кодових символів на n виходах кодера.

Використовують кілька характеристик для визначення довжини пам'яті при кодуванні. *Довжина регістра, що кодує* (ДКР) K дорівнює кількості елементів затримки, що містяться в схемі кодера. ДКР часто застосовують для визначення пам'яті при кодуванні зі швидкістю $R_{\text{код}} = 1/n$, коли кодер містить один регістр. Кодер, зображений на рис. 9.1, має ДКР $K = 3$. Якщо кодер містить кілька входів ($k > 1$), то довжини регістрів, підключених до кожного входу, можуть бути різні. У цьому випадку визначають довжину кодового обмеження.

Довжина кодового обмеження (ДКО) по кожному вході визначається старшим степенем відповідних багаточленів, що породжують

$$v_i = \max [\deg g_{(i)}^{(j)}(D)].$$

Результуюча довжина кодового обмеження кодера визначається сумою:

$$v = \sum_{i=1}^k v_i. \quad (9.4)$$

Для кодів з одним регістром пам'яті ($k = 1$) величини ДКО й ДКР зв'язані простим співвідношенням:

$$v = K. \quad (9.5)$$

Для порівняння складності алгоритмів декодування ЗК використовують характеристику складності. Оскільки, як відзначалося раніше, розвиток решітчастої діаграми складається в повторенні того самого кроку (див. рис. 9.3), складність діаграми прийнято визначати кількістю гілок на кроці решітчастої діаграми. Число станів решітки визначаються числом змінних $K = v$ на входах елементів регістра. При використанні коду з основою m всі можливі комбінації цих змінних утворюють набір станів кодера. Загальне число станів дорівнює $S = m^K$. З кожного стану виходять (і в кожний стан також входять) m^k гілок. У підсумку *складність одного кроку решітки* можна визначити кількістю гілок на цьому кроці

$$W = m^{v+k}. \quad (9.6)$$

Завадостійкість декодування залежить від дистанційних властивостей кодових послідовностей на виході кодера. При цьому для двійкових кодів найчастіше віддаль між послідовностями оцінюють у метриці Хеммінга.

Вільна віддаль згорткового коду d_f – мінімальна віддаль між двома довільними напівнескінченими послідовностями на виході кодера, що відрізняються в першій гілці.

Для коротких кодів вільну віддаль можна визначити по діаграмі станів. Якщо діаграма двійкового коду задана, то вільна віддаль коду дорівнює мінімальній вазі Хеммінга шляху по діаграмі зі стану 00 у цей же стан (крім петлі в цьому стані). На діаграмі рис. 9.2 видно, що вільна віддаль $d_f = 5$. По величині вільної віддалі ЗК судять про коректувальні властивості згорткових кодів. Зокрема, якщо два шляхи на виході кодера ЗК, що виходять із одного стану решітчастої діаграми, розрізняються в метриці Хеммінга на величину d_f , то при декодуванні по мінімуму віддалі за аналогією з випадком декодування блокових кодів (див. розд. 3.1), **кратність помилок, що виправляються**, визначається виразом

$$q_{\text{исп}} \leq \frac{d_f - 1}{2}, \quad (d_f - \text{непарне}). \quad (9.7)$$

Вільна віддаль використовується для оцінки завадостійкості декодування згорткових кодів із застосуванням алгоритмів максимальної правдоподібності або близьких до них (алгоритм Вітербі й ін.).

Деякі ЗК мають **властивість катастрофічності**. Катастрофічним ЗК називається такий код, у якого вхідна інформаційна послідовність нескінченної ваги дає на виході кодера послідовність кінцевої ваги. При використанні катастрофічного коду кінцеве число помилок у каналі викликає нескінченне число помилок при декодуванні. Із цієї причини *використовувати на практиці катастрофічні коди не рекомендується*, а таблиці ЗК відомостей про катастрофічні коди не містять (див., наприклад, табл. А3 у додатку А.3), оскільки при пошуку багаточленів, що породжують, кращих кодів катастрофічні коди відкидаються.

У систематичному коді на k (з n можливих) виходах кодера присутні інформаційні послідовності переданих символів, а на інші $(n - k)$ виходах – послідовності додаткових символів, сформованих як лінійні комбінації інформаційних символів. При швидкості $R_{\text{код}} = 1/2$ **багаточлени, що породжують, систематичний** код мають вигляд

$$g^{(1)}(D) = 1 \text{ і } g^{(2)}(D) = g_0^{(2)} + g_1^{(2)}D + g_2^{(2)}D^2 + \dots + g_v^{(2)}D^v.$$

Систематичні коди дозволяють одержати на прийомній стороні оцінку інформаційних символів, не роблячи декодування або яку-небудь іншу обробку прийнятих символів. Несистематичним кодам така властивість не властива.

Як і у випадку блокових кодів, застосування згорткового кодування зі швидкістю $R_{\text{код}} = k/n$ приводить до розширення спектра сигналу в каналі. При цьому коефіцієнт розширення смуги визначається виразом:

$$K_F = n/k. \quad (9.8)$$

При малих швидкостях кодів значне розширення смуги стає неприйнятним, тому намагаються застосовувати коди з високою швидкістю. Практично, вибір параметрів згорткових кодів роблять на основі компромісу, виходячи з *необхідного* енергетичного виграшу кодування й припустимого коефіцієнта розширення спектра сигналу в каналі.

Вправа 9.1. Аналіз взаємозв'язків параметрів ЗК.

Використовуючи послідовну модифікацію структури вихідного кодера ЗК (7, 5) (рис. 9.1) і відповідних йому діаграми станів і решітки (9.2 і 9.3), установимо взаємозв'язок параметрів кодера k , n , $R_{\text{код}}$, S , і багаточленів, що породжують, із вільною віддалю коду d_f . Розглянемо кілька варіантів ЗК:

1. *Вихідний згортковий код (7, 5)* – див. рис. 9.4.

Параметри коду:

$$k = 1;$$

$$n = 2;$$

$$K = 2;$$

$$R_{\text{код}} = 1/2;$$

для двійкового коду з $m = 2 \rightarrow S = m = 2^2 = 4$;

вільна віддаль $d_f = 5$;

код несистематичний.

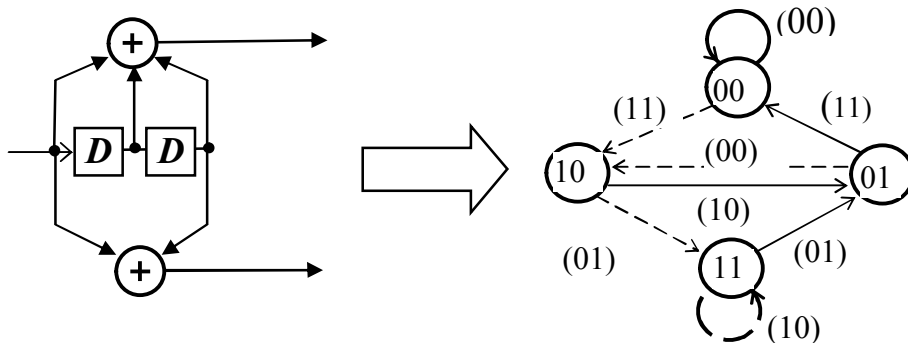


Рисунок 9.4 – Кодер ЗК(7,5) і діаграма станів

2. *Формування систематичного коду (1, 5)* – див. рис. 9.5.

Модифікуємо перший багаточлен вихідного коду, залишивши один зв'язок, як показано нижче на малюнку. Діаграма станів частково зміниться. Число станів залишиться колишнім, оскільки склад регістра кодера не змінився. Змінюються ненульові гілки: відповідно до зміни першого багаточлена, що породжує, на місці першого символу гілки варто проставити перший символ стану, у яке спрямована ця гілка. Швидкість коду також не змінилася.

Параметри коду:

$$k = 1;$$

$$n = 2;$$

$$K = 2;$$

$$R_{\text{код}} = 1/2;$$

для двійкового коду $m = 2 \rightarrow S = 4$;

вільна віддаль зменшилася: $d_f = 3$;
код систематичний.

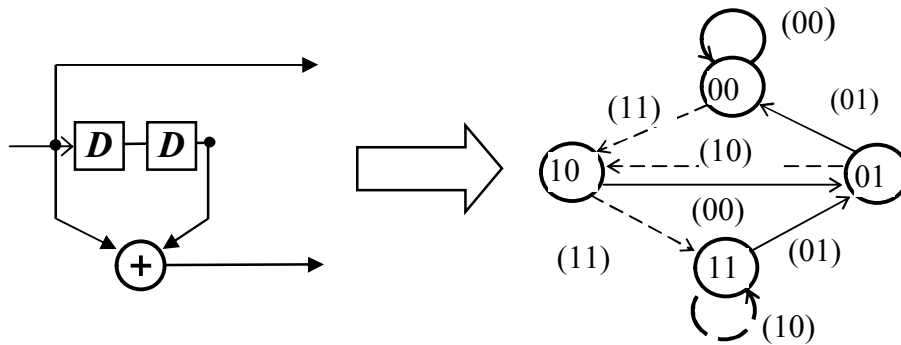


Рисунок 9.5 – Кодер ЗК(1, 5) і діаграма станів

Цей окремий приклад ілюструє загальний факт теорії ЗК: за величиною вільної віддалі *систематичні ЗК виявляються гіршими кодів несистематичних*, з яких вони утворені. Тому на практиці віддають перевагу несистематичним ЗК.

У додатку А.3 наведені характеристики двійкових згорткових кодів з максимальною вільною віддаллю Хеммінга для різних швидкостей кодів.

Контрольні питання

- 9.1. Назвіть основні параметри згорткових кодів.
- 9.2. Які правила побудови діаграми станів ЗК?
- 9.3. Який зв'язок між діаграмою станів ЗК і решітчастою діаграмою?
- 9.4. Як визначити вільну віддаль ЗК по діаграмі станів?

Завдання

9.1. Задані багаточлени, що породжують ЗК $(g^{(1)}, g^{(2)}) = (1101, 1111)$. Визначте параметри такого ЗК. Яке восьмеричне й багаточленне подання $(g^{(1)}(D), g^{(2)}(D))$ цього коду?

9.2. Приведіть функціональну схему кодера із завдання 9.1.

9.3. Побудуйте діаграму станів і решітчасту діаграму коду із завдання 9.1. Покажіть, як по них визначити вільну віддаль коду. Відшукайте рядок, що відповідає цьому коду в таблицях ЗК додатка А.3. За аналогією із вправою 9.1 проаналізуйте взаємозв'язок параметрів цього коду з величиною вільної віддалі. Зробіть узагальнюючі висновки.

9.4. Підготуйте решітчасту діаграму коду (1, 5) із вправи 9.1, необхідну для ілюстрації алгоритму Вітербі.

10. АЛГОРИТМИ ДЕКОДУВАННЯ ЗГОРТКОВИХ КОДІВ

10.1. Класифікація алгоритмів декодування ЗК [1, розд. 10.12; 2, розд. 3.6].

10.2. Алгоритм А. Вітербі для декодування згорткових кодів [2, розд. 3.6].

10.1. Класифікація алгоритмів декодування

При оптимальній обробці з метою винесення рішення прийняту з каналу послідовність символів необхідно зіставити з усіма можливими послідовностями, що передаються. Оскільки число можливих послідовностей довжини N двійкового коду дорівнює 2^N , то при більших довжинах послідовностей декодер стає неприпустимо складним (**експонентна складність декодування**, див. розд. 6.3), а оптимальне декодування практично важко реалізованим. Однак, саме при великих N можливе значне підвищення надійності передачі, тому що дія шуму усереднюється на довгій послідовності. Тому важливою є **проблема зниження складності алгоритмів декодування ЗК**. Відомі дві групи методів декодування згорткових кодів:

1) **Алгебраїчні методи декодування** засновані на використанні алгебраїчних властивостей кодових послідовностей. У ряді випадків ці методи приводять до простих реалізацій кодека. Такі алгоритми є *неоптимальними*, тому що використовувані алгебраїчні процедури декодування призначені для виправлення конкретних (і не всіх) конфігурацій помилок у каналі. Алгебраїчні методи ототожнюють із **поелементним прийманням** послідовностей, що для кодів з надмірністю, як відомо, дає гірші результати, ніж **«приймання у цілому»**. Найбільш простим з алгебраїчних алгоритмів є **алгоритм порогового декодування** згорткових кодів. Цей алгоритм *далекий від оптимального* й тому рідко використовується, а використовується, у першу чергу, у системах з високою швидкістю передачі інформації. Більше докладний опис порогового алгоритму і його модифікації можна знайти в літературі [2, розд. 3.6.3].

2) **Імовірнісні методи декодування** значно ближчі до оптимального «приймання в цілому», тому що в цьому випадку декодер оперує з величинами, пропорційними апостеріорним імовірностям, оцінює й порівнює ймовірності різних гіпотез і на цій основі виносить рішення про передані символи.

Алгебраїчні алгоритми оперують із кінцевим алфавітом вхідних даних, для одержання яких на виході неперервного каналу необхідно виконати квантування прийнятого сигналу із шумом. Процеси обробки сигналів у пристрої, що вирішує, на виході демодулятора протилежних сигналів показані на рис. 10.1, де представлені:

а, в) – форми протилежних сигналів у момент відліку на вході пристрою демодулятора, що вирішує.

б) – шкала квантування й граф переходів при *жорсткому* рішенні.

г) – шкала квантування й граф переходів при *м'якому* рішенні.

У найпростішому випадку роблять **квантування** кожного канального символу у відліковий момент часу **на два рівні** (іменоване в літературі як **«жорстке рішення»** на виході демодулятора). При жорсткому рішенні число рівнів

квантування $L = 2$. При цьому жорстке рішення представлене одним двійковим символом. Це показано на рис. 10.1, б.

При «м'якому рішенні» число рівнів квантування $L > 2$ (рис. 10.1, з).

При м'якому рішенні вихід квантувача більш точно описує величину відліку сигналу з завадою, що підвищує завадостійкість декодування.

Відомі два основні ймовірнісні алгоритми декодування згорткових кодів, а також їхні різні модифікації.

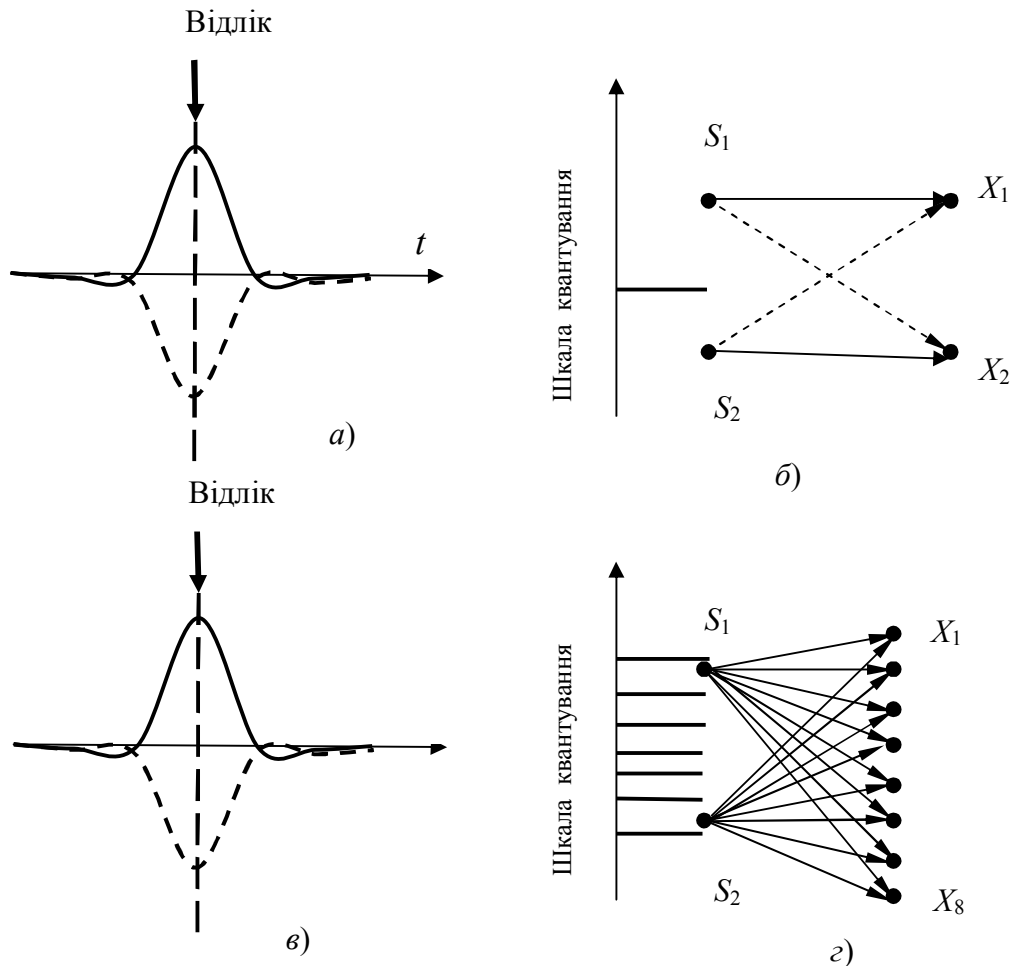


Рисунок 10.1 – До пояснення роботи пристрою рішення в демодуляторі

1. **Алгоритм послідовного декодування** забезпечує доволі малу ймовірність помилки при ненульовій швидкості передачі повідомлень по каналу. При послідовному декодуванні виконується **пошук шляху** на кодових решітках, що відповідають переданій інформаційній послідовності. Послідовне декодування використовується для декодування довгих згорткових кодів. Детальний виклад алгоритму послідовного декодування представлено в літературі [4, розд. 13.18].

Іншим різновидом імовірнісних алгоритмів є алгоритм, заснований на принципі динамічного програмування, і відомий як **алгоритм Вітербі**.

Принцип динамічного програмування був сформульований в 1940 р. Р. Беллманом. З тих пір він знайшов широке використання у теорії керування й теорії кіл. В 1970 р. динамічне програмування, у формі алгоритму декодування

ЗК (алгоритму Вітербі), було застосовано А. Вітербі до проблем телекомунікації.

2. Алгоритм Вітербі знаходить широке застосування й реалізує *пошук максимально правдоподібного шляху* на кодових решітках з відкиданням частини найменш правдоподібних варіантів шляхів на кожному кроці декодування. Алгоритм Вітербі характеризується сталістю обчислювальної роботи, однак *складність* декодера Вітербі росте, як при всіх переборних алгоритмах, *за експонентним законом* від довжини кодового обмеження згорткового коду. Тому алгоритм Вітербі використовується для декодування коротких згорткових кодів.

10.2. Алгоритм Вітербі для декодування згорткових кодів

Розглянемо алгоритм Вітербі на прикладі коду зі швидкістю $R_{\text{код}} = 1/n$.

Нехай, починаючи з моменту часу $t = 0$, на вхід кодера подається інформаційна послідовність довжиною в L символів $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_{L-1})$. На виході кодера буде послідовність символів $\mathbf{b}_L = (b_0, b_1, \dots, b_{L-1})$. Стан кодера в момент t визначають як набір з v інформаційних символів $\mathbf{w}_t = (a_t, a_{t-1}, \dots, a_{t-L+1})$. Решітчаста діаграма коду *однозначно зв'язує* інформаційну послідовність \mathbf{a} , послідовність станів кодера \mathbf{w} і послідовність символів на його виході \mathbf{b} .

Кожній гілці \mathbf{b}_t у каналі відповідає сигнал, що може бути представлений набором координат $\mathbf{S}_t = (S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, \dots, S_t^{(N)})$, де N – розмірність простору сигналів. У каналі діє адитивна завада. Тоді послідовність прийнятого сигналу на вході декодера буде дорівнювати:

$$\mathbf{X}_L = \mathbf{S}_L + \mathbf{n},$$

де $\mathbf{S}_L = (S_0, S_1, \dots, S_{L-1})$;

$\mathbf{n} = (n_0, n_1, \dots, n_{L-1})$;

$\mathbf{n}_t = (n_t^{(1)}, n_t^{(2)}, \dots, n_t^{(N)})$ – N -вимірний вектор завади.

