Лабораторные работы по курсу

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

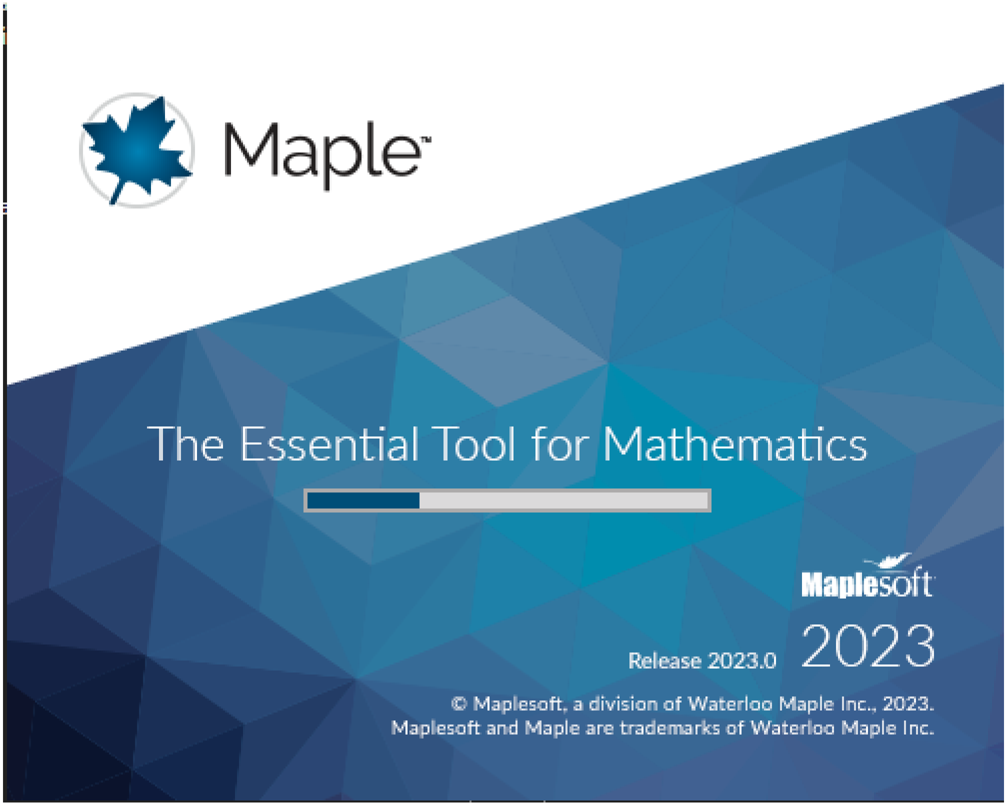
с использованием системы компьютерной математики

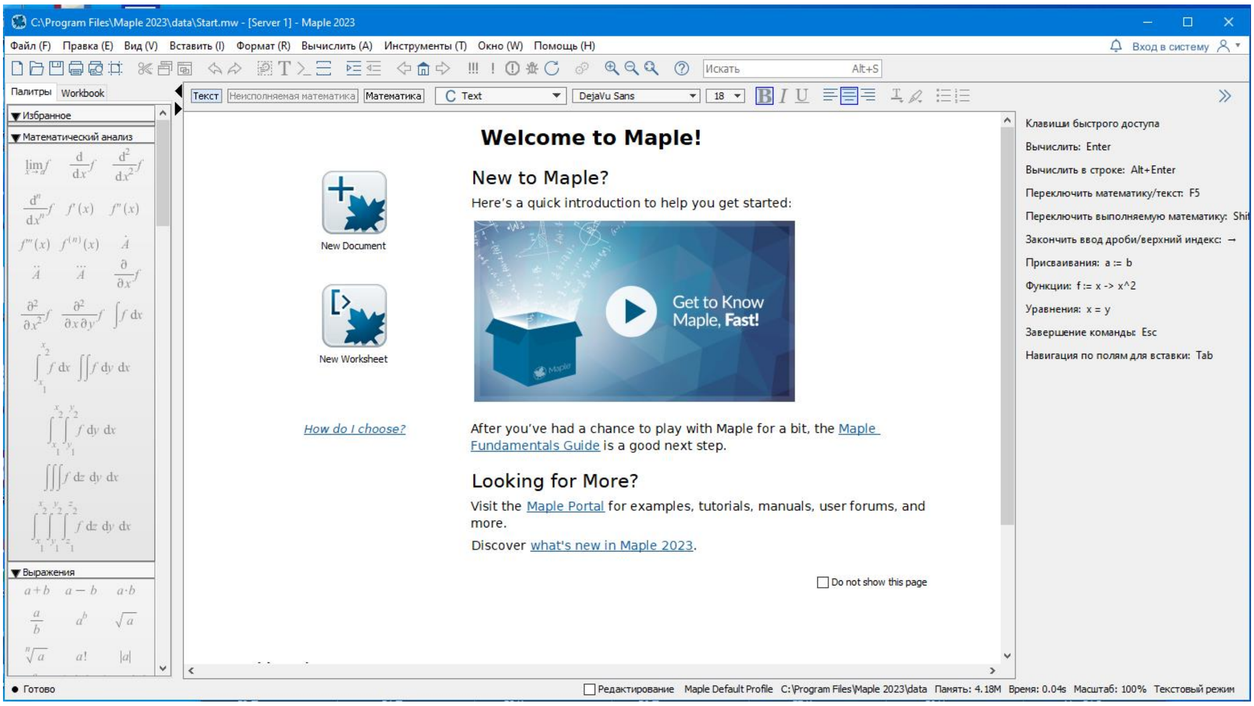
Maple

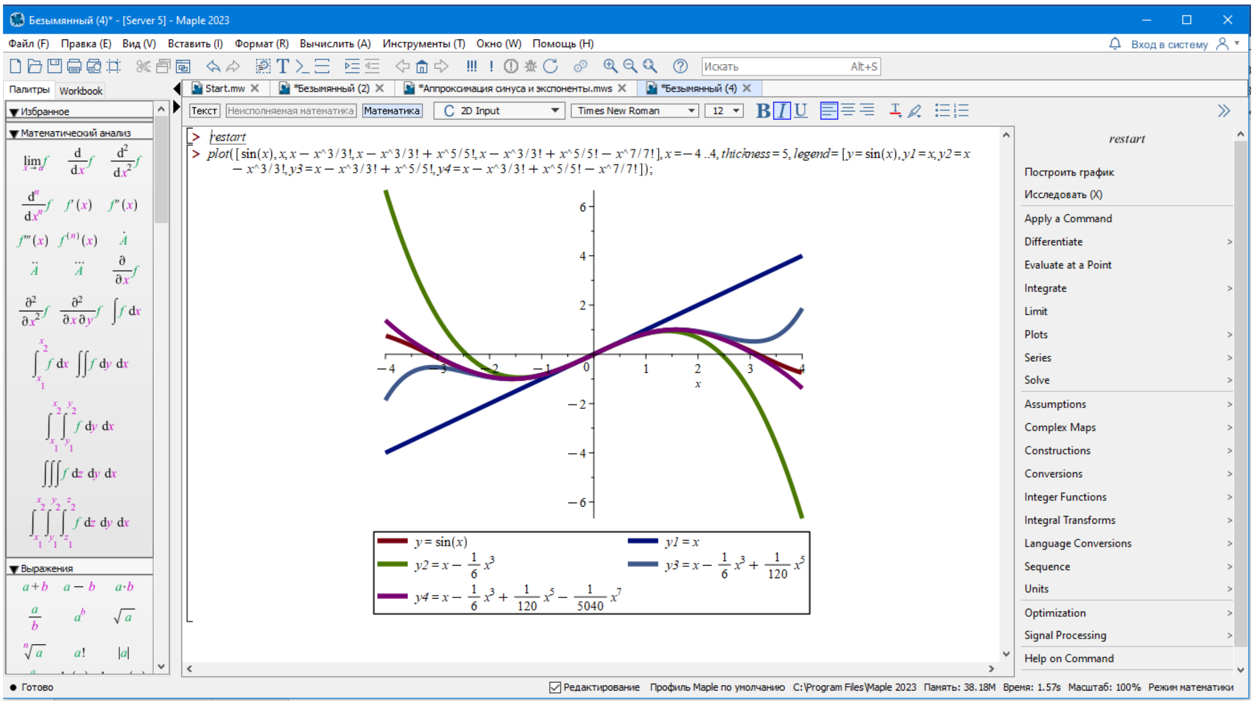
Составитель проф. Третьяк А. И.

Не будем спорить – будем вычислять.

Г. Лейбниц


Maple
The Essential Tool for Mathematics
Maplesoft
Release 2023.0
2023
© Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., 2023.
Maplesoft and Maple are trademarks of Waterloo Maple Inc.


C:\Program Files\Maple 2023\data\Start.mw - [Server 1] - Maple 2023
Файл (F) Правка (E) Вид (V) Вставить (I) Формат (R) Вычислить (A) Инструменты (T) Окно (W) Помощь (H)
Вход в систему
Искать Alt+S
Палитры Workbook
Избранное
Математический анализ
Выражения
Текст Неисполняемая математика Математика
Text
DejaVu Sans
18
Welcome to Maple!
New Document
New Worksheet
How do I choose?
New to Maple?
Here's a quick introduction to help you get started:
Get to Know Maple, Fast!
After you've had a chance to play with Maple for a bit, the Maple Fundamentals Guide is a good next step.
Looking for More?
Visit the Maple Portal for examples, tutorials, manuals, user forums, and more.
Discover what's new in Maple 2023.
Do not show this page
Клавиши быстрого доступа
Вычислить: Enter
Вычислить в строке: Alt+Enter
Переключить математику/текст: F5
Переключить выполняемую математику: Shi
Закончить ввод дроби/верхний индекс: →
Присваивания: a := b
Функции: f := x -> x^2
Уравнения: x = y
Завершение команды: Esc
Навигация по полям для вставки: Tab
Готово
Редактирование Maple Default Profile C:\Program Files\Maple 2023\data Память: 4.18M Время: 0.04s Масштаб: 100% Текстовый режим



Содержание

Краткое введение в Maple

> $restart;$

Раскрыть скобки - выполнить действия

> $expand((x+y)\hat{}5);$

$$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

Решить уравнение

> $solve(x^2 - 5\cdot x + 6 = 0, \{x\});$

$$\{x=3\}, \{x=2\}$$

Решить неравенство

> $solve(5\cdot x > 10, \{x\});$

$$\{2 < x\}$$

Упростить выражение

> $simplify\left(\cos(x)^5 + \sin(x)^4 + 2\cdot\cos(x)^2 - 2\cdot\sin(x)^2 - \cos(2\cdot x)\right);$

$$\cos(x)^4\,(\cos(x)+1)$$

Упростить - сократить числитель и знаменатель на общий множитель

> $normal\left(\dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + x - y - y^2}\right);$

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{x + 1 + y}$$

Решение системы двух уравнений относительно переменных *x, y*

> $solve(\{x + y = 10, x - y = 5\}, \{x, y\});$

$$\left\{x = \frac{15}{2}, y = \frac{5}{2}\right\}$$

> $solve(\{x + y = 10, x - y = 5.0\}, \{x, y\});$

$$\{x = 7.500000000, y = 2.500000000\}$$

Решение системы, состоящей из неравенства и уравнения

> $solve(\{x + y \geq 10, x - y = 5\}, \{x, y\});$

$$\left\{x = 5 + y, \frac{5}{2} \leq y\right\}$$

Подстановка значений *x* = 2, *y* = ln(5 + z) в выражение

> $A := subs\left(x=2, y=\ln(5+z), \dfrac{1+\sin(x)^3 - \frac{y}{x}}{y^2 - 1 + x}\right);$

$$A := \frac{1 + \sin(2)^3 - \frac{\ln(5+z)}{2}}{\ln(5+z)^2 + 1}$$

Найти приближённое значение выражения *A* при подстановке в него значения *z* = 4

> $evalf(subs(z=4, A));$

$$0.1120860570$$

Приведение подобных коэффициентов при различных степенях *x*

> $collect\left(2\cdot x^2 + 3\cdot x\cdot y + 4\cdot y^2 + 5\cdot x + 6\cdot y, x\right);$

$$2x^2 + (3y + 5)x + 4y^2 + 6y$$

Приведение подобных коэффициентов полинома при различных степенях выражения e^x

> $collect\left(x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x - \frac{x^2}{e^x} - \frac{2x}{e^x} - \frac{2}{e^x}, e^x\right);$

$$\left(x^2 - 2x + 2\right) e^x + \frac{-x^2 - 2x - 2}{e^x}$$

Преобразование (конвертирование) рациональной дроби в сумму многочлена и простейших дробей

> $g := \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}; \quad convert(g, parfrac, x);$

$$g := \frac{x^3 + x}{x^2 - 1}$$

$$x + \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1}$$

Ряд Тейлора функции *g* в окрестности точки *x* = 0 с остаточным членом

> $S := series(g, x, 14);$

$$S := -x - 2x^3 - 2x^5 - 2x^7 - 2x^9 - 2x^{11} - 2x^{13} + O\left(x^{15}\right)$$

Численное решение системы двух уравнений

> $eq1 := \sin(x + y) - e^x \cdot y; \quad eq2 := x^2 - y = 2;$

$$eq1 := \sin(x + y) - e^x y$$

$$eq2 := x^2 - y = 2$$

> $fsolve(\{eq1, eq2\});$

$$\{x = -6.017327250, y = 34.20822723\}$$

Численное решение системы двух уравнений в промежутке [-1; 1] для неизвестной *x* и в промежутке [-2; 0] для неизвестной *y*

> $fsolve(\{eq1, eq2\}, \{x = -1..1, y = -2..0\});$

$$\{x = -0.6687012050, y = -1.552838698\}$$

Вычисление сумм

> $S1 := Sum(Sum(k^2, k = 1..m), m = 1..N) = sum(sum(k^2, k = 1..m), m = 1..N);$

$$S1 := \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{(N + 1)^4}{12} - \frac{(N + 1)^2}{12}$$

> $S2 := factor(S1);$

$$S2 := \sum_{m=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{(N + 1)^2 N (N + 2)}{12}$$

Вычисление пределов

> $Limit\left(\frac{x - \sin(x)}{x^3}, x = 0\right) = limit\left(\frac{x - \sin(x)}{x^3}, x = 0\right);$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \frac{1}{6}$$

Вычисление производных

> $Diff(a \cdot x^n, x) = \frac{d}{dx}(a \cdot x^n);$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a\,x^n\right)=\frac{a\,x^n\,n}{x}$$

Производная третьего порядка

> $Diff\left(a\cdot x^n, x\$3\right)=\frac{d^3}{dx^3}\left(a\cdot x^n\right);$

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(a\,x^n\right)=\frac{a\,x^n\,n^3}{x^3}-\frac{3\,a\,x^n\,n^2}{x^3}+\frac{2\,a\,x^n\,n}{x^3}$$

Задание функции *f*(*x*, *y*) двух переменных

> $f := (x, y) \to \cos(x)\cdot y^3;$

$$f := (x, y) \mapsto \cos(x)\cdot y^3$$

Частные производные

> $\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y));\quad \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y));\quad \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(f(x, y));$

$$-\sin(x)\,y^3$$

$$3\cos(x)\,y^2$$

$$-3\sin(x)\,y^2$$

Нахождение минимума

> $minimize\left(x^2-3\cdot x+y^2+3\cdot y+3, location\right);$

$$-\frac{3}{2}, \left\{\left[\left\{x=\frac{3}{2}, y=-\frac{3}{2}\right\}, -\frac{3}{2}\right]\right\}$$

Нахождение максимума при -10 <= x <= 10, -10 <= y <= 10

> $maximize(\exp(-x)\cdot\sin(y), x=-10..10, y=-10..10, location);$

$$e^{10}, \left\{\left[\left\{x=-10, y=-\frac{3\pi}{2}\right\}, e^{10}\right], \left[\left\{x=-10, y=\frac{\pi}{2}\right\}, e^{10}\right], \left[\left\{x=-10, y=\frac{5\pi}{2}\right\}, e^{10}\right]\right\}$$

Экстремум функции (находится наименьшее и наибольшее значения) *f*(*x*, *y*, *z*) при условиях, определяемых равенствами *g*1=0, *g*2=0

> $f := (x, y) \to \mathrm{sqrt}\left(x^2+y^2\right)-z;\quad g1 := (x, y) \to x^2+y^2-16;\quad g2 := (x, y) \to x+y+z-10;$

$$f := (x, y) \mapsto \sqrt{y^2+x^2}-z$$

$$g1 := (x, y) \mapsto x^2+y^2-16$$

$$g2 := (x, y) \mapsto x+y+z-10$$

> $extrema(f(x, y), \{g1(x, y)=0, g2(x, y)=0\}, \{x, y, z\}, 's'); s;$

$$\left\{-6-4\sqrt{2}, -6+4\sqrt{2}\right\}$$

$$\left\{\left\{x=-2\sqrt{2}, y=-2\sqrt{2}, z=4\sqrt{2}+10\right\}, \left\{x=2\sqrt{2}, y=2\sqrt{2}, z=-4\sqrt{2}+10\right\}\right\}$$

Неопределённый интеграл

> $Int\left(a\cdot x^n, x\right)=\int a\cdot x^n\,dx+C;$

$$\int a\,x^n\,dx=\frac{x^{n+1}\,a}{n+1}+C$$

Определённый интеграл

> $\int_0^4 e^{\sqrt{x}}\,dx;$

$$2+2\,e^2$$

> *evalf*(%);

$$16.77811220$$

Двойной интеграл

> $\int\int \frac{1}{x \cdot y}\,dy\,dx;$

$$\ln(y)\ln(x)$$

> $\int_2^3\int_4^5 \frac{1}{x \cdot y}\,dy\,dx;$

$$(-2\ln(2)+\ln(5))(-\ln(2)+\ln(3))$$

> *evalf*(%);

$$0.09047692409$$

Тройной интеграл

> *restart*;

> $\int_0^c\int_0^b\int_0^a (x^2+y^2)\cdot z\,dz\,dy\,dx;$

$$\frac{a^2\left(\frac{1}{3}bc^3+\frac{1}{3}b^3c\right)}{2}$$

Ряды

> $S1 := series(\sin(x), x, 10);$

$$S1 := x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\frac{1}{362880}x^9+O(x^{11})$$

> *evalf*(*S1*);

$$1.\,x-0.1666666667x^3+0.008333333333x^5-0.0001984126984x^7+2.755731922\times 10^{-6}x^9+O(x^{11})$$

Разложение в ряд Тейлора по степеням разности *x* – 1

> $S2 := taylor(1-e^x, x=1, 5);$

$$S2 := 1-e-e(x-1)-\frac{1}{2}e(x-1)^2-\frac{1}{6}e(x-1)^3-\frac{1}{24}e(x-1)^4+O((x-1)^5)$$

Разложение в ряд Тейлора функций нескольких переменных

> $mtaylor(\sqrt{1+x^2+y^2}, [x,y], 8);$

$$1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{4}y^2x^2-\frac{1}{8}y^4+\frac{1}{16}x^6+\frac{3}{16}y^2x^4+\frac{3}{16}y^4x^2+\frac{1}{16}y^6$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения

> $eq := diff(y(x), x) = \exp(-y(x));$ *# задание дифференциального уравнения*

$$eq := \frac{d}{dx}y(x) = e^{-y(x)}$$

> $sol := dsolve(eq, y(x));$ *# решение дифф. уравнения, _C1 - произвольная постоянная*

$$sol := y(x) = \ln(x+\_C1)$$

> $odetest(sol, eq);$ *# проверка; 0 означает, что решение удовлетворяет дифф. уравнению.*

$$0$$

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

> $ode := diff(y(x), x) = 1 + e^{x - y(x)};\ \ ic := y(a) = b;$

$$ode := \frac{d}{dx}\, y(x) = 1 + e^{x - y(x)}$$

$$ic := y(a) = b$$

> $dsolve(\{ode, ic\}, y(x));$

$$y(x) = x + \ln\left(x + e^{b - a} - a\right)$$

Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

> $ode2 := x^2 \cdot y''(x) + 3 \cdot x \cdot y'(x) + 2 \cdot y(x) = 0;$

$$ode2 := x^2 \left(\frac{d^2}{dx^2}\, y(x)\right) + 3\, x \left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) + 2\, y(x) = 0$$

> $ic2 := y(1) = 5, y'(1) = 4;$

$$ic2 := y(1) = 5, D(y)(1) = 4$$

> $solution := dsolve(\{ode2, ic2\}, y(x));$

$$solution := y(x) = \frac{9 \sin(\ln(x)) + 5 \cos(\ln(x))}{x}$$

Проверка

> $odetest(solution, [ode2, ic2]);$

$$[0, 0, 0]$$

Краевая задача

> $ode3 := y''(x) - y(x) = 2 \cdot x;$

$$ode3 := \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) - y(x) = 2\, x$$

> $bc := y(0) = 0, y(1) = -1;$ *# краевые условия*

$$bc := y(0) = 0, y(1) = -1$$

> $s1 := dsolve(\{ode3, bc\});$

$$s1 := y(x) = -\frac{e^{-x}}{e - e^{-1}} + \frac{e^{x}}{e - e^{-1}} - 2\, x$$

Проверка

> $odetest(s1, [ode3, bc]);$

$$[0, 0, 0]$$

Система дифференциальных уравнений

> $sys\_ode := diff(y(t), t) = x(t),\ diff(x(t), t) = -x(t);$

$$sys\_ode := \frac{d}{dt}\, y(t) = x(t), \frac{d}{dt}\, x(t) = -x(t)$$

> $ics := x(0) = 1,\ y(1) = 0;$

$$ics := x(0) = 1, y(1) = 0$$

> $dsolve([sys\_ode, ics]);$

$$\left\{x(t) = e^{-t}, y(t) = -e^{-t} + e^{-1}\right\}$$

Численное решение дифференциальных уравнений

Решение в заданной точке

> $dsys1 := \{x'(t) = y(t), y'(t) = -x(t), x(0) = 1, y(0) = 0\};$

$$dsys1 := \{x(0) = 1, y(0) = 0, D(x)(t) = y(t), D(y)(t) = -x(t)\}$$

> $dsn1 := dsolve(dsys1, numeric, [x(t), y(t)]);$ **# Вспомогательная процедура**

$$dsn1 := \mathbf{proc}(x\_rkf45)\ \dots\ \mathbf{end\ proc}$$

> $dsn1(0.5);$ **# решение в точке t = 0.5**

$$[t = 0.5, x(t) = 0.877582581052255, y(t) = -0.479425562021517]$$

> $dsn1(1.0);$ **# решение в точке *t* = 1.0**

$$[t = 1.0, x(t) = 0.540302331778567, y(t) = -0.841471101155307]$$

Решение на промежутке в заданных точках

> $dsys := \{y''(x) + |y(x)| = 0,\ y'(0) = 1, y(1) = -1\};$

$$dsys := \left\{ \frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + |y(x)| = 0, y(1) = -1, D(y)(0) = 1 \right\}$$

> $solution := dsolve(dsys, numeric, output = array([0, 0.25, 0.5, 0.75, 1]));$

$$solution := \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} x & y(x) & \frac{d}{dx}\, y(x) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{ccc} 0. & -1.40964842958752 & 1.00000000000000 \\ 0.25 & -1.20131753968156 & 0.675318544177147 \\ 0.5 & -1.06846086551063 & 0.393064786112399 \\ 0.75 & -1.00273152713015 & 0.135505794809610 \\ 1. & -1.00000000000000 & -0.113539882361526 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

