Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика

Учебная практика 3 (научно-исследовательская работа) (семестр 6)

«Тензорный анализ сингулярного спектра»

Выполнил:
Хромов Никита Андреевич
20.Б04-мм

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент
Голяндина Н. Э.

Санкт-Петербург
2023

Оглавление

1. Введение

Singular spectrum analysis (SSA) [1] является популярным методом анализа временных рядов. Этот метод используется, в частности, для выделения сигнала и выделения тренда и периодических компонент из временного ряда. Метод SSA основан на сингулярном разложении особой траекторной матрицы построенной по временному ряду

В работах [2, 3] предлагается обобщение метода SSA, Tensor SSA, который основан на некотором тензорном разложении особого траекторного тензора, построенного по временному ряду. Причём, в этих работах утверждается о преимуществах Tensor SSA над обычным SSA.

Существует множество видов тензорных разложений, например High-Order Singular Value Decomposition (HOSVD) [4], Canonical Polyadic Decomposition (CPD) [5, 6], Tucker decomposition [7]. В частности, в работах [2, 3] используется разложение CPD.

Была поставлена задача изучить различные варианты тензорных разложений, реализовать метод Tensor SSA, выбрав некоторые из них и сравнить с методом Basic SSA по точности выделения сигнала и компонент сигнала. В качестве первого метода разложения был выбран метод HOSVD, который является обобщением метода SVD для матриц.

2. HOSVD и его свойства

Ключевым этапом в алгоритме Tensor SSA является применение тензорного разложения HOSVD [4] к некоторому тензору. Приведём определение этого разложения и некоторые его свойства.

Определение 2.1 (Произведение тензора и матрицы по измерению)**.** Пусть $\mathcal{A}$ — тензор размерности $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$, $\mathbf{U}$ — матрица размерности $J_n \times I_n$, тогда произведением тензора $\mathcal{A}$ и матрицы $\mathbf{U}$ по измерению n $(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})$ называется тензор размерности $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \ldots \times I_M$, который считается по формуле

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} j_n i_{n+1} \ldots i_M} = \sum_{i_n=1}^{I_n} a_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n i_{n+1} \ldots i_M} u_{j_n i_n}.$$

Теорема 1 (Сингулярное разложение порядка M)**.** *Любой комплекснозначный тензор $\mathcal{A}$ размерности $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$ может быть представлен в виде произведения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \ldots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \tag{1}$$

в котором

1. $\mathbf{U}^{(n)} = \left[U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \ldots, U_{I_n}^{(n)}\right]$ *— унитарная матрица,*
2. $\mathcal{Z}$ *— комплекснозначный тензор размерности $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$, в котором каждый подтензор $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$, полученный фиксированием индекса $i_n = \alpha$ удовлетворяет следующим свойствам*

   а. *полная ортогональность: подтензоры $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ и $\mathcal{Z}_{i_n=\beta}$ ортогональны для всех возможных значений n, α, $\beta : \alpha \neq \beta$:*

   $$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \qquad \alpha \neq \beta,$$

   б. *упорядоченность: подтензоры расположены в порядке убывания их норм Фробениуса:*

   $$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geqslant \ldots \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\| \tag{2}$$

   для всех $n \in \overline{1:M}$.

Определение 2.2. Разложение вида (1) будем называть сингулярным разложением тензора $\mathcal{A}$ порядка M или HOSVD тензора $\mathcal{A}$.

Определение 2.3. Обозначим $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|$ и будем называть $\sigma_i^{(n)}$ i-м сингулярным числом тензора $\mathcal{A}$ по измерению n.

Определение 2.4. Векторы $U_i^{(n)}$ будем называть i-м сингулярным вектором тензора $\mathcal{A}$ по измерению n.

Замечание. Представление (1) можно записать в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1,i_2,\dots,i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)}. \tag{3}$$

Такое представление удобнее для описания алгоритма Tensor SSA.

2.1. Свойства HOSVD

Многие свойства метода SSA являются следствиями свойств SVD. В свою очередь, многие свойства HOSVD являются аналогами свойств SVD. Таким образом, аналогичность свойств SSA и Tensor SSA может быть выведена из аналогичности некоторых свойств SVD и HOSVD.

Утверждение 2.1. *Вычисление* HOSVD *тензора $\mathcal{A}$ с M размерностями сводится к вычислению* SVD *на M матрицах $\mathbf{A}_{(n)}$, которые вычисляются развёрткой тензора по n-му измерению.*

Другими словами, если $\mathcal{A}$ — тензор размерности $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$, то его развёртка по n-му измерению — это матрица $\mathbf{A}_{(n)}$ размерности $I_n \times I_{n+1}I_{n+2}\dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}$, в которой элемент $a_{i_1 i_2 \dots i_M}$ тензора содержится в строке i_n и столбце с номером равным

$$(i_{n+1}-1)I_{n+2}I_{n+3}\dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1} + (i_{n+2}-1)I_{n+3}I_{n+4}\dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1} + \dots$$
$$+ (i_M-1)I_1 I_2 \dots I_{n-1} + (i_1-1)I_2 I_3 \dots I_{n-1} + (i_2-1)I_3 I_4 \dots I_{n-1} + \dots + i_{n-1}.$$

К каждой из полученных матриц применяется SVD, в результате чего получаются M матриц $\mathbf{U}^{(n)}$, составленных из левых сингулярных векторов соответствующих развёрток. Затем находится тензор сингулярных чисел

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{U}^{(1)^{\mathrm{H}}} \times_2 \mathbf{U}^{(2)^{\mathrm{H}}} \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)^{\mathrm{H}}}.$$

В результате получается искомое разложение

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}.$$

Из-за этой связи HOSVD со стандартным матричным SVD для многих свойств SVD существуют аналогичные свойства HOSVD.

