



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Э. БАУМАНА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»
(МГТУ им. Н.Э. БАУМАНА)

Факультет ФН "Фундаментальные науки"

Кафедра ФН4 "Физика"

ОТЧЁТ ПО ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ №1

по курсу «Математическое моделирование в технической физике»
на тему «Конечно-разностные методы»

Вариант 1

Выполнили студенты:

Дмитрюк Никита Александрович

Москвина Ирина Николаевна

Насыров Артур Дамирович

групп: ФН4-11М, ФН4-13М, ФН4-11М

Проверил:

Яковенко Иван Сергеевич

г. Москва, 2020 г.

Содержание

1. Формулировка условия	3
2. Основная часть	4
2.1. Теоретическая часть	4
2.2. Практическая часть	8
3. Выводы	21

1. Формулировка условия

Задание №1. Интерполяционно-характеристическим методом получить конечно-разностную схему с заданным шаблоном. Варианты шаблонов приведены на рисунке 1 на второй странице.

Задание №2. Реализовать эту схему в программном коде с помощью произвольного языка программирования для решения линейного уравнения переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ где } c > 0 \text{ – произвольная постоянная}$$

Задание №3. С помощью реализованной численной схемы провести расчет задачи Коши с начальными и граничными условиями:

а) Гладкое начальное распределение величины u :

$$u_0(x) = u_1 \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right) + u_2 \exp\left(-\frac{(x-2)^2}{2}\right), \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2.$$

Граничное условие: **свободное вытекание**.

б) Начальное распределение величины u с разрывами:

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ u_1, & 1 \leq x \leq 2, \quad u_1 = 1. \\ 0, & 2 \leq x \end{cases}$$

Граничное условие: **периодическое**.

Задание №4. Проанализировать используемую конечно-разностную схему. Определить порядок точности, найти первое дифференциальное приближение, вывести характеристическое уравнение, построить диссипативную и дисперсионную поверхности.

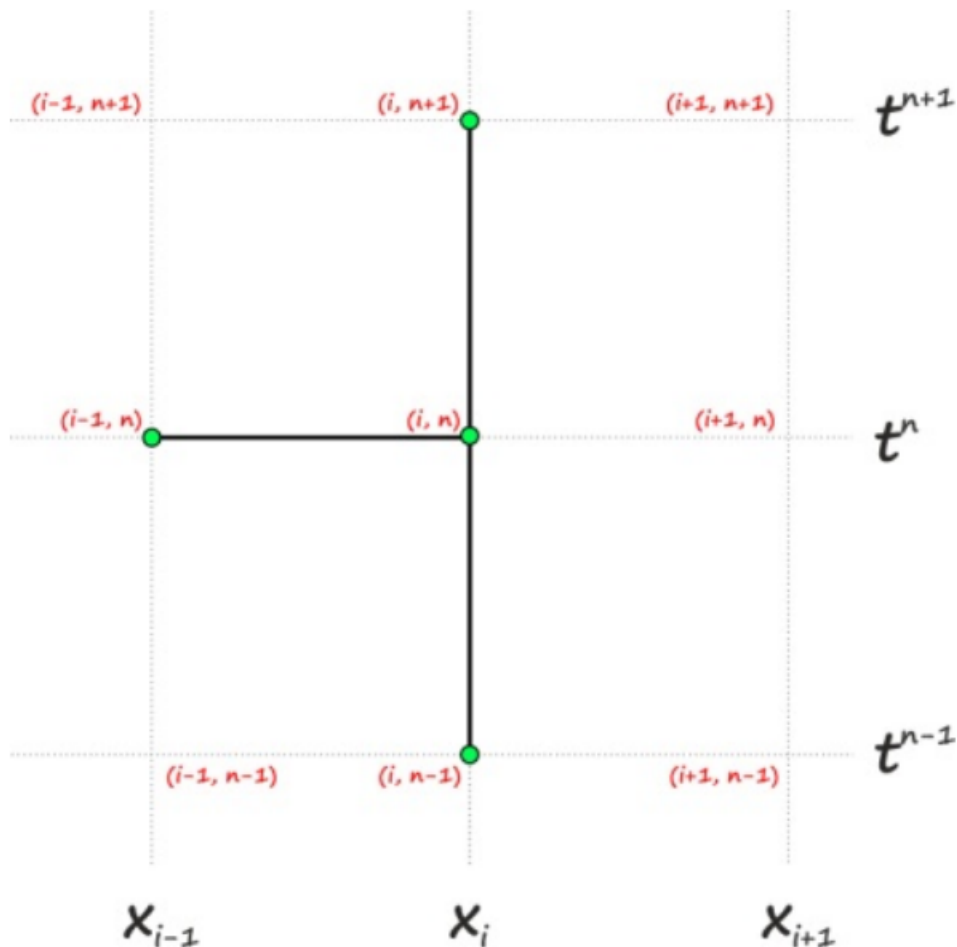


Рис. 1. Условие.

2. Основная часть

2.1. Теоретическая часть

Идея конечно-разностного подхода для решения уравнений в частных производных опирается на методы аппроксимации производных, представленные в предыдущих частях данной лекции. В качестве примера мы будем рассматривать уравнение в частных производных *гиперболического типа* (более подробно о классификации уравнений в частных производных см.

$$u_t = -a(x, t)u_x \quad (1)$$

где $a(x, t)$ - функция, характеризующая скорость переноса скалярной величины $u(x, t)$, величина t представляет собой время, а x - пространственную координату.

Уравнение типа (1). называется *уравнением переноса* или *уравнением адвекции*. Нахождение численного решения уравнения такого типа представляет собой не простую и важную задачу вычислительной физики, так как оно встречается при моделировании широкого круга явлений в области геофизики, динамики газов, жидкостей и твердых тел, моделировании поведения плазмы, конвективного переноса тепла, концентраций примеси и других приложениях. На примере уравнения (1) удобно проиллюстрировать основные принципы построения конечно-разностных методов, проанализировать их свойства и ограничения. При этом, представленные ниже подходы применимы и к другим уравнениям в частных производных, что делает их достаточно универсальным инструментом решения вычислительных задач.

В случае, если в уравнении (1) функция $a(x, t)$ равна постоянной величине a , уравнение называется "*линейным*" и для него можно построить аналитическое решение. Найдем это решение, оно пригодится нам далее для анализа численных результатов. Для этого выполним замену переменной: $\xi = x - at$. Тогда используя обозначение $u(x, t) = U(\xi, t)$ мы можем получить следующие формы записи производной по пространству и времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = -a \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial t} \quad (2)$$

Подстановка этих выражений в (1) преобразует его к обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(\xi, t) = 0 \quad (3)$$

Отсюда можно заключить, что U не может быть функцией времени, но может быть произвольной функцией ξ . Таким образом, общим решением (1) будет:

$$u = f(x - at) \quad (4)$$

где f - произвольная функция, вид которой определяется начальными и граничными условиями. Пусть решение ищется в интервале $(-\infty, \infty)$, а в качестве начального условия задана функция $u(x, 0) = F(x)$. Тогда частным решением, удовлетворяющим начальному условию будет

$$u = F(x - at) \quad (5)$$

Из данного решения можно видеть, что со временем вид функции $u(x, t)$ не меняется, а лишь переносится вправо (если $a > 0$) со скоростью a .