Дифференциальные уравнения в частных производных

> $PDE := diff(f(x, y), x, x) + 5 \cdot diff(f(x, y), x, y) = 3;$

$$PDE := \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, f(x, y) + 5\, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\, f(x, y) = 3$$

> $ans := pdsolve(PDE);$

$$ans := f(x, y) = \_F1(y) + \_F2(y - 5\,x) + \frac{3\,x^2}{2}$$

Проверка

> $pdetest(ans, PDE);$

$$0$$

> **Решить уравнение с граничным условием**

Решить уравнение с граничным условием

> $PDE := diff(u(x, t), t) = k \cdot diff(u(x, t), x, x) + Q;$

$$PDE := \frac{\partial}{\partial t}\, u(x, t) = k \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x, t) \right) + Q$$

> $bc := u(0, t) = 2 \cdot e^{k \cdot t} - \frac{Q}{k};$

$$bc := u(0, t) = 2\, e^{k\, t} - \frac{Q}{k}$$

> $sol := pdsolve(\{PDE, bc\});$ # _C1 - произвольная постоянная

$$sol := u(x, t) = \frac{-2\, \_C1^2\, k\, (\_C1^2 - 2)\, e^{k\, t - x} + 2\, \_C1^4\, e^{k\, t + x}\, k - Q\, \left((x^2 - 2\, x + 2)\, \_C1^2 + 4\, x \right)}{2\, \_C1^2\, k}$$

Численное решение уравнений в частных производных

Волновое уравнение

$> \ PDE := diff(u(x,t),t) = -diff(u(x,t),x);$

$$PDE := \frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\, u(x,t)$$

$> \ IBC := \{u(0,t) = -\sin(2\pi t), u(x,0) = \sin(2\pi x)\};$

$$IBC := \{u(0,t) = -\sin(2\pi t), u(x,0) = \sin(2\pi x)\}$$

$> \ pds := pdsolve(PDE, IBC, numeric, time = t, range = 0..1)$ **# Вспомогательная процедура**

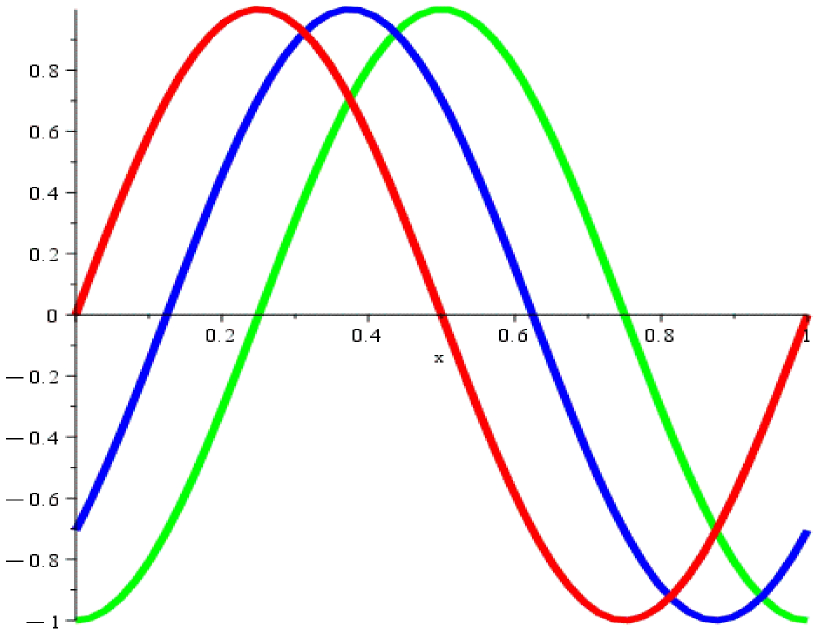
$pds :=$ **module( ) ... end module**

$> \ p1 := pds\text{:-}plot(t = 0, numpoints = 50, thickness = 5, color = red):$

$> \ p2 := pds\text{:-}plot\left(t = \frac{1}{8}, numpoints = 50, thickness = 5, color = blue\right):$

$> \ p3 := pds\text{:-}plot\left(t = \frac{1}{4}, numpoints = 50, thickness = 5, color = green\right):$

$> \ plots[display](\{p1, p2, p3\},);$



Точное решение

$> \ exact\_solution := \sin(2\pi(x - t));$

$$exact\_solution := \sin(2\pi(x - t))$$

$> \ f1 := x \to \sin(2\pi(x - 0));$

$$f1 := x \mapsto \sin(2 \cdot x \cdot \pi)$$

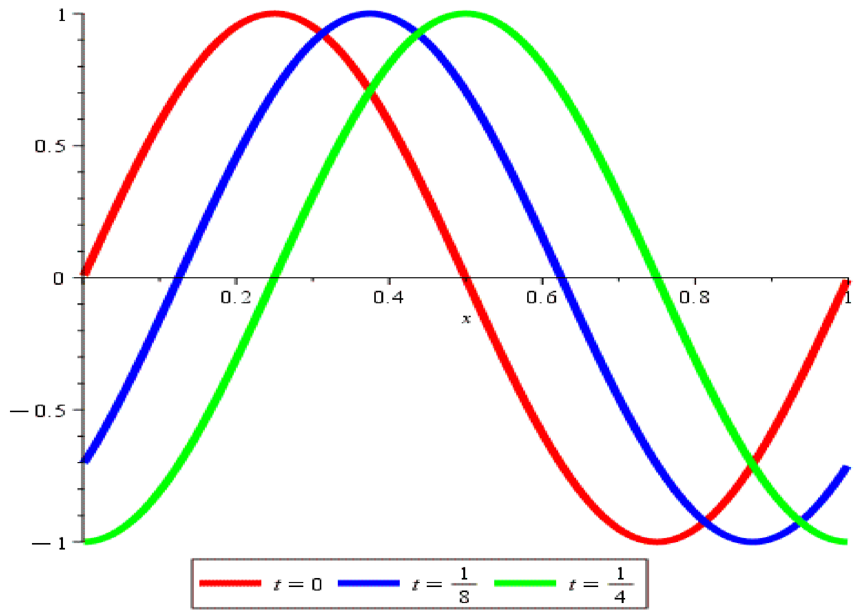
$> \ f2 := x \to \sin\left(2\pi\left(x - \frac{1}{8}\right)\right);$

$$f2 := x \mapsto \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \left(x - \frac{1}{8}\right)\right)$$

$> \ f3 := x \to \sin\left(2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)\right);$

$$f3 := x \mapsto \sin\left(2 \cdot \pi \cdot \left(x - \frac{1}{4}\right)\right)$$

$> \ plot\left([f1(x), f2(x), f3(x)], x = 0..1, color = [red, blue, green], legend = \left['t'= 0, 't'= \frac{1}{8}, 't'= \frac{1}{4}\right],\right.$
$\left. thickness = 5\right);$




```
> restart;
```

Пример численного решения системы двух уравнений в частных производных в заданных точках

```
> PDE := {diff(u(x,t),t) = -1/20*diff(v(x,t),x,x), diff(v(x,t),t)
= diff(u(x,t),x,x)};
```

$$PDE := \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\, u(x,t) = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, v(x,t)}{20},\ \frac{\partial}{\partial t}\, v(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t) \right\}$$

```
> IBC := {u(x,0) = sin(Pi*x), u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, v(x,0) = 1-
x, v(0,t) = 1, v(1,t) = 0};
```

$$IBC := \{u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, u(x,0) = \sin(\pi x), v(0,t) = 1, v(1,t) = 0, v(x,0) = 1 - x\}$$

```
> U := pdsolve(PDE, IBC, numeric) :- value();
```

$$U := \mathbf{proc}(\,)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

```
> U(0.3,0.8);
```

$$[x = 0.3, t = 0.8, u(x,t) = -0.152255947041586, v(x,t) = -2.85338324355238]$$

```
> for j from 0 to 5 do
   print(` `);
   for i from 0 to 10 do
      print(U(0.2*j, 0.1*i));
   end do;
end do;
```

\` \`

$$[x = 0., t = 0., u(x,t) = 0., v(x,t) = 1.]$$

$$[x = 0., t = 0.1, u(x,t) = 0., v(x,t) = 1.]$$

$$[x = 0., t = 0.2, u(x,t) = 0., v(x,t) = 1.]$$

$$[x = 0., t = 0.3, u(x,t) = 0., v(x,t) = 1.]$$

$$[x = 0., t = 0.4, u(x,t) = 0., v(x,t) = 1.]$$

$$[x = 0., t = 0.5, u(x,t) = 0., v(x,t) = 1.]$$

$$[x = 0., t = 0.6, u(x,t) = 0., v(x,t) = 1.]$$

$$[x = 0., t = 0.7, u(x,t) = 0., v(x,t) = 1.]$$
$$[x = 0., t = 0.8, u(x,t) = 0., v(x,t) = 1.]$$
$$[x = 0., t = 0.9, u(x,t) = 0., v(x,t) = 1.]$$
$$[x = 0., t = 1.0, u(x,t) = 0., v(x,t) = 1.]$$
\` \`
$$[x = 0.2, t = 0., u(x,t) = 0.587785252292473, v(x,t) = 0.800000000000000]$$
$$[x = 0.2, t = 0.1, u(x,t) = 0.573616138939213, v(x,t) = 0.226309700953637]$$
$$[x = 0.2, t = 0.2, u(x,t) = 0.531791918343336, v(x,t) = -0.319721915452598]$$
$$[x = 0.2, t = 0.3, u(x,t) = 0.464329014429133, v(x,t) = -0.811769643415564]$$
$$[x = 0.2, t = 0.4, u(x,t) = 0.374479940011353, v(x,t) = -1.22611094139299]$$
$$[x = 0.2, t = 0.5, u(x,t) = 0.266576487067237, v(x,t) = -1.54276964021398]$$
$$[x = 0.2, t = 0.6, u(x,t) = 0.145820882940908, v(x,t) = -1.74647903156833]$$
$$[x = 0.2, t = 0.7, u(x,t) = 0.0180349812302026, v(x,t) = -1.82741790457686]$$
$$[x = 0.2, t = 0.8, u(x,t) = -0.110620420667445, v(x,t) = -1.78168404474243]$$
$$[x = 0.2, t = 0.9, u(x,t) = -0.233942605123826, v(x,t) = -1.61148236701164]$$
$$[x = 0.2, t = 1.0, u(x,t) = -0.345985978901552, v(x,t) = -1.32501861269994]$$
\` \`
$$[x = 0.4, t = 0., u(x,t) = 0.951056516295154, v(x,t) = 0.600000000000000]$$
$$[x = 0.4, t = 0.1, u(x,t) = 0.928130409299130, v(x,t) = -0.328250402873109]$$
$$[x = 0.4, t = 0.2, u(x,t) = 0.860457398822026, v(x,t) = -1.21174811715044]$$
$$[x = 0.4, t = 0.3, u(x,t) = 0.751300127309078, v(x,t) = -2.00789806508168]$$
$$[x = 0.4, t = 0.4, u(x,t) = 0.605921271043390, v(x,t) = -2.67831636815191]$$
$$[x = 0.4, t = 0.5, u(x,t) = 0.431329816676338, v(x,t) = -3.19068090567758]$$
$$[x = 0.4, t = 0.6, u(x,t) = 0.235943144867910, v(x,t) = -3.52028962471648]$$
$$[x = 0.4, t = 0.7, u(x,t) = 0.0291812126169337, v(x,t) = -3.65125147225538]$$
$$[x = 0.4, t = 0.8, u(x,t) = -0.178987600489736, v(x,t) = -3.57725253260657]$$
$$[x = 0.4, t = 0.9, u(x,t) = -0.378527086507045, v(x,t) = -3.30186043309587]$$
$$[x = 0.4, t = 1.0, u(x,t) = -0.559817073493616, v(x,t) = -2.83835234207466]$$
\` \`
$$[x = 0.6, t = 0., u(x,t) = 0.951056516295154, v(x,t) = 0.400000000000000]$$
$$[x = 0.6, t = 0.1, u(x,t) = 0.928130409299129, v(x,t) = -0.528250402873108]$$
$$[x = 0.6, t = 0.2, u(x,t) = 0.860457398822025, v(x,t) = -1.41174811715044]$$
$$[x = 0.6, t = 0.3, u(x,t) = 0.751300127309077, v(x,t) = -2.20789806508168]$$
$$[x = 0.6, t = 0.4, u(x,t) = 0.605921271043391, v(x,t) = -2.87831636815191]$$
$$[x = 0.6, t = 0.5, u(x,t) = 0.431329816676338, v(x,t) = -3.39068090567758]$$
$$[x = 0.6, t = 0.6, u(x,t) = 0.235943144867910, v(x,t) = -3.72028962471648]$$
$$[x = 0.6, t = 0.7, u(x,t) = 0.0291812126169348, v(x,t) = -3.85125147225538]$$
$$[x = 0.6, t = 0.8, u(x,t) = -0.178987600489737, v(x,t) = -3.77725253260656]$$
$$[x = 0.6, t = 0.9, u(x,t) = -0.378527086507047, v(x,t) = -3.50186043309588]$$
$$[x = 0.6, t = 1.0, u(x,t) = -0.559817073493616, v(x,t) = -3.03835234207465]$$

$$[x = 0.8, t = 0., u(x, t) = 0.587785252292473, v(x, t) = 0.200000000000000]$$
$$[x = 0.8, t = 0.1, u(x, t) = 0.573616138939214, v(x, t) = -0.373690299046364]$$
$$[x = 0.8, t = 0.2, u(x, t) = 0.531791918343336, v(x, t) = -0.919721915452597]$$
$$[x = 0.8, t = 0.3, u(x, t) = 0.464329014429133, v(x, t) = -1.41176964341556]$$
$$[x = 0.8, t = 0.4, u(x, t) = 0.374479940011353, v(x, t) = -1.82611094139299]$$
$$[x = 0.8, t = 0.5, u(x, t) = 0.266576487067239, v(x, t) = -2.14276964021398]$$
$$[x = 0.8, t = 0.6, u(x, t) = 0.145820882940909, v(x, t) = -2.34647903156833]$$
$$[x = 0.8, t = 0.7, u(x, t) = 0.0180349812302027, v(x, t) = -2.42741790457686]$$
$$[x = 0.8, t = 0.8, u(x, t) = -0.110620420667444, v(x, t) = -2.38168404474244]$$
$$[x = 0.8, t = 0.9, u(x, t) = -0.233942605123827, v(x, t) = -2.21148236701164]$$
$$[x = 0.8, t = 1.0, u(x, t) = -0.345985978901553, v(x, t) = -1.92501861269994]$$

$$[x = 1.0, t = 0., u(x, t) = 1.22464679914735 \times 10^{-16}, v(x, t) = 0.]$$
$$[x = 1.0, t = 0.1, u(x, t) = 0., v(x, t) = 0.]$$
$$[x = 1.0, t = 0.2, u(x, t) = 0., v(x, t) = 0.]$$
$$[x = 1.0, t = 0.3, u(x, t) = 0., v(x, t) = 0.]$$
$$[x = 1.0, t = 0.4, u(x, t) = 0., v(x, t) = 0.]$$
$$[x = 1.0, t = 0.5, u(x, t) = 0., v(x, t) = 0.]$$
$$[x = 1.0, t = 0.6, u(x, t) = 0., v(x, t) = 0.]$$
$$[x = 1.0, t = 0.7, u(x, t) = 0., v(x, t) = 0.]$$
$$[x = 1.0, t = 0.8, u(x, t) = 0., v(x, t) = 0.]$$
$$[x = 1.0, t = 0.9, u(x, t) = 0., v(x, t) = 0.]$$
$$[x = 1.0, t = 1.0, u(x, t) = 0., v(x, t) = 0.]$$

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

> *restart*; *with*(*LinearAlgebra*) :

Умножение матриц

> $A := \langle\langle a[1], b[1]\rangle | \langle a[2], b[2]\rangle\rangle;$

$$A := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$$

> $B := \langle\langle c[1], d[1]\rangle | \langle c[2], d[2]\rangle\rangle;$

$$B := \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{bmatrix}$$

> $C := MatrixMatrixMultiply(A, B);$

$$C := \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 d_1 & a_1 c_2 + a_2 d_2 \\ b_1 c_1 + b_2 d_1 & b_1 c_2 + b_2 d_2 \end{bmatrix}$$

Транспонирование матрицы

> $E := \langle\langle 1, 4\rangle|\langle 2, 5\rangle|\langle 3, 6\rangle\rangle;$

$$E := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

> $Transpose(E);$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Вычисление определителя матрицы

> $A := \langle\langle 1, 3\rangle|\langle 2, 4\rangle\rangle;$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

> $Determinant(A);$

$$-2$$

Нахождение обратной матрицы

> $MatrixInverse(A);$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Умножение матрицы на вектор

> $M := \langle\langle 5, 0, 0, 0\rangle|\langle 0, 1, 0, 0\rangle|\langle 0, 0, 2, 0\rangle|\langle 0, 0, 0, 1\rangle\rangle;$

$$M := \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> $v := \langle x, y, z, 1\rangle;$

$$v := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $MatrixVectorMultiply(M, v);$

$$\begin{bmatrix} 5x \\ y \\ 2z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Решение систем линейных уравнений

> $with(LinearAlgebra):$

> $M := Matrix([[1, 1, 3, -1], [1, 1, 1, 1], [1, -2, 1, -1], [4, 1, 8, -1]]);$

$$M := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

> $v := Vector([0, 1, 1, 0]);$

$$v := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> $x = LinearSolve(M, v);$ **# *Решение системы Mx=v***

$$x = \begin{bmatrix} \frac{25}{6} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

Нахождение собственных значений (характеристических чисел) и собственных векторов матриц

> $N := \langle\langle 1, 0, 0\rangle|\langle 1, 1, 0\rangle|\langle 0, 3, 2\rangle\rangle;$ **# *задание по столбцам***

$$N := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

> $CharacteristicPolynomial(N, \mathrm{lambda});$ **# *Характеристический многочлен***

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2$$

> $solve(\%, \{\mathrm{lambda}\});$ **# *Нахождение собственных значений***

$$\{\lambda = 2\}, \{\lambda = 1\}, \{\lambda = 1\}$$

> $Eigenvalues(N);$ **# *Собственные значения матрицы***

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $Vector([\lambda[1], \lambda[2], \lambda[3]]) = Eigenvalues(N);$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

> $\Lambda, M := Eigenvectors(N);$ **# *Собственные значения и собственные векторы матрицы***

$$\Lambda, M := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> $R[1] = Column(M, 1);$
> #` ***Первый столбец матрицы М соответствует первому собственному значению***

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> $R[2] = Column(M, 2);$
> #\` \`***Первый столбец матрицы M соответствует второму собственному значению***

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

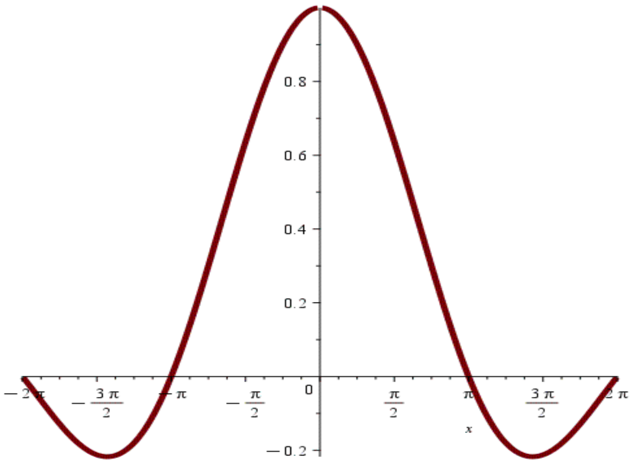
> $R[3] = Column(M, 3);$
> #\` \`***Первый столбец матрицы M соответствует третьему собственному значению***

$$R_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

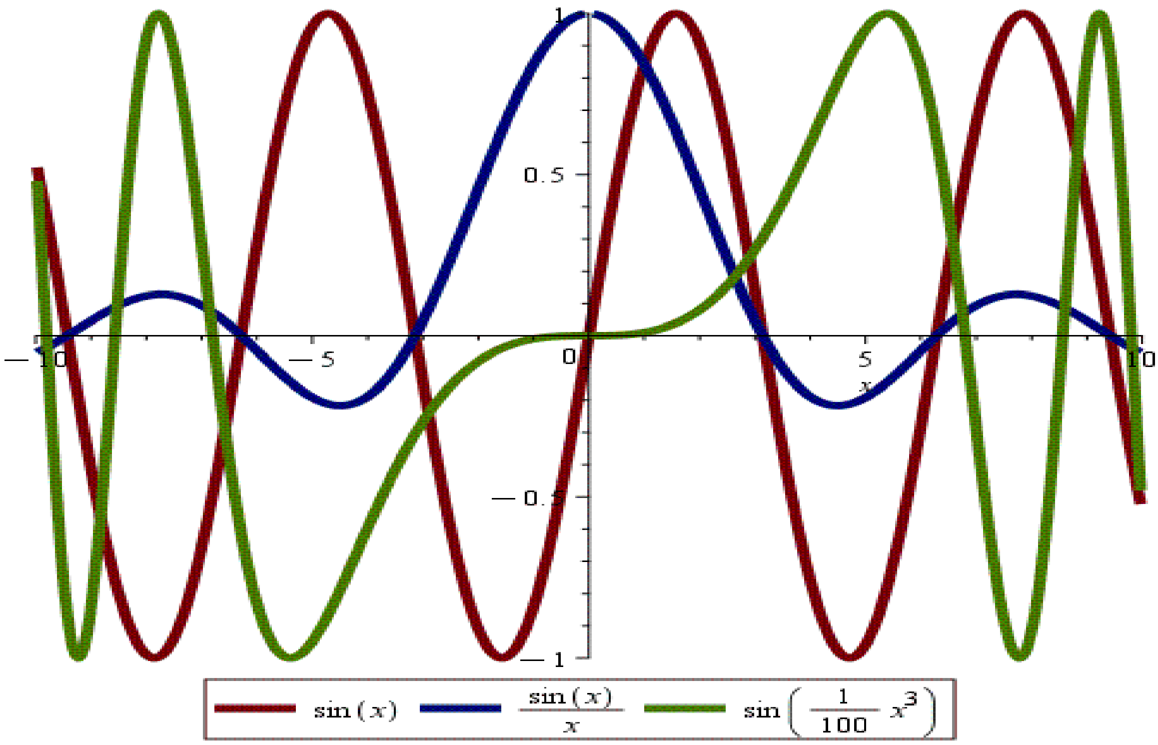
ГРАФИКА

Графики на плоскости

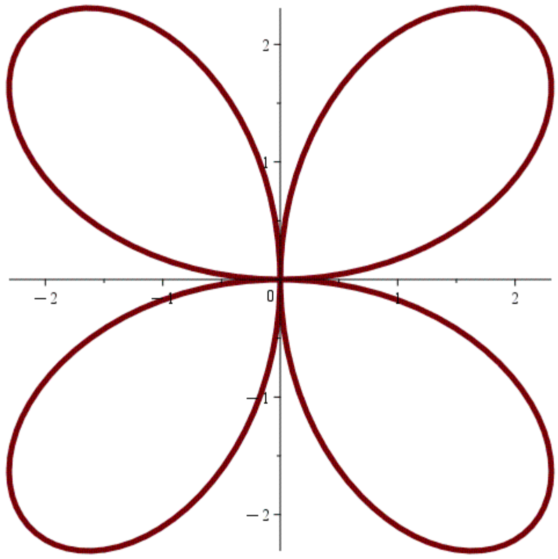
> $plot\left(\frac{\sin(x)}{x}, thickness = 5\right);$