Декодування полягає в простежуванні по кодовій решітці шляху з максимальною апостеріорною ймовірністю. Декодований шлях можна вказати одним зі способів:

– набором оцінок кодових гілок $\mathbf{S}_L = (S_0, S_1, \dots, S_{L-1})$, що складають шлях;

– послідовністю оцінок станів кодера $\mathbf{W}_L = (w_0, w_1, \dots, w_{L-1})$;

– послідовністю оцінок інформаційних символів на вході кодера $\mathbf{A}_L = (a_0, a_1, \dots, a_{L-1})$, які збігаються з першими символами оцінок станів $\mathbf{S} = (s_0, s_1, \dots, s_{t-v+1})$. Послідовність \mathbf{X}_L буде декодована з *мінімальною ймовірністю помилки*, якщо із всіх можливих шляхів вибрати оцінку \mathbf{S}_L , для якої *максимальна апостеріорна ймовірність* $P(\mathbf{S}_L/\mathbf{X}_L)$. Передавання всіх варіантів наборів \mathbf{a} вважають рівноймовірними. У цьому випадку декодування за критерієм максимуму апостеріорної ймовірності рівносильне декодуванню за критерієм максимуму правдоподібності, коли вибирається оцінка \mathbf{S}_L , що забезпечує виконання умови $P(\mathbf{S}_L/\mathbf{X}_L) = \max$. У каналі без пам'яті умовна ймовірність $P(\mathbf{S}_L/\mathbf{X}_L)$ пропорційна добутку умовних густин суми сигналу й завади:

$$P(X_L/S_L) = \prod_{t=0}^{L-1} P(X_t/S_t) = \prod_{t=0}^{L-1} P(X_t^{(0)} X_t^{(1)} \dots X_t^{(N)} / S_t^{(0)} S_t^{(1)} \dots S_t^{(N)}).$$

У гауссовому каналі при дії білого шуму з однобічною спектральною густиною потужності N_0 кожний співмножник цього добутку має вигляд:

$$p(X_L / S_L) = (1 / \sqrt{\pi N_0})^N \exp \left\{ - \left[\sum_{i=1}^N (X_t^{(i)} - S_t^{(i)})^2 \right] / 2N_0 \right\}.$$

Для відшукування максимуму прологарифмуємо:

$$\begin{aligned} \ln P(X_L / S_L) &= \ln \prod_{t=0}^{L-1} (1 / \sqrt{\pi N_0})^N \times \\ &\times \exp \left\{ - \left[\sum_{t=1}^N (X_t^{(l)} - S_t^{(i)})^2 \right] / 2N_0 \right\} = NL \ln(1 / \sqrt{\pi N_0}) - \sum_{t=0}^{L-1} \sum_{i=1}^N (X_t^{(i)} - S_t^{(i)})^2 / 2N_0. \end{aligned}$$

При декодуванні вибирають послідовність сигналів $\mathbf{S}_L = (S_0, S_1, \dots, S_{L-1})$ і однозначно пов'язану з нею послідовність гілок $\mathbf{S}_L = (S_0, S_1, \dots, S_{L-1})$, яка забезпечує мінімум суми:

$$\text{МШ} = \sum_{t=0}^{L-1} \sum_{i=0}^N (X_t^{(i)} - S_t)^2 = \min,$$

яка називається **метрикою декодованого шляху**. Метрика шляху містить у якості складових **метрики гілок**:

$$\text{МГ} = \sum_{i=1}^N (X_t^{(i)} - S_t^{(i)})^2.$$

У гауссовому каналі метрика гілки пропорційна квадрату Евклідової віддалі між вектором прийнятої суми сигналу й завади X_t і вектором сигналу S_t , що відповідає гілці коду A_t . У дискретному каналі для оцінки віддалей використовують метрику Хеммінга.

Періодична структура решітчастої діаграми істотно спрощує **порівняння й вибір шляхів** відповідно до правил декодування. Число станів на решітці обмежене, і два навмання обраних досить довгих шляхи мають, як правило, загальні стани. Відрізки шляхів, що входять у такі стани, необхідно порівняти й вибрати шлях з найменшою метрикою. Вибраний **шлях** вважається таким, що **вижив**. Відповідно до алгоритму Вітербі таке **порівняння й відкидання відрізків шляхів виконується періодично, на кожному кроці декодування**. Розглянемо декодування коду (7,5), символи якого передаються по дискретному каналу (див. рис. 10.2).

У цьому випадку **метрика гілки** (МГ) дорівнює віддалі Хеммінга між набором символів $(X^{(1)} X^{(2)})$ на вході декодера й набором символів $(S^{(1)} S^{(2)})$, що відповідають даній гілці на решітчастій діаграмі. Якщо $(X^{(1)} X^{(2)}) = (01)$, то значення МГ для коду (7, 5) із решіткою, що зображена на рис.10.2, а будуть такими $\text{МГ}(00) = 1$, $\text{МГ}(01) = 0$, $\text{МГ}(11) = 1$ і $\text{МГ}(10) = 2$.

Метрика шляху (МШ) є сума метрик гілок, що утворюють деякий шлях на решітчастій діаграмі. Шлях кінцевої довжини закінчується в певному стані. Метрика стану (МС) дорівнює метриці шляху, що закінчується в даному стані.

Крок декодування полягає в обробці декодером прийнятих з каналу даних в інтервалі між двома сусідніми відліками.

На рис.(10.2, б...10.2, ж) показано розвиток процесу декодування символів ЗК зі швидкістю $R_{\text{код}} = 1/2$ і довжиною регістра, що кодує, $K = 3$. На вхід декодера надходять пари символів з каналу: (...11,10,00,11,01...) (декодування із жорстким рішенням). Цифрами біля гілок позначені метрики гілок, цифри в кружках позначають метрики станів.

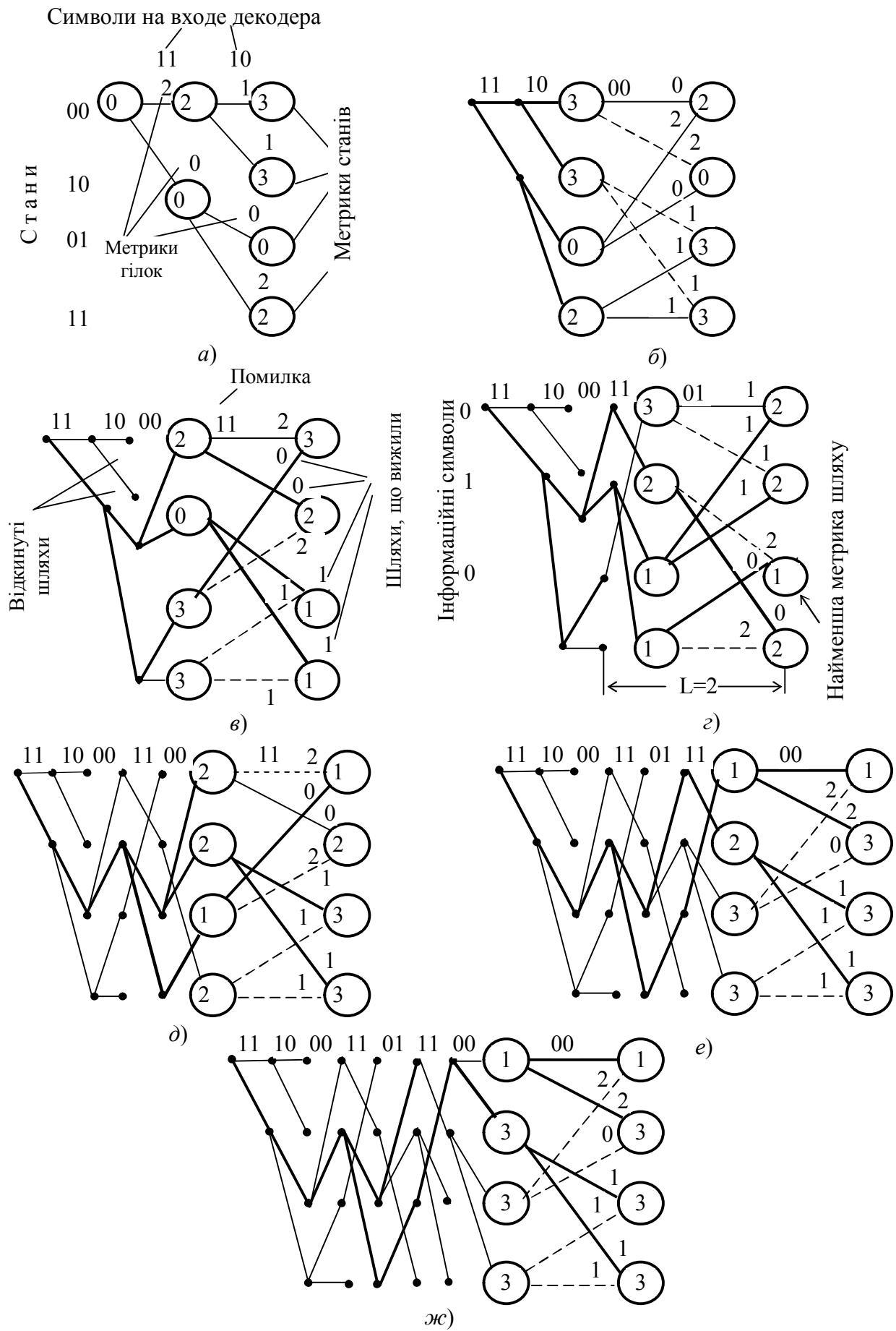
У початковий момент часу вважаємо, що декодер перебуває в стані 00 і вихідна метрика цього стану $MC(00) = 0$ (рис. 10.2, а). Якщо з каналу надійшли символи 11, то метрики гілок 00 і 11, що виходять із цього стану, будуть $MG(00) = 2$ і $MG(11) = 0$. Це помічено на першому кроці декодування. Оскільки інших гілок, що виходять зі станів 00 і 11, немає, то метрики цих станів приймаються рівними метриками вхідних гілок $MC(00) = 2$ і $MC(10) = 2$. Аналогічна картина має місце й на наступному кроці декодування, коли з каналу надходить пара символів (10). Тут $MG(00) = 1$, $MG(11) = 1$, $MG(10) = 0$ і $MG(01) = 2$. Метрики станів на цьому кроці визначаються тепер як суми метрик вхідних гілок з метриками попередніх станів: $MC(00) = 2+1 = 3$; $MC(10) = 2+1 = 3$; $MC(01) = 0+0 = 0$ і $MC(11) = 0+2 = 2$.

На цьому процес розвитку решітчастої діаграми для даного коду закінчується. **Алгоритм полягає в повторенні одного основного кроку.** На кожній з наступних діаграм рис. 10.2 цей крок зображений докладно. До початку i -го кроку в пам'яті декодера зберігаються метрики станів, обчислених на попередньому етапі:

$$MC^{i-1}(00), MC^{i-1}(10), MC^{i-1}(01), MC^{i-1}(11).$$

По прийнятих канальних символах виробляється обчислення метрик гілок $MG^i(00)$, $MG^i(11)$, $MG^i(10)$ і $MG^i(01)$ і формування чотирьох нових метрик станів: $MC^i(00)$, $MC^i(10)$, $MC^i(01)$ і $MC^i(11)$ за наступним правилом:

$$\begin{aligned} MC^i(00) & \begin{cases} MP^i(00) = MC^{i-1}(00) + MB^i(00) \\ MP^i(00) = MC^{i-1}(01) + MB^i(11), \end{cases} \\ MC^i(01) & \begin{cases} MP^i(01) = MC^{i-1}(10) + MB^i(10) \\ MP^i(01) = MC^{i-1}(11) + MB^i(01), \end{cases} \\ MC^i(10) & \begin{cases} MP^i(10) = MC^{i-1}(00) + MB^i(11) \\ MP^i(10) = MC^{i-1}(01) + MB^i(00), \end{cases} \\ MC^i(11) & \begin{cases} MP^i(11) = MC^{i-1}(10) + MB^i(01) \\ MP^i(11) = MC^{i-1}(11) + MB^i(10). \end{cases} \end{aligned}$$



До кожного нового стану ведуть два шляхи. Приміром, до стану 00 ведуть шляхи з попередніх станів 00 і 01. На i -му кроці декодування декодер обчислює метрики шляхів як суми метрик попередніх станів і метрик вхідних гілок.

Далі виконується попарне порівняння метрик шляхів, що входять у кожний зі станів (пари показані фігурними дужками). У результаті порівняння **вибирається менша метрика**, і вона вважається метрикою даного стану для наступного кроку декодування. **Шлях**, що входить у даний стан з меншою метрикою, вважається таким, що **вижив**. На рис. 10.2 відрізки шляхів, що вижили, показані суцільною лінією. Шляхи, що входять у стани з більшими метриками, вважаються відмерлими (обірваними). Вони показані на решітчастій діаграмі пунктиром.

Таким чином, на кожному кроці декодування відповідно до алгоритму Вітербі, у **кожному зі станів** решітчастої діаграми виконуються **однотипні операції**:

1) **Додавання метрик** попередніх станів з метриками відповідних гілок.

2) **Порівняння метрик** вхідних шляхів.

3) **Вибір шляхів** з найменшими метриками, величини яких використовуються як метрики станів на наступному кроці декодування. Якщо метрики порівнюваних шляхів однакові, то вибір одного із двох шляхів виконується випадковим чином.

На кожному кроці декодування половина можливих продовжень шляхів відкидається. Інша половина утворить продовження шляхів для наступного кроку декодування, на якому знову з'являються два варіанти продовження кожного шляху. Це забезпечує **сталість кількості обчислень**, виконуваних на кожному кроці. **Декодер простежує** по кодовій решітці **шлях**, що має **мінімальну віддасть** від шляху, що породжує кодер.

Таким чином, декодер, що вибирає на решітчастій діаграмі шлях з найменшою метрикою, **мінімізує ймовірність помилки**. Оскільки при декодуванні аналізу піддаються послідовності скінченної довжини L , алгоритм не є строго оптимальним. Результати розрахунків і моделювання показують, що при відповідному виборі величини $L > (6...7)v$ можна одержати результати декодування, досить близькі до оптимальних. **Складність реалізації алгоритму Вітербі** для декодування ЗК можна оцінити по кількості гілок кодових решіток, оброблюваних декодером на довжині декодування L , з урахуванням складності кожного кроку решітки (див. (9.6)) складність реалізації декодера Вітербі можна оцінити за формулою (*C-complexity*):

$$C = m^{(v+k)} \cdot L. \quad (10.1)$$

На рис. 10.3 показана структурна схема декодера Вітербі, призначеного для роботи з демодулятором сигналів ФМ-4.

Декодер складається з АЦП у каналах X і Y , обчислювача метрик гілок, процесора, у якому виконуються операції **додавання, порівняння й вибору**, пристрою пам'яті шляхів, які вижили, і мажоритарного елемента МЕ, у якому вибирається шлях з найбільшою метрикою. Оптимальне значення кроку квантування залежить від відношення сигнал/шум на вході АЦП. При вісьмох рів-

нях квантування мінімум втрат забезпечується при відношенні розмаху сигналу до кроку квантування, рівному (4,5...5,5). Більш докладний опис призначення й алгоритмів роботи елементів структурної схеми декодера Вітербі наведено в літературі [2, 9, 11].

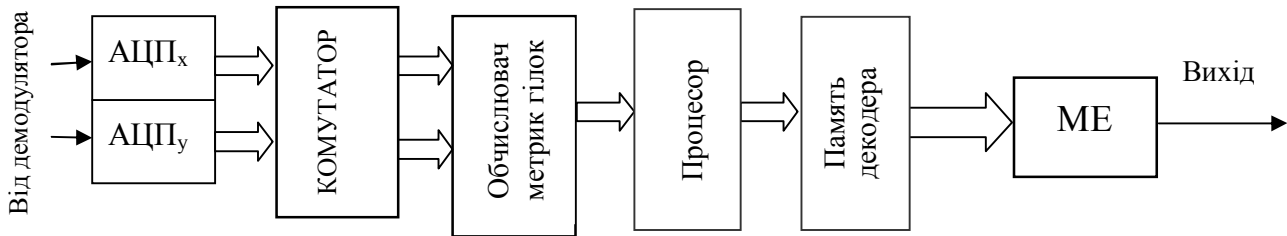


Рисунок 10.3 – Структурна схема декодера Вітербі

Контрольні питання

10.1. Як слід вибирати вільну віддалі ЗК, що забезпечує виправлення двократних помилок?

10.2. До чого приводить збільшення вільної віддалі ЗК? Чи залежить складність реалізації алгоритму Вітербі від довжини вільної віддалі ЗК?

10.3. Як зросте складність декодера Вітербі при збільшенні довжини кодового обмеження ЗК удвічі?

10.4. За рахунок чого підвищується складність декодера Вітербі при переході до м'якого рішення на виході демодулятора?

Завдання

10.1. Підготуйте решітчасту діаграму коду (1,5) із вправи 9.1, необхідну для ілюстрації алгоритму Вітербі. Оскільки вільна віддалі цього коду $d_f = 3$, то відповідно до (9.7) код виправляє однократні помилки. Простежте процес декодування за алгоритмом Вітербі при дії на вході декодера поодинокі помилки й установіть факт її виправлення декодером.

11. ЗАВАДОСТІЙКІСТЬ ДЕКОДУВАННЯ ЗГОРТКОВИХ КОДІВ

Методика оцінки завадостійкості декодування згорткових кодів не відрізняється від методики, викладеної в розд. 8.1 для блокових кодів. Тут також визначальну роль грають швидкість коду $R_{\text{код}}$, дистанційні властивості коду (у випадку ЗК – вільна віддалі d_f), і алгоритм декодування коду. При використанні алгоритму декодування по максимуму правдоподібності (алгоритму Вітербі) наближений вираз для ймовірності помилки біта на виході декодера має вигляд [2]:

$$p_d = \sum_{k=d_f}^{\infty} w_k P_k, \quad (11.1)$$

де P_k – ймовірність помилки у виборі шляху по решітці коду;

w_k – спектр ваг помилкового шляху.

При передаванні кодових символів по каналу з ФМ-2 і дії білого шуму зі спектральною густиною потужності N_0 імовірність помилки у виборі шляху визначається так:

$$P_k = Q\left(\sqrt{2kR_{\text{код}} \frac{E_6}{N_0}}\right), \quad (11.2)$$

де $Q(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_z^\infty \exp(-\frac{t^2}{2}) dt$ – гауссова Q -функція (інтеграл імовірності), таблиці значень якої містять довідники по теорії ймовірностей і статистичних розрахунків. Для практичних розрахунків зручно користуватися досить точною апроксимацією

$$Q(z) = 0,65 \exp[-0,44(z + 0,75)^2]. \quad (11.3)$$

Обчислення за формулами (11.1) і (11.2) показують, що в сумі (11.1) при великих відношеннях сигнал/шум перший член (при $k = d_f$) має найбільше значення, а інші члени суми з ростом k швидко убувають. Тому на практиці обмежуються використанням спрощеної формули:

$$p_d = w_{df} \cdot Q\left(\sqrt{2d_f R_{\text{код}} \frac{E_6}{N_0}}\right). \quad (11.4)$$

Як і при блоковому кодуванні, прийнято порівнювати завадостійкості декодування ЗК із завадостійкістю когерентного приймання сигналів двійкової фазової модуляції (ФМ-2). При цьому розрахункову формулу для ймовірності помилки біта можна одержати з виразу (11.2), поклавши $k = 1$, $R_{\text{код}} = 1$:

$$p_{\text{ФМ-2}} = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_6}{N_0}}\right). \quad (11.5)$$

де $h_6^2 = E_6/N_0$ – відношення енергії сигналу, затрачуваної на передавання біта, E_6 до спектральної густини потужності шуму N_0 на вході демодулятора.