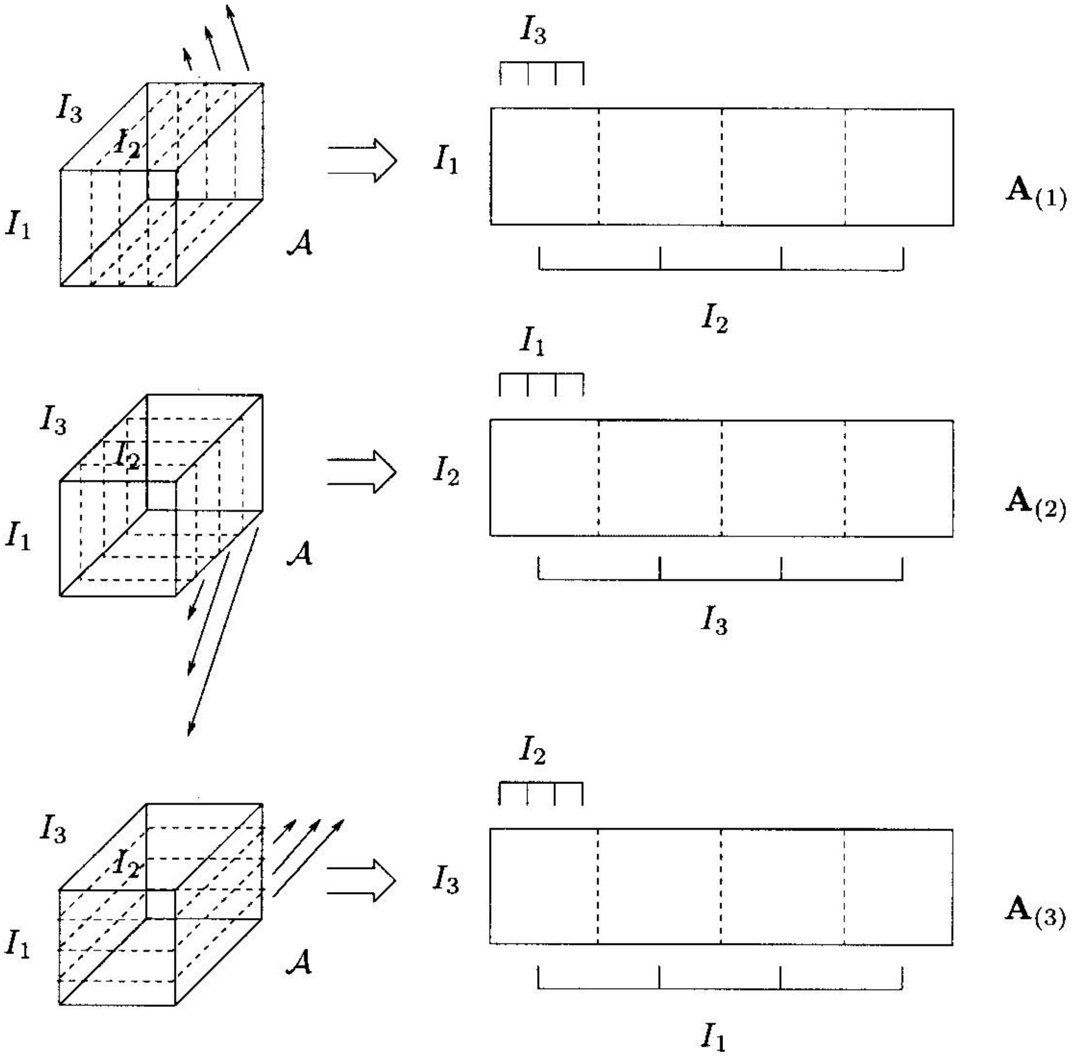

Рис. 1. Развёртка тензора $\mathcal{A}$ размерности $I_1 \times I_2 \times I_3$ в матрицы $\mathbf{A}_{(1)}$, $\mathbf{A}_{(2)}$, $\mathbf{A}_{(3)}$ размерностей $I_1 \times (I_2 I_3)$, $I_2 \times (I_3 I_1)$, $I_3 \times (I_1 I_2)$ соответственно

Свойство 2.1 (Единственность)**.**

1. Все сингулярные числа по каждому измерению определяются однозначно.

2. Если сингулярные числа по измерению n различны, то сингулярные векторы по измерению n определены в точности до умножения на коэффициент единичной нормы. Если $U_\alpha^{(n)}$ умножается на $e^{j\theta}$, то $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ должен быть умножен на обратный коэффициент $e^{-j\theta}$.

Сингулярные векторы по измерению n, соответствующие одному и тому же сингулярному числу по измерению n, могут быть заменены любой унитарной линейной комбинацией. Соответствующие подтензоры $\{\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}\}$ должны быть пересчитаны обратным образом. Формально $\mathbf{U}^{(n)}$ можно заменить на $\mathbf{U}^{(n)}\mathbf{Q}$, где $\mathbf{Q}$ — блочно-диагональная матрица, состоящая из унитарных блоков, в которой блочное разбиение соответствует разбиению $\mathbf{U}^{(n)}$ на наборы сингулярных векторов по измерению n, соответствующих одинаковым сингулярным значениям по измерению n. При этом тензор $\mathscr{Z}$ должен быть заменён на $\mathscr{Z} \times_n \mathbf{Q}^{\mathrm{H}}$.

