[]

Содержание

1 Лекция 1: Графы

Определение 1.1. Граф — пара множеств (V, E), где V — множество вершин, E — множество ребер

Определение 1.2. Ребро — неупорядоченная пара двух различных вершин

Определение 1.3. Мультиграф — возможны кратные ребра (такие, которые соединяют одинаковые вершины)

Определение 1.4. Псевдограф — мультиграф с петлями

Определение 1.5. Ориентированный граф — в паре ребёр важен порядок

Определение 1.6. U и V смежные, если $\exists$ ребро, которое их соединяет

Определение 1.7. Вершина инцидента ребру, т.е. является концом ребра

Утверждение. Существуют матрицы смежности и матрицы инцидентности

Определение 1.8. $deg(V)$ (степень вершины) — количество соседей V в графе

Теорема 1.1 (О рукопожатиях)**.** *В графе $G = (V, E)$ число ребер $|E| = \frac{1}{2}\sum_{v \in k} deg(v)$*

Доказательство. Пусть x — количество единиц в матрице инцидентности.

В каждом столбце две единицы. С одной стороны $x = 2S$.

С другой стороны, в каждой строке ровно $deg(v_i)$ единиц.

Т.е.

$$\sum_{v \in V} deg(V) = X = 2S$$

■

Определение 1.9. Подграф $G' = (V'.E')$ графа $G = (V, E)$ — это граф, у которого $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$

Определение 1.10. Порожденный подграф $G' = (V', E')$ графа $G = (V, E)$ — это такой подграф G, что вместе с V' в G' входят все ребра из E, имеющие в качестве концов 2 вершины из V'

Определение 1.11. G' = (V', E') — остовный подграф $G = (V, E)$, если для него $V' = V$

Определение 1.12. Маршрут из V_1 в V_k в графе $G = (V, E)$ — это последовательность вида

$$v_1 e_1 v_2 e_2 \dots e_{k-1} v_k$$

Определение 1.13. Циклический маршрут — маршрут с $v_1 = v_k$

Определение 1.14. Путь — маршрут без повторных ребер и $v_1 \neq v_k$

Определение 1.15. Простой путь (цепь) — путь без повторных вершин

Определение 1.16. Простой цикл — цикл без пересечений по вершинам

Определение 1.17. Длина пути (цикла) — количество ребер в них

Утверждение. Длина цикла — C_k, длина цепи — P_k

Определение 1.18. Связный граф — граф, в котором $(\forall U, V \in V)\, \exists$ маршрут из U в V

Определение 1.19. Расстояние между U и V — длина кратчайшего пути из U в V

Определение 1.20. Компонента связности графа G — максимальный по включению связный подграф графа G

Определение 1.21. Дерево — связный граф без циклов

Утверждение. Если исходный граф не содержит циклов и связный, то он — дерево

Утверждение. Остовное дерево есть в любом связном графе

Утверждение. В дереве на n вершин ровно $n-1$ ребро

Утверждение. В дереве с хотя бы двумя вершинами существует хотя бы 2 листа

Определение 1.22. Мост — ребро, после удаления которого число компонент связности увеличивается

Определение 1.23. Точка сочленения — вершина, удаление которой приводит к увеличению количества компонент связности

Определение 1.24. Блок (компонента двусвязности) — максимальный по включению связный подграф графа без собственных точек сочленения.

Утверждение. Изолированная вершина является блоком

Утверждение. Ребро — блок $\Leftrightarrow$ ребро — мост

Утверждение. Мост не входит ни в какой цикл

Утверждение. Ребро-блок — не является мостом $\Rightarrow$ ребро содержится в цикле

Утверждение. Любые два различных блока либо не пересекаются, либо пересекаются ровно по одной вершине, причём эта вершина — точка сочленения графа

Доказательство. Пусть блоки пересекаются и есть две общие вершины. Тогда мы получим противоречие с условием максимальности блока. Т.е. объединение блоков связное, вершишны связи не являются точками сочленения, т.е. всё это блок.

Рассмотрим теперь одну вершину пересечения. Пусть это не точка сочленения, т.е. при её удалении из одного блока есть ещё путь в другой блок. Рассмотрим теперь два блока и этот путь, получаем связные граф без точек сочленения, получили блок и противоречие. ■

Утверждение. Если соединить блоки и соответствующие точки сочленения, то получим дерево