IDZ\_3

Nikita

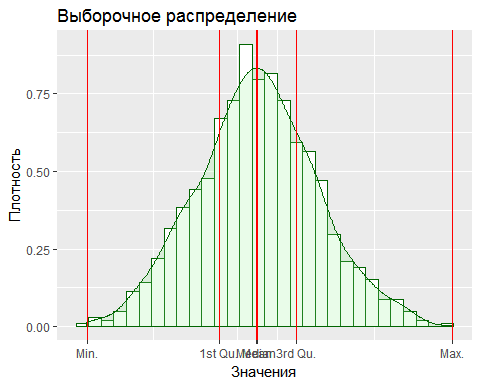
23.03.17

# Построение доверительных интервалов.

## Доверительные интервалы для параметров нормального распределения.

Постройте выборку длины 1000 из нормального распределения N (μ = -2,σ = 0.25) (параметры выбираете самостоятельно) Для различных уровней значимости (a = 0.25, a = 0.1, a = 0.05, a = 0.01)

## Min. 1st Qu. Median Mean 3rd Qu. Max.   
## -3.40 -2.31 -2.00 -1.99 -1.67 -0.38



#### Определение

Доверительный интервал() - Интервал, построенный с помощью случайной выборки из распределения с неизвестным параметром, такой, что он содержит данный параметр с заданной вероятностью.

Если многократно повторять эксперимент, для каждой выборки рассчитывать свой доверительный интервал, то в случаев истинное среднее будет находиться внутри доверительного интервала.

т.е. с вероятностью мы уверены, что интервал у выборки включает среднее ГС.

Значения квантилей:

## qnorm qt  
## 0.25 1.15 1.15  
## 0.1 1.64 1.65  
## 0.05 1.96 1.96  
## 0.01 2.58 2.58

Чем меньше уровень значимости, тем шире интервал.

### a. Считая дисперсию известной, постройте доверительный интервал для мат. ожидания.

Пусть — независимая выборка из нормального распределения, где — известная дисперсия. Определим произвольное и построим доверительный интервал для неизвестного среднего .

**Утверждение.** Случайная величина имеет стандартное нормальное распределение . Пусть — -квантиль стандартного нормального распределения. Тогда в силу симметрии последнего имеем:

После подстановки выражения для и несложных алгебраических преобразований получаем:

Интервалы:

## Left Right  
## 0.25 -2.01 -1.97  
## 0.1 -2.02 -1.97  
## 0.05 -2.02 -1.96  
## 0.01 -2.03 -1.95

### b. Считая дисперсию неизвестной, постройте доверительный интервал для мат. ожидания.

Пусть — независимая выборка из нормального распределения, где — неизвестные константы. Построим доверительный интервал для неизвестного среднего .

**Утверждение.** Случайная величина где — несмещённое выборочное стандартное отклонение, имеет распределение Стьюдента с степенями свободы . Пусть - квантили распределения Стьюдента. Тогда в силу симметрии последнего имеем:

После подстановки выражения для и несложных алгебраических преобразований получаем:

Интервалы:

## Left Right  
## 0.25 -2.01 -1.97  
## 0.1 -2.02 -1.97  
## 0.05 -2.02 -1.96  
## 0.01 -2.03 -1.95

### c. Постройте доверительный интервал для дисперсии.

Пусть — независимая выборка из нормального распределения, где , — неизвестные константы. Построим доверительный интервал для неизвестной дисперсии .

Теорема Фишера для нормальных выборок. Случайная величина

где — несмещённая выборочная дисперсия, имеет распределение . Тогда имеем:

После подстановки выражения для и несложных алгебраических преобразований получаем:

## Left Right  
## 0.25 0.238 0.264  
## 0.1 0.233 0.270  
## 0.05 0.230 0.274  
## 0.01 0.224 0.282

### d. Считая дисперсию s известной, постройте асимптотический доверительный интервал для a на базе ОМП. Сравните с результатом пункта a).

Если эксперимент регулярный, то ОМП параметра является

асимптотически нормальной и состоятельной, то есть , где — информация Фишера для параметра по наблюдениям .

Можно выбрать квантили , решая уравнение , где — функция распределения стандартного нормального закона.

В этом случае, в общем виде для параметра доверительный интервал уровня будет выглядеть так:

Информация Фишера обладает свойством: если имеется выборка из

элементов, где — информация Фишера для одного -го элемента выборки,

то . На основании этого свойства и вида доверительного интервала

построим асимптотический доверительный интервал для среднего:

## Left Right  
## 0.25 -2.01 -1.97  
## 0.1 -2.02 -1.97  
## 0.05 -2.02 -1.96  
## 0.01 -2.03 -1.95

### e. Считая мат. ожид. а известным, постройте асимптотический доверительный интервал для s на базе ОМП. Сравните с результатом пункта c).

Если эксперимент регулярный, то ОМП параметра является

асимптотически нормальной и состоятельной, то есть , где — информация Фишера для параметра по наблюдениям .

Можно выбрать квантили , решая уравнение , где — функция распределения стандартного нормального закона.

В этом случае, в общем виде для параметра доверительный интервал уровня будет выглядеть так:

Информация Фишера обладает свойством: если имеется выборка из

элементов, где — информация Фишера для одного -го элемента выборки,

то . На основании этого свойства и вида доверительного интервала

построим асимптотический доверительный интервал для дисперсии:

$$[s^2−\sqrt \frac {2}{n} s^2 x\_\alpha, s^2+\sqrt \frac {2}{n} s^2 x\_\alpha]$$

## Left Right  
## 0.25 0.233 0.259  
## 0.1 0.228 0.264  
## 0.05 0.224 0.267  
## 0.01 0.218 0.274

### Сравнение E c C

## E.minus.C  
## 0.25 0.00474  
## 0.1 0.00507  
## 0.05 0.00536  
## 0.01 0.00609

Как видим значимых отличий нет.

### Сравнение D c A

## D.minus.A  
## 0.25 0  
## 0.1 0  
## 0.05 0  
## 0.01 0

Как видим значимых отличий нет.

## Асимптотические доверительные интервалы на базе ОМП

На основании оценок, полученных в предыдущем ДЗ (задания 2 и 3), постройте асимптотические доверительные интервалы уровней значимости(a = 0.25, a = 0.1, a = 0.05, a = 0.01).