К примеру, зададим начальное условие в виде гауссиана $F(x) = u_0 e^{-x^2}$. В таком случае, решением уравнения (1) будет:

$$u(x, t) = u_0 e^{-(x-at)^2} \quad (6)$$

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

Для нахождения приближенного решения уравнений в частных производных конечно-разностным методом, используется дискретная система точек и так называемая расчетная сетка. Для уравнений, зависящих от одной пространственной координаты система точек представляет собой сетку в плоскости (x, t) . Шаг сетки по оси x будем обозначать Δx , шаг сетки по оси t — Δt . Таким образом, координата узла сетки на временном слое n с пространственным индексом i будет равна $(i\Delta x, n\Delta t)$. Приближенное решение ищется в узлах данной сетки. Приближенное решение в узле сетки с индексами (i, n) будем обозначать как u_i^n . Процесс построения конечно-разностных схем будем рассматривать также на примере линейного уравнения переноса:

$$u_t = -au_x \quad (7)$$

На практике численное решение уравнения (7) имеет смысл искать в ограниченной области пространства и времени $(x, t) = [0, L][0, T]$. В таком случае, на границах расчетной области необходимо задать соответствующие условия:

$$u(x, 0) = \theta(x), x \in [0, L]; u(0, t) = \psi(t) u(L, t) = \xi(t), t \in [0, T] \quad (8)$$

В результате разбиения расчетной области на ячейки с шагом x по пространству и Δt по времени мы получим $N = \frac{L}{\Delta x}$ ячеек по пространству (число узлов сетки при этом на 1 больше) и $M = \frac{T}{\Delta t}$ ячеек по времени, тогда:

$$u_i^0 = \theta(x_i), i \in [0, N]; u_0^n = \psi(t_n), n \in [0, M]; u_N^n = \xi(t_n), n \in [0, M]; \quad (9)$$

Необходимо найти значения функции в последующие моменты времени $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots$ во всех узлах сетки.

Существует несколько подходов к созданию конечно-разностных аналогов дифференциального уравнения (7). Простейший способ заключается в использовании конечно-разностного представления производных, входящих в уравнения. К примеру, производную по пространству можно заменить односторонними конечными разностями $D_+(x)$, $D_-(x)$ или центральной $D_0(x)$ конечной разностью. Аналогичным образом можно воспользоваться данными выражениями для нахождения производной по времени. К примеру, используя одностороннюю разность $D_-(x)$ для производной по пространству и $D_+(x)$ для производной по времени, получим следующий дискретный аналог дифференциальной задачи:

$$\frac{n_i^{n+1} - n_i^n}{\Delta x} = -a \frac{n_i^n - n_{i-1}^n}{\Delta t} \quad (10)$$

Данная схема называется схемой левый уголок. Её шаблон приведен на Рисунке 1.

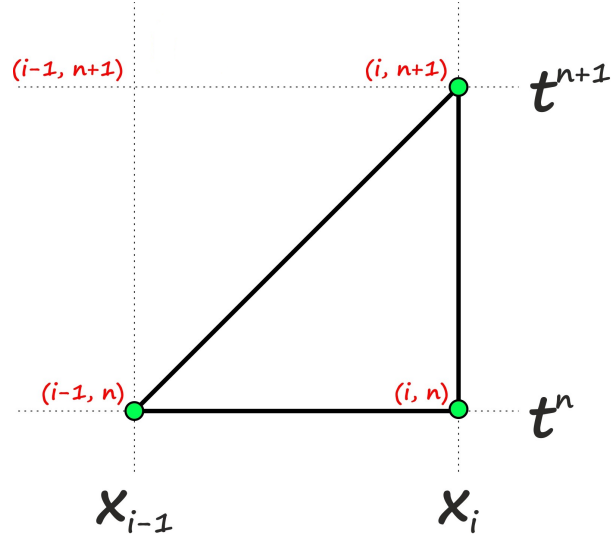


Рис. 2. "Левый уголок".

Шаблон называется множество узлов расчетной сетки, используемых для построения разностного оператора. Используя одностороннюю разность $D_+(x)$ для производной по пространству и $D_+(x)$ для производной по времени получим схему правый уголок (Рисунок 2):

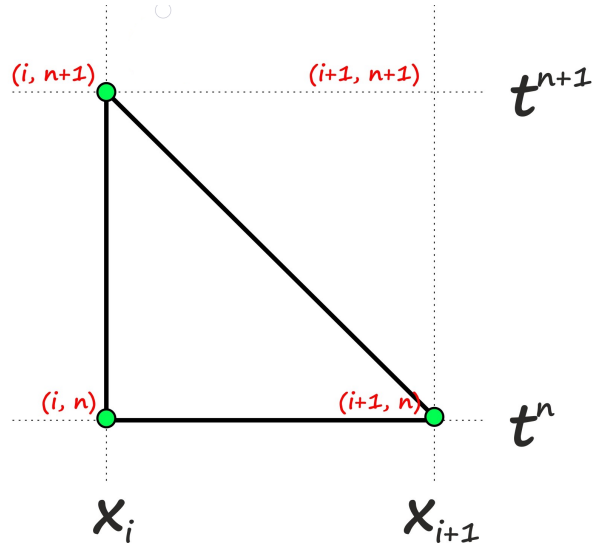


Рис. 3. "Правый уголок".

$$\frac{n_i^{n+1} - n_i^n}{\Delta x} = -a \frac{n_{i+1}^n - n_i^n}{\Delta t} \quad (11)$$

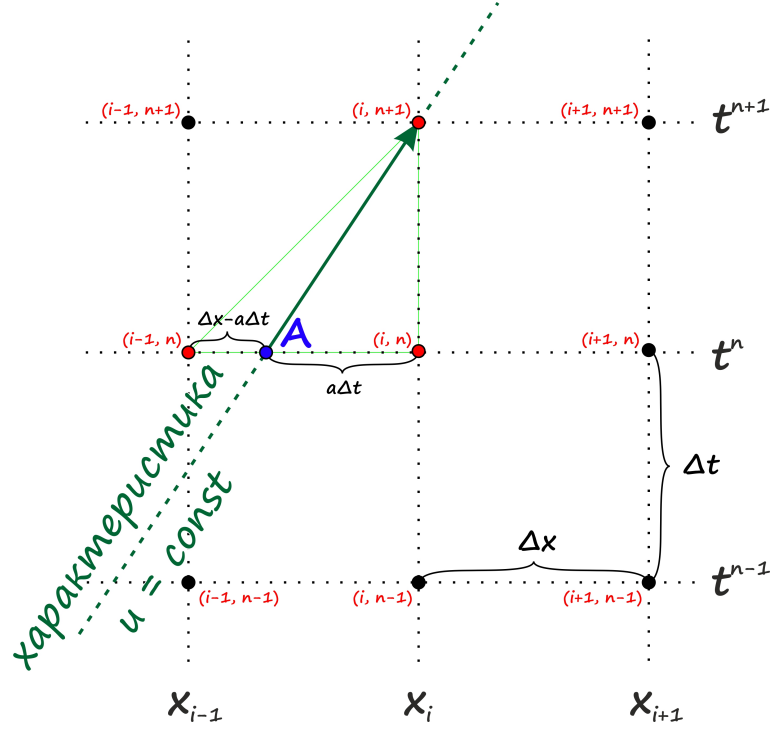


Рис. 4. Схема построения интерполяционной формулы.

