

# Повторяем к коллоквиуму

## Содержание

1	Билет 2	2
2	Билет 3	2
3	Билет 4	3
4	Билет 5	3
5	Билет 6	4
6	Билет 7	4
7	Билет 8	5
8	Билет 9	5
9	Билет 10	5
10	Билет 11	6
11	Билет 13	7
12	Билет 14	7
13	Билет 15	8
14	Билет 16	8
15	Билет 17	8
16	Билет 18	9
17	Билет 19	9

## 1 Билет 2

### Формулировка

$\mathbb{Q}$  - счётное,  $\mathbb{R}$  - бесконечное несчётное

### Идея доказательства

$\mathbb{Q}$  нумеруем "змейкой" для  $\mathbb{R}$  рассматриваем промежуток  $[0, 1)$ , предполагаем, что он счётный, нумеруем бесконечные десятичные дроби, потом формируем новую бесконечную дробь, которая не равно ни одной из предыдущих

### Дополнительные формулировки, теоремы

**Действительное число** - класс эквивалентности систем стягивающихся рациональных отрезков

**Отношение неравенства между действительными числами** -  $a > b := a + (-b) > 0$

**Свойство Архимеда**  $(\forall a \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) : n > a$  или же  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \exists n : na > b$

**Плотность множества рациональных чисел во множестве действительных**  $(\forall a \in \mathbb{R})(\forall b \in \mathbb{R}, a < b)(\exists c \in \mathbb{Q}) a < c < b$

**Операции с действительными числами** - определяем сложение и умножение через нового представителя (в виде системы бесконечных стягивающихся рациональных отрезков), а деление через умножение на обратное число

**Представление действительных чисел бесконечными десятичными дробями** - если число не является ни целым, ни конечной дробью, то возьмём интервал  $(a, a + 1)$ , куда попало число, потом будем последовательно делить интервал на 10 и рекурсивно искать цифры после запятой

## 2 Билет 3

### Формулировка

Любое ограниченное сверху (снизу) непустое множество  $E \subset \mathbb{R}$  имеет точную верхнюю (нижнюю) грань

### Идея доказательства

Выделим отдельно множество верхних граней и дополнение до множества действительных чисел. Из условия полноты найдется число между ними. Далее от противного доказываем, что  $s$  - верхняя грань и наименьшая верхняя грань

### Дополнительные формулировки, теоремы

**Условие полноты действительных чисел** - идея доказательства: строим систему стягивающихся отрезков (по сути, множество десятичных дробей) в число  $c$  (по лемме), потом проверяем условие от противного (найдем  $q \geq b$ , но  $q \leq c$ )

**Лемма про стягивающиеся отрезки** - доказываем от противного, с эквивалентной системой отрезков. Потом приходим к противоречию при  $p'_{n_0} - q_{n_0} > 0$

**Определение верхней (нижней) грани**

**Определение точной грани**

**Определение ограниченного множества**

## 3 Билет 4

### Формулировка

Сумма бесконечно малых последовательностей - бесконечно малая последовательность

Произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную - бесконечно малая последовательность

### Идея доказательства

Расписываем по определению бесконечно малые последовательности, ограниченную последовательность, да и всё

### Дополнительные формулировки, теоремы

**Бесконечно малая последовательность**

**Бесконечно большая последовательность**

**Обратная последовательность к бесконечно малой - бесконечно большая** - расписать по определению

## 4 Билет 5

### Формулировка

- Ограниченность сходящейся последовательности
- Отделимость от нуля
- Переход к пределу в неравенстве
- О двух силовиках

### Идея доказательства

1. Ограничиваем часть через предел, потом берём максимум/минимум из конечного числа элементов и ограничения из предела
2. Берём за  $\varepsilon$   $\frac{|l|}{2}$
3. От противного, за  $\varepsilon$  берём  $\frac{l_1 - l_2}{2}$
4. Расписываем по определению

### Дополнительные формулировки, теоремы

**Предел числовой последовательности**

**Единственность предела** - доказываем от противного, берём  $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$

## 5 Билет 6

### Формулировка

Неформально: пределы складываются/умножаются при сложении/умножении функций. Делятся, если  $(\forall n \in \mathbb{N})(y_n \neq 0)$  и предел не равен 0