> $plot\left(\left[\sin(x), \frac{\sin(x)}{x}, \sin\left(\frac{x^3}{100}\right)\right], x = -10\,..10,\ legend = \left[\sin(x), \frac{\sin(x)}{x}, \sin\left(\frac{x^3}{100}\right)\right],\ thickness = 5\right);$

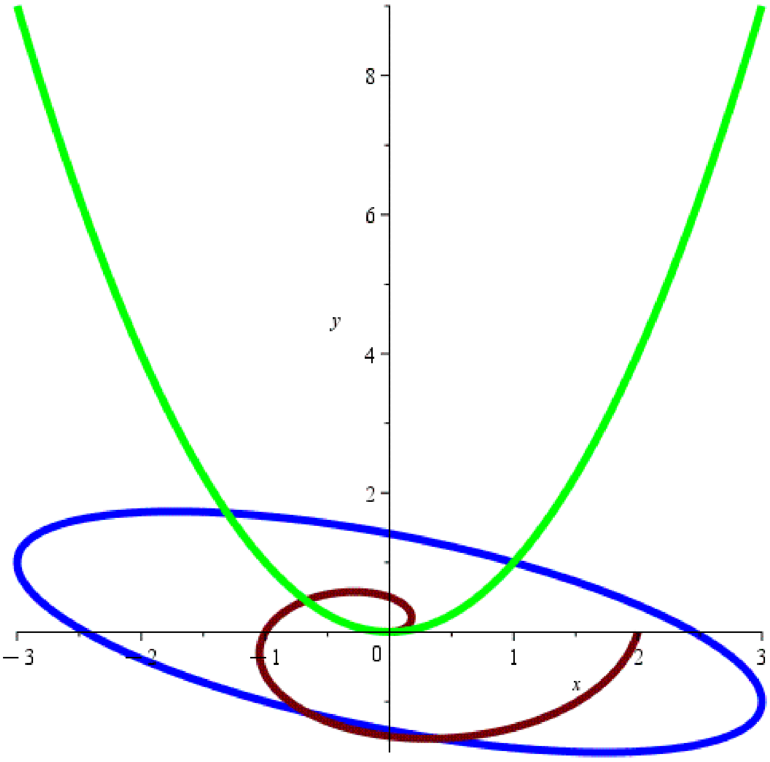


> $plot([3\cdot\sin(2\cdot t), t, t=0..2\cdot\mathrm{Pi}], coords=\mathrm{polar}, thickness=5);$

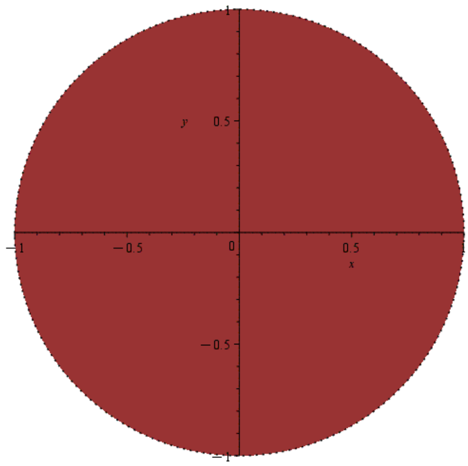


> $with(plots):$

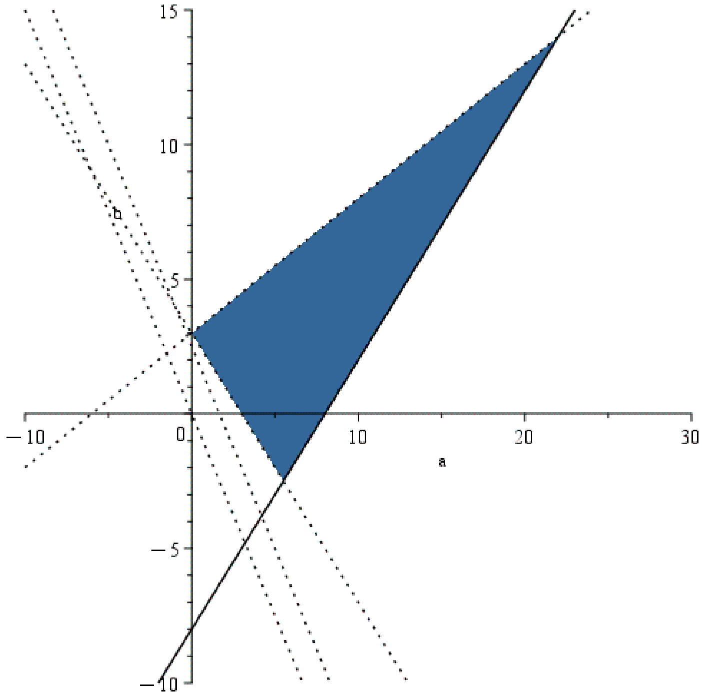
```
> F:=plot([t/Pi,t,t=0..2*Pi],coords=polar, thickness = 5): # спираль Архимеда в полярных координатах
> G:=plot(x^2,x=-3..3,color=green, thickness = 5): # явно заданная парабола
> H:=implicitplot(x^2+2*x*y+3*y^2-6,x=-3..3,y=-3..3,color=blue, thickness = 5): # неявно заданный эллипс
> display({F,G,H}); # график всей кривой
```



> $implicitplot(x^\wedge 2 + y^\wedge 2 < 1, x = -1.2..1.2, y = -1.2..1.2, filledregions);$



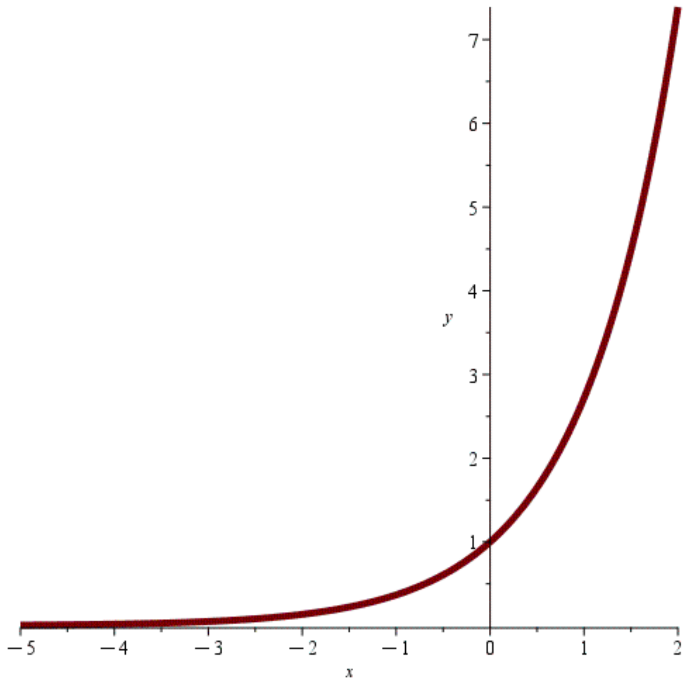
> $inequal(\{a + b > 3, 2\cdot b - a < 6, 3\cdot a + 2\cdot b > 5, -b + a \leq 8, 3\cdot a + 2\cdot b > 0\}, a = -10..30, b = -10..15);$



Построение графика решения ОДУ

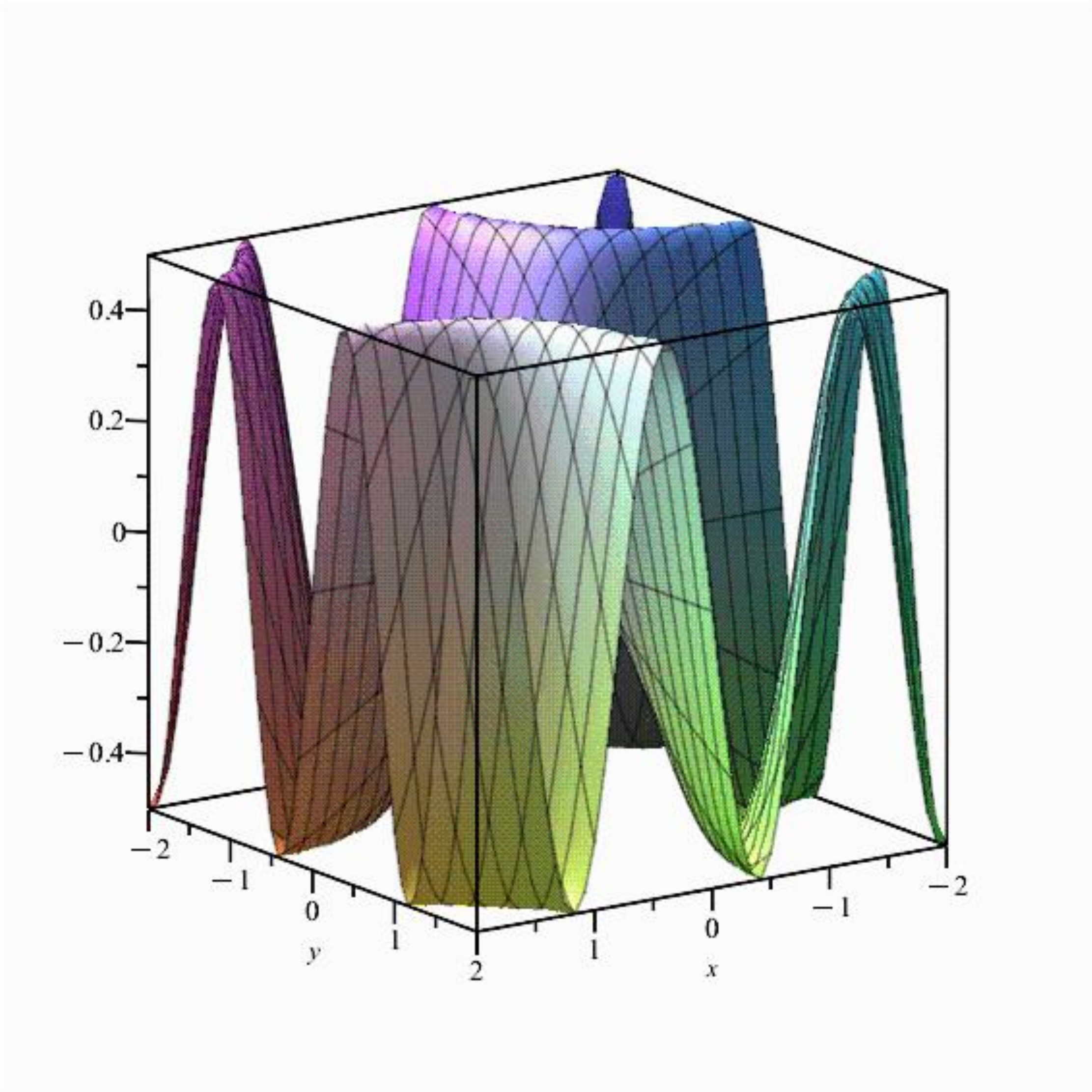
> $p := dsolve(\{y'(x) = y(x), y(0) = 1\}, type = numeric, range = -5..2)$:

> $odeplot(p, thickness = 5)$;

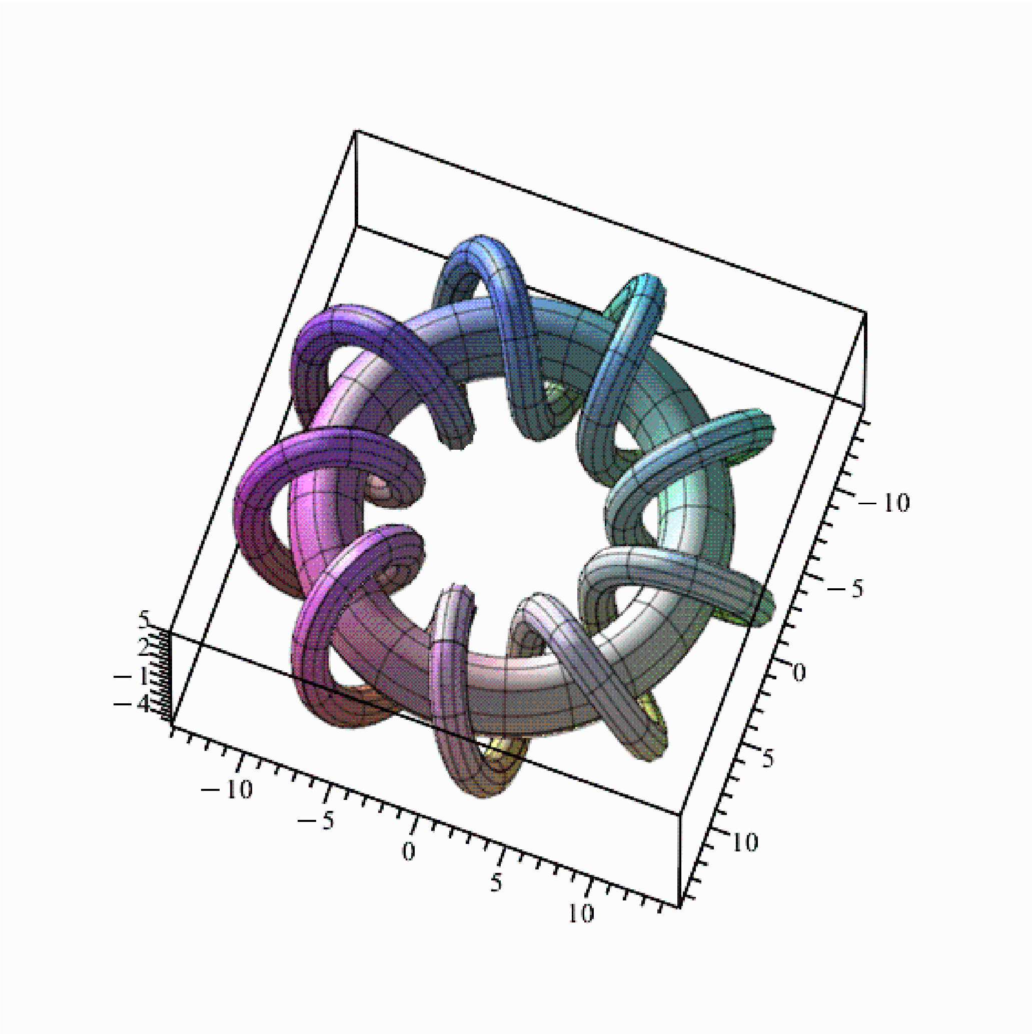


Трёхмерные графики - графики в пространстве

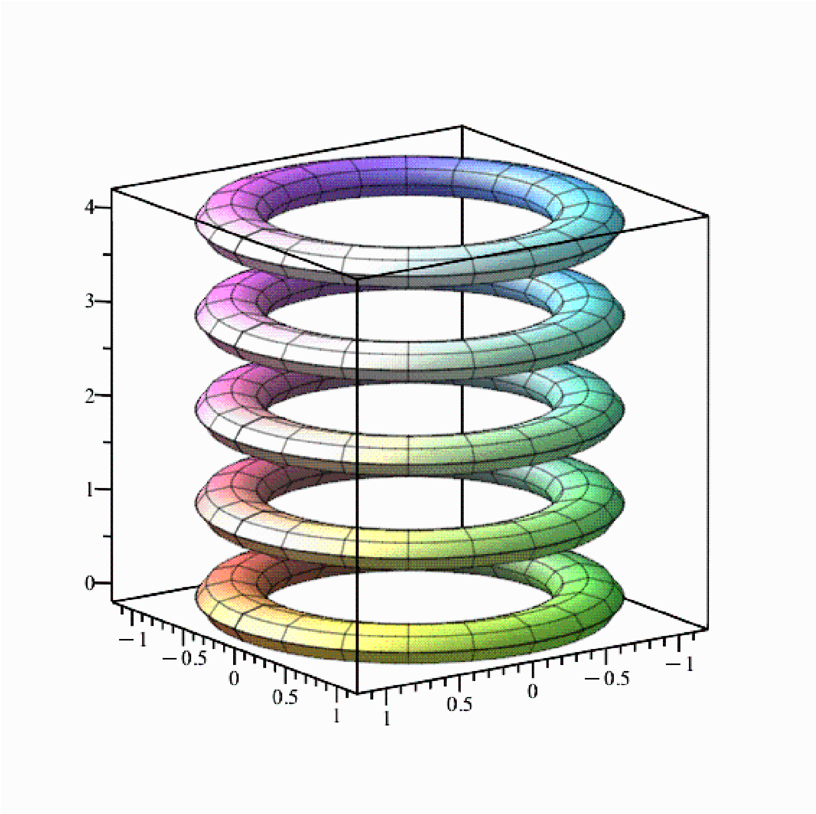
> $plot3d(\cos(x \cdot y) \cdot \sin(x \cdot y), x = -2..2, y = -2..2)$;



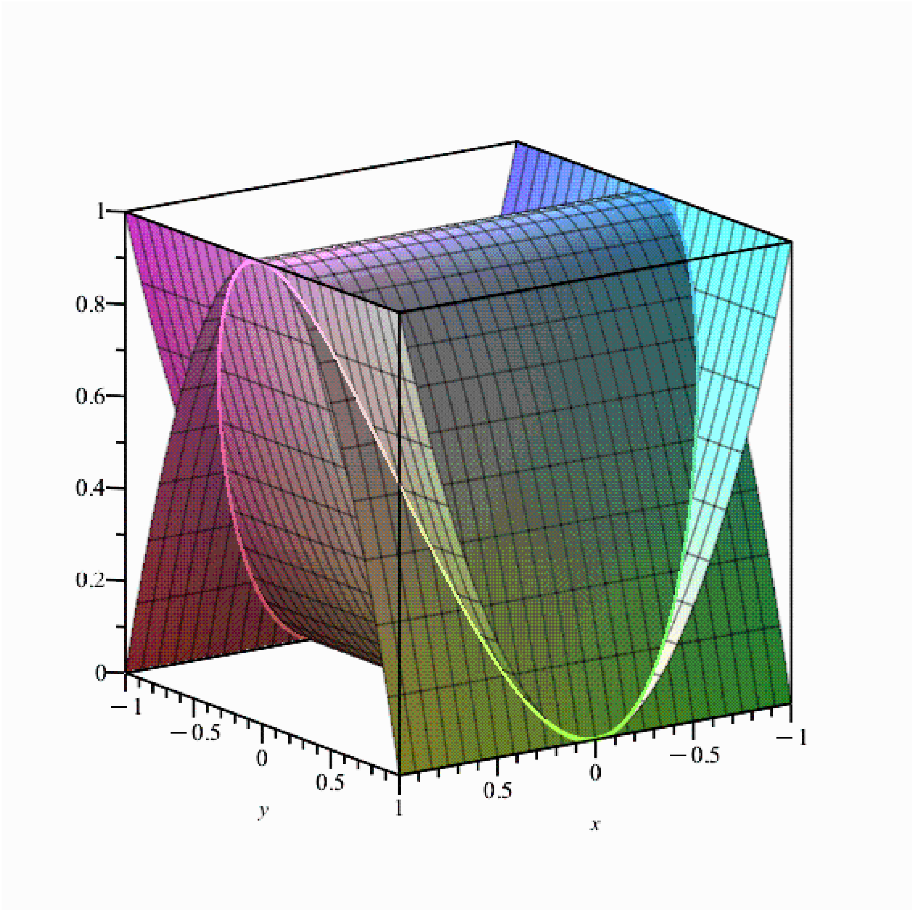

```
> N:=10:
>
tortube:=tubeplot({[10*cos(t),10*sin(t),0,t=0..2*Pi,radius=2,num
points=10*N,tubepoints=1*N],[cos(t)*(10+4*sin(9*t)),sin(t)*(10+4
*sin(9*t)),4*cos(9*t),t=0..2*Pi,radius=1,numpoints=trunc(37.5*N)
,tubepoints=N]},scaling=unconstrained,orientation=[20,10]):
> tortube;# спираль на торе
```




```
> torii:=proc(n) local s,k; s:=seq(tubeplot([cos(t),sin(t),k],t=0..2*Pi,numpoints=100,radius=0.2),k=0..n-1);display({s});end:
> torii(5); # использование процедуры
```




```
> F:=plot3d({x^2,1-y^2},x=-1..1,y=-1..1):
> G:=spacecurve([cos(t),sin(t),cos(t)^2],t=0..2*Pi,thickness=3):
> display({F,G}); # Два пересекающихся параболических цилиндра и пространственная линия их пересечения
```


1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
−1
−0.5
0
0.5
1
y
0.5
0
−0.5
−1
x

Лабораторная работа № 1

Линейная алгебра

Необходимые сведения

> *restart*; *with*(*LinearAlgebra*);

[&x, Add, Adjoint, BackwardSubstitute, BandMatrix, Basis, BezoutMatrix, BidiagonalForm, BilinearForm, CARE, CharacteristicMatrix, CharacteristicPolynomial, Column, ColumnDimension, ColumnOperation, ColumnSpace, CompanionMatrix, CompressedSparseForm, ConditionNumber, ConstantMatrix, ConstantVector, Copy, CreatePermutation, CrossProduct, DARE, DeleteColumn, DeleteRow, Determinant, Diagonal, DiagonalMatrix, Dimension, Dimensions, DotProduct, EigenConditionNumbers, Eigenvalues, Eigenvectors, Equal, ForwardSubstitute, FrobeniusForm, FromCompressedSparseForm, FromSplitForm, GaussianElimination, GenerateEquations, GenerateMatrix, Generic, GetResultDataType, GetResultShape, GivensRotationMatrix, GramSchmidt, HankelMatrix, HermiteForm, HermitianTranspose, HessenbergForm, HilbertMatrix, HouseholderMatrix, IdentityMatrix, IntersectionBasis, IsDefinite, IsOrthogonal, IsSimilar, IsUnitary, JordanBlockMatrix, JordanForm, KroneckerProduct, LA_Main, LUDecomposition, LeastSquares, LinearSolve, LyapunovSolve, Map, Map2, MatrixAdd, MatrixExponential, MatrixFunction, MatrixInverse, MatrixMatrixMultiply, MatrixNorm, MatrixPower, MatrixScalarMultiply, MatrixVectorMultiply, MinimalPolynomial, Minor, Modular, Multiply, NoUserValue, Norm, Normalize, NullSpace, OuterProductMatrix, Permanent, Pivot, PopovForm, ProjectionMatrix, QRDecomposition, RandomMatrix, RandomVector, Rank, RationalCanonicalForm, ReducedRowEchelonForm, Row, RowDimension, RowOperation, RowSpace, ScalarMatrix, ScalarMultiply, ScalarVector, SchurForm, SingularValues, SmithForm, SplitForm, StronglyConnectedBlocks, SubMatrix, SubVector, SumBasis, SylvesterMatrix, SylvesterSolve, ToeplitzMatrix, Trace, Transpose, TridiagonalForm, UnitVector, VandermondeMatrix, VectorAdd, VectorAngle, VectorMatrixMultiply, VectorNorm, VectorScalarMultiply, ZeroMatrix, ZeroVector, Zip]

1. Сложение матриц

> $A := \langle\langle a[1], b[1]\rangle | \langle a[2], b[2]\rangle | \langle a[3], b[3]\rangle\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

> $B := \langle\langle c[1], d[1]\rangle | \langle c[2], d[2]\rangle | \langle c[3], d[3]\rangle\rangle$

$$B := \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{bmatrix}$$

> $M := A + B$

$$M := \begin{bmatrix} a_1 + c_1 & a_2 + c_2 & a_3 + c_3 \\ b_1 + d_1 & b_2 + d_2 & b_3 + d_3 \end{bmatrix}$$