Нахождение численного решения уравнения (7) на временном слое $n+1$ с помощью схемы (10) сводится к вычислению u_i^{n+1} с использованием данных на предыдущем временном слое:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (12)$$

Схемы, в которых данные на новом временном слое $n+1$ можно найти только с использованием данных с предыдущего временного слоя n , называются явными.

Заметим, что для вычисления u_1^{n+1} нам необходимо использовать значение u_0^n , которое мы будем определять из граничного условия $u_0^n = \psi(t_n)$:

$$u_1^{n+1} = u_1^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_1^n - u_0^n)$$

2.2. Практическая часть

Одним из наиболее наглядных способов построения конечно-разностных схем является так называемый *интерполяционно-характеристический метод* или *метод обратной характеристики*. Схема построения интерполяционной формулы продемонстрирована на рисунке 3:

Для построения интерполяционной формулы нам нужны координаты точек A , B , которые имеют вид:

$$x_a = x_i - c \Delta x \quad (13)$$

$$x_b = x_i + c\Delta x \quad (14)$$

Используем квадратичную интерполяцию для нахождения значения в точке $u(x_a, t_n) = u_i^{n+1}$:

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n P_{i-1}(x_a) + u_i^n P_i(x_a) + u_i^{n-1} P_b(x_a) \quad (15)$$

Где:

$$P_{i-1}(x_a) = \frac{(x_a - x_i)(x_a - x_b)}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_b)} = \frac{2c^2}{1+c} = \frac{2a^2\Delta t^2}{\Delta x(\Delta x + a\Delta t)} \quad (16)$$

$$P_i(x_a) = \frac{(x_a - x_{i-1})(x_a - x_b)}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_b)} = 2 - 2c = \frac{2(\Delta x - a\Delta t)}{\Delta x} \quad (17)$$

$$P_b(x_a) = \frac{(x_a - x_{i-1})(x_a - x_i)}{(x_b - x_i)(x_b - x_{i-1})} = -\frac{1-c}{1+c} = -\frac{\Delta x - a\Delta t}{\Delta x + a\Delta t} \quad (18)$$

Тогда с учетом (16),(17),(18) уравнение (15) примет следующий вид:

$$u_i^{n+1} = \frac{2c^2}{1+c} u_{i-1}^n + (2-2c) u_i^n - \frac{1-c}{1+c} u_i^{n-1} \quad (19)$$

Или при подстановке $c = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$ имеем:

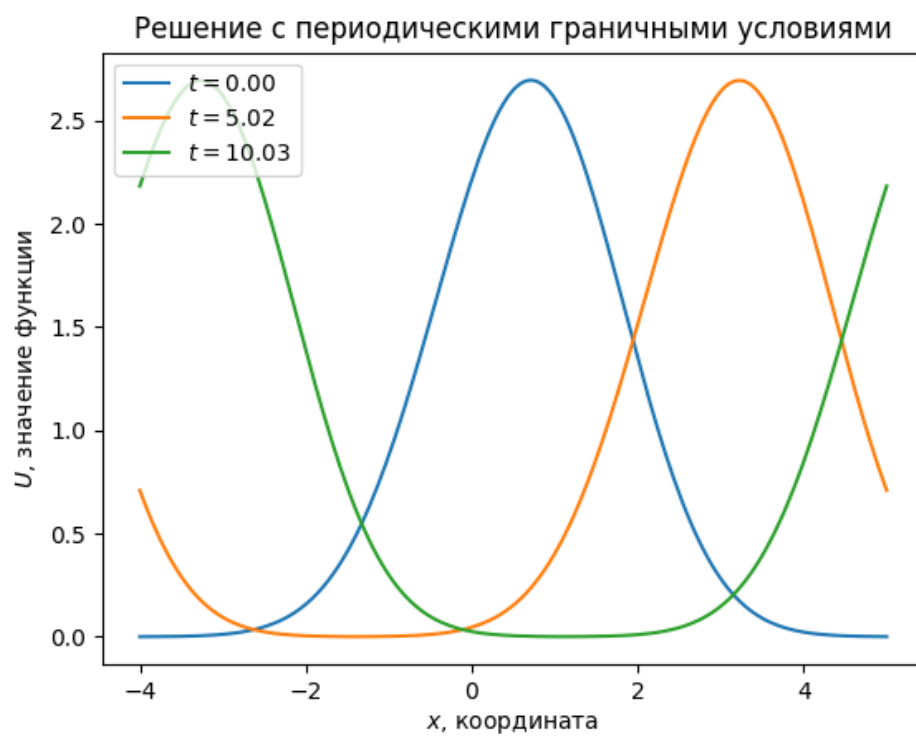
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\Delta x}{2a} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = a \frac{u_{i-1}^n - u_i^n}{\Delta x} \quad (20)$$

Решим с помощью полученной интерполяционной формулы уравнение 1 со следующими начальными условиями:

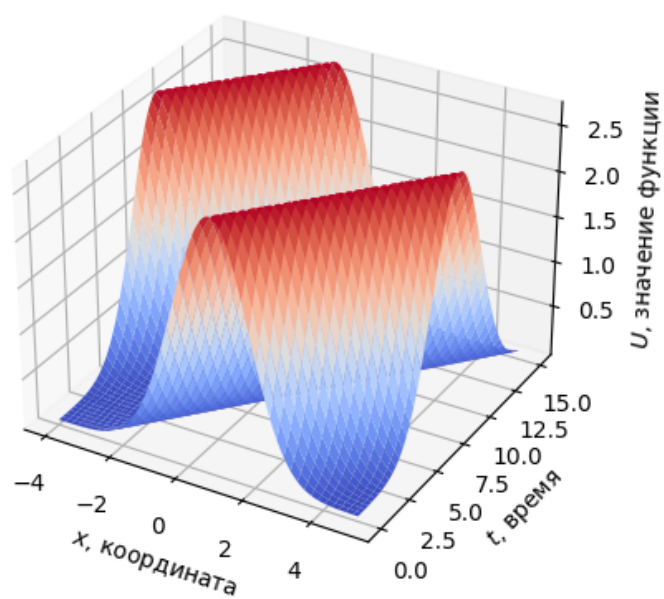
$$u_0 = u_1 \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right] + u_2 \exp\left[-\frac{(x-1)^2}{2}\right]; u_1 = 1, u_2 = 2; \quad (21)$$