В случае вещественнозначных тензоров единственность имеется в точности до знака, что соответствует умножению на унитарную матрицу.

Свойство 2.2 (Обобщение)**.** HOSVD тензора второго порядка сводится к его матричному SVD.

Это свойство означает, что результат применения HOSVD к тензору с двумя измерениями, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, в точности до унитарных преобразований сингулярных векторов и матрицы сингулярных значений.

Перед формулировкой следующих свойств необходимо ввести несколько определений.

Определение 2.5 (n-ранг)**.** n-рангом тензора $\mathcal{A}$ называется размерность векторного пространства, порождённого векторами измерения n этого тензора. Обозначается $R_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$.

Замечание. В отличие от матричного случая, n-ранги тензора порядка выше 2 могут в общем случае отличаться.

Определение 2.6 (Тензорный ранг)**.**

1. Говорят, что тензор $\mathcal{A}$ размерности $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$ имеет тензорный ранг равный 1, если он представим в виде

$$\mathcal{A} = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_M,$$

   где $a_k \in \mathbb{C}^{I_k}$, а $\circ$ обозначает внешнее произведение.

2. Говорят, что тензор $\mathcal{A}$ имеет ранг R, если он представим в виде линейной комбинации R тензоров ранга 1, и такое R минимальное. Обозначение: $R = \mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

Замечание. В общем случае ранг тензора $\mathcal{A}$ не равен его n-рангам, даже если они все равны между собой. Более того, всегда справедливо неравенство $\mathrm{rank}_n(\mathcal{A}) \leqslant \mathrm{rank}(\mathcal{A})$.

Свойство 2.3 (Связь n-ранга тензора и ранга его развёртки по измерению n)**.** Векторы измерения n тензора $\mathcal{A}$ являются столбцами его развёртки по измерению n и выполняется равенство

$$\operatorname{rank}_n(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathbf{A}_{(n)}).$$

Свойство 2.4 (Связь n-ранга тензора и его HOSVD)**.** Пусть имеется HOSVD тензора $\mathcal{A}$ размерности $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \ldots \times_M \mathbf{U}^{(M)},$$

тогда, по определению, тензор $\mathcal{Z}$ удовлетворяет свойству упорядоченности сингулярных чисел

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geqslant \ldots \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех $n \in \overline{1:M}$. Обозначим r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$. Тогда

$$\operatorname{rank}_n(\mathcal{A}) = r_n. \tag{4}$$

Свойство 2.5 (Норма)**.** Пусть имеется HOSVD тензора $\mathcal{A}$, представленное в виде (1), и пусть $R_n = \operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$, $n \in \overline{1:M}$. Тогда справедливо равенство

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \ldots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2 = \\ = \|\mathcal{Z}\|^2.$$

Определение 2.7 (Ориентированная энергия)**.** Ориентированной по измерению n энергией тензора $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ в направлении вектора $X \in \mathbb{C}^{I_n}$ единичной нормы называют выражение

$$\mathrm{OE}_n(X, \mathcal{A}) = \|X^{\mathrm{H}} \mathbf{A}_{(n)}\|^2.$$

Свойство 2.6 (Об ориентированной энергии)**.** Направления экстремальной ориентированной энергии по измерению n соответствуют сингулярным векторам по измерению n, причем значение экстремальной энергии равно соответствующему квадрату сингулярного значения по измерению n.

Это означает, что векторы тензора $\mathcal{A}$ по измерению n в основном содержат вклады в направлении $U_1^{(n)}$; на это направление приходится $\sigma_1^{(n)^2}$ энергии по отношению к общему количеству энергии в тензоре. Затем ориентированная энергия по измерению n достигает экстремума в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U(n)_1$, с величиной $\sigma_2^{(n)^2}$, и так далее.

Свойство 2.7 (Приближение)**.** Пусть имеется HOSVD тензора $\mathcal{A}$, представленное в виде (1), и пусть $R_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$. Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma^{(n)}_{I'_n+1}, \sigma^{(n)}_{I'_n+2}, \ldots, \sigma^{(n)}_{R_n}$ для заданных значений I'_n, $n \in \overline{1:M}$, то есть заменяя нулями соответствующие части тензора $\mathcal{Z}$. Тогда верно

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leqslant \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} \left(\sigma^{(1)}_{i_1}\right)^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} \left(\sigma^{(2)}_{i_2}\right)^2 + \ldots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} \left(\sigma^{(M)}_{i_M}\right)^2. \tag{5}$$

Это свойство является эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Однако для тензоров ситуация совершенно иная. Отбрасывая наименьшие сингулярные значения измерения n, мы получаем тензор $\hat{\mathcal{A}}$ с рангом столбцов равным I'_1, рангом строк равным I'_2 и т.д. Но этот тензор в общем случае не является наилучшим приближением при заданных ограничениях на ранги измерений. Тем не менее, предположение об упорядочении (2) подразумевает, что «энергия» $\mathcal{A}$ в основном сосредоточена в части, соответствующей малым значениям $i_1, i_2, \ldots, i_M$. Следовательно, если $\sigma^{(n)}_{I'_n} \gg \sigma^{(n)}_{I'_n+1}$ (например, если $I'_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$, то меньшие сингулярные значения по измерению n не существенны), то $\hat{\mathcal{A}}$ всё ещё можно считать хорошим приближением $\mathcal{A}$. Ошибка ограничена выражением (5).