> $N := A - B$

$$N := \begin{bmatrix} a_1 - c_1 & a_2 - c_2 & a_3 - c_3 \\ b_1 - d_1 & b_2 - d_2 & b_3 - d_3 \end{bmatrix}$$

2. Умножение матрицы на число

> $P := \lambda \cdot A$

$$P := \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ \lambda b_1 & \lambda b_2 & \lambda b_3 \end{bmatrix}$$

3. Умножение матриц

> *restart*; *with*(*LinearAlgebra*) :

> $A := \langle\langle a[1], b[1]\rangle|\langle a[2], b[2]\rangle|\langle a[3], b[3]\rangle\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

> $B := \langle\langle c[1], c[2], c[3]\rangle|\langle d[1], d[2], d[3]\rangle\rangle$

$$B := \begin{bmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

> $C := MatrixMatrixMultiply(A, B)$

$$C := \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 & a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 & b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3 \end{bmatrix}$$

4. Степень матрицы

> *restart*; *with*(*LinearAlgebra*) :

> $A := \langle\langle 1, 3\rangle|\langle 5, -2\rangle\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

> $A\_в\_кубе := MatrixPower(A, 3)$

$$A\_в\_кубе := \begin{bmatrix} 1 & 90 \\ 54 & -53 \end{bmatrix}$$

5. Транспонирование матрицы

> *restart*; *with*(*LinearAlgebra*) :

> $A := \langle\langle a[1], b[1]\rangle|\langle a[2], b[2]\rangle|\langle a[3], b[3]\rangle\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

> $A\_транспонированная := Transpose(A)$

$$A\_транспонированная := \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

6. Определитель матрицы

> $restart; with(LinearAlgebra):$

> $A := \langle\langle 1, 2, 5\rangle | \langle -1, 3, 0\rangle | \langle 0, 1, 4\rangle\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

> $Det\_a := Determinant(A);$

$$Det\_a := 15$$

7. Ранг матрицы

> $restart; with(LinearAlgebra):$

> $A := \langle\langle 1, 0, 0\rangle | \langle 2, 2, 0\rangle | \langle 2, 2, 0\rangle | \langle 0, 3, 0\rangle\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

> $R\_A := Rank(A)$

$$R\_A := 2$$

8. Обратная матрица

> $restart; with(LinearAlgebra):$

> $A := \langle\langle 1, 2, 1\rangle | \langle 0, 1, 0\rangle | \langle 0, 2, 2\rangle\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

> $A\_1 := MatrixInverse(A)$

$$A\_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Проверка

> $MatrixMatrixMultiply(A, A\_1) = MatrixMatrixMultiply(A\_1, A)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Решение систем линейных уравнений

> $restart; with(LinearAlgebra):$

> $A := \langle\langle 2, 1, 0\rangle | \langle 2, 1, 2\rangle | \langle 1, 0, 1\rangle\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

> $b := \langle 9, 3, 7\rangle$

$$b := \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

> $\langle x[1], x[2], x[3] \rangle = LinearSolve(A, b)$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

> $MatrixVectorMultiply(A, LinearSolve(A, b)) = b$ # *проверка*

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

> $eq1 := x[1] + x[2] + 3 \cdot x[3] - x[4] = 0;$
> $eq2 := x[1] + x[2] + x[3] + x[4] = 1;$
> $eq3 := x[1] - 2 \cdot x[2] + x[3] - x[4] = 1;$
> $eq4 := 4 \cdot x[1] + x[2] + 8 \cdot x[3] - x[4] = 0;$

$$eq1 := x_1 + x_2 + 3\,x_3 - x_4 = 0$$

$$eq2 := x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$$

$$eq3 := x_1 - 2\,x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$eq4 := 4\,x_1 + x_2 + 8\,x_3 - x_4 = 0$$

> $sys := eq1, eq2, eq3, eq4$

$$sys := x_1 + x_2 + 3\,x_3 - x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_1 - 2\,x_2 + x_3 - x_4 = 1, 4\,x_1 + x_2 + 8\,x_3 - x_4 = 0$$

> $var := x[1], x[2], x[3], x[4]$

$$var := x_1, x_2, x_3, x_4$$

> $A, b := GenerateMatrix([sys], [var])$

$$A, b := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 8 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> $Sys := GenerateEquations(A, [var], b)$ # *проверка*

$$Sys := [x_1 + x_2 + 3\,x_3 - x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, x_1 - 2\,x_2 + x_3 - x_4 = 1, 4\,x_1 + x_2 + 8\,x_3 - x_4 = 0]$$

> $solution\_1 := \langle x[1], x[2], x[3], x[4] \rangle = LinearSolve(A, b)$

$$solution\_1 := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{25}{6} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{2} \\ -2 \end{bmatrix}$$

> $MatrixVectorMultiply(A, LinearSolve(A, b)) = b$ # *проверка*

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> $solution\_2 := solve(\{sys\}, \{var\})$

$$solution\_2 := \left\{x_1 = \frac{25}{6}, x_2 = \frac{4}{3}, x_3 = -\frac{5}{2}, x_4 = -2\right\}$$

> $subs(solution\_2, [sys])$ # *проверка*

$$[0 = 0, 1 = 1, 1 = 1, 0 = 0]$$

10. Собственные значения и собственные векторы

> $restart; with(LinearAlgebra):$

> $A := \langle\langle -1, -3, -6\rangle | \langle 3, 5, 6\rangle | \langle -3, -3, -4\rangle\rangle$

$$A := \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -3 & 5 & -3 \\ -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

> $\langle \lambda[1], \lambda[2], \lambda[3]\rangle = Eigenvalues(A)$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

> $\Lambda, V := Eigenvectors(A)$

$$\Lambda, V := \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

> $EV := Column(V, 1..3);$

$$EV := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

> $\lambda[1] = \Lambda[1], \quad v[1] = EV[1]; \lambda[2] = \Lambda[2], \quad v[2] = EV[2]; \lambda[3] = \Lambda[3], \quad v[3] = EV[3];$

$$\lambda_1 = -4, v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 2, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 = 2,\ v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Задание по лабораторной работе

m = 1 для группы ІПЗ – 2.01
m = 2 для группы ІПЗ – 2.02
m = 3 для группы КН – 2.01
m = 4 для группы КН – 2.02

n – порядковый номер студента в группе

1. Транспонировать матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1+n & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 6+n & 7 & 9 \\ w+m & (m+5)x & y & z \end{bmatrix}.$$

2. Перемножить матрицы, найдя произведение AB

$$A = \begin{bmatrix} 5+n & 1 & -7 & 13+n \\ 0 & 2+m & 9-m & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 7+n \\ 2-n & 4+n \\ 3 & 3+2n \\ 9+3n & 15 \end{bmatrix}.$$

3. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1+n & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3+m & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1+2n & 2 \\ 4 & 1+3n & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

4. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a & 111+n & 222+2n & 333 \\ 0 & b & 444-m & 555-6m \\ 0 & 0 & c & 666+5m+n \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

5. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = m, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1+n, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 1+5m, \\ 4x_1 + x_2 + 8x_3 - x_4 = mn. \end{cases}$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a & m & m & n \\ 0 & b & n & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{bmatrix}.$$

Лабораторная работа № 2

Системы нелинейных уравнений

Необходимые сведения

1. Нахождение действительных корней алгебраического уравнения

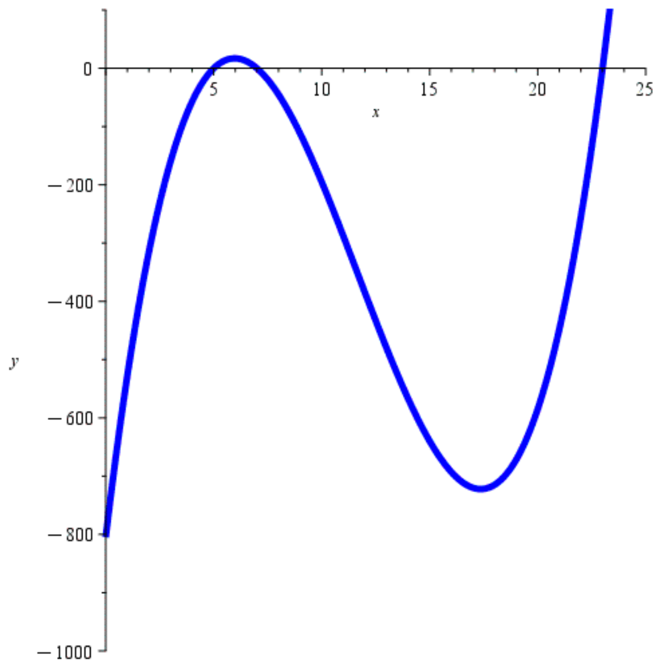
$$x^3 - 35x^2 + 311x - 805 = 0$$

> $restart$

> $f := x \rightarrow x^3 - 35\,x^2 + 311\,x - 805$

$$f := x \mapsto x^3 - 35\cdot x^2 + 311\cdot x - 805$$

> $plot(f(x), x = 0\,..25, y = -1000\,..100, thickness = 5, color = blue)$



> $solution := solve(f(x) = 0, \{x\})$

$$solution := \{x = 5\}, \{x = 7\}, \{x = 23\}$$

> **for** i **from** 1 **by** 1 **to** 3 **do** $simplify(subs(solution[i], f(x))) = 0.0$ **end do** # *проверка*

$$0 = 0.$$

$$0 = 0.$$

$$0 = 0.$$

2. Нахождение всех корней (включая комплексные) алгебраического уравнения $23x^5 + 105x^4 - 10x^2 + 17x = 0$.

> $restart$

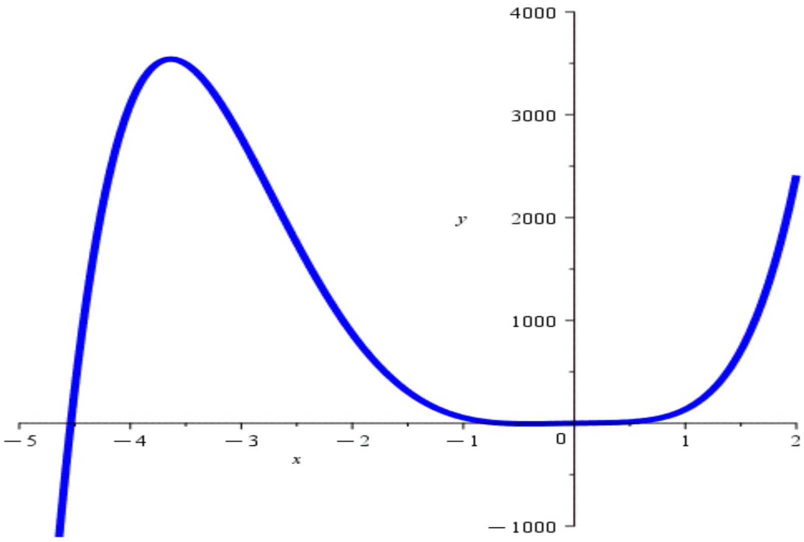
> $f := x \to 23\,x^5 + 105\,x^4 - 10\,x^2 + 17\,x$

$$f := x \mapsto 23 \cdot x^5 + 105 \cdot x^4 - 10 \cdot x^2 + 17 \cdot x$$

> $fsolve(f(x) = 0, \{x\})$ *# только действительные корни*

$$\{x = -4.536168981\}, \{x = -0.6371813185\}, \{x = 0.\}$$

> $plot(f(x), x = -5\,..2, y = -1000\,..4000, thickness = 5, color = blue)$



> $fsolve(f(x) = 0, \{x\}, complex)$ *# все корни*

$$\{x = -4.53616898134311\}, \{x = -0.637181318531050\}, \{x = 0.\}, \{x = 0.304066454284907 - 0.404061905751759\,\mathrm{I}\}, \{x = 0.304066454284907 + 0.404061905751759\,\mathrm{I}\}$$

> $fsolve(f(x) = 0, \{x = -1\,..-0.3\})$ *# нахождение корня уравнения в промежутке* [-1; 0,3]

$$\{x = -0.6371813185\}$$

> $fsolve(f(x) = 0, \{x = -5\,..-4\})$ *# нахождение корня уравнения в промежутке* $[-5; -4]$

$$\{x = -4.536168981\}$$

> $fsolve(f(x) = 0, \{x = -0.3\,..0.5\})$ *# нахождение корня уравнения в промежутке* $[-0.3; 0.5]$

$$\{x = 0.\}$$

3. Решение системы двух уравнений

$$\sin(x + y) - e^x y = 0, \quad x^2 - y - 2 = 0.$$

> *restart*

> $f := (x, y) \to \sin(x + y) - \exp(x)\,y$

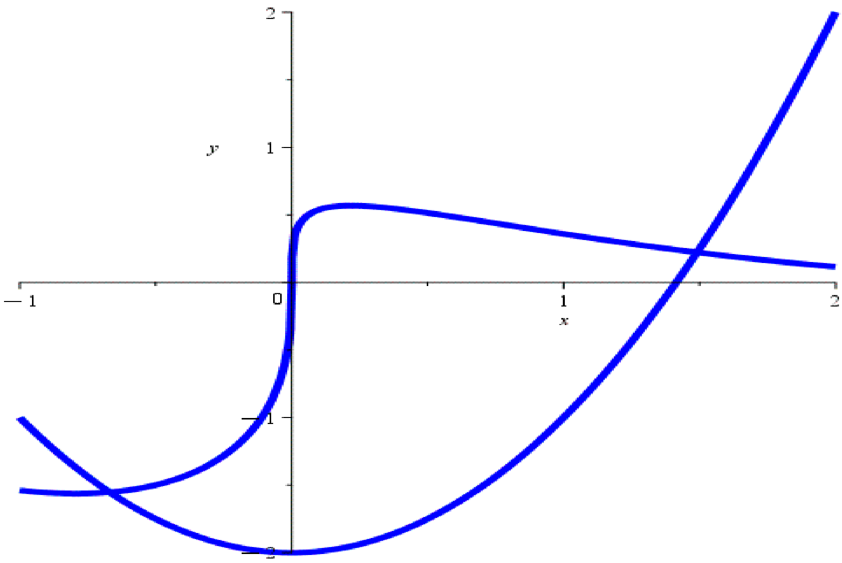
$$f := (x, y) \mapsto \sin(x + y) - e^x \cdot y$$

> $g := (x, y) \to x^2 - y - 2$

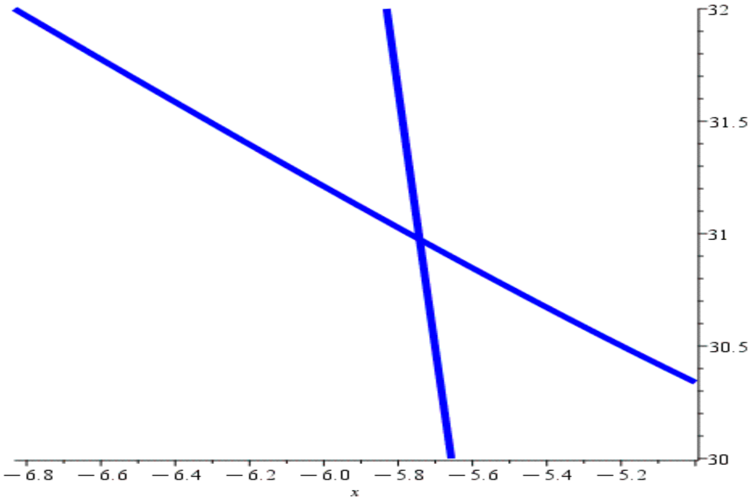
$$g := (x, y) \mapsto x^2 - y - 2$$

> $with(plots):$

> $implicitplot([f(x, y) = 0, g(x, y) = 0], x = -1\,..2, y = -3\,..50, thickness = 5, color = blue)$



> $implicitplot([f(x,y)=0, g(x,y)=0], x=-7..-5, y=30..32, thickness=5, color=blue)$



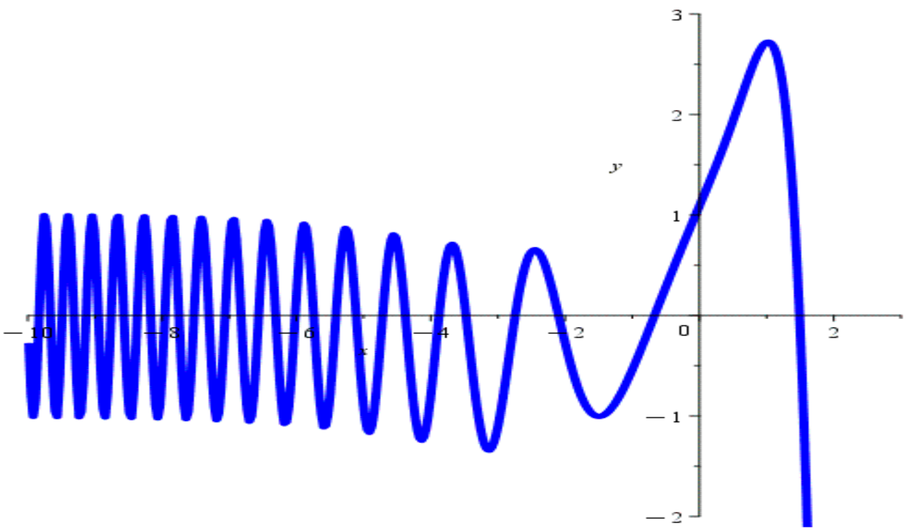
> $Y := isolate(g(x,y)=0, y)$

$$Y := y = x^2 - 2$$

> $h := unapply(subs(Y, f(x,y)), x)$

$$h := x \mapsto \sin(x^2 + x - 2) - e^x \cdot (x^2 - 2)$$

> $plot(h(x), x=-10..3, y=-2..3, color=blue, thickness=5)$



> $solution := fsolve(\{f(x,y)=0, g(x,y)=0\})$

$$solution := \{x=-6.017327250, y=34.20822723\}$$

> $solution1 := fsolve(\{f(x,y)=0, g(x,y)=0\}, \{x=-1..1, y=-2..-1\})$

$$solution1 := \{x=-0.6687012050, y=-1.552838698\}$$

> $solution2 := fsolve(\{f(x,y)=0, g(x,y)=0\}, \{x=1..2, y=0..1\})$

$$solution2 := \{x=1.490927732, y=0.2228655010\}$$

> $simplify(subs(solution1, f(x,y)))=0.0$ # проверка

$$-5.\times 10^{-10}=0.$$

> $simplify(subs(solution1, g(x,y)))=0.0$ # проверка

$$-4.\times 10^{-10}=0.$$

> $simplify(subs(solution2, f(x,y)))=0.0$ # проверка

$$-7.\times 10^{-10}=0.$$

> $simplify(subs(solution2, g(x,y)))=0.0$ # проверка

$$1.\times 10^{-9}=0.$$

4. Найти промежутки знакопостоянства функции

$$f(x)=x^4-4{,}5x^3-7{,}34x^2+22x+24$$

> $restart$

> $f := x \to x^4 - 4.5\,x^3 - 7.34\,x^2 + 22\,x + 24$

$$f := x \mapsto x^4 - 4.5\cdot x^3 - 7.34\cdot x^2 + 22\cdot x + 24$$

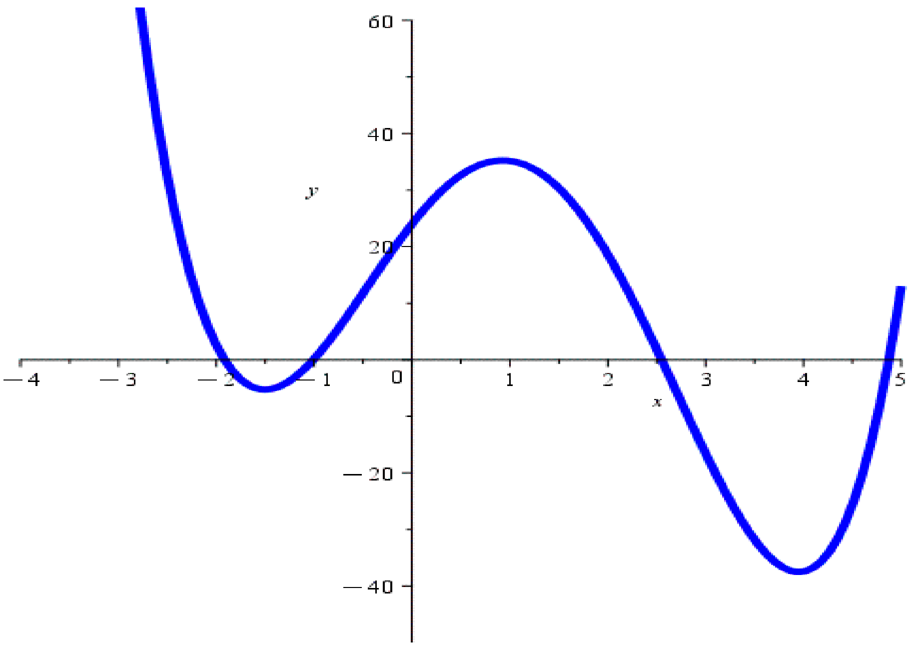
> $solve(f(x) < 0, \{x\})$

$$\{-1.914875583 < x, x < -1.008386880\}, \{2.551029101 < x, x < 4.872233362\}$$

> $solve(f(x) > 0, \{x\})$

$$\{x < -1.914875583\}, \{-1.008386880 < x, x < 2.551029101\}, \{4.872233362 < x\}$$

> $plot(f(x), x=-4..5, y=-50..60, thickness=5, color=blue)$



> $solve(f(x)=0, \{x\})$

$\{x = 2.551029101\}, \{x = 4.872233362\}, \{x = -1.008386880\}, \{x = -1.914875583\}$

Задание по лабораторной работе

m = 1 для группы ІПЗ – 2.01
m = 2 для группы ІПЗ – 2.02
m = 3 для группы КН – 2.01
m = 4 для группы КН – 2.02

n – порядковый номер студента в группе

1. Найти действительные корни уравнения

$$x^3 - (3{,}45m + n)x^2 + \left(3{,}45mn + 2{,}45m^2\right)x - 2{,}45m^2 n = 0.$$

2. Найти все (действительные и комплексные) корни уравнения

$$x^5 - 1{,}44mx^4 + \left(-3{,}68m^2 + 0{,}01n^2\right)x^3 + (0{,}0056mn^2 + 4{,}56m^3)x^2 +$$
$$+\left(-0{,}0356m^2n^2 + 2{,}68m^4\right)x - 3{,}12m^5 - 0{,}0312m^3n^2 = 0.$$

3. Решить систему двух уравнений

$$(m+1)\sin(x+y) - \frac{e^x y}{n+1} = 0, \quad x^2 - y - 2 - m = 0.$$

4. Найти промежутки знакопостоянства функции

$$f(x) = x^4 + 0{,}05mx^3 - n^2x^2 - 0{,}05mn^2x - 0{,}030m^2x^2 + 0{,}030m^2n^2$$

Лабораторная работа № 3

Интерполяция

Необходимые сведения

1. Интерполяция значений функции двух переменных, заданной таблицей

x	[0, 0]	[1, 0]	[2, 0]	[0, 1]	[1, 1]	[2, 1]	[0, 2]	[1, 2]	[2, 2]
y	0	0	0	0	1	0	0	0	0

> *restart*

> *with*(*Interpolation*) :

> $x := [[0, 0], [1, 0], [2, 0], [0, 1], [1, 1], [2, 1], [0, 2], [1, 2], [2, 2]]$

$$x := [[0, 0], [1, 0], [2, 0], [0, 1], [1, 1], [2, 1], [0, 2], [1, 2], [2, 2]]$$

> $y := [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$

$$y := [0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0]$$

> $f := Interpolate(x, y)$

$$f := (\textit{Natural Neighbor interpolation object with 9 sample points})$$

.