Вправа 11.1. Аналіз завадостійкості декодування ЗК.

Проведемо розрахунки ймовірності помилки біта на виходах демодулятора сигналів ФМ-2 і включеного слідом за ним декодера Вітербі, використовуючи розрахункові формули (11.5) і (11.4), відповідно, для наступних ЗК:

1. Код (5,7), $R_{\text{код}} = 1/2$, $d_f = 5$, $v = 2$;
2. Код (133,171), $R_{\text{код}} = 1/2$, $d_f = 10$, $v = 6$.

Результати розрахунків наведені в табл. 11.1 і представлені на рис. 11.1. У табл. 11.1 зазначені значення аргументу z функції $Q(z)$, використовуваної в розрахункових формулах.

Як і при оцінці завадостійкості декодування блокових кодів (див. розд. 8) у випадку згорткових кодів використовують поняття *енергетичного виграшу*.

Енергетичний виграш від застосування згорткового кодування (ЕВК) дорівнює різниці значень E_6/N_0 , необхідних для забезпечення заданої ймовірності помилки декодування p при відсутності й при використанні кодування.

Таблиця 11.1 – Розрахунок завадостійкості декодування ЗК

E_b/N_0 , дБ	Імовірність помилки біта на виході демодулятора ФМ-2		Імовірність помилки біта на виході декодера			
			Код (5,7)		Код (133,171)	
	z	$p_{\text{ФМ-2}}$	z	p_d	z	p_d
2	1,78	$3,9 \cdot 10^{-2}$	2,82	$2,4 \cdot 10^{-3}$	3,98	$1,2 \cdot 10^{-3}$
3	2,00	$2,4 \cdot 10^{-2}$	3,16	$7,8 \cdot 10^{-4}$	4,47	$1,5 \cdot 10^{-4}$
4	2,24	$1,3 \cdot 10^{-2}$	3,54	$1,9 \cdot 10^{-4}$	5,01	$1,1 \cdot 10^{-5}$
5	2,52	$6,1 \cdot 10^{-3}$	3,98	$3,5 \cdot 10^{-5}$	5,62	$4,1 \cdot 10^{-7}$
6	2,82	$2,4 \cdot 10^{-3}$	4,46	$4,2 \cdot 10^{-6}$		
7	3,55	$7,9 \cdot 10^{-4}$	5,62	$1,1 \cdot 10^{-8}$		
8	3,99	$2,0 \cdot 10^{-4}$				
10	4,47	$4,2 \cdot 10^{-6}$				

Рівень ймовірності помилки, на якому визначається виграш, залежить від вимог до вірності переданої цифрової інформації. Для цифрових систем передавання телефонії необхідний рівень ймовірності помилки біта звичайно становить $p = (10^{-5} \dots 10^{-6})$. У системах передавання телебачення в цифровій формі намагаються забезпечити $p = (10^{-10} \dots 10^{-11})$. Величину енергетичного виграшу при заданій ймовірності помилки біта p^* можна визначити, порівнюючи аргументи функції $Q(z)$ у близьких за формою виразах для ймовірності помилки (11.4) і (11.5) (для однакових ймовірностей $p_d = p_{\text{ФМ-2}} = p^*$).

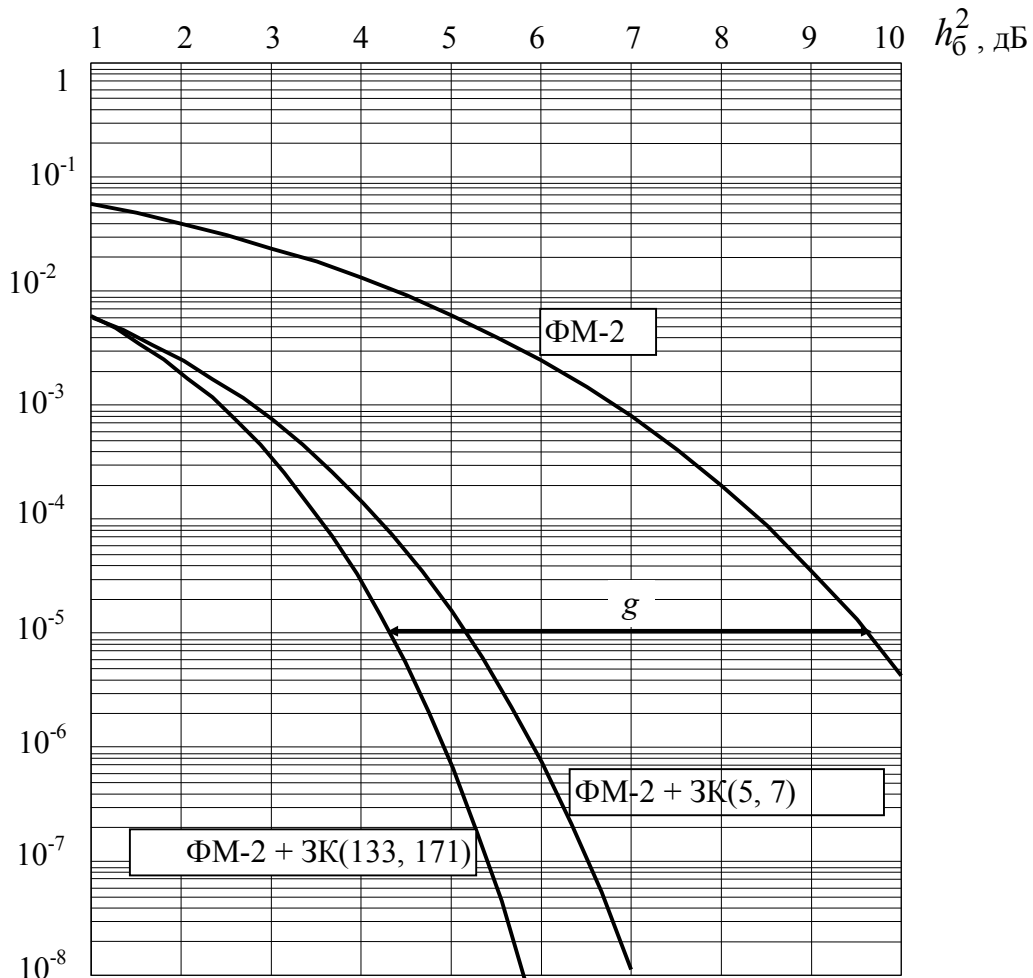


Рисунок 11.1 – Завадостійкість декодування ЗК

Розрахунки показують, що величина ЕВК залежить від рівня ймовірності помилки p^* , на якому визначається ЕВК. Це добре видно на кривих рис.11.1, що представляє результати розрахунків із вправи 11.1. Величина ЕВК зі зменшенням імовірності p^* прагне до своєї межі, що у теорії кодування називають як *асимптотичний енергетичний виграш від застосування кодування* (АЕВК):

$$\text{АЕВК} = \lim \text{ЕВК} (p^* \rightarrow 0). \quad (11.6)$$

Порівнюючи аргументи у виразах (11.5) і (11.4) приходимо до широко використовуваного в енергетичних розрахунках телекомунікаційних систем виразу для АЕВК у логарифмічних одиницях

$$\text{АЕВК}_{\text{дБ}} = 10 \lg(R_{\text{код}} d_f). \quad (11.7)$$

Оскільки АЕВК є верхньою границею ЕВК, для швидкого порівняння й вибору кодів використовують саме АЕВК. Значення цього виграшу часто включаються в таблиці ЗК (див. таблиці додатка А.3). У табл. 11.1 для прикладу наведені дані про згорткові коди з різними довжинами кодового обмеження v і швидкостями $R_{\text{код}}$. Подано значення АЕВК. Більш докладні відомості дані в таблицях (А.3...А.6) додатка А.3.

Таблиця 11.1 – Характеристики згорткових кодів

Швидкість коду $R_{\text{код}}$	Довжина кодового обмеження $v = 4$		Довжина кодового обмеження $v = 6$	
	Код	АЕВК, дБ	Код	АЕВК, дБ
1/3	25,33,37	6,02	133,145,175	6,99
1/2	31,33	5,44	133,171	6,99
2/3	31,33,31	5,23	133,171,133	6,02
3/4	25,37,37,37	4,78	135,163,163,163	6,73

Зіставлення величин енергетичного виграшу, забезпечуваного циклічним кодуванням (див. табл. 8.3 і рис. 8.1) з аналогічними параметрами для ЗК (див. табл. 11.1 і рис. 11.1) показує, що згорткові коди в сполученні з алгоритмом декодування А. Вітербі забезпечують значно більший енергетичний виграш у порівнянні з кодами блокової структури. Це пояснює широке використання згорткових кодів у телекомунікаційних системах для підвищення завадостійкості. Типовим тут є застосування коду (133,171), що забезпечує АЕВК = 6,99 дБ при швидкості $R_{\text{код}} = 1/2$, тобто при двократному розширенні смуги частот кодового сигналу. Для кодеків такого коду розроблені й серійно випускаються декодери Вітербі у вигляді великих інтегральних схем.

Контрольні питання

11.1. Як залежить ЕВК від довжини кодового обмеження ЗК?

11.2. Як залежить ЕВК від швидкості ЗК?

11.3. Що є верхньою границею для ЗК?

11.4. Що показує АЕВК?

11.5. Якими параметрами ЗК визначається ймовірність помилки декодування у двійковому симетричному каналі при використанні алгоритму декодування по максимуму правдоподібності?

11.6. Як визначається енергетичний виграш від застосування ЗК?

Завдання

11.1. Користуючись таблицями ЗК із додатка А.3, побудуйте залежності АЕВК згорткових кодів від швидкості коду при фіксованих значеннях ДКО. Поясніть тенденції ходу цих залежностей.

11.2. Користуючись таблицями ЗК із додатка А.3, побудуйте залежності АЕВК згорткових кодів від ДКО при фіксованих значеннях швидкості коду. Поясніть тенденції ходу цих залежностей.

11.3. Користуючись таблицями з додатка А.3, виберіть ЗК, що забезпечують $АЕВК > 6дБ$, і вкажіть параметри цих кодів.

12. КРИТЕРІЙ ЕФЕКТИВНОСТІ Й ШЛЯХИ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ ЦИФРОВИХ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМ

12.1. Теорія ефективності А.Г. Зюко. Інформаційна, енергетична й частотна ефективності телекомунікаційних систем [1, 5, 13].

12.2. Гранична ефективність телекомунікаційних систем і границя К. Шеннона [1, 5, 13].

12.3. Перспективні шляхи подальшого підвищення ефективності [1, 10, 11].

12.1. Теорія ефективності А.Г. Зюко. Інформаційна, енергетична й частотна ефективності телекомунікаційних систем

Життя сучасного суспільства немислиме без широкого використання різноманітних засобів передавання інформації каналами телекомунікацій. У початковий період свого розвитку теорія передавання повідомлень базувалася на *детерміністському підході*, коли реальні процеси моделювалися регулярними, тобто однозначно певними функціями. Однак застосування *імовірнісних методів* дозволило знайти більш ефективні рішення багатьох актуальних задач техніки зв'язку. Теорія зв'язку стала розвиватися як *статистична теорія*, основу якої склали *теорія завадостійкості й теорія інформації*.

Теорія завадостійкості зобов'язана своєю появою дисертаційної роботи В.О. Котельникова (1947 р.), опублікованої пізніше у вигляді монографії. У ній була вирішена задача *статистичного синтезу оптимальних приймальних пристроїв* і визначена *гранична завадостійкість*, що може бути досягнута, але не може бути перевищена (ці питання докладно вивчалися в модулі 3). Надалі теорія завадостійкості лягла в основу побудови ряду нових методів передавання сигналів і послужила поштовхом для їхнього впровадження й розвитку. Рік по тому у відомому журналі "Bell System Tech. Journal" була представлена основна робота К. Шеннона "Математична теорія зв'язку". У вік зростаючої диференціації людських знань автори цих робіт продемонстрували повчальні приклади вдалого сполучення глибокої математичної думки й розуміння конкретних проблем техніки зв'язку. Ідеї К. Шеннона й В.О. Котельникова, що розглядають, загалом кажучи, процес передавання інформації з різних сторін, швидко завоювали визнання серед фахівців і по праву склали основний внесок у розвиток

статистичної теорії зв'язку. Разом з тим, незабаром стало ясно, що порівняння й оптимізація різних систем передачі інформації повинні виконуватись на основі критеріїв, що враховують як інформаційні властивості переданих повідомлень, так і здатність протистояти діючим в каналі зв'язку завадами. З багатьох запропонованих варіантів перевірку часом витримали **критерії ефективності**, уперше запропоновані в 1955 р. молодим радянським ученим А.Г. Зюко.

Статистична теорія зв'язку пропонує велику кількість варіантів побудови телекомунікаційних систем. Як із цієї множини вибрати варіант, найбільш доцільний у заданих умовах? За якими критеріями варто робити цей вибір? Наскільки виправдане застосування тих або інших нових систем, і **як удосконалювати існуючі системи?** Принципове рішення цих питань в остаточному підсумку зводиться до **оптимізації систем зв'язку за критеріями ефективності.** У загальному випадку результат роботи системи зв'язку визначається **кількістю і якістю** переданої інформації. Кількість оцінюється швидкістю передавання інформації каналом $R_{\text{кан}}$ (біт/с), а якість – ймовірністю помилки. Відповідно до теорем К. Шеннона, ймовірність помилки при відповідному виборі методу передавання (модуляції/кодування) може бути зроблена довільно малою (див. докладно матеріали модуля 2). У той же час, швидкість передавання не може бути вищою деякого **інформаційного ресурсу**, називаного **пропускною здатністю каналу** $C_{\text{к}}$. А.Г. Зюко запропонував uważати одним з показників ефективності системи **величину середньої швидкості $R_{\text{кан}}$, при якій забезпечується задана вірність передавання інформації.** При цьому **інформаційна ефективність системи**, що визначає **ступінь використання пропускної здатності каналу**, визначається відносною величиною $\eta = R_{\text{кан}} / C_{\text{к}}$. У реальних умовах показник η завжди менший одиниці. Чим ближче η до одиниці, тим досконаліша система передавання інформації.

Досягнення необхідних швидкості й вірності передавання супроводжується певними витратами інших найважливіших ресурсів: потужності сигналу $P_{\text{с}}$ і смуги пропускання каналу $F_{\text{к}}$. Такий підхід дозволив увести показники **енергетичної** ($\beta = R_{\text{кан}} / (P_{\text{с}} / N_0)$) й **частотної ефективності** ($\gamma = R_{\text{кан}} / F_{\text{к}}$), що характеризують ступінь використання згаданих ресурсів. Тут $P_{\text{с}}/N_0$ – відношення потужності сигналу до спектральної густини потужності шуму на вході демодулятора). Таким чином, **показники ефективності по А.Г. Зюко** мають вигляд:

– **інформаційна ефективність системи**, що визначає ступінь використання пропускної здатності каналу

$$\eta = \frac{R_{\text{кан}}}{C_{\text{к}}}; \quad (12.1)$$

– **енергетична ефективність**

$$\beta = \frac{R_{\text{кан}}}{P_{\text{с}} / N_0}; \quad (12.2)$$

– **частотна ефективність**

$$\gamma = \frac{R_{\text{кан}}}{F_{\text{к}}}. \quad (12.3)$$

12.2. Гранична ефективність телекомунікаційних систем і границя К. Шеннона

Показники β і γ мають сенс *питомих швидкостей*, а зворотні величини $\beta' = 1/\beta$ і $\gamma' = 1/\gamma$ визначають *питомі витрати* відповідних ресурсів на передавання інформації з одиничною швидкістю (1 біт/с).

Для гауссового каналу зі смугою пропускання $F_{\text{к}}$, відношенням потужностей сигналу й шуму $\rho = P_{\text{с}}/P_{\text{ш}}$ і пропускну здатністю $C_{\text{к}} = F_{\text{к}} \log(\rho + 1)$ можна встановити, що ці показники ефективності зв'язані співвідношенням:

$$\eta = \frac{\gamma}{\log(1 + \gamma/\beta)} \quad \text{і} \quad \gamma = \rho\beta. \quad (12.4)$$

Для ідеальної системи ($\eta = 1$) може бути визначена *гранична залежність*. Відповідно до теореми Шеннона, при відповідних способах передавання (кодування й модуляції) і приймання (демодуляції й декодування), величина η може бути як *завгодно близькою до одиниці*. При цьому ймовірність помилки може бути зроблена як *завгодно малою*. У цьому випадку з умови $\eta = 1$ одержуємо граничну залежність між β і γ :

$$\beta = \frac{\gamma}{2^{\gamma} - 1} \quad (12.5)$$

Ця формула визначає залежність енергетичної ефективності від частотної ефективності для *ідеальної системи*, що забезпечує *рівність швидкості передавання інформації і пропускну здатності каналу*. Цю залежність зручно представляти у вигляді кривої на площині $\beta = f(\gamma)$ («Межа Шеннона»). Ця крива є *граничною* й відбиває *найкращий обмін* між β і γ у неперервному каналі (НК). Варто відмітити, що частотна ефективність γ змінюється в межах від 0 до ∞ , у той час, як енергетична ефективність обмежена зверху величиною

$$\beta_{\text{max}} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \beta = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma}{2^{\gamma} - 1} = \frac{1}{\ln 2} \approx 1,443. \quad (12.6)$$

Іншими словами, енергетична ефективність будь-якої системи передавання інформації гауссовим каналом не може перевищувати величини

$$\beta_{\text{max}} = 1,443. \quad (12.7)$$

У реальних цифрових системах передавання ймовірність помилки p завжди має кінцеве значення й інформаційна ефективність менше граничної ефективності $\eta_{\text{макс}}$. У цих випадках для фіксованої ймовірності помилки $p = \text{const}$ можна визначити коефіцієнти ефективності β і γ і побудувати криві $\beta = f(\gamma)$. У координатах (β, γ) кожному варіанту системи передавання інформації буде відповідати точка на площині. Всі ці точки (криві) повинні розташовуватися

нижче граничної кривої Шеннона. Хід цих кривих залежить від виду сигналів (модуляції), коду (методу кодування) і способу оброблення сигналів (демодуляції/декодування).

||| **Про досконалість методів передавання** цифрової інформації судять по ступеню наближення реальних значень ефективності до граничних значень.

Конкретні дані про показники ефективності різних методів модуляції й кодування, а також їхніх сполучень, наведені в наступному розділі.

12.3. Перспективні шляхи подальшого підвищення ефективності телекомунікаційних систем

Сучасні цифрові телекомунікаційні системи (ЦТКС) являють собою складні комплекси, що складаються з різних функціонально залежних елементів. Ці системи характеризуються великим числом елементів, ієрархічністю структури, надмірністю і наявністю між елементами прямих, зворотних і перехресних зв'язків. У попередніх модулях дисципліни ТЕЗ вивчалися окремі пристрої (елементи) ЦТКС і процеси, що відбуваються в них. У результаті такого *роздільного* (поелементного) аналізу отримані алгоритми функціонування кодека джерела, модему й, відповідно, кодека каналу. Синтезовано оптимальні демодулятори сигналів, визначена їхня завадостійкість, проаналізовані методи завадостійкого кодування. Тепер необхідно розглянути **роботу** цифрових телекомунікаційних систем **у цілому**, на основі єдиного підходу, з використанням показників ефективності, розглянутих у попередньому розділі. Такий підхід дозволить намітити **шляхи оптимізації** ЦТКС, з урахуванням взаємодій і властивостей елементів, що належать системі. Для рішення таких задач необхідний системний підхід (системний аналіз). *Принцип системного підходу* базується на поданні об'єкта як складної системи з урахуванням специфічних зв'язків і властивостей елементів, що належать системі. У модулі 1 були вивчені властивості широкого класу сигналів цифрових модуляцій і методи їхнього формування. Аналіз показує, що змінюючи властивості дискретних *сигналів-переносників інформації* каналом зв'язку, можна в широких межах змінювати показники ефективності ЦТКС.