### Идея доказательства

**Сложение** - расписываем по определению, берём  $\varepsilon = \frac{1}{2}$

**Умножение** - расписываем по определению, используем ограниченность одной из функций, подгоняем  $\varepsilon$

**Деление** - расписываем по определению, используем отделимость от нуля, подгоняем  $\varepsilon$

## 6 Билет 7

### Формулировка

Теорема о пределе ограниченной монотонной последовательности (Вейерштрасса)

Каждая неубывающая (невозрастающая) ограниченная сверху (снизу) последовательность имеет предел, причём её предел равен точной верхней (нижней) грани

### Идея доказательства

Рассматриваем частный случай, расписываем по определению ограниченность, точную грань и монотонность

### Дополнительные формулировки, теоремы

#### Монотонность последовательности

Любая монотонная последовательность имеет предел в  $\overline{\mathbb{R}}$  (расписать по определению)

## 7 Билет 8

### Формулировка

Последовательность  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$  сходится, её предел равен числу  $e$

### Идея доказательства

Рассматриваем последовательность со степенью  $n + 1$ . Доказываем, что ограничена снизу и убывает, значит по Вейерштрасса имеет предел

### Дополнительные формулировки, теоремы

#### Неравенство Бернулли

## 8 Билет 9

### Формулировка

Всякая последовательность вложенных отрезков имеет непустое пересечение

### Идея доказательства

Вейерштрасс для левой и правой границы, потом переход к пределу в неравенстве

### Дополнительные формулировки, теоремы

#### Последовательность вложенных отрезков

#### Последовательность вложенных стягивающихся отрезков

Последовательность вложенных стягивающихся отрезков стягивается к числу

## 9 Билет 10

### Формулировка

Каждая ограниченная последовательность имеет конечный верхний и нижний предел

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

- верхний

$$l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

- нижний

Справедливы следующие утверждения:

$$1.1) (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)x_n < L + \epsilon \wedge (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N)x_n > L - \epsilon$$

$$1.2) (\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n > N)x_n > l - \epsilon \wedge (\forall \epsilon > 0)(\forall N \in \mathbb{N})(\exists n > N)x_n < l + \epsilon$$

$$2.1) L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n, x_{n+1}, \dots$$

$$2.2) l = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n, x_{n+1}, \dots$$

### Идея доказательства

Докажем для  $L$  (для  $l$  аналогично)

Рассмотрим вспомогательную последовательность супремумов  $s_n$

Сначала докажем существование её предела по теореме Вейерштрасса

Распишем по определению предел, и докажем 1.1.1

Возьмём произвольный член, представим его как верхнюю грань, распишем по определению точную верхнюю грань и докажем 1.1.2

Докажем, что  $L$  - частичный предел, для этого, используя 1.1.1 и 1.1.2 будем строить такую подпоследовательность, чтобы она стремилась к  $L$  (делим  $\epsilon$  каждый раз)

Докажем, что  $L$  - наибольший частичный предел, возьмём другой частичный предел для  $x_{m_i}$ , где  $m_i$  - возрастающая последовательность, тогда напомним 1.1.1 для обеих последовательностей, потом предельный переход и готово

### Дополнительные формулировки, теоремы

**Подпоследовательность**

**Частичный предел**

## 10 Билет 11

### Формулировка

Из каждой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность

### Идея доказательства

Будем делить отрезок на два, а потом рекурсивно делить половину, в которой бесконечно много элементов, построим систему стягивающихся отрезков, который стягиваются в  $c$ . Построим подпоследовательность, выбирая элементы из этих половин.

## Дополнительные формулировки, теоремы

### Подпоследовательность

## 11 Билет 13

### Формулировка

Числовая последовательность сходится  $\Leftrightarrow$  она фундаментальна

### Идея доказательства

$\Rightarrow$  Расписываем предел по определению для  $x_{n+p}$  и  $x_n$

$\Leftarrow$  Доказываем, что последовательность ограниченная из определения фундаментальности с фиксированным  $\epsilon$  Выделяем по Больцано-Вейерштрасса сходящуюся подпоследовательность, потом расписываем по определению её предел и фундаментальность нашей последовательности, дальше неравенство треугольника

## Дополнительные формулировки, теоремы

### Фундаментальная последовательность

## 12 Билет 14

### Формулировка

Пусть функция  $f$  определена в некоторой  $U_{\delta_0}(a)$ ,  $a \in \overline{\mathbb{R}} \cup \infty$ , тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l (l \in \overline{\mathbb{R}} \cup \infty)$$