> $f(0.5, 0.5)$

$$0.250000000000000$$

2. Линейная интерполяция значений функции, заданной таблицей

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
y	–0,6	0	0,4	0,6	0,3	–0,1	–0,2	0	0,1	–0,3	–0,6

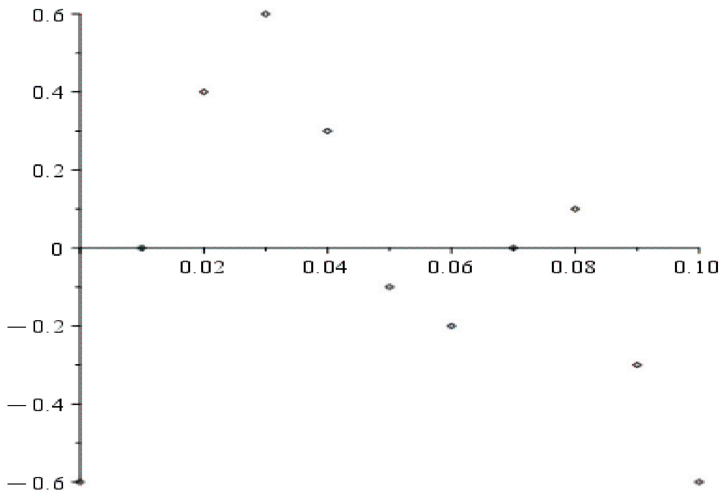
> *restart*; *with*(*Interpolation*) :

> *with*(*plots*) :

> $x := [0., 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.06, 0.07, 0.08, 0.09, 0.10]$:

> $y := \left[-0.6, 0., 0.4, 0.6, 0.3, -0.1, -0.2, 0., 0.1, -0.3, -0.6\right]$:

> *pointplot*(x, y)



Осуществляем линейную интерполяцию

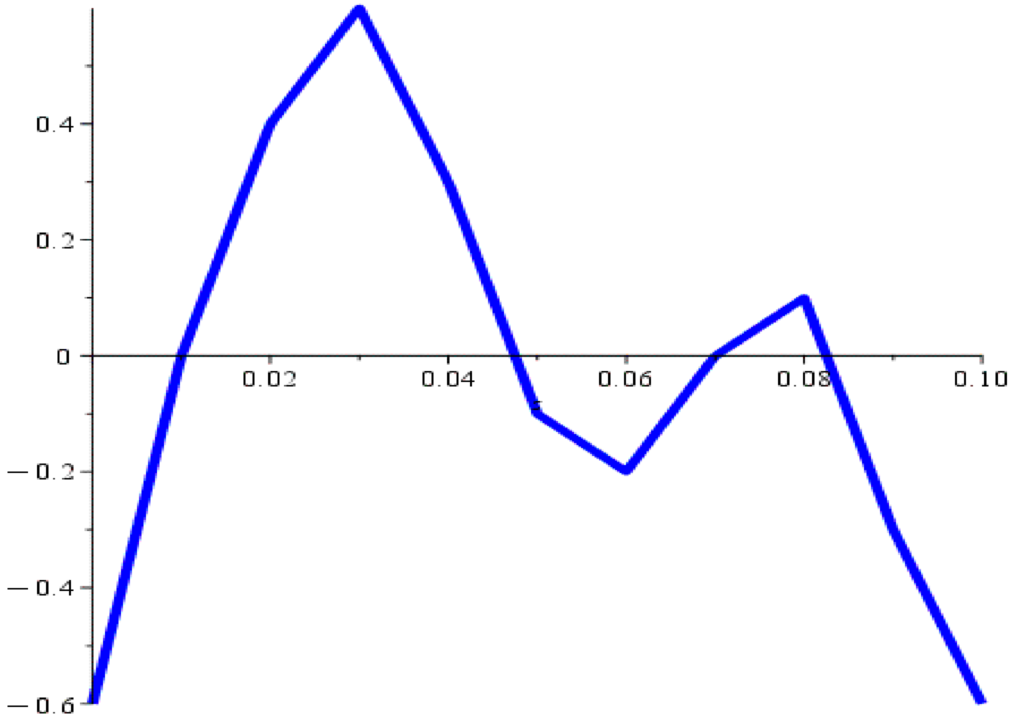
> $f := LinearInterpolation(x, y)$ # *интерполяционный полином*

$$f := \left[\begin{array}{c} \text{a linear interpolation object} \\ \text{with 11 points in 1-D} \end{array}\right]$$

> $f(0.033)$ # значение функции в точке $x = 0{,}033$

$$0.510000000000000$$

> $plot(f(z), z = 0. ..0.1, color = blue, thickness = 5)$

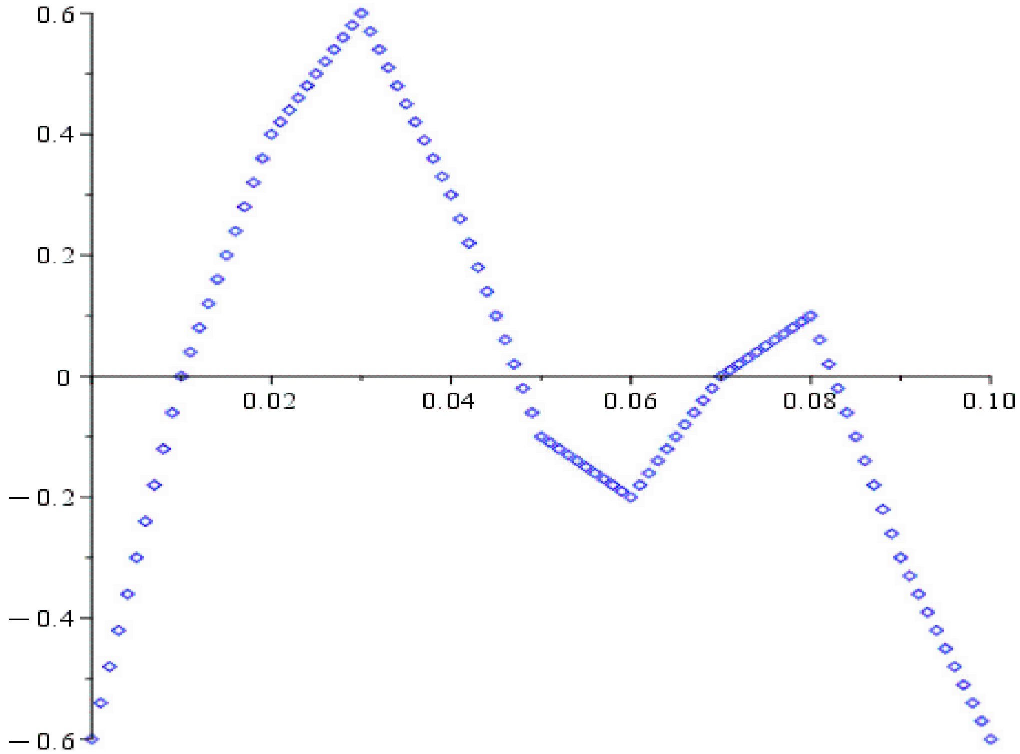


> $X := [seq(0.001\, i, i = 0 ..100)]$# новые значения аргумента

$X := [0., 0.001, 0.002, 0.003, 0.004, 0.005, 0.006, 0.007, 0.008, 0.009, 0.010, 0.011, 0.012, 0.013, 0.014, 0.015, 0.016, 0.017, 0.018, 0.019, 0.020, 0.021, 0.022, 0.023, 0.024, 0.025, 0.026, 0.027, 0.028, 0.029, 0.030, 0.031, 0.032, 0.033, 0.034, 0.035, 0.036, 0.037, 0.038, 0.039, 0.040, 0.041, 0.042, 0.043, 0.044, 0.045, 0.046, 0.047, 0.048, 0.049, 0.050, 0.051, 0.052, 0.053, 0.054, 0.055, 0.056, 0.057, 0.058, 0.059, 0.060, 0.061, 0.062, 0.063, 0.064, 0.065, 0.066, 0.067, 0.068, 0.069, 0.070, 0.071, 0.072, 0.073, 0.074, 0.075, 0.076, 0.077, 0.078, 0.079, 0.080, 0.081, 0.082, 0.083, 0.084, 0.085, 0.086, 0.087, 0.088, 0.089, 0.090, 0.091, 0.092, 0.093, 0.094, 0.095, 0.096, 0.097, 0.098, 0.099, 0.100]$

> $Y := f(X)$:# *новые значения функци*

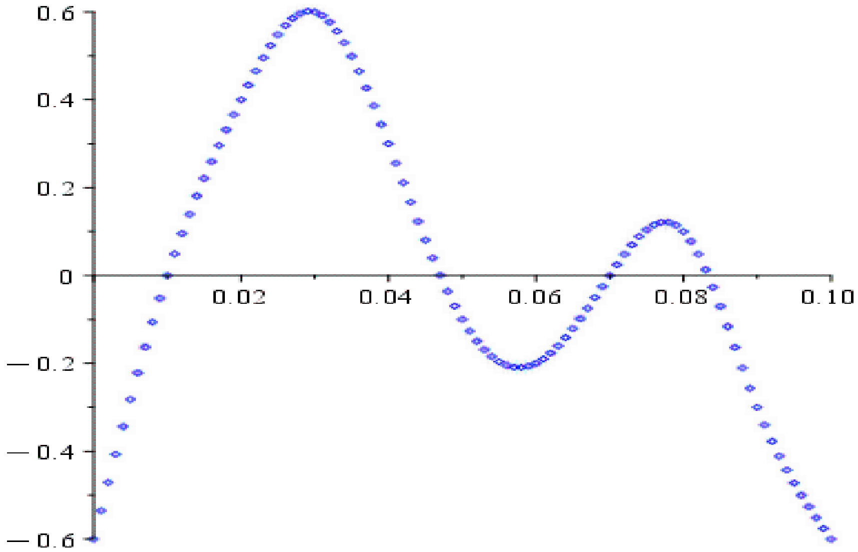
> $pointplot(X, Y, color = blue)$



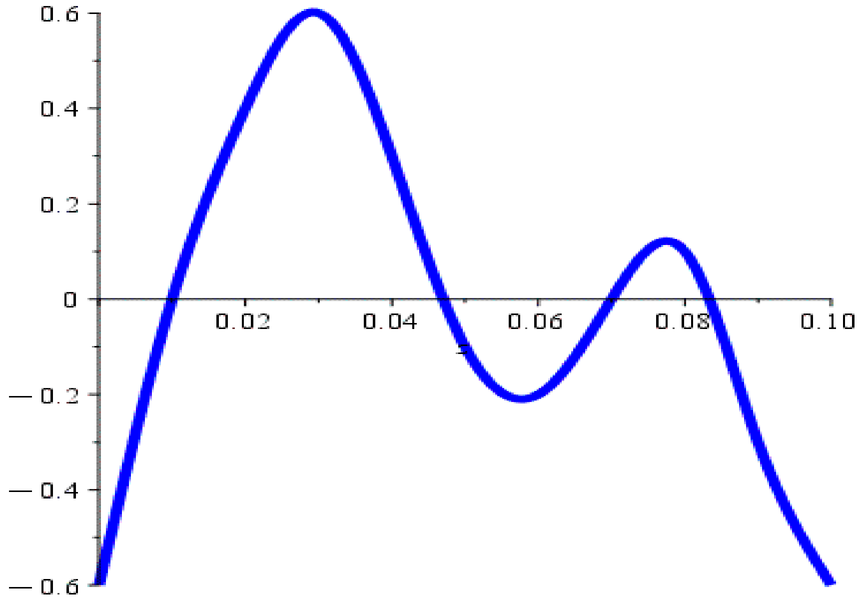
Можно получить более гладкую выборку, применяя метод сплайнов.

> $Y := f(X, 'method' = 'spline')$:

> $pointplot(X, Y, color = blue)$



> $plot(f(z, 'method' = 'spline'), z = 0..0.1, color = blue, thickness = 5)$



3. Полиномиальная интерполяция значений функции, заданной таблицей

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
y	1	1	$\frac{11}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{10}$	1

> $restart;\ with(Student[NumericalAnalysis]):$

> $xy := \left[[0, 1], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{11}{10}\right], \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[2, \frac{7}{8}\right], \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{10}\right], \left[3, \frac{11}{10}\right], \left[\frac{7}{2}, 1\right]\right]$

$$xy := \left[[0,1], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{11}{10}\right], \left[\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right], \left[2, \frac{7}{8}\right], \left[\frac{5}{2}, \frac{9}{10}\right], \left[3, \frac{11}{10}\right], \left[\frac{7}{2}, 1\right]\right]$$

> $L := \mathit{PolynomialInterpolation}\left(xy, \mathit{independentvar} = x, \mathit{method} = \mathit{lagrange}\right):$ *# метод Лагранжа*

> $\mathit{Nev} := \mathit{PolynomialInterpolation}\left(xy, \mathit{independentvar} = x, \mathit{method} = \mathit{neville}\right):$ *# метод Невилла*

> $\mathit{New} := \mathit{PolynomialInterpolation}\left(xy, \mathit{independentvar} = x, \mathit{method} = \mathit{newton}\right):$ *# метод Ньютона*

> $\mathit{expand}(\mathit{Interpolant}(L))$ *# полином Лагранжа*

$$1 - \frac{8183}{1200}x - \frac{172247}{3600}x^3 + \frac{733}{20}x^4 - \frac{3296}{225}x^5 + \frac{221}{75}x^6 - \frac{53}{225}x^7 + \frac{2254}{75}x^2$$

> $\mathit{expand}(\mathit{Interpolant}(\mathit{Nev}))$ *# полином Невилла*

$$1 - \frac{8183}{1200}x - \frac{172247}{3600}x^3 + \frac{733}{20}x^4 - \frac{3296}{225}x^5 + \frac{221}{75}x^6 - \frac{53}{225}x^7 + \frac{2254}{75}x^2$$

> $\mathit{expand}(\mathit{Interpolant}(\mathit{New}))$ *# полином Ньютона*

$$1 - \frac{8183}{1200}x - \frac{172247}{3600}x^3 + \frac{733}{20}x^4 - \frac{3296}{225}x^5 + \frac{221}{75}x^6 - \frac{53}{225}x^7 + \frac{2254}{75}x^2$$

> $\mathit{xyyp} := [[1, 1.105170918, 0.2210341836], [1.5, 1.252322716, 0.3756968148], [2, 1.491824698, 0.5967298792]]$

$$\mathit{xyyp} := [[1, 1.105170918, 0.2210341836], [1.5, 1.252322716, 0.3756968148], [2, 1.491824698, 0.5967298792]]$$

> $p2 := \mathit{PolynomialInterpolation}\left(\mathit{xyyp}, \mathit{method} = \mathit{hermite}, \mathit{function} = \exp(0.1\,x^2), \mathit{independentvar} = x, \mathit{errorboundvar} = \xi, \mathit{digits} = 5\right):$ *# метод Эрмита*

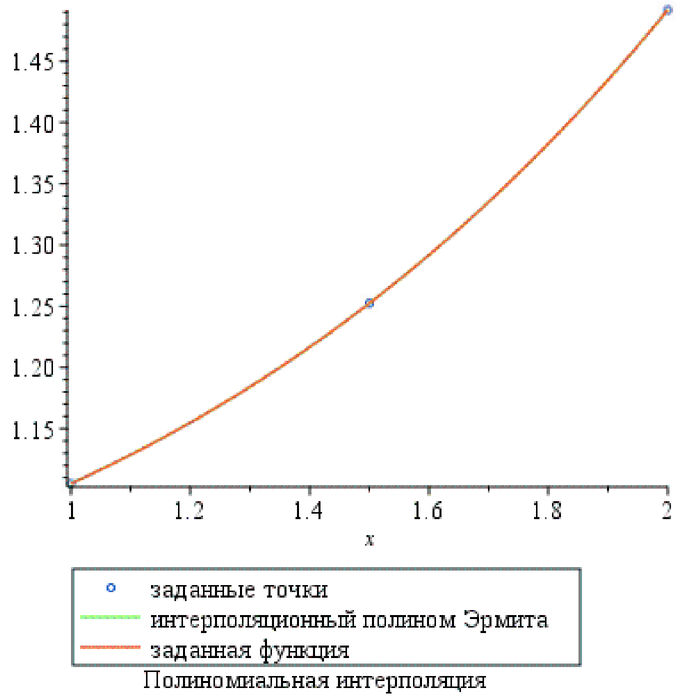
> $\mathit{RemainderTerm}(p2)$ *# остаточный член*

$$\left(\frac{1}{720}\left(\left(0.120\,\mathrm{e}^{0.1\,\xi^2} + 0.0720\,\xi^2\,\mathrm{e}^{0.1\,\xi^2} + 0.00480\,\xi^4\,\mathrm{e}^{0.1\,\xi^2} + 0.000064\,\xi^6\,\mathrm{e}^{0.1\,\xi^2}\right)(x-1.)^2\,(x-1.5)^2\,(x-2.)^2\right)\right) \;\&\mathrm{where}\;\{1. \le \xi \le 2.\}$$

> *DividedDifferenceTable*(*p2*) # *таблица разделённых разностей*

$$\begin{bmatrix} 1.1052 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1052 & 0.22103 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.2523 & 0.29420 & 0.14634 & 0 & 0 & 0 \\ 1.2523 & 0.37570 & 0.16300 & 0.033320 & 0 & 0 \\ 1.4918 & 0.47900 & 0.20660 & 0.043600 & 0.010280 & 0 \\ 1.4918 & 0.59673 & 0.23546 & 0.057720 & 0.014120 & 0.0038400 \end{bmatrix}$$

> *Draw*(*p2*)



4. Разделённые разности значений функции, заданной таблицей

x	1,0	1,3	1,6	1,9
y	0,7651977	0,6200860	0,4554022	0,2818186

> *restart*; *with*(*Student*[*NumericalAnalysis*]) :

> *xy* := [[1.0, 0.7651977], [1.3, 0.6200860], [1.6, 0.4554022], [1.9, 0.2818186]]

xy := [[1.0, 0.7651977], [1.3, 0.6200860], [1.6, 0.4554022], [1.9, 0.2818186]]

> *p1* := *PolynomialInterpolation*(*xy*, *independentvar* = 'x', *method* = *newton*) :
> # *интерполяционный полином Ньютона*

> *DividedDifferenceTable*(*p1*) # *таблица разделённых разностей*

$$\begin{bmatrix} 0.7651977 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6200860 & -0.4837056667 & 0 & 0 \\ 0.4554022 & -0.5489460000 & -0.1087338888 & 0 \\ 0.2818186 & -0.5786120000 & -0.04944333333 & 0.06587839497 \end{bmatrix}$$

> *p1a* := *AddPoint*(*p1*, [1.8, 0.3920223]) :# *добавление точки*

> *DividedDifferenceTable*(*p1a*)   # *новая таблица разделённых разностей*

[[0.7651977, 0, 0, 0, 0],
[0.6200860, −0.4837056667, 0, 0, 0],
[0.4554022, −0.5489460000, −0.1087338888, 0, 0],
[0.2818186, −0.5786120000, −0.04944333333, 0.06587839497, 0],
[0.3920223, −1.102037000, −2.617125000, −5.135363334,
−6.501552161]]

> *xyyp* := [[1, 1.105170918, 0.2210341836], [1.5, 1.252322716,
0.3756968148], [2, 1.491824698, 0.5967298792]]

xyyp := [[1, 1.105170918, 0.2210341836], [1.5, 1.252322716,
0.3756968148], [2, 1.491824698, 0.5967298792]]

> *p2* := *PolynomialInterpolation*(*xyyp*, *method* = *hermite*, *function*
= exp(0.1 x^2), *independentvar* = 'x', *errorboundvar* = 'ξ', *digits* = 5) :
интерполяционный полином Эрмита

> *DividedDifferenceTable*(*p2*)   # *таблица разделённых разностей*

$$\begin{bmatrix} 1.1052 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.1052 & 0.22103 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1.2523 & 0.29420 & 0.14634 & 0 & 0 & 0 \\ 1.2523 & 0.37570 & 0.16300 & 0.033320 & 0 & 0 \\ 1.4918 & 0.47900 & 0.20660 & 0.043600 & 0.010280 & 0 \\ 1.4918 & 0.59673 & 0.23546 & 0.057720 & 0.014120 & 0.0038400 \end{bmatrix}$$

5. Кубическая интерполяция значений функции, заданной таблицей

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y	4,0	0	-2,0	0	1,0	0	-0,5

> *restart*; *with*(*Student*[*NumericalAnalysis*]) :

> *xy* := [[0, 4.0], [0.5, 0], [1.0, − 2.0], [1.5, 0], [2.0, 1.0], [2.5, 0], [3.0,
− 0.5]]

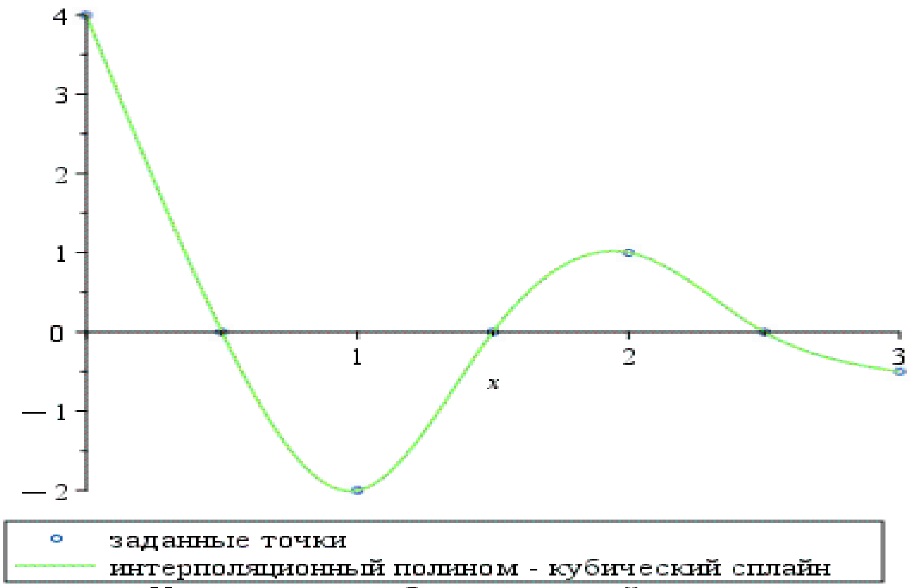
xy := [[0, 4.0], [0.5, 0], [1.0, −2.0], [1.5, 0], [2.0, 1.0], [2.5, 0], [3.0,
−0.5]]

> *p1* := *CubicSpline*(*xy*, *independentvar* = *x*) : # *кубическая интерполяция*

> $expand(Interpolant(p1))$ # интерполяционный полином

$$\begin{cases} 4. - 8.48076923076923\,x + 1.92307692307692\,x^3 \\ -5.13461538461539\,x + 3.44230769230769 - 6.69230769230769\,x^2 + 6 \\ 21.2884615384615 - 58.6730769230769\,x + 46.8461538461538\,x^2 - 11 \\ 15.0576923076923\,x - 15.5769230769231 - 2.30769230769231\,x^2 - 0.5 \\ -64.8076923076923 + 88.9038461538461\,x - 39.2307692307692\,x^2 + 5 \\ -52.4423076923077\,x + 52.9807692307692 + 17.3076923076923\,x^2 - 1 \end{cases}$$

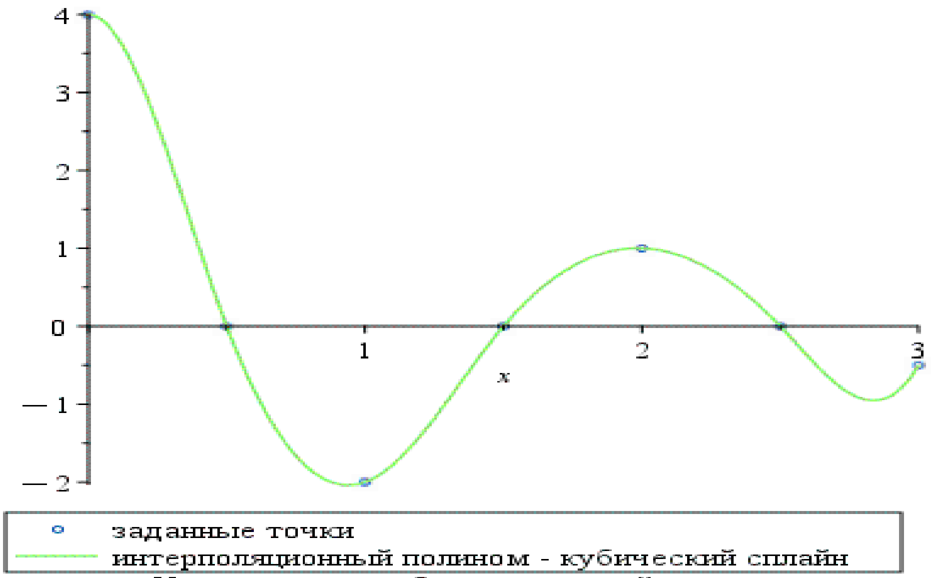
> $Draw(p1)$



Интерполяция кубическим сплайном
при обычных условиях

> $p2 := CubicSpline\big(xy, independentvar = x, boundaryconditions$
$= clamped(0, 6)\big)$:
кубическая интерполяция при заданных граничных условиях

> $Draw(p2)$



Интерполяция кубическим сплайном
при фиксированных граничных условиях.