Все утверждения выше и их доказательства приведены в статье [4].

3. Описание метода Tensor SSA

Пусть дан временной ряд X длины N

$$\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N).$$

Определение 3.1. (Траекторный тензор ряда) Траекторным тензором ряда X с параметрами $I, L : 1 \leqslant I, L \leqslant N$, $I + L \leqslant N + 1$ будем называть тензор $\mathcal{X}$ размерности $I \times L \times J = N - I - L + 2$, элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{i,l,j} = x_{i+l+j-2} \qquad i \in \overline{1:I},\ l \in \overline{1:L},\ j \in \overline{1:J}.$$

Слои траекторного тензора ряда X с параметрами I, L имеют следующий вид

$$\mathcal{X}_{,,j} = \begin{pmatrix} x_j & x_{j+1} & \ldots & x_{j+L-1} \\ x_{j+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{j+I-1} & \ldots & \ldots & x_{j+I+L-2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{X}_{,l,} = \begin{pmatrix} x_l & x_{l+1} & \dots & x_{l+J-1} \\ x_{l+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{l+I-1} & \dots & \dots & x_{l+I+J-2} \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{X}_{i,,} = \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} & \dots & x_{i+J-1} \\ x_{i+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{i+L-1} & \dots & \dots & x_{i+L+J-2} \end{pmatrix}.$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд X и параметры $I, L : 1 \leqslant I, L \leqslant N$, $I + L \leqslant N + 1$. В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма. Алгоритм Tensor SSA для отделения различных компонент ряда друг от друга заключается в проведении следующих четырёх шагов.

1. Выбор параметров I, L и построение по ним траекторного тензора $\mathcal{X}$;

2. Проведение HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$, получение его представления в виде (3)
$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} \mathcal{Z}_{i,l,j}\mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}; \tag{6}$$

3. Группировка: разбиение множества индексов $\mathfrak{S} = \{1, 2 \dots, \min(I, L, J)\}$ по смыслу на непересекающиеся множества
$$\mathfrak{S} = \bigcup_{k=1}^{m} \mathfrak{S}_k \qquad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset,\ k \neq l,$$
и построение тензоров
$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i\in\mathfrak{S}_k}\sum_{l\in\mathfrak{S}_k}\sum_{j\in\mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{i,l,j}\mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$$

4. Восстановление рядов $\mathsf{X}^{(k)} = \mathsf{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ по тензорам $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $i + l + j = \mathrm{const}$:
$$f_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,l,j)\in\mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{i,l,j}^{(\mathfrak{S}_k)}, \qquad n \in \overline{1:N},$$
$$\mathfrak{M}_n = \{(i,\, l,\, j) | 1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant l \leqslant L,\ 1 \leqslant j \leqslant J,\ i + l + j - 2 = n\}.$$

Результатом алгоритма является набор временных рядов $\mathsf{X}^{(1)}, \ldots, \mathsf{X}^{(m)}$ такой, что

$$\mathsf{X} = \sum_{k=1}^{m} \mathsf{X}^{(k)}.$$

Алгоритм Tensor SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньшего, заданного пользователем, ранга, и может быть проведён двумя различными способами.

Первый способ заключается в приближении траекторного тензора путём усечения его HOSVD. Благодаря свойствам 2.7, 2.6 такое приближение можно считать достаточно точным, хоть оно и не оптимально. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом для отделения компонент ряда, поэтому опишем его, начиная с третьего шага.

3. Третий шаг заключается в выборе ранга сигнала r и усечении тензора сингулярных значений по этому рангу. Другими словами, имея ранг сигнала r и разложение траекторного тензора $\mathcal{X}$ в виде (6), в тензоре $\mathcal{Z}$ заменим матрицы-слои по каждому измерению с номерами $k > r$ на нулевые, и по полученному тензору $\hat{\mathcal{Z}}$ построим приближение траекторного тензора $\hat{\mathcal{X}}$.

4. На четвёртом шаге, используя усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \mathrm{const}$ получим ряд X. Этот ряд и будем считать сигналом.

Второй способ использует метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями n-рангов — High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [8]. При заданных тензоре $\mathcal{A}$ и наборе n-рангов $(R_1, R_2, \ldots, R_M)$, результатом метода будет тензор $\hat{\mathcal{A}}$, n-ранги которого совпадают с набором $(R_1, R_2, \ldots, R_M)$, и который решает задачу минимизации

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\| \to \min,$$

где минимум берётся по классу тензоров с заданными n-рангами. Исходя из определения, результат метода HOOI является оптимальным, в связи с чем его можно использовать для приближения траекторного тензора ряда.

Приведём вторую реализацию алгоритма Tensor SSA для отделения сигнала от шума, используя HOOI. Первый шаг алгоритма совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.

2. На втором шаге выбирается ранг сигнала r и к полученному ранее траекторному тензору $\mathcal{X}$ применяется HOOI с набором n-рангов (r, r, r). В результате получаем оптимальное приближение траекторного тензора $\mathcal{X}$ тензором $\hat{\mathcal{X}}$ со значениями n-рангов равными r.