С периодическими граничными условиями:

$$u_0^{n+1} = u_N^n \quad (22)$$



Решение с периодическими граничными условиями



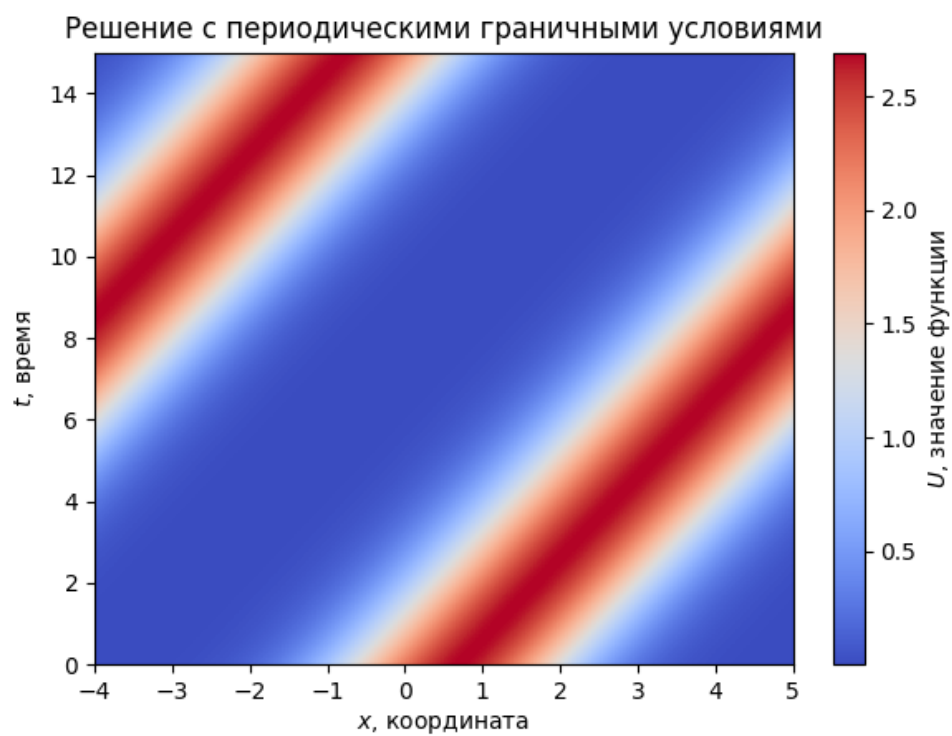
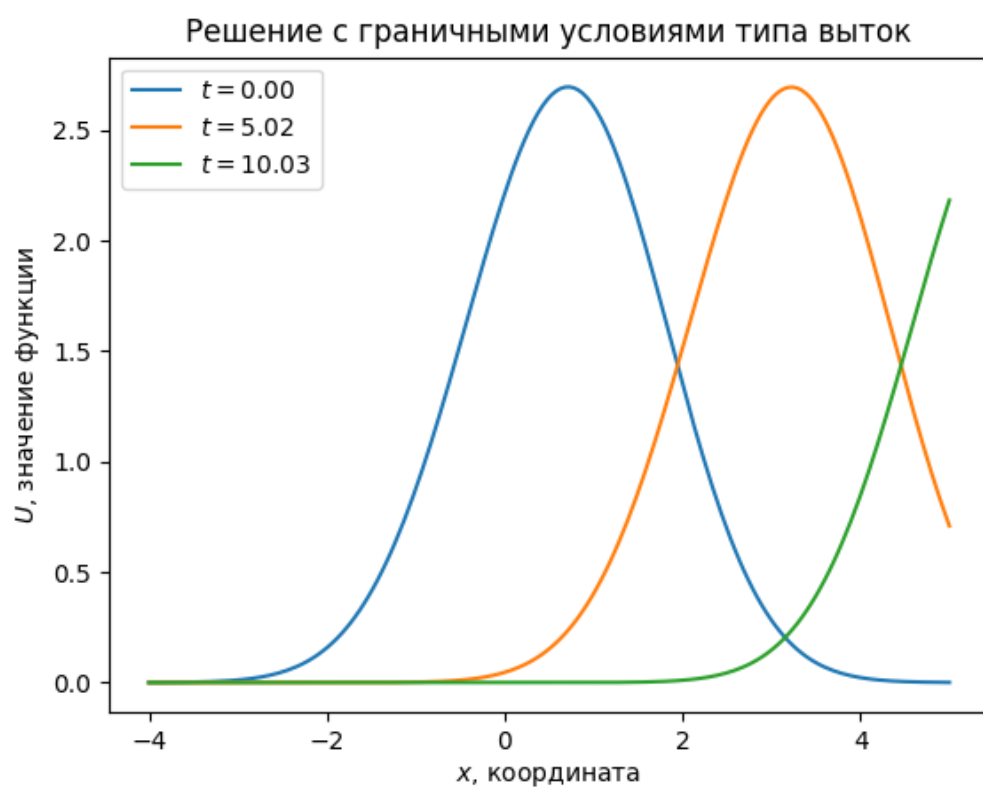


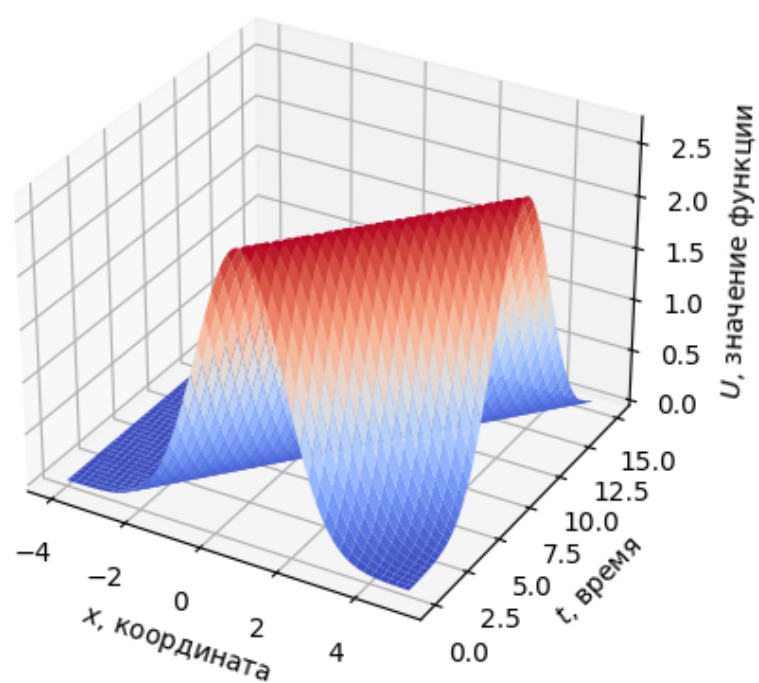
Рис. 5. C периодическими граничными условиями.