Аналогічно, застосовуючи різноманітні, розглянуті в навчальному посібнику методи завадостійкого кодування, проектувальник телекомунікаційної системи, що володіє мистецтвом оптимізації, може **гнучко змінювати показники ефективності, наближаючи їх до граничних, потенційно можливих значень**, які установлені в попередньому розділі.

||| **Ефективність систем передавання дискретних повідомлень можна істотно підвищити** шляхом застосування багатопозиційних сигналів і коректувальних кодів, а також їхніх комбінацій. Вибір сигналів і кодів у цих випадках є визначальним для побудови **високоєфективних систем передавання** (погоджених між собою кодеків і модемів).

У модулі 1 властивості дискретних сигналів вивчалися на основі геометричних подань. У багатомірному просторі дистанційні властивості дискретних сигналів і завад легко визначаються на основі геометричних співвідношень, при цьому коефіцієнти ефективності можуть мати простий вигляд. При малій імові-

рності помилки ($p < 10^{-3}$) енергетична й частотна ефективність визначаються, відповідно, виразами:

$$\beta = \frac{1}{E_6/N_0} = \frac{N_0}{E_6}, \quad \text{і} \quad \gamma = \frac{\log_2 M}{N}. \quad (12.8)$$

Тут E_6/N_0 – відношення енергії сигналу, затрачуваної на передавання одного біта інформації, до спектральної щільності потужності білого шуму, що забезпечує необхідну ймовірність помилки p ;

M – об'єм алфавіту ансамблю сигналів;

N – розмірність простору сигналів.

Порівняння ефективності систем з багатопозиційними сигналами й коректувальними кодами зручно проводити з використанням діаграми $\beta = f(\gamma)$, представленої на рис. 12.1. При цьому ступінь досконалості методів модуляції й кодування можна оцінити, зіставляючи ефективність із граничними значеннями. У той же час, порівняння різних методів модуляції й кодування зручно проводити, взявши за «точку відліку» ефективність системи передавання з модуляцією ФМ-4 (без завадостійкого кодування). Із числа простих методів це найбільш ефективний і широко використовуваний метод модуляції з показниками: $\gamma = 2$ (3 дБ), $\beta = -9,6$ дБ, $\eta = 0,47$.

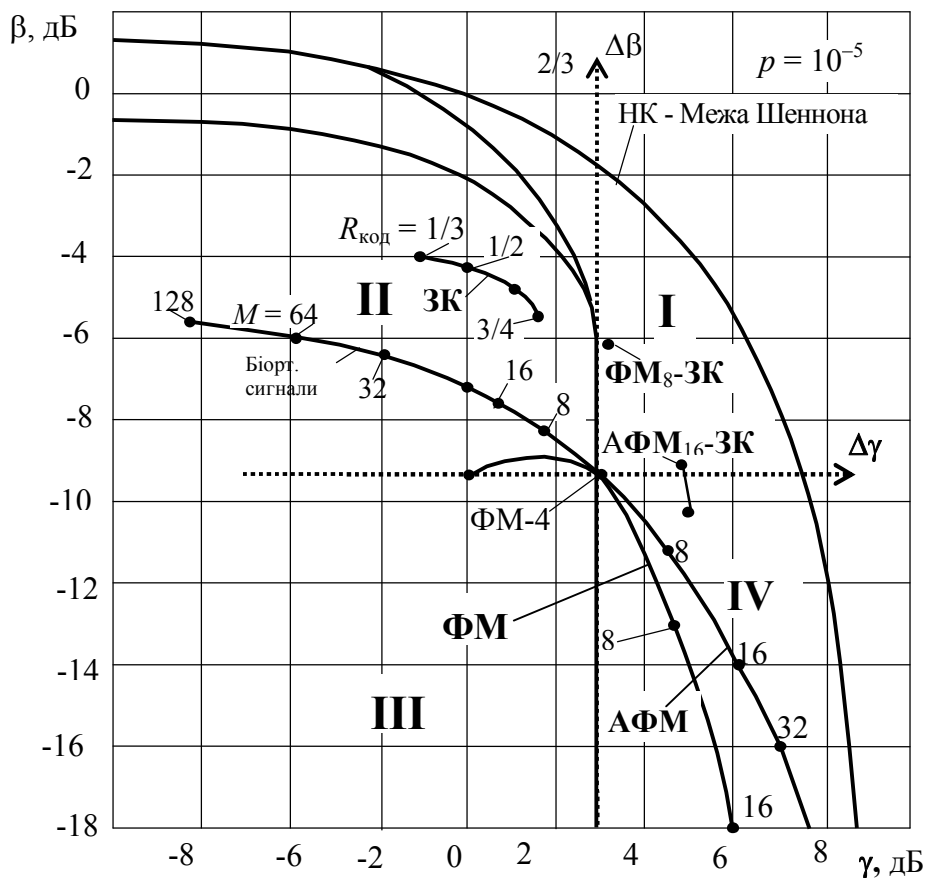


Рисунок 12.2 – Криві ефективності багатопозиційних сигналів і коректувальних кодів

Зручно також і те, що точка, що зображує на рис.12.1 значення ефективності ФМ-4, розташована в центральній частині діаграми. Якщо початок коор-

динат перенести в точку, що відповідає ФМ-4, то в новій системі координат ($\Delta\beta$, $\Delta\gamma$) по вертикальній осі буде відлічуватися **енергетичний виграш** $\Delta\beta$ у порівнянні із ФМ-4, а по горизонтальній осі **виграш по питомій швидкості** $\Delta\gamma$.

Наведені на рис. 12.1 дані щодо ефективності різних методів модуляції й кодування опубліковані в монографії [13, рис. 2.18, табл. 2.6, 2.7, рис. 3.8, рис. 3.9].

Відзначимо, що всі можливі методи модуляції/кодування можна розділити на чотири групи, що відповідають *чотирьом квадрантам на діаграмі* $\Delta\beta = f(\Delta\gamma)$:

– **Квадрант III**, у якому розташовані **низькоефективні методи**, що мають відносно ФМ-4 **програш** по β і γ .

– **Квадрант II**, що включає **методи з високою енергетичною ефективністю**, які забезпечують **виграш по β в обмін на програш по γ** (системи з коректувальними кодами);

– **Квадрант IV**, що включає методи модуляції, які забезпечують **виграш по γ в обмін на програш по β** (системи з багатопозиційними ФМ і АФМ сигналами);

– **Квадрант I**, що включає **перспективні методи** модуляції/кодування, які забезпечують **одночасне підвищення як енергетичної, так і частотної ефективності**.

Слід зазначити характерну рису результатів аналізу ефективності: співвідношення між енергетичною й частотною ефективністю носять **обмінний характер**, тобто **підвищення енергетичної ефективності можливе за рахунок зниження частотної ефективності й навпаки**. Фактично, такий же обмінний характер мають і **граничні криві** («Межа Шеннона» на рис. 12.1), а криві, що поєднують точки для різних параметрів сигналів і кодів, розташовуються умовно «паралельно» граничним залежностям. Це підтверджує **загальну закономірність**, яку варто враховувати при оптимізації методів модуляції/кодування: **підвищення одного з показників ефективності можливе лише за рахунок зниження іншого показника**.

У багатьох телекомунікаційних системах важливим є **одночасне підвищення як енергетичної, так і частотної ефективності**. Рішення цієї задачі можливе при використанні **ансамблів багатопозиційних сигналів разом із завадостійким кодуванням**. При цьому, мабуть, необхідно формувати такі сигнали, області яких у багатомірному просторі **щільно впаковані** (щоб забезпечити високу частотну ефективність) і, разом з тим, **досить далеко рознесені** (щоб забезпечити високу енергетичну ефективність). Сполучення сигналів і кодів, що задовольняють викладеним вище умовам, були названі **сигнально-кодовими конструкціями** (СКК). У якості завадостійких кодів використовують блокові, згорткові коди, або різні каскадні коди, а в якості багатопозиційних – сигнали ФМ-М або АФМ-М. Багатопозиційний ансамбль сигналів при цьому утворює **"внутрішній код"**, а завадостійкий код (або набір кодів) – **"зовнішній код"**. Задача побудови таких СКК складається в сполученні суперечливих властивостей **«щільних»** багатопозиційних сигналів (висока частотна ефективність) і завадос-

тійких кодів (висока енергетична ефективність) у єдиній конструкції, що забезпечує одночасне зростання, як $\Delta\beta$ і $\Delta\gamma$ ефективності.

Результати розрахунків показують (рис. 12.1, квадрант І), що застосування таких СКК дозволяє одержати одночасно виграш, як по енергетичній, так і по частотній ефективності або, у всякому разі, **одержати виграш по одному показнику, не погіршуючи інший**. Так, система ФМ-8-ЗК при використанні згорткового коду з $R_{\text{код}} = 2/3$ забезпечує енергетичний виграш $\Delta\beta = 2,8$ дБ без зниження питомої швидкості γ , а система АФМ-16-ЗК при $R_{\text{код}} = 1/2$ і $\nu = 3$ – виграш по питомій швидкості $\Delta\gamma = 2$ дБ без зниження енергетичної ефективності β . Інформаційна ефективність цих систем $\eta = (0,6... 0,7)$. Детальний аналіз таких СКК наведено нижче в розділі 13.1.

Досягнення мікроелектроніки в останнім десятилітті ініціювали спроби реалізувати потенційно можливу ефективність, незважаючи на ріст складності декодування. В 1993 р. були запропоновані **турбокоди**, характеристики яких були настільки вражаючими, що першою реакцією деяких фахівців з кодування був абсолютний скептицизм. Фундаментальна ідея К. Шеннона про використання довгих послідовностей для досягнення пропускну здатності каналу авторами турбокодів реалізовувалась за рахунок багатократного декодування відносно коротких кодів, але за умови мінімальних інформаційних втрат на кожному кроці декодування. Такий алгоритм розглянуто далі в розділі 13.2.

13. ПЕРСПЕКТИВНІ МЕТОДИ КОДУВАННЯ В ЦИФРОВИХ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ

13.1. Сигнально-кодові конструкції [1, розд. 10.12; 11; 13].

13.2. Перспективні методи коректувального кодування.

13.3. Просторово-часове кодування.

13.4. Застосування коректувальних кодів у телекомунікаційних системах.

13.1. Сигнально-кодові конструкції

У сучасних телекомунікаційних системах для підвищення швидкості передавання інформації каналами зв'язку широко використовуються багатопозиційні сигнали. Перехід до багатопозиційних сигналів дозволяє *підвищити питому швидкість передавання інформації*. Приклади типових ансамблів двовимірних багатопозиційних сигналів показані на рис. 13.3. Однак, при цьому знижується завадостійкість, оскільки, як випливає з даних рис. 12.2, **з ростом числа позицій енергетична ефективність знижується**. Для компенсації погіршення завадостійкості запропоновано використовувати коректувальні коди. Оскільки більшість відомих хороших кодів відноситься до категорії двійкових, виникає **задача узгодження двійкових коректувальних кодів з недвійковими ансамблями сигналів**. Одним з можливих способів узгодження є застосування **модуляційного коду Грея**. Однак розрахунки й результати моделювання такого способу узгодження показали *низьку його ефективність*. В 1980 р. В.Л. Банкет запропонував **метод узгодження**, що був покладений в основу побудови **сигнально-кодових конструкцій** (СКК). Метод виявився ефективним і нині по-

всюдно використовується. Основна концепція побудови сигнально-кодових конструкцій заснована на використанні властивостей симетрії багатопозиційних ансамблів сигналів. На рис. 13.1 показані приклади багатопозиційних двовимірних ансамблів с числом позицій $M = (8 \dots 32)$: сигналів фазової модуляції ФМ-8, амплітудно-фазової модуляції АФМ-8 і квадратурної амплітудної модуляції КАМ-16, КАМ-32.

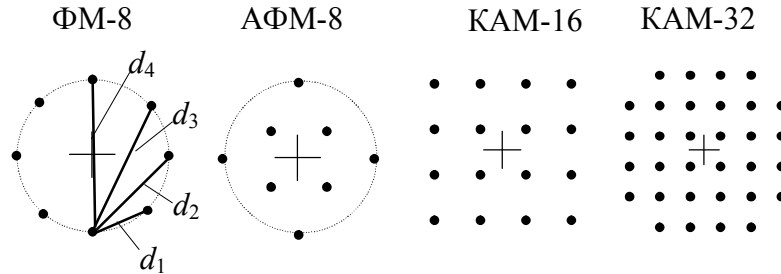


Рисунок 13.1 – Багатопозиційні ансамблі нееквідистантних сигналів
(в ансамблі ФМ-8 віддалі зростають: $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$)

Щільне розташування сигнальних точок забезпечує високу питому швидкість. Однак, **щільні ансамблі нееквідистантні**. В ансамблі ФМ-8 евклідові віддалі між найближчими сигнальними точками зростають: $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$). Використовується метод *декомпозиції* ансамблю нееквідистантних сигналів, що полягає в тому, що вихідний ансамбль розкладається на набір вкладених ансамблів (підансамблів, точки яких належать вихідному ансамблю), причому, віддалі між сигнальними точками в підансамблях d_i повинні підкорятися нерівності: $d_{\min} < d_i < d_{\max}$ (d_{\max} , d_{\min} – максимальна й мінімальна віддалі ансамблю). При побудові сигнально-кодових конструкцій приналежність до підансамблів кодується набором зовнішніх кодів зі зростаючими кодовими віддальми, які вибираються таким чином, щоб вирівняти всі результуючі віддалі. Сказане ілюструється прикладом розбивки ансамблю ФМ-8, представленому на рис. 13.2, де показана розбивка вихідного ансамблю A_0 на вкладені підансамблі B_0 і B_1 , з наступною розбивкою, відповідно, на вкладені ансамблі C_1 , C_2 і C_3 (при цьому віддалі в ансамблях зростають: $d_A < d_B < d_C$).

Структура всієї СКК для сигналів ФМ-8 має вигляд, представлений на рис. 13.3. Якщо вихідний ансамбль, що містить $M = 2^m$ сигналів, розкладений на 2^n підансамблів, то вибір сигналу в підансамблі виконується символами ненадлишкового згорткового коду зі швидкістю $R_{(0)\text{код}} = k_0/k_0 = 1$, а вибір підансамблю – n символами надлишкового коду зі швидкістю $R_{\text{код}} = k/n$. У цьому випадку на вході модулятора M -позиційних сигналів діють $(n + k_0)$ двійкових символів, а на входах композитного кодера СКК діють $(k + k_0)$ двійкових інформаційних символів. Якщо розмірність простору багатопозиційних сигналів дорівнює N , то питома швидкість всієї СКК визначається як $\gamma = (k + k_0) / N$.

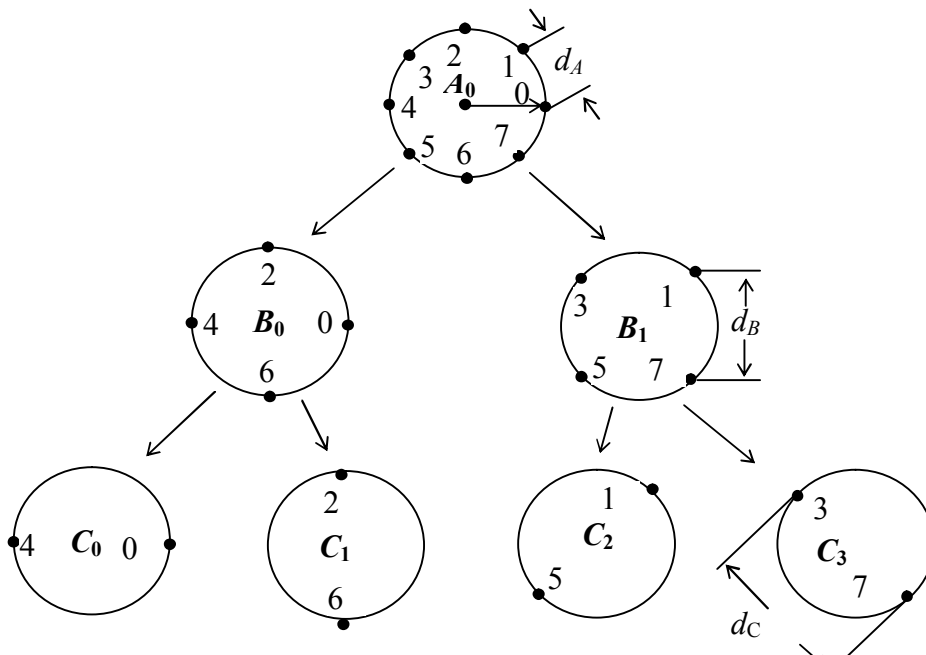


Рисунок 13.2 – Декомпозиція ансамблю ФМ-8
(віддалі в підансамблях A , B і C зростають: $d_A < d_B < d_C$).

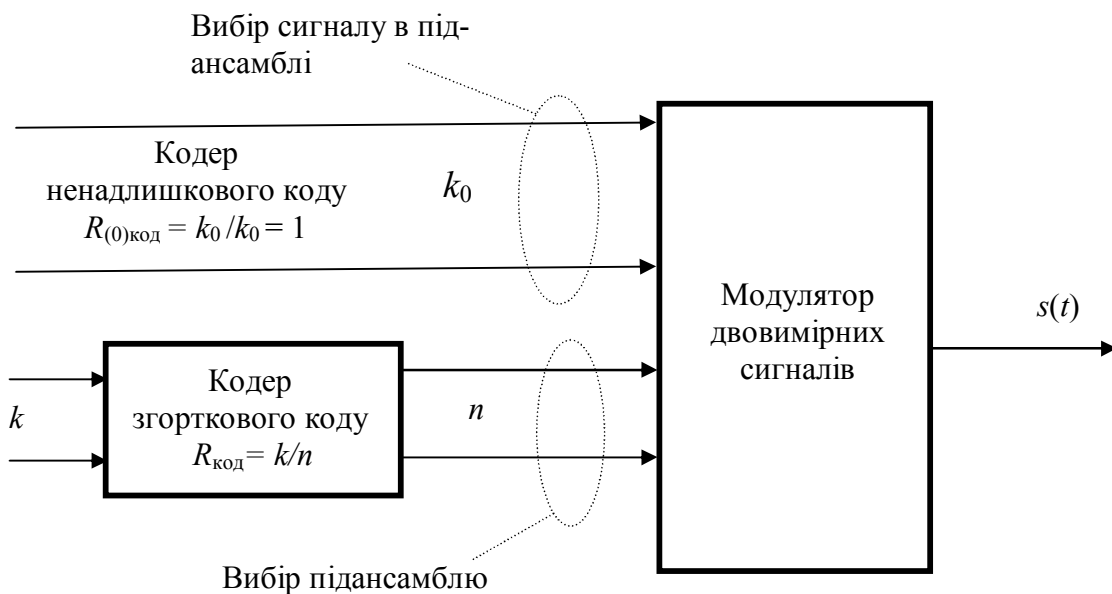


Рисунок 13.3 – Структура кодера-модулятора СКК

Дистанційні властивості таких конструкцій залежать від властивостей ансамблю сигналів і завадостійкого коду, а ЕВК визначається на основі моделювання. Декодування таких СКК виконується з використанням *алгоритму Вітербі*. У табл. 13.1 дані характеристики типових СКК, побудованих за цим методом, на базі ансамблів ФМ-8 і КАМ-32.

Наведено характеристики зовнішнього згорткового коду: швидкість $R_{\text{код}}$ і число станів кодових решіток S , яке є показником складності алгоритму декодування. Відповідно до описаної вище структури таких СКК другий зовнішній код ненадлишковий.