, означает: определение по Коши, определение по Гейне. Определения эквивалентны

### Идея доказательства

$K \Rightarrow \Gamma$

Берём произвольную последовательность Гейне, пишем предел по определению,  $x$  попал в  $U_{\delta_0}(a)$ , из Коши берём ту  $\delta$ , которая нашлась для произвольного  $\epsilon$

$\Gamma \Rightarrow K$

Пишем отрицание Коши, фиксируем  $\epsilon$ , строим по нему последовательность Гейне, по Гейне пишем предел, но замечаем противоречие, т.к. каждое значение функции не попадает в  $U_\epsilon$  (рассматриваем  $a$  конечное и бесконечное)

## Дополнительные формулировки, теоремы

### Проколота окрестность

### Свойства пределов (как у последовательностей)

### Левосторонний, правосторонний предел

### Арифметические операции

## 13 Билет 15

### Формулировка

Сходится  $\Leftrightarrow$  фундаментальна

### Идея доказательства

$\Rightarrow$  Расписываем по определению предел для двух точек из окрестности  
 $\Leftarrow$  Пишем по определению предел последовательности Гейне, распишем фундаментальность через последовательность Гейне, по Коши получим предел. Докажем, что для любой последовательности Гейне тот же предел от противного (создав новую последовательность Гейне)

## 14 Билет 16

### Формулировка

2 случая монотонности, для каждого 2 односторонних предела

### Идея доказательства

Докажем для частного случая - левосторонний предел для невозрастающей функции  
Рассматриваем случай, когда предел равен  $-\infty$ , расписываем это по определению, фиксируем  $x$ , расписываем левосторонний предел по Коши, подбираем  $\delta$  такой, чтобы воспользоваться монотонностью  
Если предел больше  $-\infty$ , расписываем точную нижнюю грань через двойной неравенство, расписываем левосторонний предел по Коши, подбираем  $\delta$  такой, чтобы воспользоваться монотонностью

### Дополнительные формулировки, теоремы

Существование одностороннего предела по Коши, Гейне  
Разные виды монотонности

## 15 Билет 17

### Формулировка

Если

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\pm 0)} f(x) = a$$

и  $g$  непрерывна в  $a$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0(\pm 0)} g(f(x)) = g(a)$$



### Идея доказательства

Распишем по Гейне определение предела, расписываем по определению непрерывности  $g$  в точке  $a$

### Дополнительные формулировки, теоремы

Определение непрерывности

Непрерывность слева

Непрерывности справа

Точка разрыва

Точка разрыва первого рода

Точка разрыва второго рода

Точка устранимого разрыва

Точка бесконечного разрыва

Непрерывность по Гейне Коши

## 16 Билет 18

### Формулировка

Если  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ , то  $f$  ограничена на  $[a, b]$

### Идея доказательства

От противного, расписываем неограниченность, строим последовательность, исходя из ограниченности, выделяем сходящуюся подпоследовательность, противоречие по непрерывности

### Дополнительные формулировки, теоремы

Непрерывность на множестве

## 17 Билет 19

### Формулировка

Если  $f$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$ , то  $(\exists x', x'' \in [a, b]), f(x') = \sup_{x \in [a, b]} f(x), f(x'') = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$

### Идея доказательства

Докажем для  $\sup$ , распишем по определению, строим последовательность, исходя из ограниченности, выделяем сходящуюся подпоследовательность, противоречие по непрерывности

## 18 Билет 20

### Формулировка

Теорема Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной функции. Пусть  $f$  непрерывна на  $[a, b]$ ,  $\forall c = f(x_1) < d = f(x_2), x_1, x_2 \in [a, b] \forall e \in (c, d) (\exists \gamma \in [a, b] f(\gamma) = e$

### Идея доказательства

Р. частный случай  $c < e = 0 < d$ . Рассматриваем отрезок  $[a_1, b_1], f(a_1) * g(b_1) < 0$ , делим пополам, берём половину с разными знаками, получаем систему стягивающихся отрезков, по принципу Кантора получим в пересечении какое-то число, которое равно пределу последовательностей правых и левых границ. Далее по определению непрерывность и предельный переход