Задание по лабораторной работе

m = 1 для группы ІПЗ – 2.01
m = 2 для группы ІПЗ – 2.02
m = 3 для группы КН – 2.01
m = 4 для группы КН – 2.02

n – порядковый номер студента в группе

1. Интерполяция значений функции двух переменных, заданной таблицей

x	[0, 0]	[1, 0]	[2, 0]	[0, 1]	[1, 1]	[2, 1]	[0, 2]	[1, 2]	[2, 2]
y	n	0	0	0	m	0	0	0	0

2. Линейная интерполяция значений функции, заданной таблицей

x	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
y	–0,6	n	0,4	0,1m	0,3	–0,1	–0,2	0	0,1	–0,3	–0,6

3. Полиномиальная интерполяция значений функции, заданной таблицей

x	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$
y	n	1	$\frac{m}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{11}{10}$	n

4. Разделённые разности значений функции, заданной таблицей

x	1,0	1,3	1,6	1,9
y	0,7651977+n	0,6200860	0,4554022m	0,2818186

5. Кубическая интерполяция значений функции, заданной таблицей

x	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
y	4,0+m	0	-2,0	0	1,0+n	0	-0,5

Лабораторная работа № 4

Интегрирование

Необходимые сведения

1. Вычисление определённого интеграла различными методами.

$$J = \int_0^{48} \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx$$

> $restart;\ with(Student[NumericalAnalysis]):$

> $a := 0:$

> $b := 48:$

> $f := \mathrm{sqrt}(1 + \cos(x)^2):$

> $'\int_a^b f\, \mathrm{d}x' = \int_a^b f\, \mathrm{d}x$

$$\int_a^b f \mathrm{d}x = 30\sqrt{2}\ \mathrm{EllipticE}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{2}\ \mathrm{EllipticE}\left(\sqrt{-\cos(48)^2 + 1}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

> $evalf(\%)$

$$58.47046914 = 58.47046914$$

Приближённое вычисление определённого интеграла различными методами.

> $Quadrature(f, x = a..b, method = simpson, partition = 4, output = value)$ *# метод Симпсона*

$$56.20282263$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = boole, partition = 4, output = value)$ *# метод Буля*

$$56.20409130$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = simpson[3/8], partition = 4, output = value)$
> *# метод* $\frac{3}{8}$ *Симпсона*

$$59.00415183$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = trapezoid, partition = 4, output = value)$
> *# метод трапеций*

$$56.44375067$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = gaussian[2], partition = 4, output = value)$ *# метод Гаусса*

$$56.5474254059989$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = romberg, partition = 4, output = value)$ *# метод Ромберга*

$$58.47047908$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = newtoncotes[2], partition = 4, output = value)$
> # *метод Ньютона - Котеса*

$$56.20282263$$

Увеличим количество точек разбиения.

> $Quadrature(f, x = a..b, method = simpson, partition = 54, output = value)$
> # *метод Симпсона*

$$58.47082592$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = boole, partition = 54, output = value)$ # *метод Буля*

$$56.20409130$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = simpson[3/8], partition = 54, output = value)$
> # *метод* $\frac{3}{8}$ *Симпсона*

$$59.00415183$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = trapezoid, partition = 54, output = value)$
> # *метод трапеций*

$$56.44375067$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = gaussian[2], partition = 54, output = value)$
> # *метод Гаусса*

$$56.5474254059989$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = romberg, partition = 54, output = value)$
> # *метод Ромберга*

$$58.47047908$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = newtoncotes[2], partition = 54, output = value)$
> # *метод Ньютона - Котеса*

$$56.20282263$$

> $a := 0; b := 1;$
> # *уменьшим промежуток интегрирования, используя первоначальное количество точек разбиения*

$$a := 0$$

$$b := 1$$

> $'\int_a^b f\,\mathrm{d}x' = \int_a^b f\,\mathrm{d}x$

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\ \mathrm{EllipticE}\left(\sqrt{-\cos(1)^2 + 1}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

> $evalf(\%)$

$$1.311442498 = 1.311442498$$

Вернёмся к малому количеству точек

> $Quadrature(f, x = a..b, method = simpson, partition = 4, output = value)$ # *метод Симпсона*

$$1.311445012$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = boole, partition = 4, output = value)$ # *метод Буля*

$$1.311442497$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = simpson[3/8], partition = 4, output = value)$
> \# метод $\frac{3}{8}$ Симпсона

$$1.311443614$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = trapezoid, partition = 4, output = value)$
> \# метод трапеций

$$1.309349142$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = gaussian[2], partition = 4, output = value)$ # метод Гаусса

$$1.31144082187497$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = romberg, partition = 4, output = value)$ # метод Ромберга

$$1.311442498$$

> $Quadrature(f, x = a..b, method = newtoncotes[2], partition = 4, output = value)$
> \# метод Ньютона - Котеса

$$1.311445012$$

2. Аппроксимация определённых интегралов методом римановых сумм

> $restart;\ with(Student[Calculus1]):$

> $R := Int(x - 3, x = -1..1)$

$$R := \int_{-1}^{1} (x - 3)\, dx$$

> $ApproximateInt(R)$

$$-6$$

> $ApproximateInt(\ln(x), x = 1..4)$

$$\frac{3\ln\left(\frac{23}{20}\right)}{10} + \frac{3\ln\left(\frac{29}{20}\right)}{10} + \frac{3\ln\left(\frac{7}{4}\right)}{10} + \frac{3\ln\left(\frac{41}{20}\right)}{10} + \frac{3\ln\left(\frac{47}{20}\right)}{10} + \frac{3\ln\left(\frac{53}{20}\right)}{10} + \frac{3\ln\left(\frac{59}{20}\right)}{10} + \frac{3\ln\left(\frac{13}{4}\right)}{10} + \frac{3\ln\left(\frac{71}{20}\right)}{10} + \frac{3\ln\left(\frac{77}{20}\right)}{10}$$

> $evalf(\%)$

$$2.547971089$$

> $ApproximateInt\left(x^{\frac{3}{2}}, x = 1..4, output = sum\right)$

$$\frac{3\left(\sum_{i=0}^{9}\left(\frac{23}{20} + \frac{3\,i}{10}\right)^{3/2}\right)}{10}$$

> $evalf(\%)$

$$12.39437820$$

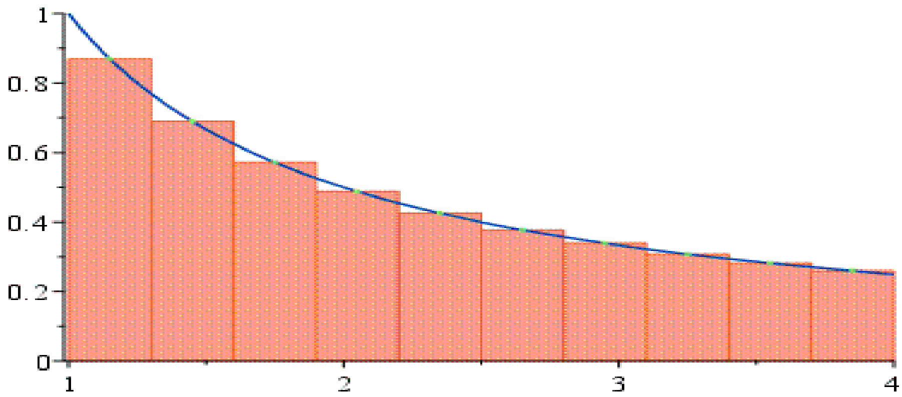
> $ApproximateInt(\cosh(x), 1..4, output = sum)$

$$\frac{3\left(\sum_{i=0}^{9}\cosh\left(\frac{23}{20}+\frac{3\,i}{10}\right)\right)}{10}$$

> $evalf(\%)$

$$26.01704228$$

> $ApproximateInt\left(\frac{1}{x}, x=1..4, output=plot\right)$



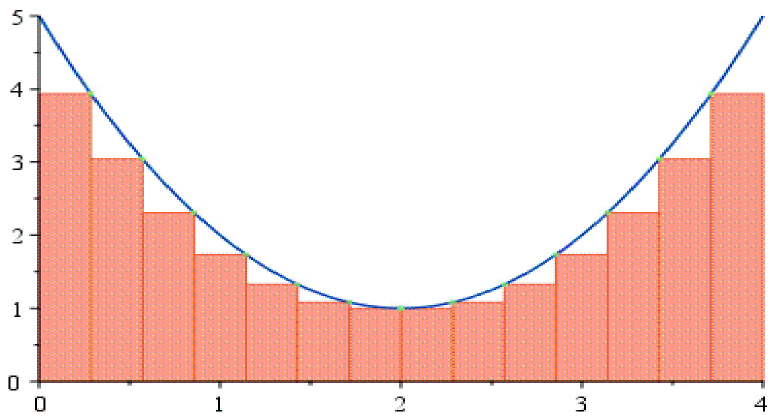
Аппроксимация интеграла $\int_1^4 f(x)\,dx$ средней суммой Римана, где $f(x)=\frac{1}{x}$. Приближённое значение интеграла: 1.382835000 . Использовано 10 подынтервалом .

“Точное” значение интеграла

> $'\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx' = evalf\left(\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx\right)$

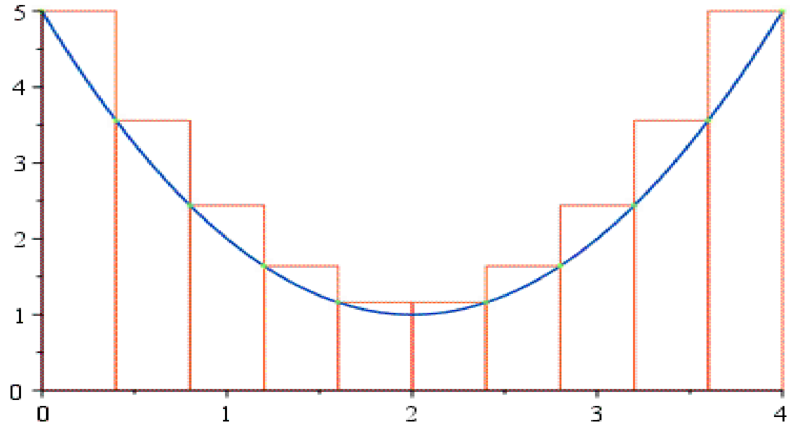
$$\int_1^4 \frac{1}{x}\,dx = 1.386294361$$

> $ApproximateInt\left(1+(x-2)^2, x=0..4, output=plot, partition=14, method=lower\right)$



Аппроксимация интеграла $\int_0^4 f(x)\,dx$ нижней суммой Римана, где $f(x)=1+(x-2)^2$. Приближённое значение интеграла: 8.244897958 . Использовано 14 подынтервалом .

> $ApproximateInt\left(1+(x-2)^2, x=0..4, output=plot, method=upper, boxoptions=[filled=false]\right)$



Аппроксимация интеграла $\int_0^4 f(x)\,dx$ верхней суммой Римана, где $f(x) = 1 + (x-2)^2$. Приближённое значение интеграла: 11.04000000 . Использовано 10 подынтервалом .

“Точное” значение интеграла

> $'\int_0^4 (1+(x-2)^2)\,dx' = evalf\left(\int_0^4 (1+(x-2)^2)\,dx\right)$

$$\int_0^4 (1+(x-2)^2)\,dx = 9.333333333$$

3. Аппроксимация двойных интегралов

$$J = \int_1^4 \int_{-1}^6 \left(x+y^2\right) dy\, dx$$

> $restart;\ with(Student[MultivariateCalculus]):$

> $'\int_1^4\int_{-1}^6 (x+y^2)\,dy\,dx' = evalf\left(\int_1^4\int_{-1}^6 (x+y^2)\,dy\,dx\right)$

$$\int_1^4\int_{-1}^6 (y^2+x)\,dy\,dx = 269.5000000$$

> $ApproximateInt\left(x+y^2, x=1..4, y=-1..6\right)$ *# приближённое значение*

266.0700000

Задание по лабораторной работе

m = 1 для группы ІПЗ – 2.01
m = 2 для группы ІПЗ – 2.02
m = 3 для группы КН – 2.01
m = 4 для группы КН – 2.02

n – порядковый номер студента в группе

1. Вычислить определённый интеграл различными методами.

$$J = \int_0^{48} \sqrt{1 + n + \cos^2 mx}\, dx$$

2. Аппроксимировать определённый интеграл $\int_a^b \left(n + \sin(mx)\right) dx$**,** $a = n$**,** $b = 1 + n^2$**, методом римановых сумм.**

3. Аппроксимировать двойной интеграл

$$J = \int_n^{4+n} \int_0^6 \left(mx + y^2\right) dy\, dx$$

Лабораторная работа № 5

Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений

Необходимые сведения

1. Различными методами получить решение задачи Коши в заданной точке и построить графики точного и приближённого решений.

$$\frac{dy}{dt} = \cos t, \quad y(0) = 0{,}5; \quad t = 3.$$

Метод Эйлера

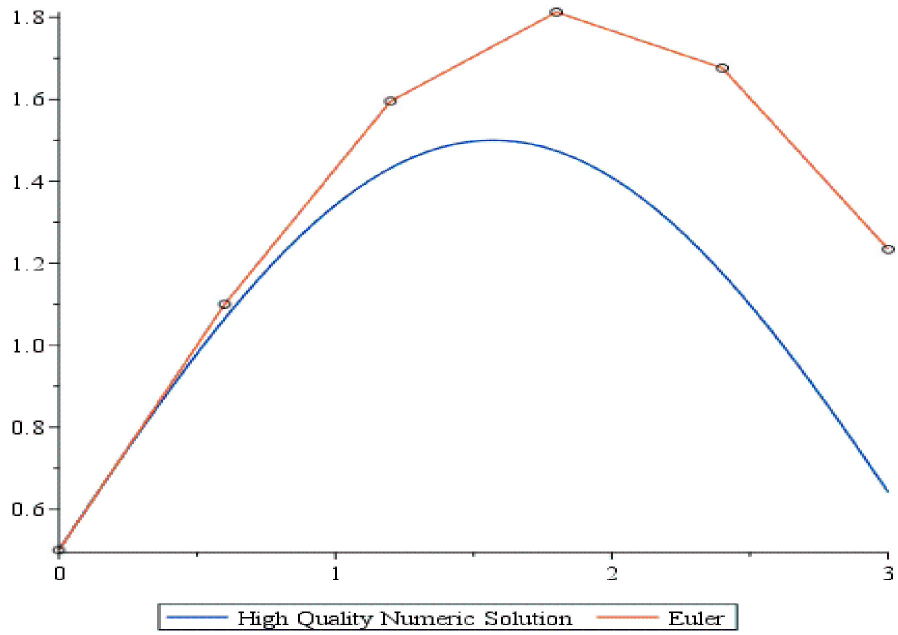
> $restart;\ with(Student[NumericalAnalysis]):$

> $Euler\left(diff\left(y(t), t\right) = \cos(t), y(0) = 0.5, t = 3\right)$ $\#\,решение\ в\ точке\ t = 3$

$$1.234$$

> $Euler\left(diff\left(y(t), t\right) = \cos(t), y(0) = 0.5, t = 3, output = plot\right)$

$\#\,решение\ в\ точке\ t = 3\ и\ график\ решения$

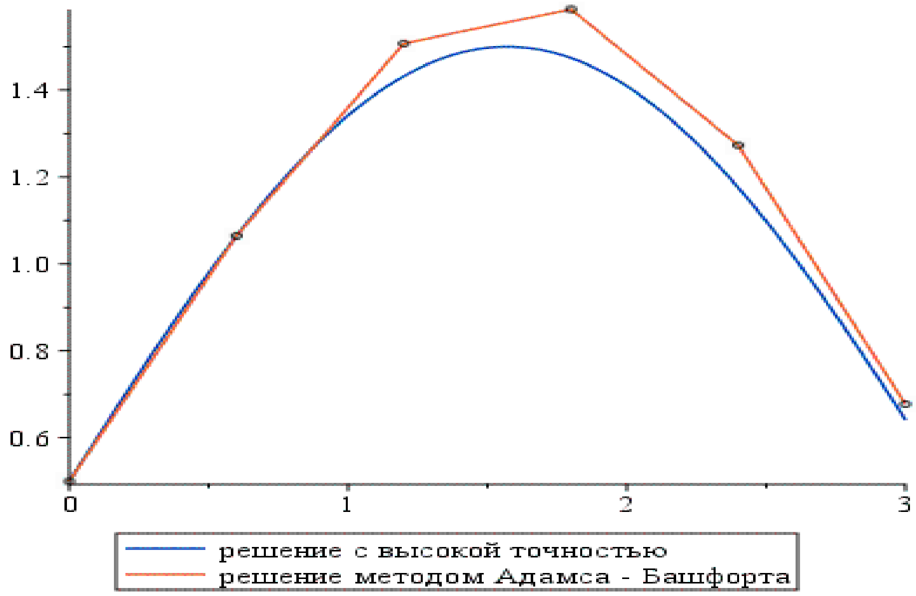


Метод Адамса - Башфорта

> $AdamsBashforth\left(diff\left(y(t), t\right) = \cos(t), y(0) = 0.5, t = 3, submethod = step2\right)$

$$0.6773$$

> $AdamsBashforth\left(diff\left(y(t), t\right) = \cos(t), y(0) = 0.5, t = 3, submethod = step2, output = plot\right)$

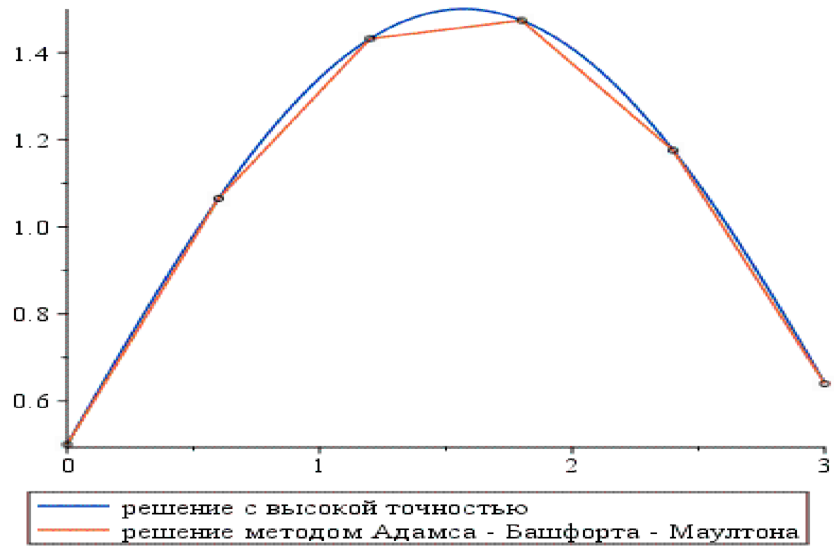


Метод Адамса – Башфорта – Маултона

> $AdamsBashforthMoulton\left(diff\left(y(t), t\right) = \cos(t), y(0) = 0.5, t = 3\right)$

$$0.6398$$

> $AdamsBashforthMoulton\left(diff\left(y(t), t\right) = \cos(t), y(0) = 0.5, t = 3, output = plot\right)$

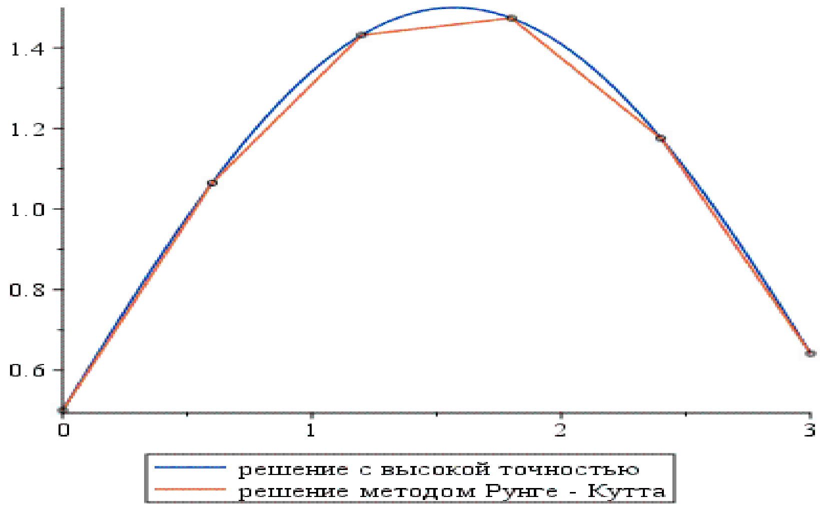


Метод Рунге – Кутта

> $RungeKutta\left(diff\left(y(t), t\right) = \cos(t), y(0) = 0.5, t = 3, submethod = rk4\right)$

$$0.6411$$

> $RungeKutta\left(diff\left(y(t), t\right) = \cos(t), y(0) = 0.5, t = 3, submethod = rk4, output = plot\right)$