Таблиця 13.1 – Характеристики СКК

Метод модуляції	Розмірність простору N	Згортковий код		Питома швидкість СКК γ (біт/вимір)	ЕВК (дБ) відносно ФМ-4
		Швидкість коду $R_{\text{код}} = k/n$	Число станів СКК S		
ФМ-8	2	1/2	4	1	3,0
			8	1	3,6
			16	1	4,1
			32	1	4,6
КАМ-32	2	3/4	4	2	-1,2
			8	2	-0,2

13.2. Перспективні методи коректувального кодування

В останні роки зусиллями вітчизняних і закордонних учених освоєні методи коректувального кодування, що забезпечують енергетичний виграш (6...7) дБ у каналах з постійними параметрами й гауссовим шумом, що дозволило збільшити завадостійкість телекомунікаційних систем. Разом з тим, до теоретичної межі залишався нереалізований запас в (5...7) дБ. З теорії інформації відомо, що *ефективні коди повинні бути досить довгими зі структурою, подібною до структури випадкового шуму*. При цьому, як відзначалося вище, з ростом довжини коду складність алгоритму декодування (апаратна чи програмна складність декодера) катастрофічно зростає. Тому практично важливою задачею фахівців з кодування залишається *задача пошуку й синтезу кодів з високою здатністю виправляти помилки*, і, у той же час, з прийнятною складністю реалізації декодера. Перспективним тут виявляються методи *каскадного кодування*, короткі відомості про які наведені нижче.

Метод послідовного каскадного кодування/декодування запропонований Д. Форні. Структурна схема кодера найпоширенішого послідовного каскадного коду представлена на рис.13.4. Кодер складається з послідовно з'єднаних *зовнішнього кодера* коду Ріда-Соломона й *внутрішнього кодера* згорткового коду, увімкнених через перемешувач.

Перемешувач забезпечує перестановку кодових символів за псевдовипадковим законом. Декодер такого каскадного коду виконує декодування спочатку внутрішнього згорткового коду, а потім, після операції, зворотної перемешуванню, декодування зовнішнього блокового коду Ріда-Соломона.

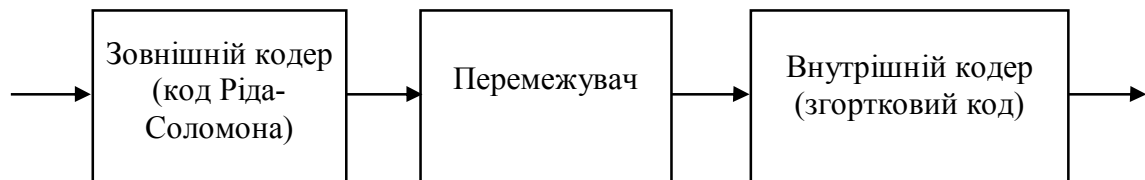


Рисунок 13.4 – Структурна схема кодера послідовного каскадного коду

Подібна конструкція стандартизована для багатьох систем передавання інформації. Наприклад, послідовний каскадний код з кодом Ріда-Соломона (255, 223) і згортковим кодом (133, 171) використовується для передавання телеметричної інформації з космічних апаратів. Подібна схема є основним мето-

дом завадостійкого кодування за стандартом цифрового телевізійного мовлення DVB. Параметри типових варіантів послідовних каскадних кодів дані в табл. 13.2.

Таблиця 13.2 – Характеристики послідовних каскадних кодів

Внутрішній згортковий код		Зовнішній код Ріда-Соломона (n, k)	Швидкість каскадного коду $R_{(k)код}$	ЕВК g , дБ
$R_{код}$	v			
1/2	6	(255, 223)	0,437	7,0
2/3	6	(255, 223)	0,583	6,3

У порівнянні зі згортковими кодами використання послідовного каскадного коду приводить до отримання **додаткового енергетичного виграшу від кодування** порядку (1...3) дБ. Подальшим кроком в удосконалюванні методів завадостійкого кодування була розробка й застосування *нового класу* так званих **паралельних каскадних кодів (турбокодів)**.

Досягнення мікроелектроніки ініціювали спроби реалізувати потенційно можливий виграш, незважаючи на ріст складності декодування. В 1993 р. групою французьких учених на чолі з К. Берроу (С. Berrou) був запропонований новий клас **паралельних каскадних кодів**, звичайно називаних **турбокодами**, результати декодування яких спочатку викликали певну недовіру фахівців з кодування. Однак на сьогодні дослідники багатьох країн підтвердили й у ряді випадків поліпшили ці результати (рис. 13.5).

Для порівняння методів завадостійкого кодування скористаємося методикою, описаною раніше в розд. 9.2. На рис. 13.5 точками відзначені характеристики систем з наступними кодами:

- 1 – блоковий код Ріда-Маллера (32, 6);
- 2 – згортковий код із ДКО $v = 31$ і швидкістю $R_{код} = 1/2$, послідовне декодування;
- 3 – згортковий код (133, 171) і швидкістю $R_{код} = 1/2$, декодування за алгоритмом Вітербі;
- 4 – каскадний код {згортковий код (133, 171) + код Ріда-Соломона (255, 223)};
- 5 – довгий згортковий код із ДКО $v = 14$ і швидкістю $R_{код} = 1/4$ – декодер BVD (Big Viterbi Decoder - великий декодер Вітербі)
- 6 – каскадний код {BVD + код Ріда-Соломона (255, 223)};
- 7 – турбокод зі швидкістю $R_{код} = 1/2$ і об'ємом перемешувача 65536 символів, запропонований К. Берроу. Алгоритм декодування MAP, 18 ітерацій, компонентні згорткові коди у восьмиричному поданні (1, 21/37);
- 8 – турбокод з $R_{код} = 1/3$ і об'ємом перемешувача 50 000 символів.

Порівняння на рис. 13.5 ведеться з ефективністю систем з некованими ФМ-2 і ФМ-4.

Як видно з рис. 13.5, турбокоди є найбільш ефективними серед розглянутих методів кодування. При однаковій частотній ефективності й у деяких випадках значно меншій складності декодування додатковий ЕВК у систем з турбокодами становить 1 дБ і вище.

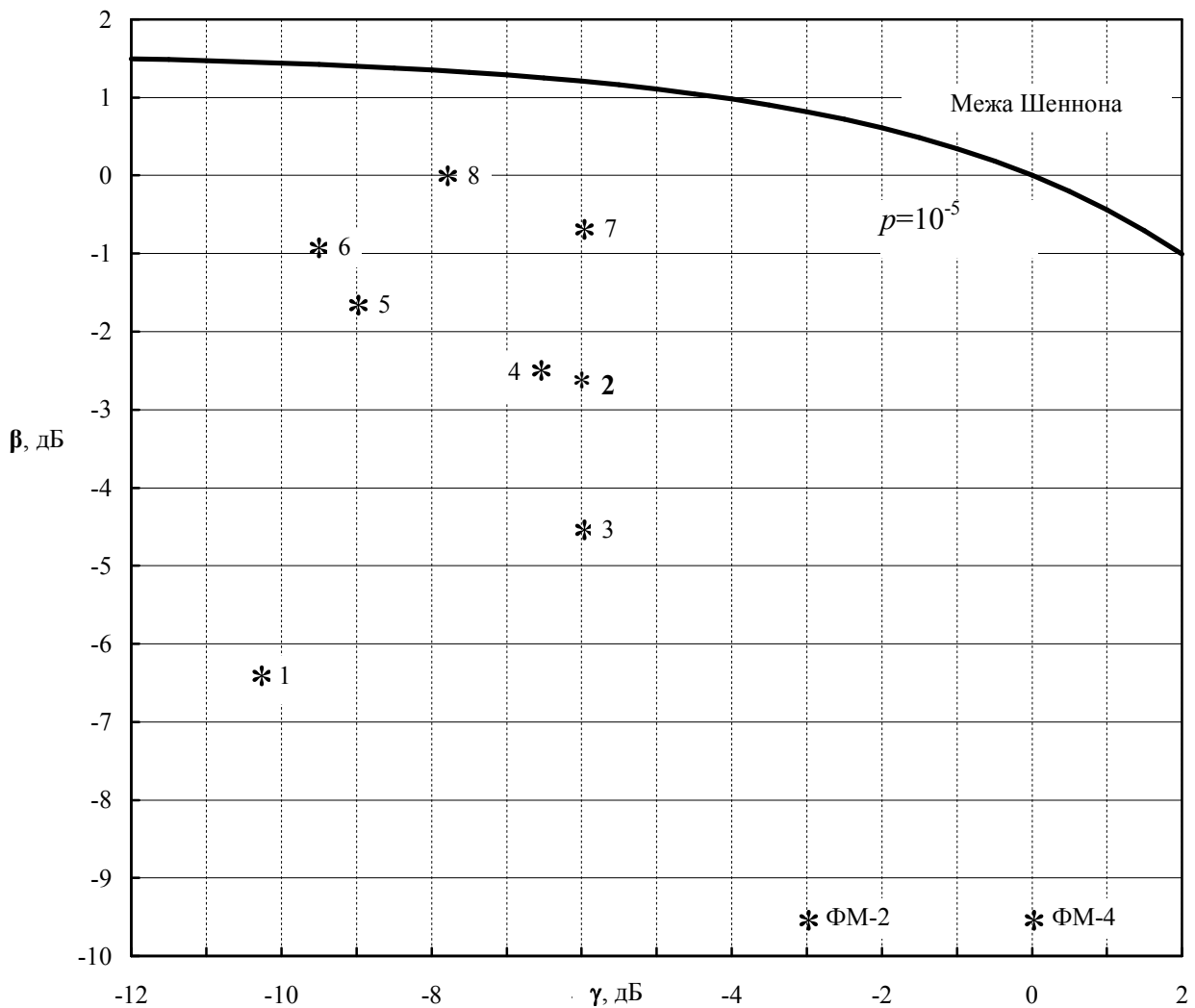


Рисунок 13.5 – Ефективність деяких систем з кодуванням

На рис. 13.6 наведено порівняння характеристик завадостійкості декодування згорткових кодів зі швидкістю $R_{\text{код}} = 1/2$ і довжиною кодового обмеження 6 і 10 і турбокоду з $R_{\text{код}} = 1/2$ і довжиною інформаційного блоку $N = 50000$ символів. Параметри турбокоду: компонентні згорткові коди (1, 35/23), алгоритм декодування log-MAP, 18 ітерацій. При $p = 10^{-5}$ турбокод забезпечує додатковий ЕВК порядку 2,5 дБ у порівнянні з довгим згортковим кодом (2671, 3645). При цьому складність декодування турбокоду менша, ніж згорткового коду.

Турбокод утворюється при **паралельному каскадуванні** двох або більше елементарних (компонентних) згорткових кодів, розділених перемежувачем. У зв'язку із цим турбокоди іноді називають **паралельними каскадними згортковими кодами**. Якщо в ролі компонентних кодів використовуються стандартні блокові коди (коди Хеммінга, БЧХ або коди Ріда-Соломона), то такі коди називають **паралельними каскадними блоковими кодами**.

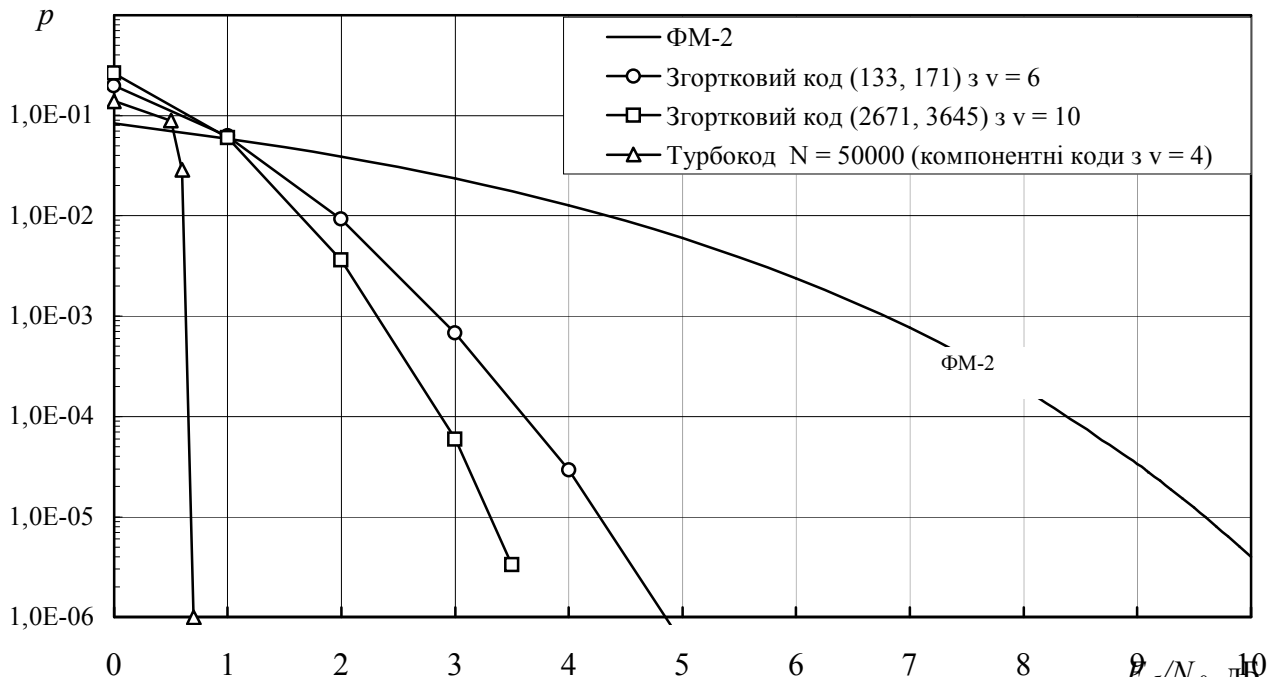


Рисунок 13.6 – Порівняння характеристик згорткових кодів і турбокоду зі швидкістю $R_{\text{код}} = 1/2$

Структурна схема кодера узагальненого турбокоду наведена на рис. 13.7. У процесі кодування інформаційна послідовність розбивається на блоки довжини N символів. Після цього сформована послідовність надходить на систематичний вихід кодера, а також *паралельно* на z гілок, що складаються з послідовного з'єднання перемежувача й компонентного кодера. Авторами турбокодів у якості компонентних запропоновано використовувати рекурсивні систематичні згорткові коди (РСЗК). Доведено, що використання РСЗК за інших рівних умов гарантує турбокоду найкращі характеристики. Наступною важливою ланкою турбокодерів є *перемежувач*. За рахунок перемежування *процес формування* кодових комбінацій турбокоду досить *близький до випадкового*. Тому *турбокод* з великим розміром блоку можна характеризувати як *довгий випадковий код*, а відповідно до теорем Шеннона саме такі коди й потрібні для передавання інформації зі швидкостями, максимально близькими до пропускну здатності каналу зв'язку. Висока ефективність використання турбокодів багато в чому зобов'язана розробленим для них алгоритмам декодування. У першу чергу відзначимо, що в основі декодування будь-яких коректувальних кодів лежить порівняння імовірнісних характеристик різних кодових слів, а стосовно до згорткових кодів – різних шляхів на решітчастій діаграмі.

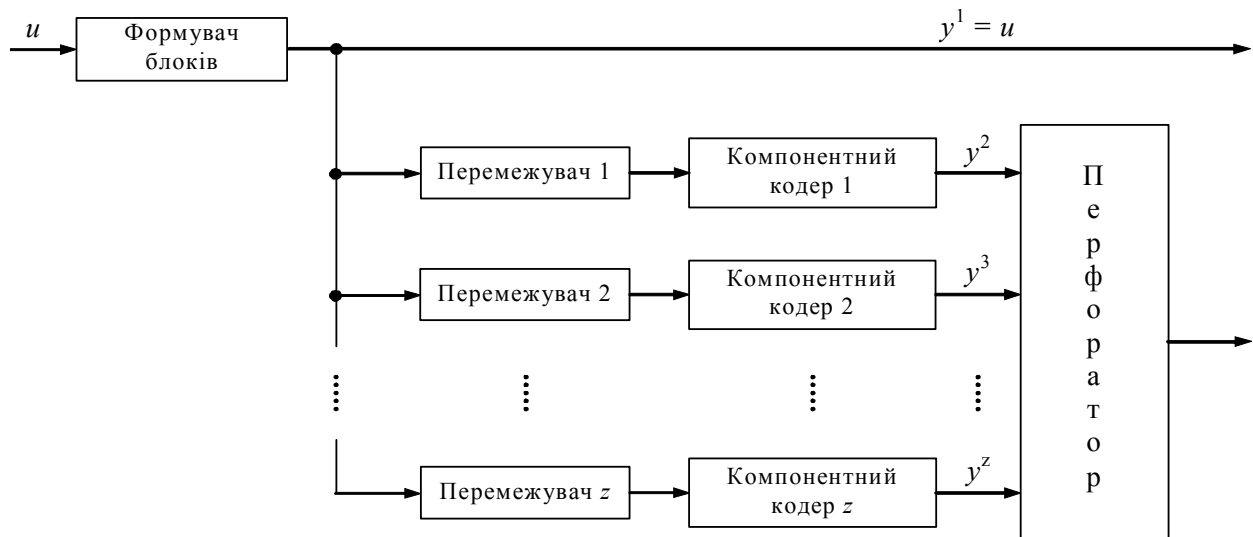


Рисунок 13.7 – Структурна схема кодера узагальненого турбокоду

На рис. 13.8 наведена структурна схема декодера турбокоду, що складається з двох елементарних декодерів (кожний з них здійснює декодування свого компонентного згорткового коду), двох перемежувачів і двох деперемежувачів. Перемежувачі аналогічні тим, що використовувалися в кодері, деперемежувачі здійснюють операцію, зворотну перемежуванню.

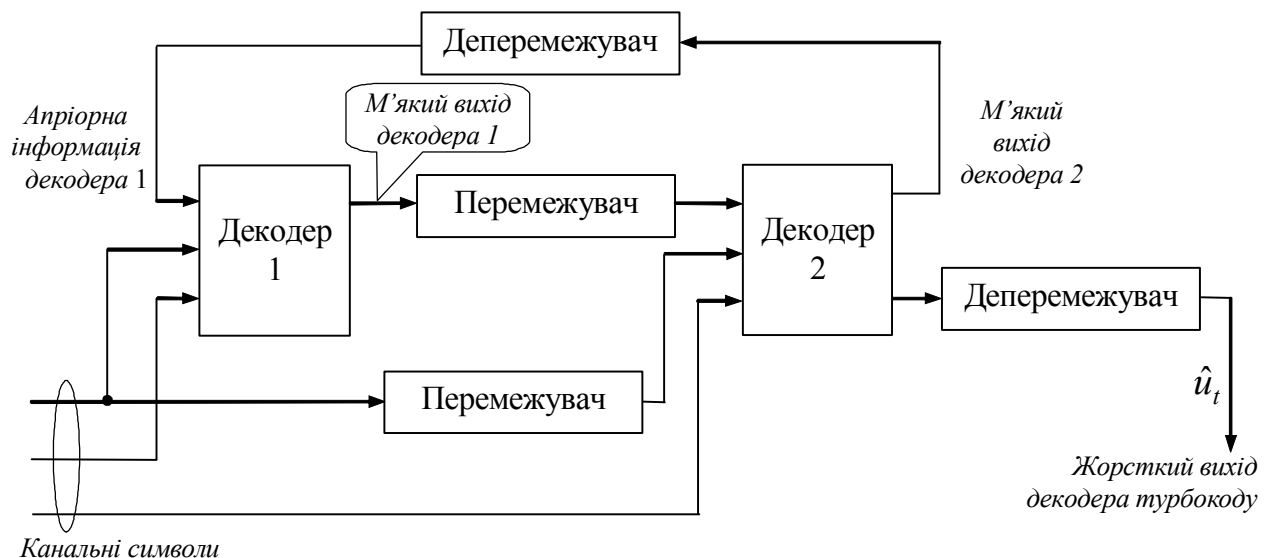


Рисунок 13.8 – Структурна схема декодера турбокоду зі швидкістю 1/3

На рис. 13.9 наведені результати моделювання процесу декодування турбокоду зі швидкістю 1/3 при використанні різного числа ітерацій. При $E_b/N_0 > 2,5$ дБ збільшення числа ітерацій понад 3 уже не дає вигаду. Необхідно відзначити, що алгоритми декодування компонентних кодів у складі турбокодів використовують *м'яке рішення як по входу, так і по виходу*. Із цієї причини вони одержали назву *алгоритмів з м'яким входом – м'яким виходом SISO* (soft input – soft output).

