Конспекты по проге 1 семестр

Содержание

1 Введение

1.1 Алгоритм

Определение Алгоритм — это формально описанная вычислительная процедура, получающая исходные данные (input), называемые также входом алгоритма или его аргументом, и выдающая результат вычисления на выход (output). Алгоритм определяет функцию (отображение):

$$F\colon X \to Y \tag{1}$$

X - входные данные, Y - выходные

Примеры

Вычисление числа Фибоначчи

```
int fib(int n) {
        int x = 1;
        int y = 0;

        for (int i = 0; i < n; i++) {
                x += y;
                y = x - y;
        }
        return y;
}
```

Или же через перемножение матриц за $O(log(n))$

$$\begin{pmatrix} F_0 & F_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Проверка числа на простоту

Перебор до $\sqrt{n}$
Решето Эратосфена

Быстрое возведение в степень

```
int power (int a, int n) {
        if (n == 0) return 1;
        if (n % 2 == 0) {
                int b = power (a, n/2);
                return b*b;
        } else {
                return power (a, n - 1)*a;
        }
}
```

1.2 Асимптотики

f ограничена сверху функцией g асимптотически

$$f(x) \in O(g(x)) \Leftrightarrow \exists (C > 0)(\forall x) \colon \|f(x)\| \leq C\|g(x)\|$$

f ограничена снизу функцией g асимптотически

$$f(x) \in \Omega(g(x)) \Leftrightarrow \exists (C > 0)(\forall x) \colon \|f(x)\| \geq C\|g(x)\|$$

f ограничена сверху и снизу функцией g асимптотически

$$f(x) \in \Theta(g(x)) \Leftrightarrow \exists (C > 0), (C' > 0)(\forall x) \colon C\|g(x)\| \leq \|f(x)\| \leq C'\|g(x)\|$$

g доминирует над f асимптотически

$$f(x) \in o(g(x)) \Leftrightarrow \forall (C > 0)(\forall x) \colon \|f(x)\| < C\|g(x)\|$$

f доминирует над g асимптотически

$$f(x) \in \omega(g(x)) \Leftrightarrow \forall (C > 0)(\forall x) \colon \|f(x)\| > C\|g(x)\|$$

f эквивалентна g асимптотически при $n \to n_0$

$$f(n) \sim g(n) \Leftrightarrow \lim_{n \to n_0} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$$

Примеры

$O(1) = O(2)$

$O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$

$f(n) \subset g(n) \Rightarrow O(f(n) + g(n)) = O(g(n))$

1.3 Структура данных, абстрактный тип данных (интерфейс)

Определение Структура данных - программная единица, позволяющая хранить и обрабатывать данные. Для взаимодействия предоставляет интерфейс.

Примеры

int a[n];

std::pair<int, int>

Абстрактный тип данных (АТД) - тип данных, который скрывает внутреннюю реализацию, но предоставляет весь интерфейс для работы с данными, а также возможность создавать элементы этого типа. Абстрактный тип данных реализуется с помощью структуры данных.

Пример

Стек, реализованный через массив

Стек - АТД, массив - структуры данных

1.4 Массив

Определение Массив - структура данных, хранящая набор значений (элементов), которые идентифицируются по индексу или набору индексов.
Динамический массив - массив, размер которого может изменяться во время выполнения программы.

Линейный поиск - поиск по массиву за $O(n)$
В отсортированном массиве поиск возможен за $O(log(n))$ с помощью бинарного поиска

```
int binarySearch(const int *a, int n, int item) {
        int leftPtr = -1, rightPtr = n;

         while (rightPtr - 1 > leftPtr) {
                int middlePtr = (leftPtr + rightPtr)/2;
                if (item > a[middlePtr]) {
                        leftPtr = middlePtr;
                } else if (item < a[middlePtr]) {
                        rightPtr = middlePtr;
                } else {
                        return middlePtr;
                }
        }
        return rightPtr;
}
```

2 Базовые структуры данных

2.1 Динамический массив

$+$: random access operator
$-$: нельзя удалить/вставить в середину за $O(1)$

2.2 Односвязный и двусвязный список

$+$: удаление и вставка в любое место
$-$: поиск/последовательный доступ дорог
Односвязный список имеет ссылку только на следующий узел.
Двусвязный список имеет ссылку на следующий и предыдущий узлы.

Операции со списками:

Поиск элемента ($O(n)$)

Вставка - смена указателей ($O(1)$)

Удаление - смена указателей ($O(1)$)

Объединение (при условии, что храним указатель на последний элемент) - смена указателей ($O(1)$)

2.3 Стек

Сертификат - Last In First Out

Операции:

Добавление в конец ($O(1)$)

Удаление с конца ($O(1)$)

Можно реализовать с помощью:

Динамического массива

Списка

Для хранения в массиве можно использовать указатель на последний элемент и сдвигать его в зависимости от операции.
Чтобы поддерживать минимум в стеке, достаточно хранить не элемент, а пару вида: значение элемента, минимальный элемент в стеке на момент вставки нашего элемента.