3. Третий шаг — восстановление ряда по тензору $\hat{\mathcal{X}}$ совпадает с четвёртым шагом в первом варианте алгоритма Tensor SSA для выделения в ряде сигнала из шума.

4. Свойства Tensor SSA

В силу аналогичности свойств SVD и HOSVD, многие определения и свойства из теории SSA [1] можно перенести на тензорный случай.

4.1. Разделимость рядов в терминах Tensor SSA

Утверждение 4.1. $\tilde{\mathsf{X}} = (\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_N)$, $\hat{\mathsf{X}} = (\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_N)$ *— временные ряды длины N. Пусть ряд X является суммой этих рядов. Траекторные тензоры рядов равны соответственно: $\tilde{\mathcal{X}}$, $\hat{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X}$. Тогда существует сингулярное разложение тензора $\mathcal{X}$ с параметрами I, L, которое можно представить в виде суммы сингулярных разложений тензоров $\tilde{\mathcal{X}}$ и $\hat{\mathcal{X}}$ с теми же параметрами в том и только том случае, когда взаимно ортогональны все подряды рядов $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$ длины I, L, $J = N - I - L + 2$, то есть*

1. $\tilde{f}_k \hat{f}_m + \ldots + \tilde{f}_{k+I-1} \hat{f}_{m+I-1} = 0 \qquad \forall k, m \in \overline{1 : N - I + 1}$,
2. $\tilde{f}_k \hat{f}_m + \ldots + \tilde{f}_{k+L-1} \hat{f}_{m+L-1} = 0 \qquad \forall k, m \in \overline{1 : N - L + 1}$,
3. $\tilde{f}_k \hat{f}_m + \ldots + \tilde{f}_{k+J-1} \hat{f}_{m+J-1} = 0 \qquad \forall k, m \in \overline{1 : N - J + 1}$.

Доказательство. Сингулярные разложения тензоров $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{X}}$ могут быть представлены в виде следующих сумм:

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)},$$
$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \tilde{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \tilde{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_j^{(3)},$$
$$\hat{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \hat{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \hat{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \hat{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \hat{\mathbf{U}}_j^{(3)}.$$

Сумма $\mathcal{X} = \sum_i \sum_l \sum_j \tilde{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \tilde{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_j^{(3)} + \sum_i \sum_l \sum_j \hat{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \hat{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \hat{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \hat{\mathbf{U}}_j^{(3)}$ является сингулярным разложением $\mathcal{X}$ в том и только том случае, когда пары векторов $\tilde{\mathbf{U}}_k^{(\sigma)}$, $\hat{\mathbf{U}}_m^{(\sigma)}$ взаимно ортогональны при всех возможных значениях σ, k, m. Это равносильно ортогональности линейных пространств $\mathcal{L}_1^{(\sigma)}$, $\mathcal{L}_2^{(\sigma)}$, построенных на векторах $\tilde{\mathbf{U}}_k^{(\sigma)}$ и $\hat{\mathbf{U}}_m^{(\sigma)}$ соответственно.

Рассмотрим пространства $\mathcal{L}_1^{(1)}$, $\mathcal{L}_2^{(1)}$: это пространства первых измерений тензоров $\tilde{\mathcal{X}}$ и $\hat{\mathcal{X}}$, то есть пространства построенные на векторах вида $\tilde{\mathcal{X}}_{,l,j}$ и $\hat{\mathcal{X}}_{,l,j}$ соответственно. Вспоминая вид тензоров $\tilde{\mathcal{X}}$ и $\hat{\mathcal{X}}$ получаем, что условие ортогональности этих линейных пространств равносильно первому условию из формулировки утверждения.

Оставшиеся два условия получаются аналогично из условий ортогональности оставшихся двух пар линейных пространств. $\square$

Из утверждения 4.1 следует, что понятие слабой разделимости ряда из теории SSA применимо и к тензорному случаю.

Следствие 4.1.1. *Если временные ряды* $\tilde{\mathsf{X}}$ *и* $\hat{\mathsf{X}}$ *длины* N *слабо* I*- и* L*-разделимы в смысле теории* SSA*, то существует такое* HOSVD *траекторного тензора* $\mathcal{X}$ *ряда* $\mathsf{X} = \tilde{\mathsf{X}} + \hat{\mathsf{X}}$*, что его можно разбить на две части, являющиеся* HOSVD *траекторных тензоров, составленных по рядам* $\tilde{\mathsf{X}}$ *и* $\hat{\mathsf{X}}$.

4.2. Примеры разделимости рядов в тензорном случае

Рассмотрим условия разделимости рядов $\tilde{\mathsf{X}} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \ldots, \tilde{f}_N)$, $\hat{\mathsf{X}} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_N)$ в некоторых частных случаях.

- Отделимость от константного ряда

  Пусть $\tilde{f}_n = c \neq 0$ для $n \in \overline{1:N}$. Тогда необходимые и достаточные условия отделимости от него ряда $\hat{\mathsf{X}}$ в смысле Tensor SSA следующие:

  1. Ряд $\hat{\mathsf{X}}$ имеет целый период T, и I/T, L/T, J/T — целые;
  2. $\hat{f}_1 + \hat{f}_2 + \ldots + \hat{f}_T = 0$.