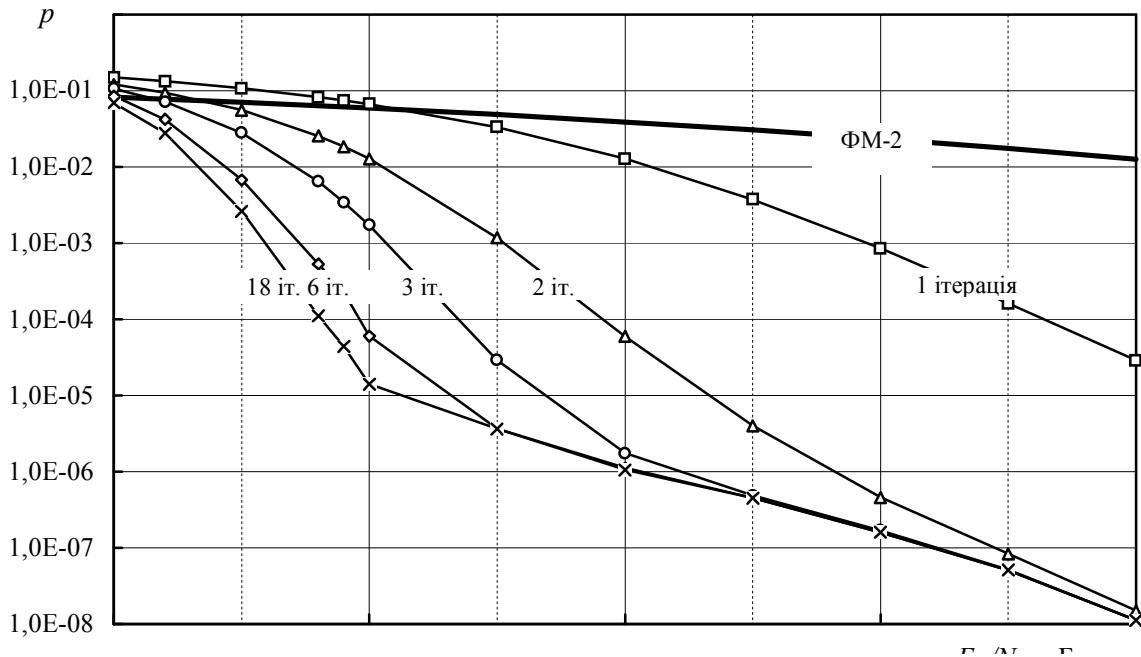


Рисунок 13.9 – Результати моделювання процесу декодування турбокоду

Висока ефективність турбокодів стала підставою їхнього широкого використання в телекомунікаційних системах з низькою енергетикою каналу зв'язку. Конкретні приклади застосування турбокодів наведені далі в розд. 13.4.

13.3. Просторово-часове кодування

У каналах радіозв'язку, зокрема, у каналах систем мобільного зв'язку діє комплекс завад і спотворень. Глибокі *завмирання* сигналу в каналі утрудняють оцінку переданих повідомлень і приводять до *погіршення якості* передачі інформації. Традиційним методом підвищення завадостійкості таких систем є рознесення.

Колись сфера застосування *рознесеного приймання* обмежувалася короткохвильовим радіозв'язком, де використовувалися добре апробовані методи й техніка. Ідея рознесеного прийому була реалізована в 1927 р. для організації радіотелефонного короткохвильового зв'язку. Останнім часом у зв'язку із широким впровадженням систем стільникового, мобільного й супутникового радіозв'язку треба було повернутися до цієї проблематики. Хоча загальна ідеологія рознесеного приймання залишилася колишньою, змінилися як характеристики каналів, так і методи передавання сигналів по радіоканалах. Не менш важливим є й те, що з'явилася можливість реалізації більш ефективних, але й *більше складних методів рознесення*.

Ідея рознесення для боротьби із завмираннями полягає в *спільному використанні на прийомі декількох сигналів, що несуть ту саму інформацію*, але прийшли різними шляхами. Рознесення повинне вибиратися таким чином, щоб імовірність одночасних завмирань всіх використовуваних сигналів була багато меншою, ніж будь-якого одного з них. Іншими словами, *ефективність рознесення тим вища, чим менше корельовані завмирання в парціальних каналах*. Класичний підхід до реалізації методу рознесення складається у використанні

одного передавача й декількох, *рознесених у просторі приймальних антен* з наступним ваговим підсумовуванням або автовибором сигналів з метою підвищення якості приймання. В умовах мобільного зв'язку для ділянки «базова станція – мобільний абонент» така реалізація неприйнятна, оскільки використання декількох приймальних антен і пристрою комбінування прийнятих сигналів робить мобільну станцію громіздкою й дорогою. Однак, можлива організація рознесених каналів за рахунок використання *декількох рознесених антен на передачі* (на базових станціях). Базова станція обслуговує сотні й тисячі мобільних абонентів і більш доцільне ускладнення апаратури невеликого числа базових станцій, ніж множини мобільних терміналів. При цьому на ділянці «мобільний абонент – базова станція» може здійснюватися приймання на ті ж рознесені антени базової станції, але працюючі в режимі прийому. У деяких існуючих стільникових системах уже використовуються на базових станціях дві приймальні антени для рознесеного приймання. Ці ж антени можуть бути використані для рознесеного передавання.

Системи з рознесеним передаванням теоретично досліджені значно менше, ніж системи з рознесеним прийманням. Серед різних методів рознесення на передачі перспективним є *просторово-часове кодування*, реалізація якого припускає не тільки передавання інформаційних сигналів через кілька антен, але й відповідне їхнє кодування, що з урахуванням адекватної обробки їх у приймачі в порівнянні з некодованим передаванням через одну антену, повинне забезпечити *виграш*, як *від рознесення*, так і *від кодування*. Підвищення якості зв'язку в умовах багатопроменевості – складна задача. У каналі з постійними параметрами й гауссовим шумом за допомогою звичайних методів завадостійкого кодування можна на порядок понизити ймовірність помилок за рахунок збільшення відношення сигнал/шум (ВСШ) на (1...2) дБ. У каналах із завмираннями домогтися подібних результатів можна збільшенням ВСШ приблизно на 10 дБ. Однак просте збільшення потужності як абонентських, так і базових станцій у системах мобільного зв'язку не можна визнати конструктивним рішенням, оскільки в цьому випадку найчастіше порушуються вимоги по електромагнітній сумісності. Залежно від способів формування рознесених каналів розрізняють кілька методів рознесення.

1. **Частотне рознесення.** Інформаційні сигнали, передані на різних частотах, піддаються при багатопроменевому поширенні впливу різних спотворень. Для одержання виграшу частоти носівних повинні бути досить рознесені, щоб завмирання в гілках рознесення були некорельованими. Платою за підвищення завадостійкості є розширення займаної смуги частот. При цьому також можливо застосування кодування з виправленням помилок у сигналах парціальних частотних каналів, які можуть виникати внаслідок частотно-селективних завмирань. Відомий метод частотного мультиплексування й передавання інформації рознесеними по частоті вузькосмуговими підканалами (OFDM) можна також використовувати в режимі частотного рознесення.

2. **Часове рознесення.** Коли те саме повідомлення посиляється в канал в різні проміжки часу, завмирання прийнятих сигналів можуть бути некорельованими, якщо достатнє часове рознесення між ними. Якщо передані сигнали

рознесені на час, більший часу когерентності каналу, то ймовірність того, що сигнали в різних гілках піддаються дії тих самих глибоких завмирань, досить мала. Для підвищення завадостійкості додатково може бути використане каналне кодування в сполученні з перемешуванням у часі. Ефективність часового рознесення залежить від швидкості переміщення мобільної станції. Коли параметри каналу змінюються в часі повільно, необхідно перемешування з великою пам'яттю, що приводить до більших затримок у передаванні повідомлень. Із цієї причини кодування з перемешуванням ефективне лише в каналах зі швидкими завмираннями (в умовах «швидкої» мобільності) і малоефективне в каналах з повільними завмираннями («повільна» мобільність або фіксований безпроводовий зв'язок). У середньому, часове рознесення каналів обернено пропорційне швидкості пересування мобільного терміналу.

3. Інші методи рознесення. Нерідко паралельні канали утворюються в результаті особливостей механізму поширення радіохвиль. При багатопроменевому поширенні той самий сигнал приходить до місця розташування приймальної антени декількома шляхами. Застосовуючи ряд гостронаправлених приймальних антен, можна розділити промені по кутах приходу й розглядати інформаційні сигнали як такі, що прийшли по паралельних каналах. Якщо енергетичний спектр сигналу досить широкий у порівнянні з величиною, зворотною запізненню сусідніх променів, те, як відомо, ці промені можна розділити в приймачі, тобто здійснити рознесене приймання по променях. Інший спосіб утворення паралельних просторово рознесених каналів полягає в тім, що сигнал приймається декількома антенами, що перебувають на значній відстані одна від одної. Можна здійснити також поляризаційно-рознесене приймання, використовуючи антени, що приймають хвилі з різними векторами поляризації. Можливо також комбінування перерахованих вище методів.

4. Просторово-часове кодування є одним з перспективних методів рознесення. Використовувані в багатьох сучасних системах передавання інформації методи коректувального кодування реалізують, по суті, рознесення в часі. При одноканальному передаванні (одна передавальна й одна приймальна антени) пакет помилок можна трактувати як результат дії сильного завмирання сигналу. Навіть короткі блокові або згорткові коди в сполученні з ефективними перемешувачами дозволяють виправляти досить довгі пакети помилок у каналах. Тому сполучення розглянутих вище методів рознесення й методів коректувального кодування цілком доцільне. Ідеї просторово-часового кодування (ПЧК) виникли на базі результатів і як розвиток методів рознесення на передачі. При традиційному коригувальному кодуванні вводиться *надмірність у часовій області*. У системах із ПЧК вводиться *надмірність і в просторовій області*, утвореної декількома приймальними й передавальними антенами (рис. 13.10). При ПЧК можливе одержання додаткового виграшу за рахунок ускладнення методів передавання й оброблення сигналів на прийомі.

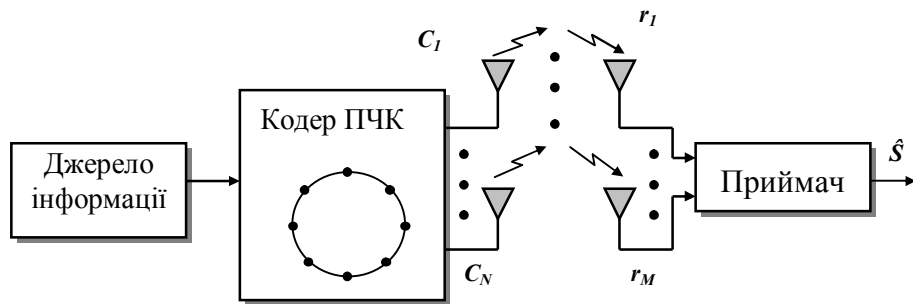


Рисунок 13.10 – Модель системи з просторово-часовим кодуванням

На рис. 13.11 представлено простий приклад кодера на передачі, конфігурації сигнального сузір'я й решітчастої діаграми ПЧК. Кодування виконується в алфавіті алгебраїчного кільця $Z(8)$ (кільце цілих чисел з операціями додавання й множення за модулем 8).

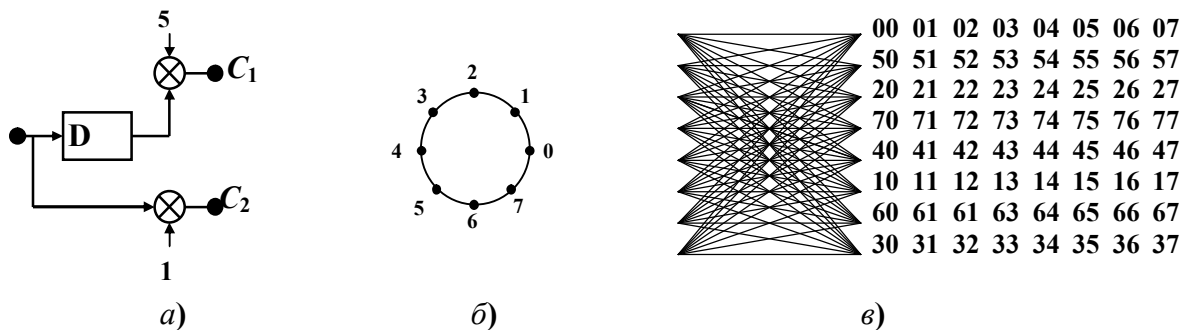


Рисунок 13.11 – Кодер (а), сигнальне сузір'я (б) і решітчаста діаграма (в) ПЧК

Багаточлени кодера ПЧК, що породжують, відшукуються на основі перебору за критерієм максимізації енергетичного виграшу в каналі із завмираннями. Кількість передавальних і приймальних антен $N = M = 2$. Виходи кодера C_1 і C_2 підключені до відповідних входів передавачів рознесених передавальних антен. З метою підвищення питомої швидкості передавання інформації в модуляторах використовується фазова модуляція ФМ-8. Відповідне сигнальне сузір'я показано на рис. 13.11, б. Число станів ПЧК визначається структурою кодера й дорівнює 8. Багаточлени кодера, що породжують, у восьмиричній формі запису мають вигляд (5,1) (код з одиничною пам'яттю).

Один крок решітчастої діаграми ПЧК (рис. 13.11, в) містить набори попередніх і наступних станів (0...7) та з'єднуючих їхніх гілок. Кожна гілка маркується парою символів на виході кодера C_1C_2 . У правій частині діаграми показані рядки з парами символів, що маркують гілки, які виходять із конкретного стану в порядку їхнього перерахування зверху донизу. Приміром, пара символів $C_1C_2 = 52$, що розташована в другому рядку на другому місці ліворуч, маркує гілку, що з'єднує попередній стан «1» з наступним станом «2». Передбачається, що оброблення сигналів на прийомі виконується шляхом декодування по решітці ПЧК на основі алгоритму Вітербі. На рис. 13.12 наведені результати моделювання ПЧК у каналі із завмираннями.

При використанні однієї антени на передавальній стороні й однієї антени на приймальній стороні величину g_k можна трактувати як **енергетичний виграш за рахунок завадостійкого кодування**. Величина цього виграшу невелика, оскільки використовується короткий завадостійкий код.

Збільшення кількості передавальних антен (2 або 4 антени) при одній приймальній антені дає **додатковий виграш g_p за рахунок рознесення на передачі**.

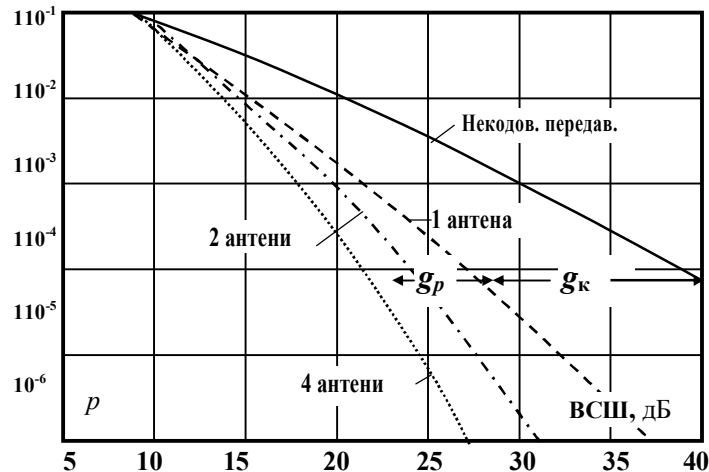


Рисунок 13.12 – Завадостійкість ПЧК

Методи просторово-часового кодування мають велику гнучкість і дозволяють застосовувати різні методи завадостійкого кодування, у тому числі й ефективні недвійкові коди Ріда-Соломона. У сполученні із сигнальними сузір'ями й щільним укладанням сигнальних точок застосування ПВК забезпечує не тільки високу завадостійкість, але й високу питому швидкість передавання інформації в каналах з обмеженою смугою пропускання. Приміром, при використанні модуляції КАМ-16 у системі із двома передавальними й двома приймальними антенами досягається швидкість передавання 74,4 кбіт/с при ВСШ, рівному 16 дБ. Ця швидкість у 2,6 рази вища швидкості передавання в системі на базі стандарту IS-136 (28,8 кбіт/с). Аналіз показує, що застосування ПЧК дає гарні результати навіть коли є кореляція між сигналами від різних передавальних антен.

13.4. Застосування коректувальних кодів у телекомунікаційних системах

Можливості підвищення завадостійкості передавання інформації каналами з завадами за рахунок використання коректувальних кодів обумовлюють їхнє широке застосування в телекомунікаційних системах вслякого призначення. Конструктивна теорія завадостійкого кодування пропонує виробникам телекомунікаційного встаткування великий набір методів кодування, які були розглянуті в попередніх розділах. Нижче наведені типові приклади таких застосувань.

Циклічний код для виявлення помилок. Циклічний код для виявлення помилок рекомендований для застосування в системах передавання дискретних

повідомлень у Рекомендації Міжнародного Союзу Електрозв'язку V.41. Багато-член, що породжує код, $g(x) = x^{16} + x^{12} + x^5 + 1$.

Завадостійке кодування в системах цифрового супутникового зв'язку. Системи цифрового супутникового зв'язку є типовою сферою для впровадження розробок теорії кодування. Це обумовлено тим, що одержання енергетичного виграшу від кодування дозволяє істотно послабити вимоги до енергетики супутникового каналу, яка обмежена енергоресурсами бортового ретранслятора й малими розмірами приймальної антени. Традиційним тут є використання послідовних каскадних конструкцій (із внутрішнім згортковим кодом (ЗК) і зовнішнім кодом Ріда-Соломона (РС)). На ринку модемів для супутникового зв'язку пропонуються модеми, параметри яких наведені в табл. 13.3. За рахунок застосування турбокодів модем CMD-550T у порівнянні з попередньою модифікацією CMD-550, забезпечує додатковий ЕВК = 1,5 дБ при 40% економії смуги.

Таблиця 13.3 – Низькошвидкісні модеми для супутникового зв'язку

Найменування модему	CM-601	DMD-24011	CDM-550	CDM-550T
Швидкість, кбіт/с	4,8–512	9,6–2048	2,4–512	2,4–512
Метод модуляції	ФМ-2, ФМ-4	ФМ-2, ФМ-4	ФМ-2, ФМ-4	ФМ-2, ФМ-4
Спосіб завадостійкого кодування	Послідов. каскадн. код {ЗК-РС}	Послідов. каскадн. код {ЗК-РС}	Послідов. каскадн. код {ЗК-РС}	Турбокод
ЕВК, дБ ($p = 10^{-7}$)	7,0	7,0	7,0	8,5

Коректувальні коди в стандартах цифрового телевізійного мовлення. Висока завадостійкість передавання інформації при використанні завадостійкого кодування обумовила широке застосування коректувальних кодів у групі стандартів цифрового телевізійного мовлення DVB:

– для систем цифрового супутникового телевізійного віщання DVB-S розроблений Європейський стандарт EN 301 210;

– для систем цифрового наземного кабельного телевізійного мовлення DVB-T розроблений Європейський стандарт EN 300 744.

У стандартах широко використовується послідовний каскадний код {зовнішній код Ріда-Соломона (204,188) і внутрішній згортковий код (133,171)}.