2.4 Очередь

Сертификат - First In First Out

Операции:

Добавление в конец

Удаление из начала

Можно реализовать с помощью:

Динамического массива

Списка

Двух стеков

Циклическая очередь в массиве

Реализация циклической очереди в массиве основана на хранении двух указателей: на первый элемент в очереди и на последний. Тогда удаление/вставка элементов будет связана со сдвигом указателя на первый/последний элемент по формуле newPtr = (ptr + 1)%size

Хранение очереди в списке

Для реализации на односвязном списке достаточно хранить указатель на первый и последний элемент, удаление/вставка производятся сменой указателей.

Представление очереди в виде двух стеков

Для реализации очереди на двух стеках достаточно вставлять элементы в один стек, а забирать из другого. В случае, если второй стек пуст, перемещать все элементы из первого во второй.

Время извлечения элемента

Для операции push возьмём 3 монеты: для самого push'a, резерв на pop из первого стека и резерв на pop из второго. Тогда учётная стоимость pop'a из второго стека будет равна 0, т.к. можно использовать оставшиеся монеты. Таким образом, каждая операция за $O(1)$

Поддержка минимума в очереди

Для поддержки минимума необходимо поддерживать минимум в каждом из стеков, тогда минимум в очереди - меньший минимум стеков.

2.5 Дек

Список элементов, в котором можно вставлять и удалять элементы с конца и начала.

Операции:

Вставка в конец

Извлечение из конца

Вставка в начало

Извлечение из начала

Можно реализовать с помощью:

Динамический массива

Двусвязного списка

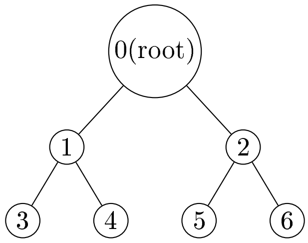
Хранение дека в массиве

Хранение аналогично очереди, только указатели могут сдвигаться как вперёд, так и назад (newPtr = (ptr - 1)%size)

Хранение дека в списке

Храним аналогично очереди, но используем двусвязный список.

2.6 Двоичная куча. АТД Очередь с приоритетом



Определение Двоичное подвешенное дерево, которое удовлетворяет свойствам:

Значение в вершине $\leq$ ($\geq$ для максимума в корне) значению в потомке

На i-ом слое 2^i вершин (кроме, возможно, последнего). Глубина кучи $\log n$

Последний слой заполняется слева направо

Удобно хранить бинарную кучу в массиве:

$a[0]$ - корень

$a[i] \to (a[2i+1], a[2i+2])$ - потомки

Операции Вставка за $O(\log n)$:

Вставляем в свободное место

Рекурсивно поднимаем элемент, если он меньше (больше) родителя (siftUp)

Удаление за $O(\log n)$:

Удаляем минимум

Вставляем последний элемент в корень

Рекурсивно меняем элемент с минимальным (максимальным) потомком (siftDown)

Очередь с приоритетом - абстрактный тип данных, который поддерживает следующие операции:

push - добавить в очередь элемент с определенным приоритетом

pop - удалить из очереди элемент с наивысшим приоритетом

top - посмотреть элемент с наивысшим приоритетом (необязательная операция)

2.7 Амортизационный анализ

Определение - метод подсчёта времени, требуемого для выполнения последовательности операций над структурой данных. При этом время усредняется по всем выполняемым операциям, и анализируется средняя производительность операций в худшем случае.

Средняя амортизационная стоимость

$$x = \frac{\sum_{i=0}^{n} t_i}{n}$$

t_i - время выполнения i-ой операции

Амортизированное (учетное) время добавления элемента в динамический массив
Стоимость операции add(item)
Для каждой операции add(item), для которой не требуется расширение массива, будем использовать три монетки: одна для самой вставки, две в резерв. Одну из резерва положим к вставленному элементу с индексом i, а вторую к элементу с индексом $i - \frac{n}{2}$, где n - размер массива
Когда массив заполнится, у каждого элемента будет одна монетка в резерве, которую мы сможем использовать для копирования в новый массив размером $2n$

Метод потенциалов Пусть Φ - потенциал
Φ_0 - изначальное значение
Φ_i - состояние после i-ой операции
Тогда стоимость i-й операции $a_i = t_i + \Phi_i - \Phi_{i-1}$
Пусть n - количество операций, m - размер структуры данных, тогда $a = O(f(n, m))$, если:

$$\forall i\colon a_i = O(f(n, m))$$
$$\forall i\colon \Phi_i = O(n(f(n, m)))$$

Доказательство

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n-1} \Phi_i - \sum_{i=1}^{n} \Phi_i}{n} = \frac{n \cdot O(f(n, m)) + \Phi_0 - \Phi_n}{n} = O(f(n, m))$$

Метод бух. учёта Пусть операция стоит некоторое число монет.
Тогда для каждой операции мы можем взять монет с запасом, чтобы хватило на следующие возможные операции (пример с динамическим массивом)
Если монет хватило на все операции, то наше предположение о стоимости каждой операции (то, что мы взяли с запасом) верно
(Излагаю в неформальном стиле)

2.8 Персистентный стек

Стек, который хранит все свои состояния
Операции:

Вставка: $push(i, x) \to j$, где i - конкретное состояние, x - элемент, который нужно вставить, j - новое состояние после вставки. При вставке создаётся новое состояние стека, где хранится вставленный элемент и ссылка на состяоние, в которое его вставили.