также решим и с граничными условиями типа "выток"

$$u_N^n = u_{N-1}^n \quad (23)$$



Решение с граничными условиями типа выток



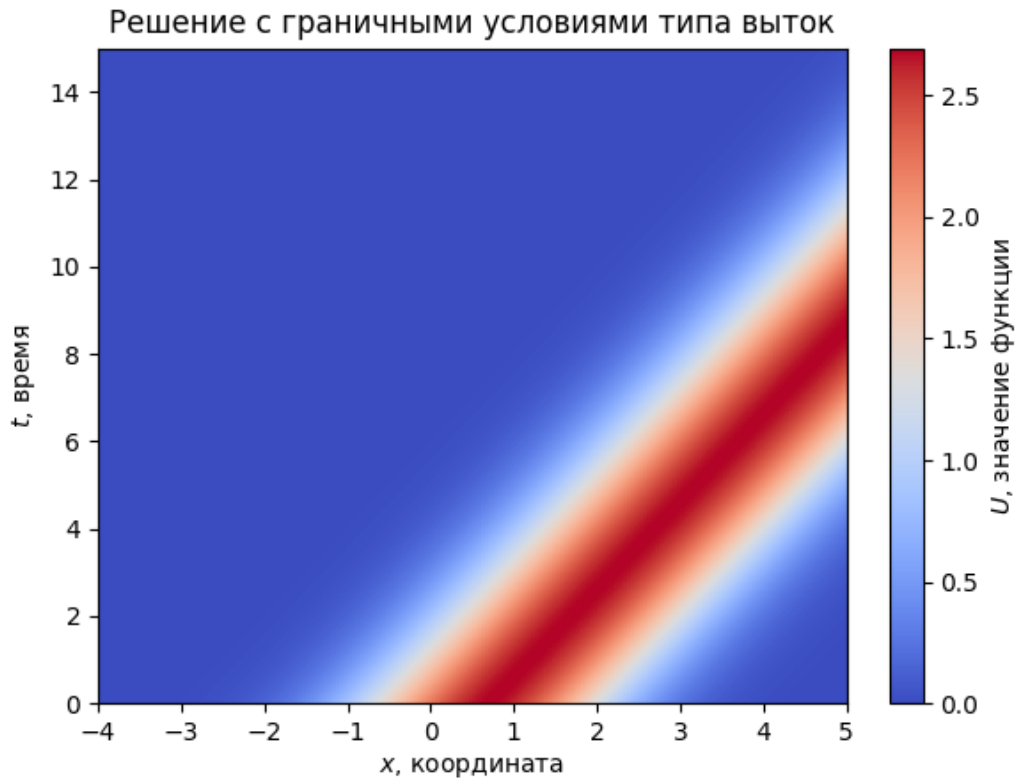


Рис. 6. С граничными условиями типа "выток".

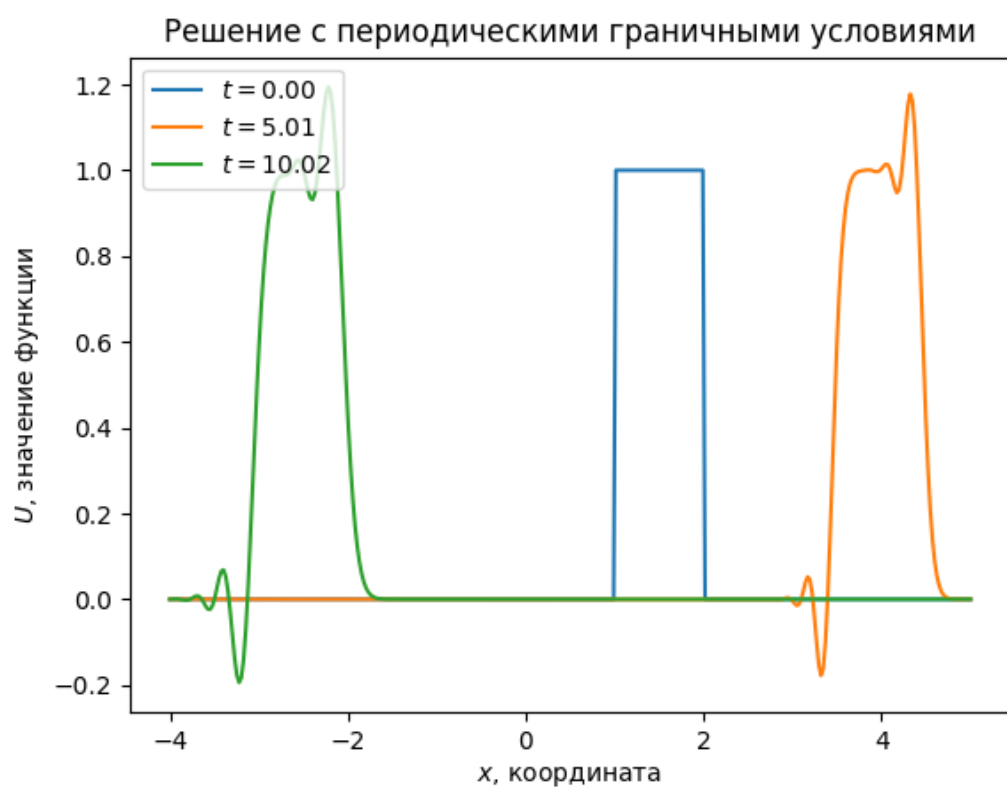
Как видим, оба решения имеют нормальный вид, профиль волны остается постоянным и происходит его движение по оси x . Что согласуется со стандартным решением линейного уравнения переноса полученного в лекции 2. Решения с периодическими граничными условиями при достижении конца области определения, переносятся в начало области определения на последующих временных слоях, в то время, как при граничных условиях типа "выток" решение, при сколь угодно большом времени t исчезает из области определения функции.

Решим с помощью интерполяционной формулы уравнение 1 со следующими начальными условиями, которые имеют точки разрыва:

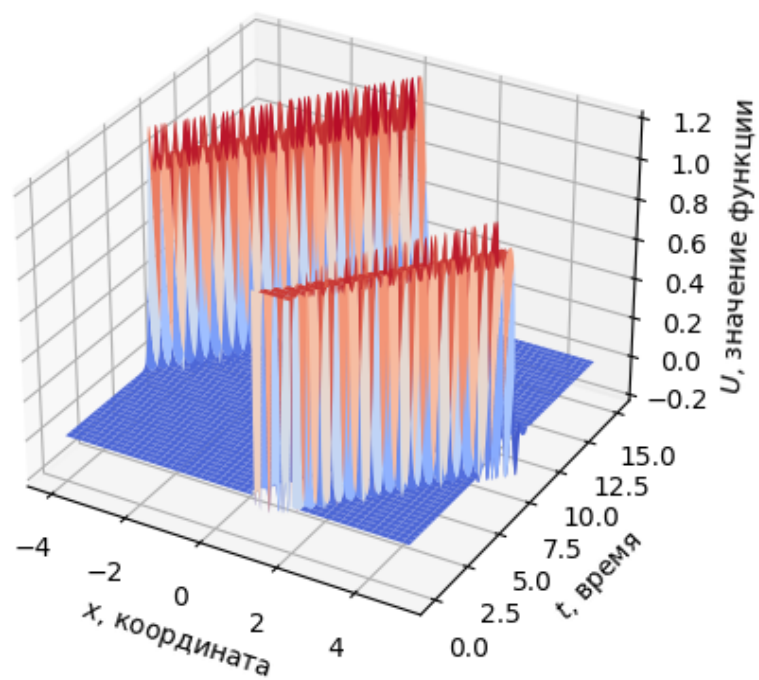
$$u_0 = 0, x \in [x_{min}; 1) \cup (2; x_{max}]; u_0 = 1, x \in [1, 2] \quad (24)$$