Стандартизація турбокодів як метод каналного кодування. Незабаром після винаходу турбокодування міжнародні організації по стандартизації засобів телекомунікацій почали проводити роботи зі стандартизації параметрів турбокодів як метод каналного кодування в системах передавання телеметричної інформації з космічних апаратів. За Рекомендацією CCSDS (Consultative Committee for Space Data Systems) рекомендовано використання турбокодів зі швидкостями $R_{\text{код}} = (1/2, 1/3, 1/4, 1/6)$ і компонентними ЗК із довжиною кодового обмеження $v = 4$.

Кодування в системах рухливого радіозв'язку третього покоління за стандартом UMTS. Рекомендацією Європейського інституту по стандартизації ETSI (European Telecommunications Standards Institute) визначені наступні пара-

метри турбокоду: швидкість коду $1/3$, компонентні ЗК із $v = 3$, довжина інформаційного блоку (40...5114) символів.

Сигнально-кодові конструкції. Сигнально-кодові конструкції широко використовуються в структурах модемів для комп'ютерного обміну по стандартних каналах тональної частоти в мережах Інтернет. Параметри СКК передбачені Рекомендаціями МСЭ V.32 і V.34, відомості про які дані в табл. 13.4.

Таблиця 13.4 – Параметри СКК

Параметри	V.32	V.34
Метод модуляції	КАМ-32	КАМ-960
Кількість станів кодових решіток	8	16
Швидкість передавання даних по СКТЧ (кбіт/с)	14,4	33,6

Коректувальні коди в системах передавання цифрової інформації по лініях волоконно-оптичного зв'язку. Застосування коректувальних кодів у системах передавання цифрової інформації по лініях волоконно-оптичного зв'язку передбачено Рекомендацією МСЭ G.975. Завадостійке кодування дозволяє знизити величину відношення сигнал/шум на вході приймача оптичного випромінювання, необхідного для забезпечення заданої ймовірності помилки, і **збільшити**, відповідно, **довжину магістралі системи** з ВОЛЗ. За даними провідної фірми ALCATEL використання в складі каналоутворюючої апаратури системи з ВОЛЗ кодека з ЕВК порядку 10 дБ дозволить **збільшити довжину регенераційної ділянки ВОЛЗ** більш ніж удвічі (рис. 13.13).

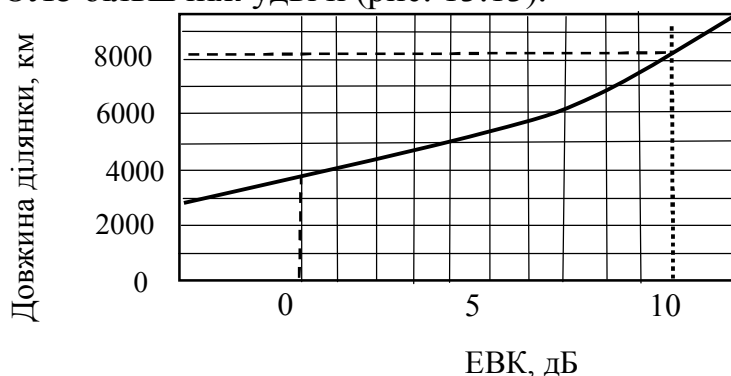


Рисунок 13.13 – Залежність протяжності магістралі системи передавання з ВОЛЗ від величини енергетичного виграшу, що забезпечується завадостійким кодуванням

Значення досягнутих нині величин ЕВК зведені в табл. 13.5.

На конференції/виставці систем волоконно-оптичного зв'язку OFC-2009 був представлений кодек блокових турбокодів, що забезпечує ЕВК 10,1 дБ на швидкості 12,4 Гбіт/с.

Таблиця 13.5 – Характеристики методів завадостійкого кодування в системах ВОЛЗ

Метод кодування	ЕВК, дБ ($p = 10^{-13}$)	Швидкість коду $R_{\text{код}}$
За Рекомендацією G.975		
Код Ріда-Соломона (2720, 2550)	6,7	0,93
Послідовний каскадний код {РС(1023,1007)+БЧХ(2047,1952)}	8,0	0,93
Експериментальні результати		
Блоковий турбокод (із гнучким рішенням)	10,1	0,86

ДОДАТКИ

А. Характеристики коректувальних кодів

А.1. Характеристики й багаточлени, що породжують циклічні коди, для каналів із протилежними сигналами

У табл. А.1 наведені характеристики двійкових циклічних кодів. Більш докладна таблиця міститься в [11, табл. 6.4]. Багаточлени, що породжують коди, дані у восьмеричній формі запису, де: n – довжина блоку; $R_{\text{код}}$ – швидкість коду; k – кількість інформаційних символів у блоці; $q_{\text{випр}}$ – кратність помилок, що виправляються.

Таблиця А.1 – Характеристики й багаточлени, що породжують циклічні коди

n	k	$q_{\text{випр}}$	$R_{\text{код}}$	Багаточлен, що породжує
7	4	1	0,57	13
15	11	1	0,73	23
	7	2	0,47	721
31	26	1	0,84	45
	21	2	0,68	3551
	16	3	0,52	107657
	11	5	0,35	5423325
63	57	1	0,9	103
	51	2	0,81	12471
	45	3	0,71	1701317
	39	4	0,62	166623567
	36	5	0,57	1033500423
127	120	1	0,95	211
	113	2	0,89	41567
	106	3	0,84	11554743
	99	4	0,78	624730022327
	92	5	0,97	435
255	239	2	0,94	267543
	231	3	0,91	156720665
	223	4	0,87	75626641375
	215	5	0,814	23157564726421

Приклад А.1. Восьмеричне подання багаточленів, що породжують.

Код з параметрами $n = 7$, $k = 4$, $q_{\text{випр}} = 1$ має багаточлен $(13) \Rightarrow (001,011) \Rightarrow (1011) \Rightarrow x^3 + x + 1$.

А.2. Енергетичний виграш при використанні циклічних кодів

В комірках табл. А.2 наведені значення енергетичного виграшу g (дБ) при використанні циклічних кодів у каналах із ФМ-2 залежно від довжини блоку n і швидкості коду $R_{\text{код}}$.

Таблиця А.2 – Енергетичний виграш g (дБ) при використанні ЦК

Довжина блоку, n	Швидкість коду, $R_{\text{код}}$					
	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
31	1,2	1,6	1,9	2,0	1,9	1,6
63	2,0	2,4	2,7	2,8	2,7	2,1
127	2,6	3,1	3,4	3,5	3,3	2,8
255	3,2	3,6	3,9	4,0	3,8	3,3

А.3. Характеристики двійкових згорткових кодів

У табл. А.3...А.6 наведені характеристики двійкових згорткових кодів з максимальною вільною віддаллю Хеммінга й швидкостями (1/8...1/2). Багаточлени, що породжують, наведені у восьмеричній формі запису. Більш докладні відомості про згорткові коректувальні коди наведені в [2, 4, 11, 12, 13].

Позначення в табл. А.3: v – довжина кодового обмеження; d_f – вільна віддаль у метриці Хеммінга; d_{fm} – верхня межа вільної віддалі; w_{df} – кількість помилкових шляхів з вагою d_f ; АЕВК (дБ) – асимптотичний енергетичний виграш при використанні ЗК у каналах із ФМ-2.

Таблиця А.3 – Характеристики двійкових згорткових кодів

Номер коду	v	Багаточлени, що породжують	d_{fm}	d_f	w_{df}	АЕВК, дБ
Швидкість коду $R_{\text{код}} = 1/8$						
1	4	25,27,33,35, 37,25,33,37	32	32	8	6,02
2	5	45,55,57,65, 67,73,77,47	36	36	3	6,53
3	6	115,127,131, 135,157,173, 175,123	40	40	1	6,99
Швидкість коду $R_{\text{код}} = 1/4$						
4	2	5,7,7,7	10	10	2	3,98
5	3	13,15,15,17	13	13	4	5,12
6	4	25,27,33,37	16	16	8	6,02
7	5	51,55,73,77	18	18	5	6,53
8	5	53,67,71,75	18	18	6	6,53
9	6	135,135,147,163	20	20	37	6,99
10	7	235,275,313,357	22	22	11	7,40
11	8	463,535,733,745	27	27	4	8,29

Продовження табл.А.3

Номер коду	v	Багаточлени, що породжують	d_{fm}	d_f	w_{df}	АЕВК, дБ
Швидкість коду $R_{\text{код}} = 1/3$						
12	2	5,7,7	8	8	3	4,26
13	2	5,6,7	8	7	1	3,68
14	3	13,15,17	10	10	6	5,23
15	3	11,15,17	10	9	1	4,77
16	3	10,15,17	10	8	3	4,26
17	4	25,33,37	12	12	12	6,02
18	5	47,53,75	13	13	1	6,37
19	5	47,55,75	13	13	4	6,37
20	5	45,55,75	12	13	3	6,42
21	6	133,145,175	15	15	11	6,99
22	6	127,155,165	15	13	3	6,37
23	7	255,331,367	16	16	1	7,27
24	8	557,663,711	18	18	10	7,78
Швидкість коду $R_{\text{код}} = 1/2$						
25	2	5,7	5	5	1	3,98
26	3	15,17	6	6	2	4,77
27	3	13,15	6	6	4	4,77
28	4	23,35	8	7	4	5,44
29	4	31,33	8	7	4	5,44
30	4	25,37	8	6	2	4,77
31	5	53,75	8	8	2	6,02
32	5	61,73	8	8	6	6,02
33	5	43,75	8	8	6	6,02
34	5	45,73	8	8	5	6,02
35	5	71,73	8	8	10	6,02
36	6	133,171	10	10	36	6,99
37	6	135,163	10	10	46	6,99
38	7	247,371	10	11	2	6,99

При необхідності використовувати в телекомунікаційній системі високошвидкісні згорткові коди зі швидкістю $R_{\text{код}} > 1/2$ застосовують перфоровані згорткові коди. Принцип перфорації ЗК докладно викладений у посібнику [2, с. 116..117, таблиці характеристик кодів 4.3.6].

Б. Методичні вказівки й завдання на виконання курсової роботи

за матеріалами модуля 4 дисципліни ТЕЗ на тему «ОПТИМІЗАЦІЯ МЕТОДІВ ЗАВАДОСТІЙКОГО КОДУВАННЯ ДЛЯ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНОЇ СИСТЕМИ»

Вступ

У розділі 12 модуля 4 показано, що завадостійке кодування є ефективним способом оптимізації ТКС. На практиці інженеру-проектувальнику ТКС доводиться вирішувати задачі оптимізації на основі чисельних розрахунків і відповідного порівняння методів завадостійкого кодування й вибору конкретних методів і відповідної їм кодів. Рішення саме такої задачі покладено в основу КР.

Вихідні дані задані в таблиці варіантів Б.2:

1. Цифрова інформація передається двійковим кодом. Види переданої цифрової інформації:

ДК – дані комп'ютерного обміну;

ЦТЛФ – цифрова телефонія;

ЦТВ – повідомлення цифрового телебачення;

ЦЗВ – повідомлення цифрового звукового мовлення.

2. Канал зв'язку – канал з постійними параметрами й адитивним білим гауссовим шумом.

3. Відношення с/ш на вході демодулятора $h_0^2 = E_0/N_0$.

4. Методи модуляції: ФМ-2, ФМ-4.

5. Прийом – когерентний.

6. Продуктивність джерела $R_{дж}$ (біт/с).

7. Смуга пропускання каналу F_k (кГц).

8. Імовірність помилки біта в повідомленнях, що віддаються одержувачеві, менша p .

9. Припустима складність декодера ЗК (показник складності решітки коду) – не більша W .

Необхідно:

1. Вибрати й обґрунтувати вибір коректувального коду для проекрованої ТКС, що забезпечує необхідну ймовірність помилки біта p у повідомленнях, що віддаються одержувачеві, за умови виконання наступних **обмежень**:

1.1. Смуга частот кодованого сигналу не повинна перевищувати смугу пропускання каналу F_k .

1.2. При використанні згорткових кодів показник складності решітки коду повинен бути не більшим величини W .

2. Розробити й дати докладний опис *структурної й функціональної схем кодера й декодера* вибраного коду й обґрунтувати їхні параметри.

3. Проаналізувати показники енергетичної й частотної ефективності телекомунікаційної системи й порівняти їх з граничними значеннями ефективності.

4. Зробити *висновок* по виконаній роботі.

Зміст пояснювальної записки роботи:

1. Завдання й вихідні дані.

2. Опис структурної схеми проекрованої телекомунікаційної системи із вказівкою місць включення кодера завадостійкого коду, модулятора, демодулятора й декодера з докладними поясненнями виконуваних ними функцій.

3. Класифікація коректувальних кодів за структурою. Порівняльний аналіз переваг і недоліків завадостійких блокових і згорткових кодів. Обґрунтування застосування в проекті згорткових кодів.

4. Класифікація й порівняльний аналіз алгоритмів декодування згорткових кодів. Обґрунтування вибору алгоритму Вітербі для декодування ЗК.

5. Розрахунок ширини спектра цифрового сигналу із заданим видом модуляції.

6. Розрахунок ширини спектра кодованого цифрового сигналу із заданим видом модуляції залежно від швидкості коду.

7. Визначення припустимої швидкості коду $R^*_{\text{код}}$ з умови *неперевищення* смугою частот кодованого сигналу смуги пропускання каналу (обмеження 1.1).

8. Визначення переліку кодів зі швидкостями, що перевищують припустиму швидкість $R^*_{\text{код}}$, які можуть бути використані для рішення поставленої задачі.

9. Вибір ЗК із цього переліку, що забезпечує задану імовірності помилки біта (умова 1) і задовольняє вимогу обмеження по складності декодера (обмеження 1.2).

10. Перевірочний розрахунок залежності ймовірності помилки на виході декодера обраного ЗК.

11. Розробка й опис структурних і функціональних схем кодера й декодера обраного ЗК.

12. Висновок з підведенням підсумків виконаної роботи.

13. Список використаних джерел.

Методичні вказівки до виконання КР

Розрахунок ширини спектра сигналу ФМ-2 (ФМ-4) варто робити за рекомендаціями матеріалів модуля 1. Застосування коректувальних кодів зі швидкістю $R_{\text{код}}$ приводить до розширення спектра кодованого сигналу в $(K_F = 1/R_{\text{код}})$ раз (див. розд. 8). З іншого боку, коректувальна здатність коду зростає зі зменшенням швидкості коду (тобто зі збільшенням надмірності). Тому *задача оптимізації* параметрів коректувального коду складається у виборі коду зі швидкістю, при якій ширина спектра кодованого сигналу *не перевищує задану смугу пропускання каналу*. Якщо необхідна смуга пропускання каналу для передавання ФМ сигналу з інформаційною швидкістю $R_{\text{дж}}$ дорівнює $F_{(\text{ФМ})}$, а швидкість коду обрана рівною $R_{\text{код}}$, то смуга пропускання каналу, необхідна для передавання кодованого ФМ сигналу, дорівнює

$$F_{\text{к(ФМ-СК)}} = \frac{F_{(\text{ФМ})}}{R_{\text{код}}}.$$

Тоді з умови *неперевищення* цією смугою частот сигналу смуги пропускання каналу $(F_{\text{к(ФМ-СК)}} < F_{\text{к}})$ одержуємо просту умову для вибору швидкості коду

$$R_{\text{код}}^* > R_{\text{код}} = \frac{F_{(\text{ФМ})}}{F_{\text{к}}} . \quad (\text{Б.1})$$

Сказане ілюструється рис. Б.1. Ширина спектра кодованого ФМ сигналу пропорційна коефіцієнту розширення смуги. У міру зниження швидкості коду (зростання K_F) смуга розширюється й досягає значення смуги пропускання каналу. На цьому ж рисунку показана залежність АЕВК від K_F (що рівноцінно швидкості коду). Перетинання кривої смуги із граничним заданим значенням $F_{\text{к}}^*$ визначає припустиме значення коефіцієнта розширення смуги пропускання каналу $K_F = 1/R_{\text{код}}^*$ і, відповідно, швидкість коду $R_{\text{код}}^*$. Першим етапом вибору коректувального коду є вибір класу кодів (клас блокових або неперервних (згорткових) кодів). Використовуючи матеріали розділів 8 і 11, рекомендується *аргументовано обґрунтувати вибір класу згорткових кодів* для застосування у своїй роботі. Серед алгоритмів декодування ЗК по широті практичного застосування *лідуюче місце* займає алгоритм Вітербі. Рекомендується в роботі застосовувати саме алгоритм Вітербі. У розділі проекту з обґрунтуванням застосування цього алгоритму варто привести відомості про складність реалізації алгоритму. Серед кодів, відібраних за критерієм швидкості відповідно до формули (Б.1), можуть виявитися коди з різною довжиною кодового обмеження (і, відповідно, з різною складністю декодера). Завадостійкість декодування ЗК характеризується величиною ЕВК. У таблицях кодів не приводяться значення ЕВК при певному рівні ймовірності помилки декодування. У той же час, величина асимптотичного енергетичного виграшу (АЕВК) є верхньою оцінкою ЕВК. Тому при відборі кодів рекомендується використовувати величини АЕВК, значення яких є в таблицях додатка А. Серед відібраних кодів-кандидатів варто застосовувати код, що *забезпечує максимальний АЕВК і задовольняє вимогам по швидкості й складності декодера*. Остаточні дані про ймовірність помилки на виході декодера слід одержати на основі розрахунків для обраного коду залежності ймовірності помилки декодування від відношення сигнал/шум. У випадку невиконання вимог завдання рекомендується *застосувати код з більшою величиною АЕВК*.

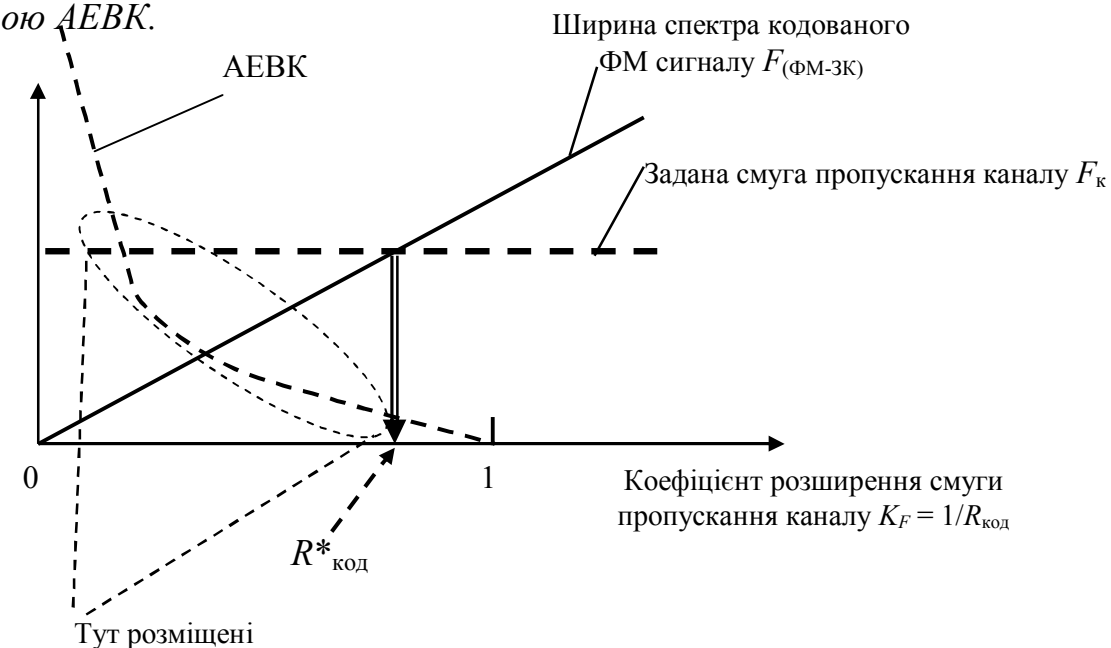


Рисунок Б.1— До процедури оптимізації коду

Приклад розрахунків і процедури оптимізації коду

Вихідні дані:

1. Вид переданої цифрової інформації – ЦТЛФ.
3. Відношення с/ш $h_0^2 = 4$ дБ.
4. Метод модуляції: ФМ-4.
5. Прийом – когерентний.
6. Продуктивність джерела $R_{дж} = 64$ кбіт/с.
5. Ширина смуги пропускання каналу $F_k = 100$ кГц.
6. Припустима ймовірність помилки біта $p = 10^{-5}$.
7. Припустима складність решітки коду не більша $W = 150$.