  Пример 4.1. Ряд с элементами вида $\tilde{f}_n = \cos(2\pi n/T + \varphi)$ длины N такой, что $N+2$ делится нацело на T, будет слабо отделим от константного ряда при выборе параметров $I, L: \ I + L < N + 1$, делящихся нацело на T.

- Отделимость от экспоненциального ряда

  Пусть $\tilde{f}_n = e^{\alpha n}$ для $n \in \overline{1:N}$. Тогда необходимые и достаточные условия отделимости от него ряда $\hat{\mathsf{X}}$ в смысле Tensor SSA следующие:

  1. Ряд $(\tilde{f}_1\hat{f}_1,\ \tilde{f}_2\hat{f}_2, \ldots,\ \tilde{f}_N\hat{f}_N$ имеет целый период T, и I/T, L/T, J/T — целые;
  2. $\tilde{f}_1\hat{f}_1 + \tilde{f}_2\hat{f}_2 + \ldots + \tilde{f}_N\hat{f}_T = 0$.

  Пример 4.2. Ряд с элементами вида $\tilde{f}_n = e^{-\alpha n}\cos(2\pi n/T + \varphi)$ длины N такой, что $N + 2$ делится нацело на T, будет слабо отделим от ряда с элементами вида $\hat{f}_n = e^{\alpha n}$ при выборе параметров $I,\ L:\ I + L < N + 1$, делящихся нацело на T.

- Отделимость от гармонического ряда

  Пусть $\tilde{f}_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$, где $0 < \omega < 1/2$, и $I, L, J > 2$. Положим $\hat{f}_n = \cos(2\pi\omega' n + \varphi')$, тогда ряд $\tilde{\mathsf{X}}$ отделим от ряда $\hat{\mathsf{X}}$ в смысле Tensor SSA тогда и только тогда, когда $\omega \neq \omega'$ и $I\omega$, $I\omega'$, $L\omega$, $L\omega'$, $J\omega$, $J\omega'$ — целые числа.

Замечание. Результаты выше приведены в случае точной разделимости компонент в смысле теории SSA. В случае, когда точной разделимости нет, а есть только приближённая, в тензорном случае возникает такая ситуация, когда одни и те же одноранговые тензоры в HOSVD траекторной матрицы могут быть отнесены сразу к нескольким компонентам. На данный момент это является нерешённой проблемой.

4.3. Ранг ряда в терминах Tensor SSA

Утверждение 4.2. *Пусть временной ряд* X *имеет конечный ранг* d *в терминах* SSA. *Тогда для любых значений параметров* I *и* L *таких, что*

$$d \leqslant \min(I, L, N - I - L + 2),$$

количество ненулевых собственных чисел по каждому измерению в HOSVD *траекторного тензора* $\mathcal{X}$*, построенного по этому ряду с параметрами* I *и* L*, будет равно* d.

Это утверждение является прямым следствием определения ранга ряда и свойства 2.4 HOSVD.

Следствие 4.2.1. *Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах Tensor SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.*

5. Примеры использования Tensor SSA

Рассмотрим несколько примеров использования Tensor SSA для анализа временных рядов.

Пример 5.1 (Разделимость синуса и константы)**.** Рассмотрим ряд с элементами $x_n = 3 + \sin(2\pi n/3 + \pi/3)$, где $n \in \overline{0:15}$. После построения траекторного тензора $\mathcal{X}$ с параметрами $I = L = 6$ и его разложения получаем тензор сингулярных чисел $\mathcal{Z}$ и матрицы сингулярных векторов $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$. Так как все размерности траекторного тензора $\mathcal{X}$ равны, его развёртки по всем измерениям совпадают, а значит совпадают и матрицы сингулярных векторов $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}$.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -0.41 & 0.00 & 0.58 & 0.70 & -0.10 & 0.01 \\ -0.41 & 0.50 & -0.29 & 0.08 & 0.62 & 0.33 \\ -0.41 & -0.50 & -0.29 & 0.06 & 0.33 & -0.63 \\ -0.41 & -0.00 & 0.58 & -0.70 & 0.10 & -0.01 \\ -0.41 & 0.50 & -0.29 & -0.08 & -0.62 & -0.33 \\ -0.41 & -0.50 & -0.29 & -0.06 & -0.33 & 0.63 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Z}_{1,1,1} = -44.09,$$

$$-\mathcal{Z}_{2,2,2} = \mathcal{Z}_{3,3,2} = \mathcal{Z}_{2,3,3} = \mathcal{Z}_{3,2,3} = 2.60,$$

$$\mathcal{Z}_{2,3,2} = \mathcal{Z}_{3,2,2} = \mathcal{Z}_{2,2,3} = -\mathcal{Z}_{3,3,3} = -4.50,$$

$$\mathcal{Z}_{i,l,j} = 0 \text{ для всех остальных значений } i, l, j.$$

Видно, что первый сингулярный вектор постоянен, а второй и третий — периодические с периодом 3. Кроме того, по каждому из трёх измерений количество ненулевых сингулярных чисел равно 3 (например $\|\mathcal{Z}_{,,1}\| > \|\mathcal{Z}_{,,2}\| = \|\mathcal{Z}_{,,3}\| > 0$, $\|\mathcal{Z}_{,,j}\| = 0$ для всех остальных j). Исходя из этого, имеет смысл отнести индекс $\{1\}$ к константной компоненте ряда, индексы $\{2,\ 3\}$ — к гармонической (синус), а остальные проигнорировать. После восстановления тензоров, полученных такой группировкой, получаем два ряда

$$\hat{\mathsf{X}} = (3,\ 3, \ldots,\ 3),$$

$$\tilde{\mathsf{X}} = (0.86,\ 0,\ -0.86,\ 0.86, \ldots,\ 0,\ -0.86,\ 0.86).$$

Таким образом, константный ряд отделился от синуса.