С периодическими граничными условиями:

$$u_0^{n+1} = u_N^n \quad (25)$$



Решение с периодическими граничными условиями



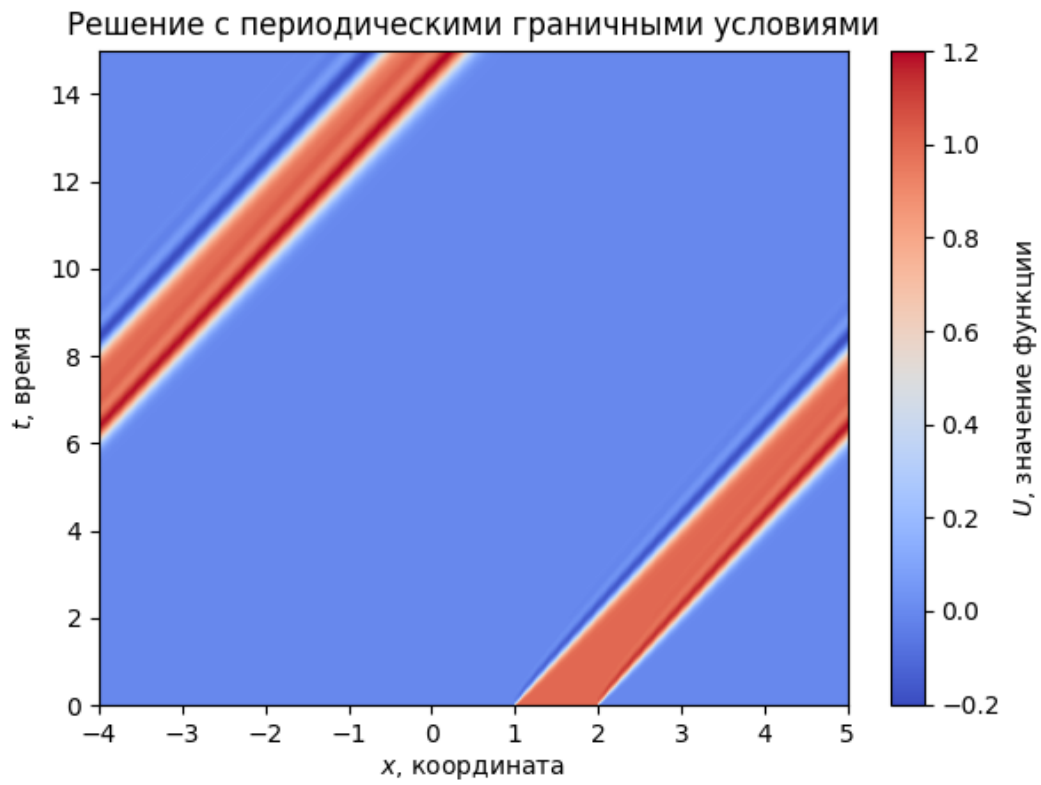
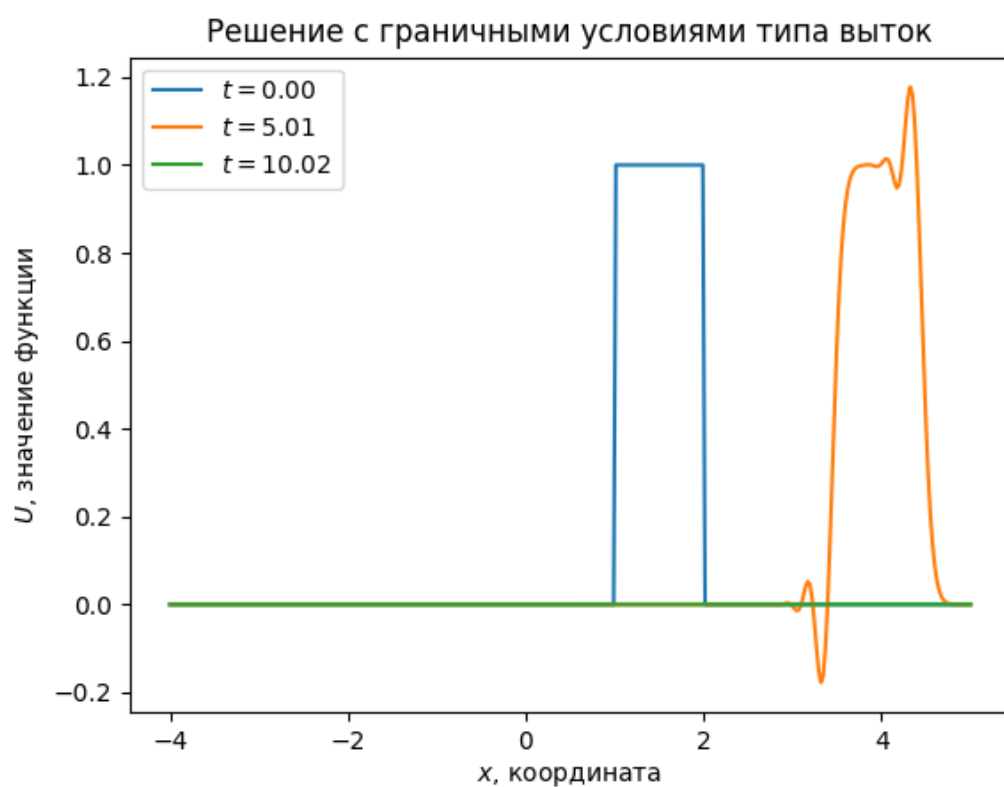


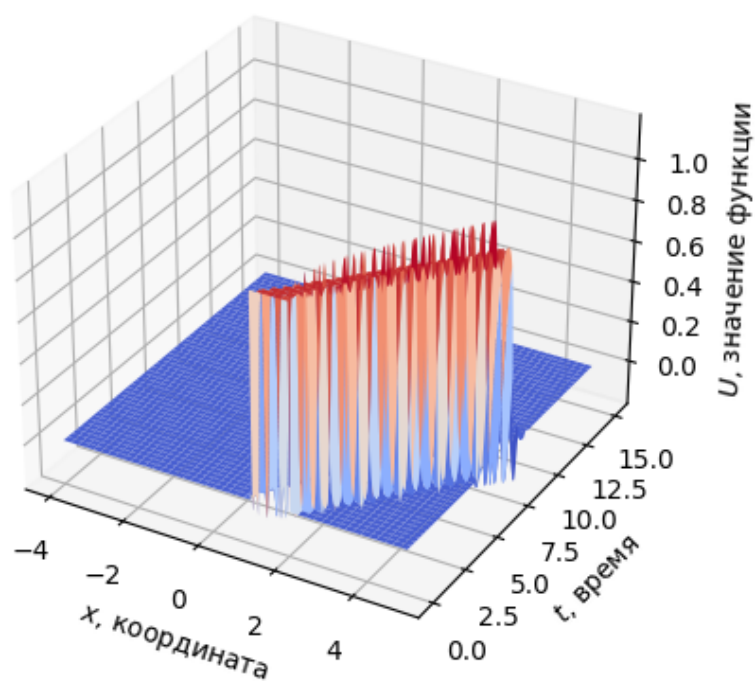
Рис. 7. С периодическими граничными условиями.