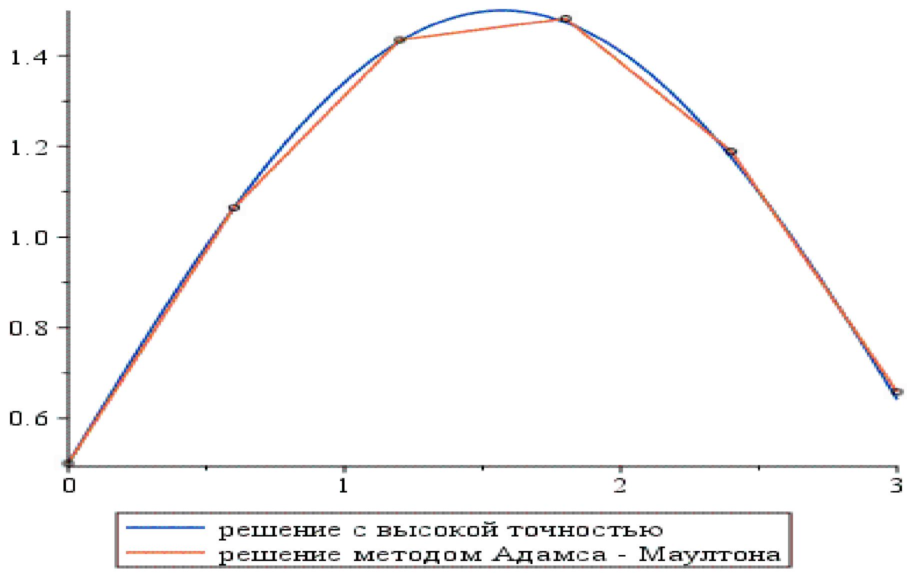


Метод Адамса – Маултона

> $AdamsMoulton\left(diff\left(y(t), t\right) = \cos(t), y(0) = 0.5, t = 3, submethod = step2\right)$

$$0.6578$$

> $AdamsMoulton\left(diff\left(y(t), t\right) = \cos(t), y(0) = 0.5, t = 3, submethod = step2, output = plot\right)$



2. Приближённое решение систем дифференциальных уравнений и уравнений высокого порядка в отдельной точке и в наборе заданных точек

$$\frac{dx}{dt}=y,\quad \frac{dy}{dt}=-x;\quad x(0)=1,\quad y(0)=0$$

> $dsys := \{diff(x(t),t)=y(t), diff(y(t),t)=-x(t), x(0)=1, y(0)=0\}$

$$dsys := \left\{\frac{d}{dt}\,x(t)=y(t),\ \frac{d}{dt}\,y(t)=-x(t),\ x(0)=1,\ y(0)=0\right\}$$

> $sol\_exact := dsolve(dsys)$

$$sol\_exact := \{x(t)=\cos(t),\ y(t)=-\sin(t)\}$$

> $sol\_num := dsolve(dsys, numeric, [x(t), y(t)], output=Array([0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0]))$

$$sol\_num := \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} t & x(t) & y(t) \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{ccc} 0. & 1. & 0. \\ 0.100000000000000 & 0.995004167638281 & -0.0998334180071792 \\ 0.200000000000000 & 0.980066582848396 & -0.198669339807089 \\ 0.300000000000000 & 0.955336493946140 & -0.295520228882018 \\ 0.400000000000000 & 0.921061006474038 & -0.389418348532907 \\ 0.500000000000000 & 0.877582581052255 & -0.479425562021517 \\ 0.600000000000000 & 0.825335623934648 & -0.564642524911161 \\ 0.700000000000000 & 0.764842224114780 & -0.644217712370945 \\ 0.800000000000000 & 0.696706724523328 & -0.717356174396689 \\ 0.900000000000000 & 0.621610011443851 & -0.783326966272817 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right] \\ \scriptstyle 11 \times 3 \text{ Matrix} \end{array}\right]$$

> $dsn1 := dsolve(dsys, numeric):$

> $dsn1(1)$

$$[t=1.,\ x(t)=0.540302331778567,\ y(t)=-0.841471101155307]$$

> $dsn2 := dsolve\big(dsys, numeric, [y(t), x(t)]\big):$

> $dsn2(1)$

$$[t=1.,\ y(t)=-0.841471101155307,\ x(t)=0.540302331778567]$$

> $deq1 := (t+1)^2 diff\big(y(t), t, t\big) + (t+1)\, diff\big(y(t), t\big) + \big((t+1)^2 - 0.25\big)\, y(t) = 0$

$$deq1 := (t+1)^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\,y(t)\right)+(t+1)\left(\frac{d}{dt}\,y(t)\right)+\left((t+1)^2-0.25\right)y(t)=0$$

> $ic1 := y(0)=0.6713967071418030,\ D(y)(0)=0.09540051444747446:$

> $dsol1 := dsolve\big(\{deq1, ic1\}, numeric, range=0..1\big)$

$$dsol1 := \textbf{proc}(x\_rkf45)\ \dots\ \textbf{end proc}$$

> $dsol1(0)$

$$\left[t = 0., y(t) = 0.671396707141803, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t) = 0.0954005144474745\right]$$

> $dsol1(0.5)$

$$\left[t = 0.5, y(t) = 0.649838013736792, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t) = -0.170529562812705\right]$$

> $dsol1(1)$

$$\left[t = 1., y(t) = 0.513016090105034, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, y(t) = -0.363039820324515\right]$$

> $dsol1b := dsolve\big(\{deq1, ic1\}, numeric, output = operator\big)$

$dsol1b := [t = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, y = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, \mathrm{D}(y) =$
$\mathbf{proc}(t)$
$\ldots$
$\mathbf{end\ proc}]$

> $dsol1b(0)$

$$[t = 0., y(0) = 0.671396707141803, \mathrm{D}(y)(0) = 0.0954005144474745]$$

> $dsol1b(0.5)$

$$[t = 0.5, y(0.5) = 0.649838013736792, \mathrm{D}(y)(0.5) = -0.170529562812705]$$

> $dsol1b(1)$

$$[t = 1., y(1) = 0.513016090105034, \mathrm{D}(y)(1) = -0.363039820324514]$$

> $dsol2 := dsolve\Big(\Big\{diff\big(y(x), x\big) = y(x)\cos(x), y(0) = 1\Big\}, numeric, output = listprocedure\Big)$

$$dsol2 := [x = \mathbf{proc}(x)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, y(x) = \mathbf{proc}(x)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}]$$

> $fy2 := eval\big(y(x), dsol2\big)$

$$fy2 := \mathbf{proc}(x)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

> $\left[fy2(0), fy2\left(\frac{\pi}{4}\right), fy2\left(\frac{\pi}{2}\right), fy2\left(\frac{3\pi}{2}\right), fy2(\pi)\right]$

$[1., 2.02811545714854, 2.71828201727134, 0.367879858344611,$
$0.999999785849056]$

> $dsol2p := dsolve\Big(\Big\{diff\big(y(x), x\big) = y(x)\cos(x), y(0) = 1\Big\}, numeric, output = piecewise, range = 0\,..1\Big)$

$$dsol2p := \left[x = x, y(x) = \begin{cases} 0.999614858592639 + 1.02775126621593\,x + 0.4 \\ 0.989101552131176 + 1.14719850211587\,x + (\\ 0.948397466098112 + 1.31597042278255\,x + \\ 0.897425216810995 + 1.43475629979104\,x + \\ 0.890827299362533 + 1.44839243200584\,x - \\ 0.981744432894418 + 1.34133782273687\,x - (\end{cases} \right.$$

$$\left. \right]$$

> $dsys3 := diff\left(x(t), t\right) = x(t)^2 - t^6, x(0) = -0.1$

$$dsys3 := \frac{d}{dt}\, x(t) = x(t)^2 - t^6, x(0) = -0.1$$

> $dsol3 := dsolve\left([dsys3], type = numeric, stiff = true, output = Array([0, 0.25, 0.5, 0.75, 1])\right)$

$$dsol3 := \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} t & x(t) \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} 0. & -0.100000000000000 \\ 0.250000000000000 & -0.0975697047501167 \\ 0.500000000000000 & -0.0963407325327339 \\ 0.750000000000000 & -0.111744790112399 \\ 1. & -0.229279026435938 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

> $dsol4 := dsolve\left(\left[diff\left(y(x), x, x\right) = 3\,y(x), y(0) = 1, y(2) = 1.2\right], numeric\right)$

$$dsol4 := \mathbf{proc}(x\_bvp) \;\ldots\; \mathbf{end\ proc}$$

> $dsol4(0)$

$$\left[x = 0., y(x) = 1., \frac{d}{dx}\, y(x) = -1.60520425463385\right]$$

> $dsol4(0.5)$

$$\left[x = 0.5, y(x) = 0.492273627127114, \frac{d}{dx}\, y(x) = -0.551072761778113\right]$$

> $dsol4(1)$

$$\left[x = 1., y(x) = 0.377412857949490, \frac{d}{dx}\, y(x) = 0.0632677085684644\right]$$

> $dsol4(2)$

$$\left[x = 2., y(x) = 1.20000000000000, \frac{d}{dx}\, y(x) = 1.97400119243652\right]$$

> $dsys5 := \left\{diff\left(y(x), x, x\right) + \mathrm{abs}(y(x)) = 0, y(1) = -1, \mathrm{D}(y)(0) = 1\right\}$

$$dsys5 := \left\{\frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + |y(x)| = 0, y(1) = -1, \mathrm{D}(y)(0) = 1\right\}$$

> $dsol5 := dsolve\left(dsys5, numeric, output = Array([0, 0.25, 0.5, 0.75, 1])\right)$

$$dsol5 := \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} x & y(x) & \frac{d}{dx}\, y(x) \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{ccc} 0. & -1.40964842958752 & 1.00000000000000 \\ 0.25 & -1.20131753968156 & 0.675318544177147 \\ 0.5 & -1.06846086551063 & 0.393064786112399 \\ 0.75 & -1.00273152713015 & 0.135505794809610 \\ 1. & -1.00000000000000 & -0.113539882361526 \end{array}\right] \end{array}\right]$$

> $dsys6 := \left\{x(t)^2 + y(t)^2 = 1, diff\left(x(t), t, t\right) = -2\,\lambda(t)\,x(t), diff\left(y(t), t, t\right) = -2\,\lambda(t)\,y(t) - \pi^2, x(0) = 0, y(0) = -1, \mathrm{D}(x)(0) = \frac{1}{10}, \mathrm{D}(y)(0) = 0\right\}$

$$dsys6 := \left\{x(t)^2 + y(t)^2 = 1, \frac{d^2}{dt^2}\, x(t) = -2\,\lambda(t)\,x(t), \frac{d^2}{dt^2}\, y(t) = -2\,\lambda(t)\,y(t) - \pi^2, x(0) = 0, y(0) = -1, \mathrm{D}(x)(0) = \frac{1}{10}, \mathrm{D}(y)(0) = 0\right\}$$

> $dsol6 := dsolve(dsys6, numeric)$

$$dsol6 := \mathbf{proc}(x\_rkf45\_dae)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}$$

> $dsol6(1)$

$$\left[t = 1., \lambda(t) = 4.93980221499583, x(t) = 6.33398801850387 \times 10^{-6}, \frac{d}{dt}\, x(t) = -0.100000139089421, y(t) = -0.999999999836514, \frac{d}{dt}\, y(t) = -6.24735803827156 \times 10^{-7}\right]$$

> $dsys7 := \left\{diff\left(y(x), x\right) = 2\,y(x), y(0) = 1\right\}$

$$dsys7 := \left\{\frac{d}{dx}\, y(x) = 2\,y(x), y(0) = 1\right\}$$

> $Digits := 20$

$$Digits := 20$$

> $dsol7 := dsolve\left(dsys7, numeric, method = gear, abserr = 1. \times 10^{-16}, relerr = 1. \times 10^{-16}, output = listprocedure\right)$

$$dsol7 := \left[x = \mathbf{proc}(x)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, y(x) = \mathbf{proc}(x)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}\right]$$

> $yproc := rhs(dsol7[2])$

$$yproc := \textbf{proc}(x)\ \ldots\ \textbf{end proc}$$

> $dsys8 := \{diff(y(x), x) = y(x) + f(x), y(0) = 0\}$

$$dsys8 := \left\{\frac{d}{dx}\, y(x) = y(x) + f(x), y(0) = 0\right\}$$

> $dsolve(dsys8, numeric)$

Error, (in dsolve/numeric/DAE/make_proc) number of unknown functions and equations must match, got 2 functions {f, y}, and 1 equations

> $dsol8 := dsolve(dsys8, numeric, known = f)$

$$dsol8 := \textbf{proc}(x\_rkf45)\ \ldots\ \textbf{end proc}$$

> $dsol8(1)$

$$[x = 1., y(x) = 0.708149294799617]$$

> $dsol8(2)$

$$[x = 2., y(x) = 4.19167993111610]$$

> $dsol8b := dsolve(dsys8, numeric, method = rosenbrock, known = f)$

$$dsol8b := \textbf{proc}(x\_rosenbrock)\ \ldots\ \textbf{end proc}$$

> $dsol8b(1)$

$$[x = 1., y(x) = 0.708149269188472]$$

> $dsol8b(2)$

$$[x = 2., y(x) = 4.19168036703643]$$

> $dsys1 := \{diff(y(x), x, x) + y(x) = 0, y(1) = \sin(1), D(y)(1) = \cos(1)\}$

$$dsys1 := \left\{\frac{d^2}{dx^2}\, y(x) + y(x) = 0, y(1) = \sin(1), D(y)(1) = \cos(1)\right\}$$

> $dsol1 := dsolve(dsys1, numeric, method = gear)$

$$dsol1 := \textbf{proc}(x\_gear)\ \ldots\ \textbf{end proc}$$

> $dsol1(0)$

$$\left[x = 0., y(x) = 8.05339006126137 \times 10^{-12}, \frac{d}{dx}\, y(x) = 0.999999999997424\right]$$

> $dsol1(\pi)$

$$\left[x = 3.14159265358979, y(x) = 6.97710003877356 \times 10^{-12}, \frac{d}{dx}\, y(x) = -0.999999999999881\right]$$

> $deq2 := \{diff(x(t), t) = y(t), diff(y(t), t) = x(t) + y(t)\}$

$$deq2 := \left\{\frac{d}{dt}\, x(t) = y(t), \frac{d}{dt}\, y(t) = x(t) + y(t)\right\}$$

> $ic2 := \{x(0) = 2, y(0) = 1\}:$

> $dsol2 := dsolve(deq2\ \textbf{union}\ ic2, numeric, output = listprocedure, range = 0..1)$

$$dsol2 := [t = \mathbf{proc}(t) \ \ldots \ \mathbf{end\ proc}, x(t) = \mathbf{proc}(t) \ \ldots \ \mathbf{end\ proc}, y(t) = \mathbf{proc}(t) \ \ldots \ \mathbf{end\ proc}]$$

> $dsol2x := subs\left(dsol2, x(t)\right) : \ dsol2y := subs\left(dsol2, y(t)\right) :$

> $\left[dsol2x(0), dsol2y(0)\right]$

$$[2., 1.]$$

> $\left[dsol2x(0.4), dsol2y(0.4)\right]$

$$[2.69118458493332, 2.60811748317261]$$

> $\left[dsol2x(1.0), dsol2y(1.0)\right]$

$$[5.58216753140384, 7.82688926499912]$$

> $dsys1 := \left\{diff\left(y(x), x\right) + \mathrm{I}\, y(x) = 0, y(0) = 1 + 2\,\mathrm{I}\right\}$

$$dsys1 := \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) + \mathrm{I}\, y(x) = 0, y(0) = 1 + 2\,\mathrm{I}\right\}$$

> $dsol5 := dsolve\left(dsys1, numeric, method = gear\right)$

$$dsol5 := \mathbf{proc}(x\_gear) \ \ldots \ \mathbf{end\ proc}$$

> $dsol5\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$$[x = 1.57079632679490, y(x) = 2.00000000000367 - \mathrm{I}]$$

> $dsol5(\pi)$

$$[x = 3.14159265358979, y(x) = -1.00000000001409 - 2.00000000003328\,\mathrm{I}]$$

> $dsol5(2\,\pi)$

$$[x = 6.28318530717958, y(x) = 1.00000000000419 + 2.00000000002333\,\mathrm{I}]$$

> $dsys := \left\{diff\left(y(x), x\right) = y(x)^2, y(0) = 1\right\}$

$$dsys := \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x) = y(x)^2, y(0) = 1\right\}$$

> $dsoli := dsolve(dsys, numeric)$

$$dsoli := \mathbf{proc}(x\_rkf45) \ \ldots \ \mathbf{end\ proc}$$

> $dsoli(0.5)$

$$[x = 0.5, y(x) = 2.00000045906252]$$

> $dsoli('initial')$

$$[x = 0., y(x) = 1.]$$

> $dsoli('last')$

$$[x = 0.500000000000000, y(x) = 2.00000045906252]$$

> $dsoli('method')$

"rkf45"

> $dsoli(1)$

```
Error, (in dsoli) cannot evaluate the solution further right of
```

```
.99999999, probably a singularity
```

> dsoli('last')

$$[x = 0.999999994312848, y(x) = 1.00607191562369 \times 10^{12}]$$

> $dsoli\left('initial' = \left[1, \frac{1}{2}\right]\right)$

$$[x = 1., y(x) = 0.500000000000000]$$

> dsoli(3)

```
Error, (in dsoli) cannot evaluate the solution further right of
2.9999999, probably a singularity
```

> dsoli('last')

$$[x = 2.99999998871727, y(x) = 3.25728571163544 \times 10^{11}]$$

> dsoli2 := dsolve(dsys, numeric, output = listprocedure)

$$dsoli2 := [x = \mathbf{proc}(x) \ \ldots \ \mathbf{end\ proc}, y(x) = \mathbf{proc}(x) \ \ldots \ \mathbf{end\ proc}]$$

> dsx := rhs(dsoli2[1])

$$dsx := \mathbf{proc}(x) \ \ldots \ \mathbf{end\ proc}$$

> dsy := rhs(dsoli2[2])

$$dsy := \mathbf{proc}(x) \ \ldots \ \mathbf{end\ proc}$$

> dsy(0.5)

$$2.00000045906252$$

> dsx('last')

$$0.500000000000000$$

> dsx('initial' = 1)

$$1.$$

> dsy(1.5)

$$2.00000045906252$$

> $dsy\left('initial' = \left[1, \frac{1}{2}\right]\right)$

$$0.500000000000000$$

> dsy(3.0)

```
Error, (in dsy) cannot evaluate the solution further right of
2.9999999, probably a singularity
```

> [dsx('last'), dsy('last')]

$$[2.99999998871727, 3.25728571163544 \times 10^{11}]$$

Задание по лабораторной работе

m = 1 для группы ІПЗ – 2.01
m = 2 для группы ІПЗ – 2.02
m = 3 для группы КН – 2.01
m = 4 для группы КН – 2.02

n – порядковый номер студента в группе

1. Вышеуказанными методами получить решение задачи Коши для дифференциального уравнения в заданной точке и построить графики точного и приближённого решений.

$$\frac{dy}{dt} = (m+1)\cos(m+1)t, \quad y(0) = \frac{n+1}{2}; \quad t = m+3.$$

2. Решить численно задачу Коши для системы дифференциальных уравнений на промежутке $[0,1+m]$ **в точках** $t_i = i \cdot \dfrac{m+1}{10}, \quad i = 0,1,2,...,10$.

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -(m+1)^2 x; \quad x(0) = \frac{1+n}{2}, \quad y(0) = 0.$$

Лабораторная работа № 6

Интегрирование уравнений в частных производных

Необходимые сведения

Численное решение краевых задач для уравнений в частных производных.

Задача 1

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2};$$

$$u(x,0)=0,2x(1-x),\quad \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2}=0,\quad u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0.$$

> *restart*

> $pde := \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u(x,t)) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}((u(x,t)))$

$$pde := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u(x,t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,t)$$

> $bcs := u(x,0) = 0.2\cdot x\cdot(1-x)\cdot\sin(\pi\cdot x),\ \mathrm{D}[2](u)(x,0)=0,\ u(0,t)=0, u(1,t)=0;$

$$bcs := u(x,0) = 0.2\,x\,(1-x)\,\sin(\pi\,x),\ \mathrm{D}_2(u)(x,0)=0,\ u(0,t)=0,\ u(1,t)=0$$

> $h := 0.05;\ l := 0.05;$

$$h := 0.05$$

$$l := 0.05$$

> $exact\_solution := pdsolve([pde, bcs], u(x,t))$

$$exact\_solution := u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1.)^3\,(n-1.)^3}\big(n\,(0.0810569469\,(-1)^n\,n^2 - 0.08105694687\,(-1)^n - 0.0810569469\,n^2 + 0.08105694692)\,\sin(n\,\pi\,x)\,\cos(n\,\pi\,t)\big)$$

> $pds := pdsolve(pde, \{bcs\}, numeric)$

$$pds := \textbf{module}(\,)\ \ldots\ \textbf{end module}$$

> $V := pds\text{:-}value(\,)$

$$V := \textbf{proc}(\,)\ \ldots\ \textbf{end proc}$$

>

```
for i from 0 by 1 to 10 do
    for j from 0 by 1 to 10 do
        print(V(i·h, j·l))
    end do
end do
```

$$[x = 0., t = 0., u(x, t) = 0.]$$
$$[x = 0., t = 0.05, u(x, t) = 0.]$$
$$[x = 0., t = 0.10, u(x, t) = 0.]$$
$$[x = 0., t = 0.15, u(x, t) = 0.]$$
$$[x = 0., t = 0.20, u(x, t) = 0.]$$
$$[x = 0., t = 0.25, u(x, t) = 0.]$$
$$[x = 0., t = 0.30, u(x, t) = 0.]$$
$$[x = 0., t = 0.35, u(x, t) = 0.]$$
$$[x = 0., t = 0.40, u(x, t) = 0.]$$
$$[x = 0., t = 0.45, u(x, t) = 0.]$$
$$[x = 0., t = 0.50, u(x, t) = 0.]$$
$$[x = 0.05, t = 0., u(x, t) = 0.00148612741788219]$$
$$[x = 0.05, t = 0.05, u(x, t) = 0.00250199806054948]$$
$$[x = 0.05, t = 0.10, u(x, t) = 0.00475702705578337]$$
$$[x = 0.05, t = 0.15, u(x, t) = 0.00672568425228168]$$
$$[x = 0.05, t = 0.20, u(x, t) = 0.00759337821301914]$$
$$[x = 0.05, t = 0.25, u(x, t) = 0.00756213998774114]$$
$$[x = 0.05, t = 0.30, u(x, t) = 0.00702478036396344]$$
$$[x = 0.05, t = 0.35, u(x, t) = 0.00599255372556868]$$
$$[x = 0.05, t = 0.40, u(x, t) = 0.00437160323196120]$$
$$[x = 0.05, t = 0.45, u(x, t) = 0.00233650212984530]$$
$$[x = 0.05, t = 0.50, u(x, t) = 0.000189207427317901]$$
$$[x = 0.10, t = 0., u(x, t) = 0.00556230589874905]$$
$$[x = 0.10, t = 0.05, u(x, t) = 0.00647742762878345]$$
$$[x = 0.10, t = 0.10, u(x, t) = 0.00893377344347951]$$
$$[x = 0.10, t = 0.15, u(x, t) = 0.0119930111381110]$$
$$[x = 0.10, t = 0.20, u(x, t) = 0.0142798988839868]$$
$$[x = 0.10, t = 0.25, u(x, t) = 0.0148006236819758]$$
$$[x = 0.10, t = 0.30, u(x, t) = 0.0135792452629925]$$
$$[x = 0.10, t = 0.35, u(x, t) = 0.0112699266160444]$$
$$[x = 0.10, t = 0.40, u(x, t) = 0.00828898817819186]$$
$$[x = 0.10, t = 0.45, u(x, t) = 0.00464001923221094]$$
$$[x = 0.10, t = 0.50, u(x, t) = 0.000449828793679684]$$
$$[x = 0.15, t = 0., u(x, t) = 0.0115767577433584]$$
$$[x = 0.15, t = 0.05, u(x, t) = 0.0121750707534125]$$
$$[x = 0.15, t = 0.10, u(x, t) = 0.0138927156932896]$$
$$[x = 0.15, t = 0.15, u(x, t) = 0.0163853002630593]$$
$$[x = 0.15, t = 0.20, u(x, t) = 0.0188448994195794]$$
$$[x = 0.15, t = 0.25, u(x, t) = 0.0200925336162951]$$
$$[x = 0.15, t = 0.30, u(x, t) = 0.0191799649493374]$$