Пример 5.2 (Смешение двух косинусов). Рассмотрим ряд с элементами $x_n = \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/4)$, $n \in \overline{0:33}$. Выбрав параметры $I = L = 12$, после разложения получаем тензор сингулярных значений $\mathcal{Z}$ и, в силу равенства размерностей траекторного тензора, равные между собой матрицы сингулярных векторов $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}$. Тензор $\mathcal{Z}$ имеет вид тензорного блока $\mathcal{Z}'$ размерности $4 \times 4 \times 4$, окаймлённого нулями, в котором уже нельзя выделить блочно-диагональную структуру. Если рассмотреть матрицы сингулярных векторов, можно увидеть, что никакой сингулярный вектор не имеет периода равного 3 или 4:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.58 & 0 & \dots \\ -0.18 & 0.36 & 0.14 & -0.39 & \dots \\ -0.17 & -0.16 & 0.43 & 0.30 & \dots \\ 0.38 & -0.04 & -0.29 & 0.32 & \dots \\ 0.14 & 0.002 & -0.14 & -0.54 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, произошло смешение двух косинусов одинаковой амплитуды.

5.1. Сравнение Tensor SSA и SSA

Рассмотрим проблему отделения сигнала от шума на примерах различных рядов.

Пример 5.3 (Отделение от экспоненты). Пусть сигнал задан временным рядом $x_n = 2e^{0.035n}$, $n \in \overline{1:23}$. Подействуем на ряд белым гауссовским шумом с параметром $\sigma^2 = 2.25$.

Таблица 1. RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала, порождённого экспонентой.

L	4	6	12
MSE	0.65	0.55	**0.52**

В таблицах 1, 2, приведены значения отклонения восстановленного ряда от исходного ряда для различных значений параметров после использования SSA и двух вариаций Tensor SSA для выделения сигнала. RMSE здесь и далее высчитывается по 500 реализациям шума, если не указано иное.

Пример 5.4 (Отделение от косинуса). Пусть сигнал задан временным рядом $x_n = 30\cos(2\pi n/12)$, $n \in \overline{1:71}$. В таблицах 3, 4, 5 приведены значения отклонения вос-

Таблица 2. RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA сигнала, порождённого экспонентой.

Метод приближения \ $I \times L$	4×4	4×6	4×12	6×6	6×12
Усечение HOSVD	0.59	**0.56**	**0.56**	**0.56**	0.57
HOOI	0.58	0.55	**0.547**	0.56	0.56

Таблица 3. RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала, порождённого косинусом.

вид шума \ L	12	24	30	36
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.82	1.42	**1.40**	1.42
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.31	1.03	**1.01**	1.03
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.88	1.37	**1.34**	1.36

Таблица 4. RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA с использованием усечения HOSVD сигнала, порожённого косинусом.

вид шума \ $I \times L$	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.64	1.53	1.57	1.66	1.62	**1.49**
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.18	1.12	1.14	1.21	1.19	**1.08**
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.58	**1.44**	1.47	1.57	1.54	1.46

Таблица 5. RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA с использованием HOOI сигнала, порождённого косинусом.

вид шума \ $I \times L$	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.63	1.53	1.56	1.65	1.62	**1.49**
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.17	1.12	1.14	1.21	1.19	**1.08**
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.56	1.42	1.44	1.54	1.51	**1.39**

становленного ряда от исходного ряда для различных вариантов шума и различных значений параметров после использования SSA и Tensor SSA. В реализациях красного шума параметр δ был выбран равным $\sqrt{5}$.

Пример 5.5 (Отделение от линейного ряда)**.** Пусть сигнал задан временным рядом $x_n = 2 + 0.1n$, $n \in \overline{1:39}$. Будем рассматривать два случая шума и в каждом из этих случаев по два варианта восстановления линейного сигнала из шума: по одной компоненте и по двум. В таблицах 6, 7 8, 9 приведены значения отклонения восстановленного

Таблица 6. RMSE восстановленного с помощью SSA линейного сигнала для разного количества компонент в восстановлении, случай большого шума.

Компонент \ L	10	15	20
1	0.44	**0.42**	**0.42**
2	0.70	**0.66**	0.68

Таблица 7. RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA линейного сигнала для разного количества компонент в восстановлении и разных методов восстановления, случай большого шума.

Компонент	Метод восстановления \ $I \times L$	10×10	10×15	10×20	15×15	15×20
1	Усечение HOSVD	0.47	0.49	0.48	0.49	**0.46**
	HOOI	0.47	0.48	0.47	0.49	**0.45**
2	Усечение HOSVD	0.59	0.60	0.58	0.61	**0.57**
	HOOI	0.62	0.64	0.62	0.64	**0.61**

Таблица 8. RMSE восстановленного с помощью SSA линейного сигнала для разного количества компонент в восстановлении, случай малого шума.