также решим и с граничными условиями типа "выток"

$$u_N^n = u_{N-1}^n \quad (26)$$



Решение с граничными условиями типа выток



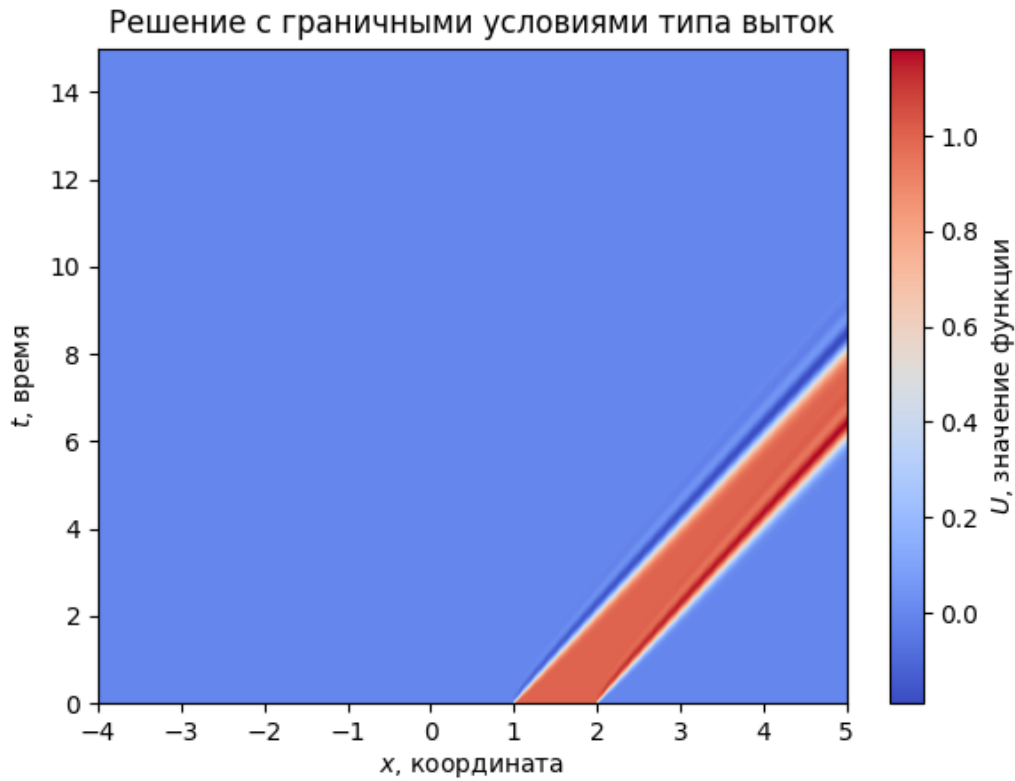


Рис. 8. С граничными условиями типа "выток"

Как видим решение с разрывными граничными условиями, приобретает локальные максимумы и минимумы. Что согласуется с исследованиями С.К. Годунова 1959 года, о возникновении в решении новых локальных минимумов и максимумов при переходе на новый временной слой, при решении уравнений с разрывными начальными условиями. Максимумы и минимумы возникают т.к. интерполяционная схема, как будет показано далее, имеет второй порядок точности по x и t , а согласно теореме Годунова, корректно решить задачу с разрывом, может только монотонная схема имеющая только первый порядок точности.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

Поговорим о точности разностной схемы. Ключевой идеей при определении точности конечно-разностной схемы является её разложение в ряд Тейлора.

$$\epsilon_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\Delta x}{2a} \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} - a \frac{u_{i-1}^n - u_i^n}{\Delta x} \quad (27)$$

для определения ошибки аппроксимации, воспользуемся разложением в ряд Тейлора значений функции в окрестности точек (x_i, t_{n+1}) , (x_i, t_{n-1}) , (x_{i-1}, t_n) :

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Delta t^3 + \dots \quad (28)$$

$$u_i^{n-1} = u_i^n - \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Delta t^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Delta t^3 + \dots \quad (29)$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^3 + \dots \quad (30)$$

при подстановке, значений рядов Тейлора в формулу локальных ошибок

$$\epsilon_i^n = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Delta t^2 + \frac{a}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^2 \quad (31)$$

С учетом того, что первые два слагаемых дают ноль, то дифференциальное приближение имеет вид

$$G(\Delta x, \Delta t) = \frac{\Delta x}{2a} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{a}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x + \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \Delta t^2 + \frac{a}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \Delta x^2 \quad (32)$$

заменяя производную по времени соотношением:

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = (-a)^k \frac{\partial^k u}{\partial x^k} \quad (33)$$

Тогда дифференциальное приближение $G(\Delta x, \Delta t)$ примет следующую форму, которую мы будем называть P - формой дифференциального приближения:

$$P(\Delta x, \Delta t) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \left(\frac{a \Delta x^2}{3!} - \frac{a^3 \Delta t^2}{3!} \right) \quad (34)$$

Степень Δx и Δt в первом дифференциальном приближении является порядком точности конечно-разностной схемы. Таким образом интерполяционная схема Насыров-Дмитрюк имеет второй порядок точности по x и t

Решим с помощью интерполяционной формулы уравнение 1 со следующими начальными условиями, которые имеют точки разрыва:

$$u_0 = 0, x \in [x_{min}; 1)(2; x_{max}]; u_0 = 1, x \in [1, 2] \quad (35)$$

С периодическими граничными условиями:

$$u_0^{n+1} = u_N^n \quad (36)$$

также решим и с граничными условиями типа "выток"

$$u_N^n = u_{N-1}^n \quad (37)$$

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

В общем виде дифференциальные приближения разных схем для уравнения переноса выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (38)$$

Запишем наше дифференциальное приближение и найдем, коэффициенты

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \left(\frac{a \Delta x^2}{3!} - \frac{a^3 \Delta t^2}{3!} \right) = 0 \quad (39)$$

Сравнивая два выражения, нетрудно сделать вывод что $\mu = 0$. Следовательно амплитуда не изменяется, коэффициент $\eta = \left(\frac{a \Delta x^2}{3!} - \frac{a^3 \Delta t^2}{3!} \right)$

Вставим а дифференциальное приближение пробную функцию $u(x, t) = A \exp[i(\omega t - kx)]$ тогда:

$$\omega - ak + \eta k^3 = 0; \quad (40)$$

Выразим ω

$$\omega = ak - \eta k^3; \quad (41)$$

Тогда приведенная фазовая скорость будет равна

$$\gamma(k) = \frac{Re[\omega]}{ak} = 1 - \frac{\eta k^2}{a} = 1 - \frac{k^2}{3!} (\Delta x^2 - a^2 \Delta t^2) > 0; \quad (42)$$

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Из всех методов анализа устойчивости разностных схем одним из наиболее универсальных и простых является спектральный анализ, предложенный Джоном фон Нейманом. Метод Неймана позволяет исследовать не только устойчивость разностных схем, но и другие важные свойства, такие как численная диссипация и дисперсия.