$[x = 0.15, t = 0.35, u(x, t) = 0.0160496027799451]$

$[x = 0.15, t = 0.40, u(x, t) = 0.0114690326266387]$

$[x = 0.15, t = 0.45, u(x, t) = 0.00624379202420588]$

$[x = 0.15, t = 0.50, u(x, t) = 0.000682393308365354]$

$[x = 0.20, t = 0., u(x, t) = 0.0188091280733591]$

$[x = 0.20, t = 0.05, u(x, t) = 0.0190480474328664]$

$[x = 0.20, t = 0.10, u(x, t) = 0.0197604000673508]$

$[x = 0.20, t = 0.15, u(x, t) = 0.0208845301042507]$

$[x = 0.20, t = 0.20, u(x, t) = 0.0221553347454364]$

$[x = 0.20, t = 0.25, u(x, t) = 0.0229387734146249]$

$[x = 0.20, t = 0.30, u(x, t) = 0.0222857786627035]$

$[x = 0.20, t = 0.35, u(x, t) = 0.0193935870160544]$

$[x = 0.20, t = 0.40, u(x, t) = 0.0142145349679909]$

$[x = 0.20, t = 0.45, u(x, t) = 0.00757365916167590]$

$[x = 0.20, t = 0.50, u(x, t) = 0.000552678785564489]$

$[x = 0.25, t = 0., u(x, t) = 0.0265165042944955]$

$[x = 0.25, t = 0.05, u(x, t) = 0.0264016956592139]$

$[x = 0.25, t = 0.10, u(x, t) = 0.0260854685563978]$

$[x = 0.25, t = 0.15, u(x, t) = 0.0256354297782389]$

$[x = 0.25, t = 0.20, u(x, t) = 0.0250917447078576]$

$[x = 0.25, t = 0.25, u(x, t) = 0.0243319302190402]$

$[x = 0.25, t = 0.30, u(x, t) = 0.0229260500428948]$

$[x = 0.25, t = 0.35, u(x, t) = 0.0201649513335166]$

$[x = 0.25, t = 0.40, u(x, t) = 0.0154233778741545]$

$[x = 0.25, t = 0.45, u(x, t) = 0.00870217005516430]$

$[x = 0.25, t = 0.50, u(x, t) = 0.000841917906729730]$

$[x = 0.30, t = 0., u(x, t) = 0.0339787137637478]$

$[x = 0.30, t = 0.05, u(x, t) = 0.0335412760963188]$

$[x = 0.30, t = 0.10, u(x, t) = 0.0322781655056762]$

$[x = 0.30, t = 0.15, u(x, t) = 0.0303298936196353]$

$[x = 0.30, t = 0.20, u(x, t) = 0.0278988127063419]$

$[x = 0.30, t = 0.25, u(x, t) = 0.0251756891101766]$

$[x = 0.30, t = 0.30, u(x, t) = 0.0222101964642689]$

$[x = 0.30, t = 0.35, u(x, t) = 0.0187770893489615]$

$[x = 0.30, t = 0.40, u(x, t) = 0.0143848993432340]$

$[x = 0.30, t = 0.45, u(x, t) = 0.00856601268632626]$

$[x = 0.30, t = 0.50, u(x, t) = 0.00135163767185425]$

$[x = 0.35, t = 0., u(x, t) = 0.0405407968505707]$

$[x = 0.35, t = 0.05, u(x, t) = 0.0398312322461371]$

$[x = 0.35, t = 0.10, u(x, t) = 0.0377675457191028]$

$[x = 0.35, t = 0.15, u(x, t) = 0.0345399700384287]$

$[x = 0.35, t = 0.20, u(x, t) = 0.0304467361768740]$

$[x = 0.35, t = 0.25, u(x, t) = 0.0258539537483324]$

$[x = 0.35, t = 0.30, u(x, t) = 0.0211149997205867]$

$[x = 0.35, t = 0.35, u(x, t) = 0.0164429500699005]$

$[x = 0.35, t = 0.40, u(x, t) = 0.0117819870047011]$

$[x = 0.35, t = 0.45, u(x, t) = 0.00679821362249789]$

$[x = 0.35, t = 0.50, u(x, t) = 0.00110712120431466]$

$[x = 0.40, t = 0., u(x, t) = 0.0456507127821674]$

$[x = 0.40, t = 0.05, u(x, t) = 0.0447350971334470]$

$[x = 0.40, t = 0.10, u(x, t) = 0.0420647879223699]$

$[x = 0.40, t = 0.15, u(x, t) = 0.0378648571254906]$

$[x = 0.40, t = 0.20, u(x, t) = 0.0324945435975058]$

$[x = 0.40, t = 0.25, u(x, t) = 0.0264194455500730]$

$[x = 0.40, t = 0.30, u(x, t) = 0.0201607783028188]$

$[x = 0.40, t = 0.35, u(x, t) = 0.0142072504836644]$

$[x = 0.40, t = 0.40, u(x, t) = 0.00888556629655139]$

$[x = 0.40, t = 0.45, u(x, t) = 0.00422775033706329]$

$[x = 0.40, t = 0.50, u(x, t) = -0.0000678345943157653]$

$[x = 0.45, t = 0., u(x, t) = 0.0488905728594593]$

$[x = 0.45, t = 0.05, u(x, t) = 0.0478465552801799]$

$[x = 0.45, t = 0.10, u(x, t) = 0.0447981252116691]$

$[x = 0.45, t = 0.15, u(x, t) = 0.0399914744378563]$

$[x = 0.45, t = 0.20, u(x, t) = 0.0338212645570759]$

$[x = 0.45, t = 0.25, u(x, t) = 0.0268062419708414]$

$[x = 0.45, t = 0.30, u(x, t) = 0.0195507573087713]$

$[x = 0.45, t = 0.35, u(x, t) = 0.0126824031433587]$

$[x = 0.45, t = 0.40, u(x, t) = 0.00675061520098609]$

$[x = 0.45, t = 0.45, u(x, t) = 0.00207896849102883]$

$[x = 0.45, t = 0.50, u(x, t) = -0.00139869877189469]$

$[x = 0.50, t = 0., u(x, t) = 0.0500000000000000]$

$[x = 0.50, t = 0.05, u(x, t) = 0.0489123760465464]$

$[x = 0.50, t = 0.10, u(x, t) = 0.0457355202415270]$

$[x = 0.50, t = 0.15, u(x, t) = 0.0407227308282631]$

$[x = 0.50, t = 0.20, u(x, t) = 0.0342804131921343]$

$[x = 0.50, t = 0.25, u(x, t) = 0.0269442931407762]$

$[x = 0.50, t = 0.30, u(x, t) = 0.0193439508375599]$

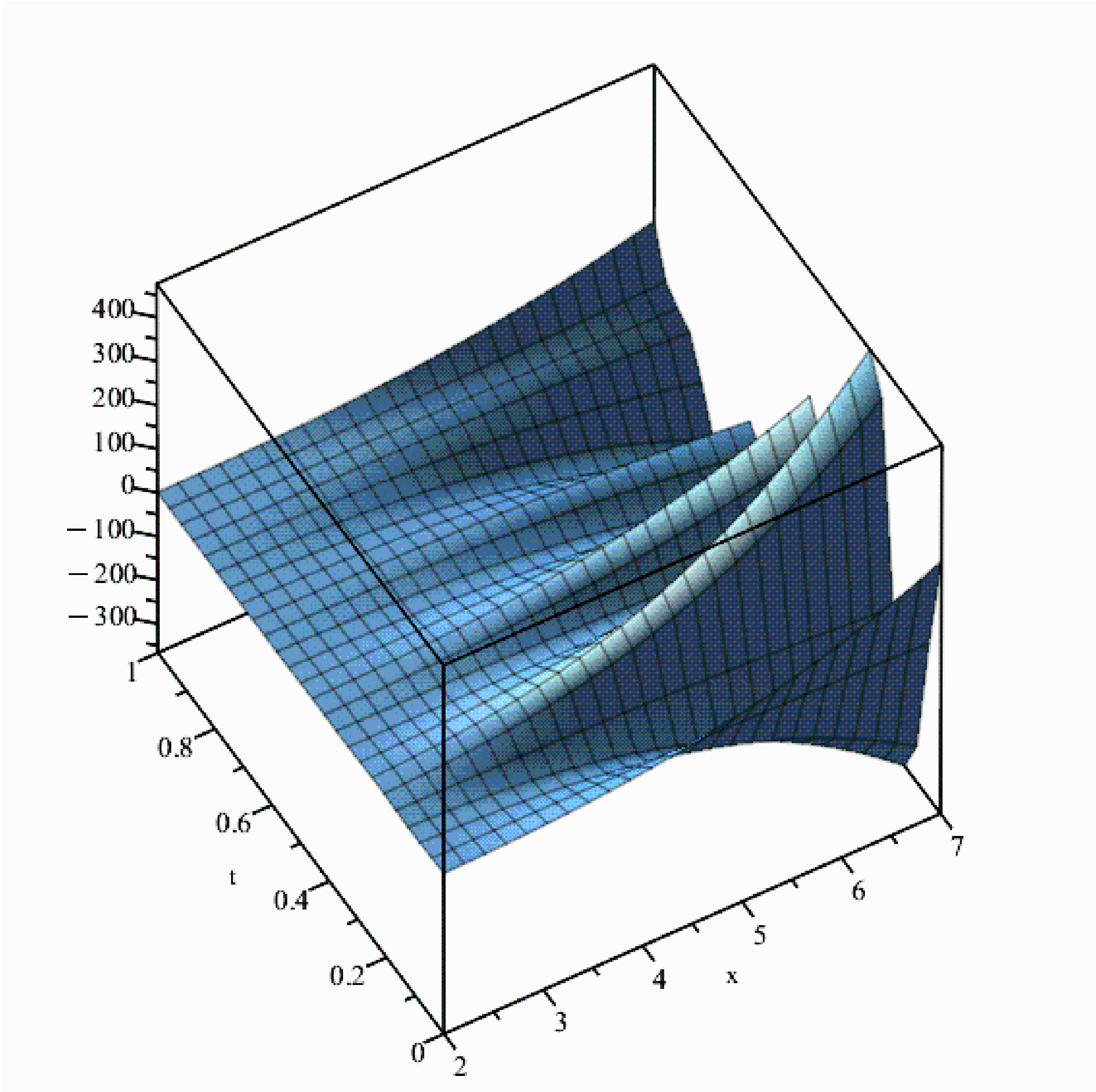
$[x = 0.50, t = 0.35, u(x, t) = 0.0121483939948446]$

$[x = 0.50, t = 0.40, u(x, t) = 0.00597703809116147]$

$[x = 0.50, t = 0.45, u(x, t) = 0.00125716541138293]$

$[x = 0.50, t = 0.50, u(x, t) = -0.00196897667985649]$

> pds:-plot3d(t = 0 ..1, x = 2 ..7 , axes = boxed, orientation = [−120, 40], color = "SteelBlue")



Задача 2

$$9\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 36e^{2x}\sin 3t;$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2} = 3xe^{2x}, \quad u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \sin 3t.$$

> restart

> infolevel(pdsolve) := 1 :

> $PDE := 9\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u(x,t)) + 4\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}((u(x,t))) = 36\cdot e^{2\cdot x}\cdot\sin(3\cdot t)$

$$PDE := 9\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) + 4\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x,t) = 36\,e^{2x}\sin(3\,t)$$

> $BC := u(x,0) = 0, \mathrm{D}[2](u)(x,0) = 3\cdot x\cdot \mathrm{e}^{2\cdot x}, u(0,t) = 0, \mathrm{D}[1](u)(0,t) = \sin(3\cdot t)$

$$BC := u(x,0) = 0, \mathrm{D}_2(u)(x,0) = 3\,x\,\mathrm{e}^{2x}, u(0,t) = 0, \mathrm{D}_1(u)(0,t) = \sin(3\,t)$$

> $exact\_sol := pdsolve([PDE, BC])$

$$exact\_sol := u(x,t) = x\sin(3\,t)\,\mathrm{e}^{2x}$$

> $pds := pdsolve(PDE, [BC], numeric, time = t, range = 0..1)$

$pds :=$ **module**( ) ... **end module**

> $V := pds\text{:-}value(\,)$

$V :=$ **proc**( ) ... **end proc**

>

```
for i from 0 by 1 to 5 do
    for j from 0 by 1 to 5 do
        print(V(i·0.1, j·0.1))
    end do
end do
```

$[x = 0., t = 0., u(x,t) = 0.]$

$[x = 0., t = 0.1, u(x,t) = 0.]$

$[x = 0., t = 0.2, u(x,t) = 0.]$

$[x = 0., t = 0.3, u(x,t) = 0.]$

$[x = 0., t = 0.4, u(x,t) = 0.]$

$[x = 0., t = 0.5, u(x,t) = 0.]$

$[x = 0.1, t = 0., u(x,t) = 0.]$

$[x = 0.1, t = 0.1, u(x,t) = 0.0364557990288197]$

$[x = 0.1, t = 0.2, u(x,t) = 0.0695686478557499]$

$[x = 0.1, t = 0.3, u(x,t) = 0.0966388643515723]$

$[x = 0.1, t = 0.4, u(x,t) = 0.114822002453160]$

$[x = 0.1, t = 0.5, u(x,t) = 0.123082413819956]$

$[x = 0.2, t = 0., u(x,t) = 0.]$

$[x = 0.2, t = 0.1, u(x,t) = 0.0872949256243169]$

$[x = 0.2, t = 0.2, u(x,t) = 0.185042491691216]$

$[x = 0.2, t = 0.3, u(x,t) = 0.309340318266822]$

$[x = 0.2, t = 0.4, u(x,t) = 0.467837991165313]$

$[x = 0.2, t = 0.5, u(x,t) = 0.684599964337908]$

$[x = 0.3, t = 0., u(x,t) = 0.]$

$[x = 0.3, t = 0.1, u(x,t) = 0.162231945624786]$

$[x = 0.3, t = 0.2, u(x,t) = 0.248721912064121]$

$[x = 0.3, t = 0.3, u(x,t) = 0.453175259514065]$

$[x = 0.3, t = 0.4, u(x,t) = 17.1169590392263]$

$[x = 0.3, t = 0.5, u(x,t) = 130.917226252361]$

$[x = 0.4, t = 0., u(x,t) = 0.]$

$[x = 0.4, t = 0.1, u(x,t) = 0.261604869960075]$

$[x = 0.4, t = 0.2, u(x,t) = 0.621345578539814]$

$[x = 0.4, t = 0.3, u(x,t) = 0.260173923392504]$

$[x = 0.4, t = 0.4, u(x, t) = -118.945331817509]$

$[x = 0.4, t = 0.5, u(x, t) = 642.338130559970]$

$[x = 0.5, t = 0., u(x, t) = 0.]$

$[x = 0.5, t = 0.1, u(x, t) = 0.401873541044697]$

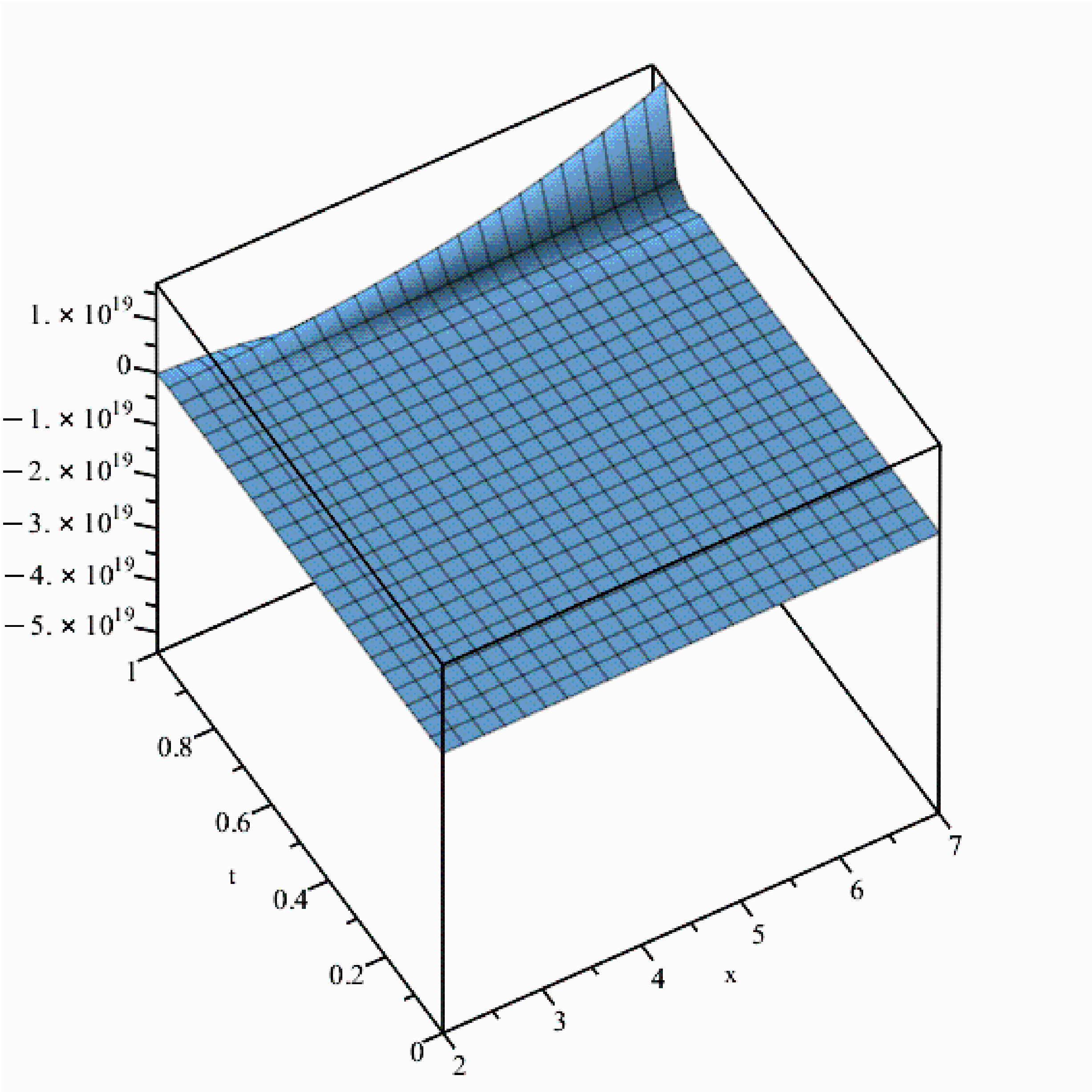
$[x = 0.5, t = 0.2, u(x, t) = 0.600013100996464]$

$[x = 0.5, t = 0.3, u(x, t) = 0.540684237083134]$

$[x = 0.5, t = 0.4, u(x, t) = 540.928438616657]$

$[x = 0.5, t = 0.5, u(x, t) = -10397.5343617079]$

> *pds*:-*plot3d*($t = 0\,..1, x = 2\,..7$, *axes* = *boxed*, *orientation* = $[-120, 40]$, *color* = "SteelBlue")



Задание по лабораторной работе

m = 1 для группы ІПЗ – 2.01
m = 2 для группы ІПЗ – 2.02
m = 3 для группы КН – 2.01
m = 4 для группы КН – 2.02

n – порядковый номер студента в группе

Решить задачу

$$(5+n)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+(4+n)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=36e^{2x}\sin 3t;$$

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial t^2}=3xe^{2x},\quad u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0,\quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\sin 3t.$$

Лабораторная работа № 7

Интегральные уравнения

Необходимые сведения

Пример 1. Методом Неймана решить интегральное уравнение

$$y(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 s\cdot x\cdot y(s)ds=\frac{5}{6}x$$

> $restart$

> $eq1 := y(x) - \frac{1}{2}\cdot\int_0^1 s\cdot x\cdot y(s)\,\mathrm{d}s = \frac{5}{6}\cdot x$

$$eq1 := y(x) - \frac{\left(\int_0^1 s\,x\,y(s)\,\mathrm{d}s\right)}{2} = \frac{5\,x}{6}$$

> $sol := intsolve(eq1, y(x), method = Neumann)$

$$sol := y(x) = \frac{279935\,x}{279936}$$

> $solution := evalf(sol)$

$$solution := y(x) = 0.9999964278\,x$$

Пример 2. Методом Лапласа решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}}dy = x^2$$

> $restart$

> $eq2 := \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}}\,\mathrm{d}y = x^2$

$$eq2 := \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}}\,\mathrm{d}y = x^2$$

> $intsolve(eq2, f(x), method = Laplace)$

$$f(x) = \frac{8\,x^{3/2}}{3\,\pi}$$

Пример 3. Методом коллокации решить интегральное уравнение

$$f(x)+\int_0^5 f(y)\left(\begin{cases} x\cdot(5-y) & \text{при} \quad x<y, \\ y\cdot(5-x) & \text{при} \quad x\ge y \end{cases}\right)dy = x$$

> *restart*

> $k := (x,y) \to piecewise(x<y, x\cdot(5-y), y\cdot(5-x))$

$$k := (x,y) \mapsto \begin{cases} x\cdot(5-y) & x<y \\ y\cdot(5-x) & otherwise \end{cases}$$

> $eq3 := f(x) + \int_0^5 f(y)\cdot k(x,y)\,\mathrm{d}y = x$

$$eq3 := f(x) + \int_0^5 f(y)\left(\begin{cases} x\,(5-y) & x<y \\ y\,(5-x) & otherwise \end{cases}\right)\mathrm{d}y = x$$

> $intsolve(eq3, f(x), method = collocation, order = 10, numeric)$

$$f(x) = 5.87182467011475\times 10^{-14} - 0.0114305752379515\,x + 0.0690752079165345\,x^2 - 0.162723597369789\,x^3 + 0.207790293190521\,x^4 - 0.160281896242838\,x^5 + 0.0785946135953408\,x^6 - 0.0247001421327652\,x^7 + 0.00484761852583069\,x^8 - 0.000543617284809154\,x^9 + 0.0000270839812402637\,x^{10}$$

Задание по лабораторной работе

m = 1 для группы ІПЗ – 2.01
m = 2 для группы ІПЗ – 2.02
m = 3 для группы КН – 2.01
m = 4 для группы КН – 2.02

n – порядковый номер студента в группе

1. Методом Неймана решить интегральное уравнение

$$y(x)-\frac{1}{m}\int_0^n s^{m+n}xy(s)\,ds = \frac{2m+n}{m}x^3+\frac{3m-n}{m+1}x^2+mnx+777$$

2. Методом Лапласа решить интегральное уравнение

$$\int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{(m+1)(x-y)}}\,dy = (m+3)x^2+\frac{n}{3}x+7$$

3. Методом коллокации решить интегральное уравнение

$$f(x)+\int_0^{5+m} f(y)\left(\begin{cases} x(5+m-y), & x<y \\ y(5+m-x), x & x\ge y \end{cases}\right)dy = nx^{m+2}+\frac{n}{3}x^m+mx+777$$