1. Розрахунок смуги пропускання каналу зв'язку, необхідної для передавання цифрової інформації із заданою швидкістю методом ФМ-4, виконуємо за формулою $F_{(ФМ-4)} = [R_{дж}(1 + \alpha)]/2$, де α – коефіцієнт ската спектра. Задаючись значенням $\alpha = 0,4$, одержуємо $F_{(ФМ-4)} = [R_{дж}(1 + \alpha)]/2 = [64(1+0,4)]/2 = 44,8$ кГц.

2. Відповідно до формули (Б.1) визначаємо граничне значення швидкості ЗК

$$R_{(код)}^* > \frac{F_{(ФМ-СК)}}{F_k} = \frac{44,8}{100} = 0,448.$$

3. По таблицях ЗК відбираємо коди, що задовольняють вимозі по швидкості. Дані про ці коди зведені в таб.Б.1.

Таблиця Б.1 – Характеристики ЗК для вибору коду

Швидкість коду $R_{код}$	Багаточлени, що породжують код	ДКО ν	Складність решітки W	АЕВК, дБ
1/4	463,535,733,745	8	512	8,29
1/3	557,663,711	8	512	7,78
1/2	53,75	5	64	6,02
1/2	61,73	5	64	6,02
1/2	71,73	5	64	6,02
1/2	133,171	6	128	6,99
1/2	247,371	7	256	6,99

З таблиці видно, що для виконання поставленої задачі можуть бути використані ЗК зі швидкостями $R_{код} = 1/2$, які забезпечують досить великий АЕВК. На основі даної таблиці вибираємо для проекту код з багаточленами, що породжують, (133,171), який при швидкості $R_{код} = 0,5$ забезпечує АЕВК = 6,99 дБ. Дані розрахунку ймовірності помилки наведені на рис. 11.1.

Видно, що застосування вибраного коду забезпечує виконання завдання: при відношенні сигнал/шум $h_0^2 = 4$ дБ ймовірність помилки декодування дорівнює $3 \cdot 10^{-5}$. Порівняння із кривими завадостійкості некодованої ФМ-2 (рис.11.1) показує, що при ймовірності помилки $p = 10^{-5}$ цей код забезпечує ЕВК 5,3 дБ.

Таблиця Б.2.– **Вихідні дані для виконання КР**

Номер варіанта для виконання КР повинен відповідати номеру прізвища студента в журналі академічної групи							
Номер варіанта	Вид перед. інформ.	Відношення с/ш на вході h_0^2 , дБ	Метод модул.	Продукт. джерела $R_{дж}$, кбіт/с	Смуга пропуск. каналу F_k , кГц	Імовір. помилки біта p	Складн. декодера W
1	ДК	4,0	ФМ-4	64	80	10^{-6}	150
2	ЦТЛФ	5,0	ФМ-4	16	25	10^{-4}	160
3	ЦЗВ	6,0	ФМ-2	256	800	10^{-5}	170
4	ДК	6,5	ФМ-2	64	200	10^{-6}	180
5	ЦТЛФ	4,0	ФМ-4	16	25	10^{-4}	250
6	ЦЗВ	7,0	ФМ-4	128	200	10^{-5}	350
7	ЦТВ	5,0	ФМ-2	2400	7000	10^{-8}	560
8	ДК	6,0	ФМ-4	32	50	10^{-6}	200
9	ЦТЛФ	5,0	ФМ-2	24	70	10^{-4}	300
10	ЦЗВ	4,5	ФМ-4	256	400	10^{-5}	250
11	ЦТВ	5,5	ФМ-2	3000	1200	10^{-8}	550
12	ДК	4,0	ФМ-4	48	70	10^{-6}	150
13	ЦТЛФ	5,0	ФМ-4	32	50	10^{-4}	250
14	ЦЗВ	7,0	ФМ-2	256	800	10^{-5}	300
15	ЦТВ	4,0	ФМ-4	4500	1300	10^{-9}	550
16	ДК	7,0	ФМ-4	56	90	10^{-6}	150
17	ЦТЛФ	5,0	ФМ-2	24	70	10^{-4}	160
18	ЦЗВ	4,5	ФМ-4	256	400	10^{-5}	200
19	ЦТВ	5,5	ФМ-4	5000	1400	10^{-9}	550
20	ДК	6,0	ФМ-2	64	200	10^{-6}	150
21	ЦТЛФ	7,5	ФМ-4	256	400	10^{-4}	250
23	ЦЗВ	6,5	ФМ-4	16	50	10^{-5}	150
24	ДК	6,0	ФМ-4	64	150	10^{-6}	150
25	ЦТЛФ	4,5	ФМ-2	16	25	10^{-4}	200
26	ЦТВ	5,0	ФМ-2	6000	16000	10^{-9}	550
27	ЦЗВ	6,0	ФМ-4	384	600	10^{-5}	250
28	ДК	4,5	ФМ-4	64	100	10^{-6}	150
29	ЦТЛФ	5,0	ФМ-2	16	50	10^{-5}	250
30	ЦТВ	5,5	ФМ-2	5500	32000	10^{-9}	560
31	ЦТЛФ	4,5	ФМ-4	64	200	10^{-5}	150
32	ДК	5,0	ФМ-4	64	300	10^{-5}	250

В. Перелік знань і вмінь, які повинен придбати студент у процесі вивчення матеріалів модуля 4

Знання:

1. Роль коректувального кодування як ефективного методу передавання цифрової інформації в сучасних телекомунікаційних системах.
2. Місце й функціональне призначення кодеків коректувальних кодів у складі типової структурної схеми системи передавання дискретної інформації.
3. Класифікація коректувальних кодів.
4. Блокові коректувальні коди: основні параметри, методи побудови, алгоритми кодування/декодування й складність їхньої реалізації. Важливі класи блокових кодів (коди Хеммінга, циклічні коди). Завадостійкість декодування блокових кодів.
5. Згорткові коди: класифікація, структура й характеристики. Алгоритми кодування/декодування згорткових кодів. Алгоритм Вітербі. Структура декодера Вітербі. Завадостійкість декодування згорткових кодів, енергетичний виграш.
6. Критерії ефективності й шляхи підвищення ефективності цифрових телекомунікаційних систем. Гранична ефективність телекомунікаційних систем і границя К. Шеннона. Перспективні шляхи подальшого підвищення ефективності телекомунікаційних систем
7. Перспективні методи кодування в цифрових телекомунікаційних системах (каскадні коди, турбокоди, сигнально-кодові конструкції просторово-часове кодування).

Уміння:

1. Розрахунки завадостійкості декодування блокових і згорткових кодів.
2. Вибір кодів і оптимізація їхніх характеристик стосовно до умов використання кодів у телекомунікаційних системах для підвищення показників завадостійкості й ефективності.
3. Розробка функціональних схем кодеків коректувальних кодів і способів їхнього узгодження з модемами.

Г. Примітні віхи в розвитку теорії електричного зв'язку

Закінчуючи вивчення курсу теорії електричного зв'язку, корисно звернутися до історії розвитку цієї науки й згадати імена видатних учених, робота, розум і талант яких дозволили внести важливий вклад у теорію, тим самим просунути розвиток знань людства про телекомунікації й досягти сучасний рівень техніки зв'язку.

1838 – С. Морзе (S. Morse) пропонує код для телеграфної передачі («код Морзе» – перший приклад **статистичного коду**, що враховує статистику букв англійського тексту).

1900 – перші експерименти з **передаванням АМ радіосигналів**.

1922 – винахід **односмугової модуляції (ОМ)**.

1924 – Х. Найквіст (H. Nyquist) установлює, що число розв'язних імпульсів, які можуть бути передані протягом одиниці часу по каналу з обмеженою смугою пропускання, пропорційне смузі пропускання цього каналу. У результаті теоретичного аналізу Найквіст доходить висновку, що **максимальне число розв'язних імпульсів**, переданих протягом інтервалу часу T (с) через канал із смугою пропускання W (Гц), **дорівнює kTW** , де k – коефіцієнт пропорційності, що не перевищує 2, точне значення якого визначається формою імпульсу й вибором способу визначення його ширини спектра.

1928 – Р. Хартлі (R. Hartley) публікує міркування про вибір **кількісної міри інформації**, засновані на понятті вибору повідомлень із множини, що підлягає передаванню. Робота Хартлі з'явилася ініціатором ряду наступних робіт з теорії інформації, серед яких – фундаментальна робота **К. Шеннона**.

1936 – Перше практичне **застосування частотної модуляції (ЧМ)** для придушення шумів.

1937-1938 – Винахід методу **імпульсно-кодової модуляції (ІКМ)** і випробування системи передавання телефонії з ІКМ.

1939 – А. Колмогоров публікує фундаментальну роботу з фільтрації випадкових процесів (пізніше, в 1942р. аналогічні результати були опубліковані американським математиком **Н. Вінером (N. Wiener)**). У роботі Вінера в теорію зв'язку був уперше уведений термін «**оптимальність**» (оптимальний лінійний фільтр Колмогорова-Вінера).

1939 – Винахід **вокодера** для передавання мовних сигналів.

1940 – Застосування в системах зв'язку **широкосмугових сигналів**.

1043 – Д. Норс (D.O. North) розробляє теорію **узгодженого фільтра**.

1946 – Д. Габор (D. Gabor) уводить комплексне подання вузькосмугових випадкових процесів.

1947 – В. Котельников захищає дисертацію «**Теорія потенційної завадостійкості**», у якій поставлена й вирішена задача **статистичного синтезу оптимального приймача** сигналів, з нових позицій проаналізовані різні системи зв'язку й установлені **граничні обмеження** на можливі методи модуляції.

1948 – К. Шеннон (C. Shannon) публікує статтю «**Математична теорія зв'язку**», у якій закладені основи застосування теорії інформації до задач зв'язку, уведено поняття **ентропія** й **пропускна здатність каналу**.

1950 – Р. Хеммінг (R. Hamming) розробляє теорію блокового коду, що коректує однократні помилки (**код Хеммінга**).

1951 – Р. Фано (R. Fano) розробляє теорію побудови статистичного коду для ощадливого кодування джерел дискретних повідомлень (**код Шеннона-Фано**).

1952 – Д. Хаффман (D. Haffman) пропонує «метод побудови кодів з мінімальною надмірністю» (**Код Хаффмана**).

1953 – Р. Баркер (R. Barker) пропонує структуру послідовностей з гарними автокореляційними властивостями, названих потім **кодами Баркера**.

1954 – М. Петрович винаходить спосіб відносної фазової модуляції (**ВФМ**) для передавання дискретної інформації каналами, у яких фаза повільно змінюється.

1955 – П. Элайес (P. Elias) пропонує концепцію **згорткового коду**.

1955 – А. Зюко, ґрунтуючись на понятті пропускної здатності каналу вводить нові **характеристики ефективності систем зв'язку**: інформаційна, енергетична й частотна ефективність.

1956 – Розробка теорії стиску широкосмугових сигналів в узгодженому фільтрі.

1957 – Р. Варшамов установлює співвідношення між довжиною коду, кодовою віддаллю й швидкістю коду, що визначає граничні коректувальні властивості лінійного коду, відома згодом, після публікації аналогічних результатів Э. Гілбертом (E.N. Gilbert) як **верхня границя Варшамова-Гілберта**.

1957 – Д. Возенкрафт (J.M. Wozenkraft) розробляє алгоритм послідовного декодування згорткових кодів (**алгоритм Возенкрафта**).

1959 – Н. Цирлер (N. Zierler) розробляє теорію синтезу рекурентних послідовностей максимальної довжини (**М-послідовності**).

1959 – Р. Боуз, Д. Чаудхурі й А. Хоквенгейм (R. Bose, D. Chaudhuri, A. Hocquenghem) пропонують привабливий клас блокових коректувальних кодів, відомі нині, як **коди БЧХ**.

1960 – І. Рид і Г. Соломон (I. Reed, G. Solomon) розробляють алгоритм побудови потужних блокових кодів (**коди РС**), які знаходять потім широке застосування, завдяки здатності виправляти пакети помилок.

1960 – Д. Міддлтон (D. Middleton) публікує фундаментальну монографію з основ статистичної теорії зв'язку, у якій завершує розробку **байєсовської теорії синтезу приймальних систем**.

1962 – П. Бейкер (P. Baker) пропонує метод модуляції «квадратурна ФМ із відносним кодуванням і фазовим зсувом на $\pi/4$ » (**$\pi/4$ -DQPSK**), що допускає автокореляційне приймання.

1965 – Практичне застосування **біортогональних кодів** у системі далекого космічного зв'язку «**Діджилок**».

1965 – **Е. Берлекемп** (E. Berlecamp) розробляє ефективний алгоритм декодування циклічних кодів (**Алгоритм Берлекемпа**).

1966 – **Д. Форні** (D. Forney) пропонує структуру каскадних кодів, що підвищує коректувальну здатність без ускладнення компонентів, що входять до її складу (**каскадні коди Форні**).

1967 – **А. Вітербі** (A. Viterbi) розробляє алгоритм декодування згорткових кодів за критерієм максимуму правдоподібності (**алгоритм Вітербі**), що визначив технологічний прорив у техніку завадостійкого кодування.

1976 – **М. Саймон** (M. Simon) пропонує метод формування й демодуляції сигналів мінімального частотного зсуву (**MSK**).

1993 – **К. Берроу, А. Главью й П. Титимаяшима** (C. Berrou, A. Glaieux, P. Thitimajashima) винаходять новий клас завадостійких кодів (**турбокоди**), застосування яких дозволяє наблизитися до межі Шеннона при прийнятній складності алгоритму декодування.

Д. Видатні вчені, що зробили важливий внесок у становлення й розвиток теорії зв'язку

Х. Найквіст (H. Nyquist)

Співробітник Bell Laboratories. В експериментах з передаванням телеграфних сигналів по кабельних лініях уперше зштовхнувся з явищем **міжсимвольної інтерференції**, що й послужило приводом для наступних теоретичних досліджень. У статті «Certain factors affecting telegraph speed» (BSTJ. Vol. 3, No. 324. April 1924)» показав, що число телеграфних сигналів, які можуть бути передані по лінії, прямо пропорційне смузі пропускання лінії.

К. Шеннон (Claude E. Shannon) (1916-2001)

Основоположник теорії інформації. Маючи прекрасну математичну підготовку й гарну інженерну інтуїцію, керував науковим семінаром на факультеті електротехніки Массачусетського технологічного інституту (1947–1948). На вибір наукового напрямку роботи групи К. Шеннона великий вплив зробив «**батько кібернетики**» **Н. Вінер**. Після публікації фундаментальної статті К. Шеннона «Математична теорія зв'язку» (1948) його учні й послідовники розвивали й доповнювали положення теорії інформації (**Р. Фано, П. Елайєс, Р. Галлагер** й ін.). Збірник перекладів статей К. Шеннона «Роботи з теорії інформації й кібернетики» (1963) демонструє широту наукових інтересів автора (Теорія керуючих систем у кібернетиці, теорія інформації в математичній теорії зв'язку, застосування теорії графів у теорії мереж; кібернетичні машини й ін.). Наукові ідеї К. Шеннона зробили благотворний вплив на розвиток інших наукових напрямків (комбінаторика й теорія графів, криптологія, **квантова теорія інформації**, статистична механіка, оцінка алгоритмічної й обчислювальної складності, лінгвістика, економетрія, молекулярна біологія й ін.)

Котельников Володимир Олександрович (1908-2005)

Теорема дискретизації сигналів з обмеженим спектром сформульована й доведена в 1933 р. (**Теорема В. Котельникова – теорема відліків**). Академік РАН. Очолював російську науку про зв'язок. У докторській дисертації «**Теорія потенційної завадостійкості**» (1947) з використанням простого математичного апарата дав рішення множини насущних технічних проблем завадостійкості телекомунікацій того часу. Лауреат множини премій і почесних звань. За фундаментальний внесок у теорію сигналів в 2000 р. академік В. Котельников визнаний гідним почесної медалі ім. Г. Белла.

Зюко Андрій Глібович (1918 – 1998)

Відомий учений в області теорії електричного зв'язку, автор численних робіт із проблеми завадостійкості й ефективності систем передавання інформації. Закінчив Московський електротехнічний інститут зв'язку (1947). У кандидатській дисертації "Пропускна здатність радіолінії й завадостійкість приймача при великому рівні флуктуаційних завад" (1950) застосував теорію інформації до рішення задач побудови систем зв'язку. У монографії "Завадостійкість і ефективність систем зв'язку" (1963) закладені **основи теорії ефективності систем зв'язку: введені поняття інформаційної, енергетичної й частотної ефективності**, які надалі широко використані для порівняння й оптимізації систем зв'язку.

ЛІТЕРАТУРА

1. **Стеклов В.К.** Теорія електричного зв'язку / В.К. Стеклов, Л.Н. Беркман; за ред. В.К. Стеклова. – К.: Техніка, 2006. – 552 с.
2. **Банкет В.Л.** Цифровые методы передачи информации в спутниковых системах связи: учеб. пособ. / В.Л. Банкет, П.В. Иващенко, А.Э. Геер – Одесса: УГАС, 1996. – 180 с.
3. **Банкет В.Л.** Дискретная математика в задачах теории цифровой связи: учеб. пособ. / В.Л. Банкет – Одесса: ОНАС, 2008. – 118 с.
4. **Питерсон У.** Коды, исправляющие ошибки / У. Питерсон, Э Уэлдон; Пер. с англ. под ред. Р.Л. Добрушина. М.: Мир, 1976. – 594 с.
5. **Теория** передачи сигналов: Учебник для вузов / [А.Г. Зюко и др.] – М.: Радио и связь, 1986. – 304 с.
6. **Кузьмин Н.В.** Основы теории информации и кодирования / Н.В. Кузьмин, В.А. Кедрус. – К.: Вища шк., 1986. – 238 с.
7. **Панфілов І.П.** Теорія електричного зв'язку:[підручник для студентів вузів І та ІІ рівнів акредитації] / Панфілов І.П., Дирда В.Ю., Капацін А.В. – К.: Техніка, 1998. – 328 с.
8. **Блейхут Р.** Теория и практика кодов, контролирующих ошибки:/ Блейхут Р.; Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 576 с.
9. **Банкет В.Л.** Сверточные коды в системах передачи информации: учеб. пособ./ Банкет В.Л. – Одесса: ОЭИС, 1986. – 57 с.
10. **Теория** электрической связи: [Учебник для вузов] / [А.Г. Зюко и др.]; под ред. Д.Д. Кловского. – М.: Радио и связь, 1998. – 432 с.
11. **Скляр Б.** Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. [2-е изд., испр.]: пер. с англ. – М.: Изд. дом "Вильямс", 2003. – 1104 с.
12. **Кларк Дж.** Кодирование с исправлением ошибок в системах цифровой связи / Кларк Дж., мл., Кейн Дж.; пер. с англ. – М.: Радио и связь, 1987. – 392 с.
13. **Помехоустойчивость** и эффективность систем передачи информации / [А.Г. Зюко, А.И. Фалько, И.П. Панфилов, и др.]; под ред. А.Г. Зюко. – М.: Радио и связь, 1985. – 282 с.

Навчальне видання

Банкет Віктор Леонідович
Іващенко Петро Васильович
Іщенко Микола Олександрович

**ЗАВАДОСТІЙКЕ КОДУВАННЯ В
ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ СИСТЕМАХ**

Модуль 4

Навчальний посібник

до вивчення дисципліни

«ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНОГО ЗВ'ЯЗКУ»

Редактор А.Г. Якубовська
Комп'ютерний набір