Метод Неймана заключается в представлении решения в форме ряда Фурье и анализе поведения отдельных гармоник при переходе с одного временного слоя на другой. В результате, устойчивость всех гармоник будет необходимым условием устойчивости схемы.

Представим сеточное решение в виде бегущих волн:

$$u_j^n = A \exp[i(\omega n \Delta t - k j \Delta x)] = A q^n \exp[-i(k j \Delta x)] \quad (43)$$

После подстановки решения в интелеполяционную схему, будем иметь квадратное уравнение для нахождения q

$$q^2(0.5c + 0.5) - (c^2(\exp[ikx] - 1) + 1)q + 0.5(1 - c) = 0 \quad (44)$$

Решая квадратное уравнение, находим дисперсионную и диссепативную поверхность:

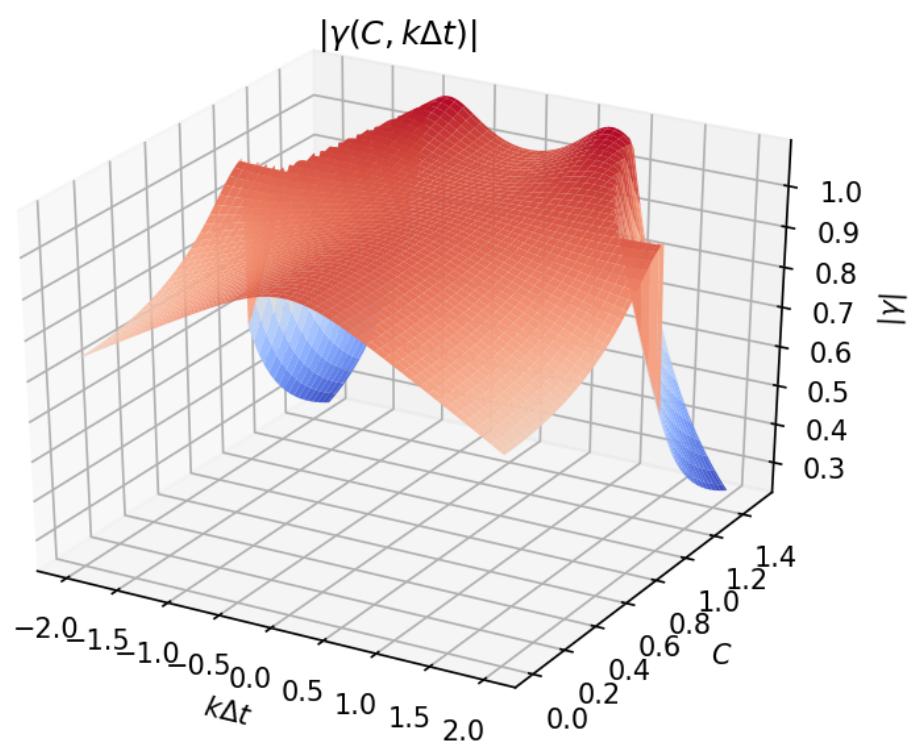
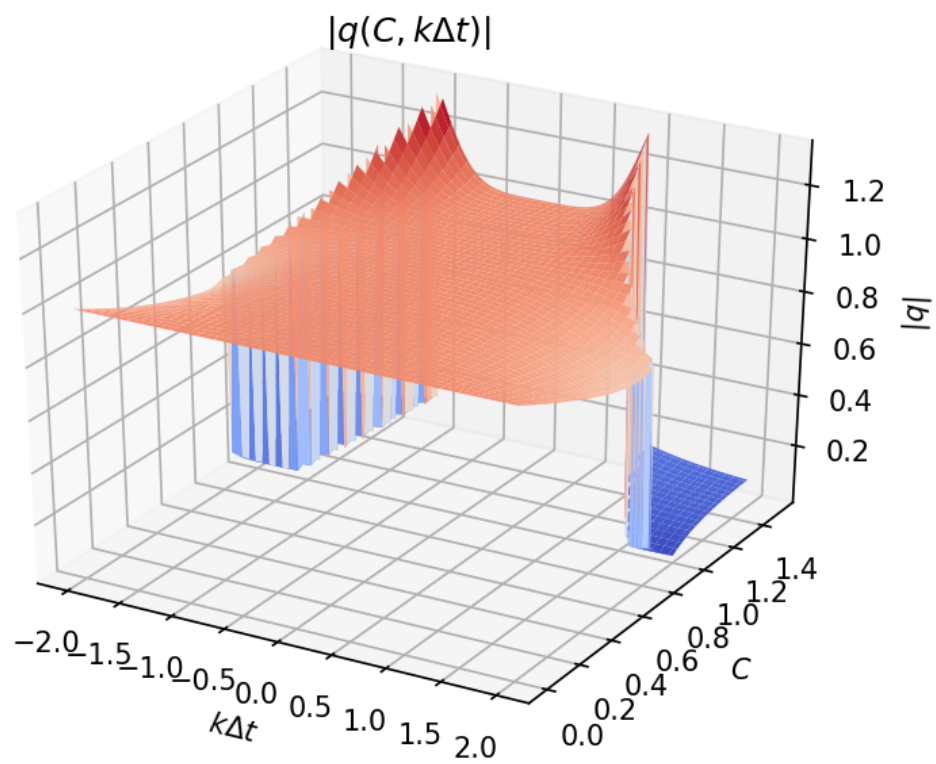


Рис. 9. Дисперсионная поверхность.

3. Выводы

В данной работе был проведён анализ интерполяционной схемы, изображённой на рисунке 1. Из анализа диссипативной поверхности (рис. 9), заданная схема устойчива при числах Куранта меньше 1. Схема также является устойчивой при достаточно малых $k\Delta t$ и числах Куранта больше 1.

Из анализа дисперсионной поверхности, изображённой на рисунке 9, наблюдается нормальная дисперсия при числах Куранта меньше 1. При числах Куранта больше 1 (и малых значениях $k\Delta t$ для устойчивости схемы) интерполяционная схема приобретает аномальную дисперсию.

Рассматриваемая схема, как было показано ранее, имеет второй порядок точности по x и t . Также она не является монотонной, поскольку не может применяться для задач с разрывными начальными условиями, так как появляются локальные минимумы и максимумы в окрестностях точек разрыва (см. рис 5, 6, 7, 8), что полностью согласуется с теоремой Годунова.