Удаление: $pop(i) \to j$. При удалении i - ого состояния идём с "родителю"i-ого состояния и подцепляем его копию к "деду"i-ого состояния.

В итоге имеем доступ к любой версии стека за $O(1)$ времени и $O(n)$ памяти.
Можно реализовать с помощью:

Массива

Списка

3 Сортировки и порядковые статистики

3.1 Задача сортировки, устойчивость, локальность

Coming soon

3.2 Квадратичные сортировки

Coming soon

3.3 Сортировка слиянием

Coming soon

3.4 Сортировка с помощью кучи

Coming soon

3.5 Слияние отсортированных массивов с помощью кучи

Coming soon

3.6 Нижняя оценка времени работы для сортировок сравнением

Coming soon

3.7 Быстрая сортировка

Принцип Есть массив $a[0...n-1]$ и некоторый подмассив $a[l..r]$

Разделим $a[l...r]$ на две части по опорному элементу q: $a[l...q]$ и $a[q+1...r]$ так что каждый элемент $a[l...q]$ меньше или равен $a[q]$, который не превышает любой элемент подмассива $a[q+1...r]$

Подмассивы $a[l...q]$ и $a[q+q...r]$ сортируются с помощью рекурсивного вызова быстрой сортировки

Схема Ломуто

Выбираем $q = a[r]$

```
q = a[r];
i = l;
for (int j = l; j < r - 1, j++) {
        if (a[j] < q) {
                swap(a[i], a[j]);
                i++;
        }
}
swap(a[i], a[r];
```

Схема Хоара

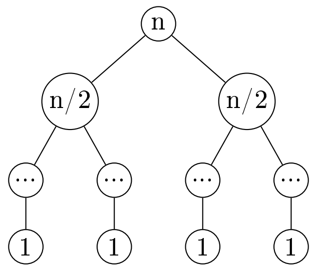
```
q = A[(r + l)/2];
i = l;
j = r;
while (i <= j) {
        while (a[i] < q) {
                i++;
        }

        while (a[j] > q) {
                j--;
        }
        if (i >= j) {
                break;
        }
        swap(a[i], a[j]);
        i++;
        j--;
}
```

Свойства

- Локальная
- Недетерминированная
- Неустойчивая

Асимптотика Дерево рекурсий



$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n)$$

Худший случай: $T(n) = T(n-1) + \Theta(n)$ (закинули один элемент от partitional)

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n} \Theta(k) = \Theta(\sum_{k=1}^{n} k) = \Theta(n^2)$$

Среднее время работы $O(n \log n)$

Доказательство Пусть X - суммарное количество операций сравнения с опорным элементом. Рассмотрим массив $[z_0...z_n]$, пусть $z_{ij} = [z_i...z_j]$
Опорный элемент дальше не участвует в сравнении $\Rightarrow$ сравнение каждой пары ≤ 1 раза

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}$$

где $X_{ij} = 1$, если произошло сравнение z_i и z_j, иначе 0
Применим мат. ожидание к каждой части

$$E[X] = E[\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} X_{ij}] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} E[X_{ij}] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Pr(z_i, z_j)$$

где $Pr(z_i, z_j)$ - вероятность того, что z_i сравнивается с z_j
Пусть все элементы различны
x - опорный $\Rightarrow (\forall z_i, z_j : z_i < x < z_j \Rightarrow z_i$ и z_j не будут сравниваться)
Если z_i - опорный, то он сравнивается с каждым элементом z_{ij} кроме себя
Значит z_i и z_j будут сравниваться, когда первым в z_{ij} будет выбран один из них
$X_{ij} = 1 \Leftrightarrow z_i$ - опорный или z_j - опорный

$$Pr(z_i, z_j) = Pr(z_i) + Pr(z_j) = \frac{1}{j - i + 1} + \frac{1}{j - i + 1} = \frac{2}{j - i + 1}$$

где $Pr(z_i)$ - вероятность того, что первым элементом был z_i, а $Pr(z_j)$ - вероятность того, что первым был z_j, тогда

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j - i + 1}$$

Пусть $k = j - i$, тогда

$$E[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k} = \sum_{i=1}^{n-1} O(\log n) = O(n \log n)$$

Улучшения быстрой сортировки

- Выбор медианы из первого, среднего и последнего элементов и отсечение рекурсии меньших подмассивов (с помощью сортировок вставками)
- Разделение на три части (применяют, если много одинаковых элементов)