Компонент \ L	10	15	20
1	**0.09**	0.108	0.118
2	0.10	**0.093**	**0.093**

линейного ряда от исходного. Таблицам 6, 7 соответствует гауссовский шум с параметром $\sigma^2 = 2.25$, таблицам 6, 7 — гауссовский шум с параметром $\sigma^2 = 0.04$.

Таблица 9. RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA линейного сигнала для разного количества компонент в восстановлении и разных методов восстановления, случай малого шума.

Компонент	$I \times L$ / Метод восстановления	10×10	10×15	10×20	15×15	15×20
1	Усечение HOSVD	0.133	0.145	0.136	0.147	**0.130**
	HOOI	0.132	0.144	0.136	0.146	**0.130**
2	Усечение HOSVD	0.123	0.130	0.125	0.133	**0.112**
	HOOI	0.123	0.130	0.124	0.133	**0.114**

Пример 5.6 (Случай, когда Tensor SSA срабатывает точнее, чем SSA)**.** Пусть сигнал задан временным рядом $x_n = \sin(2\pi n/3 + \pi/2)$, $n \in \overline{1:9}$. Подействуем на сигнал красным шумом с параметрами $\varphi = 0.9, \delta = 0.1$. В таблице 10 приведены результаты измерения

SSA	Tensor SSA (HOSVD)	Tensor SSA (HOOI)
0.116	0.110	**0.095**

Таблица 10. RMSE восстановленного с помощью различных методов короткого сигнала, порождённого синусом

средних отклонений восстановленного ряда от исходного для разных методов по 1000 реализаций шума.

Причины того, что в этом примере обе вариации Tensor SSA дают стабильно лучшие результаты, чем SSA, пока неизвестны и остаются для дальнейшего изучения.

6. Альтернативные тензорные разложения

Помимо HOSVD, существует ещё один тип тензорных разложений: ранговое разложение тензора. Идея заключается в представлении тензора $\mathcal{A}$ в виде линейной комбинации R тензоров ранга 1, где $R = \operatorname{rank}(\mathcal{A})$. Однако нахождение этого ранга в общем случае является NP-трудной задачей [9].

CANDECOMP-PARAFAC [5, 6] — итерационный метод приближения тензора суммой заданного пользователем числа тензоров ранга 1. То есть по параметру K этот метод считает наилучшее приближение входного тензора суммой K тензоров ранга 1.

Заметим, что из-за отсутствия каких-либо требований к ортогональности в определении рангового разложения тензора, многие свойства, верные в теории SSA, могут потерять справедливость при использовании этого разложения.

Рассмотрим ряды $\tilde{f}_n = 3$, $\hat{f}_n = \sin(2\pi n/3)$, $n \in \overline{0:15}$. Построим по этим рядам траекторные тензоры с параметрами $I = L = 6$. Тогда ранг траекторного тензора $\tilde{\mathcal{X}}$, соответствующего константному ряду, равен 1, так как его можно представить в виде

$$\tilde{\mathcal{X}} = 3X \circ X \circ X,$$

где $X = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Ранг траекторного тензора $\hat{\mathcal{X}}$, соответствующего синусу, равен 3, так как его можно представить в виде

$$\hat{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^{3} \lambda_i X_i \circ Y_i \circ Z_i,$$

где

$$\lambda_1 = 160.56,\ \lambda_2 = 65.69,\ \lambda_3 = 123.76,$$

$$\mathbf{X} = [X_1,\ X_2,\ X_3] = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.25 & 0.06 \\ 0.25 & -0.06 & -0.25 \\ -0.09 & -0.19 & 0.19 \\ -0.16 & 0.25 & 0.06 \\ 0.25 & -0.06 & -0.25 \\ -0.09 & -0.19 & 0.19 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = [Y_1,\ Y_2,\ Y_3] = \begin{pmatrix} -0.25 & -0.15 & 0.21 \\ 0.18 & -0.10 & -0.25 \\ 0.07 & 0.25 & 0.04 \\ -0.25 & -0.15 & 0.21 \\ 0.18 & -0.10 & -0.25 \\ 0.07 & 0.25 & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = [Z_1,\ Z_2,\ Z_3] = \begin{pmatrix} -0.10 & -0.25 & -0.01 \\ 0.25 & 0.12 & -0.24 \\ -0.15 & 0.13 & 0.25 \\ -0.10 & -0.25 & -0.01 \\ 0.25 & 0.12 & -0.24 \\ -0.15 & 0.13 & 0.25 \end{pmatrix},$$

притом точных приближений двумя тензорами ранга 1 нет.

Траекторный тензор ряда $x_n = \tilde{f}_n + \hat{f}_n$, построенный с параметрами $I = L = 6$ представим в виде суммы

$$\mathcal{X} = \sum_{k=1}^{4} \lambda_i X_i \circ Y_i \circ Z_i,$$

где

$$\lambda_1 = 320.17,\ \lambda_2 = 120.97,\ \lambda_3 = 209.38,\ \lambda_4 = 648$$

$$\mathbf{X} = [X_1,\, X_2,\, X_3,\, X_4] = \begin{pmatrix} -0.25 & -0.25 & 0.25 & -0.17 \\ 0.11 & 0.25 & -0.04 & -0.17 \\ 0.14 & 0.00 & -0.21 & -0.17 \\ -0.25 & -0.25 & 0.25 & -0.17 \\ 0.11 & 0.25 & -0.04 & -0.17 \\ 0.14 & 0.00 & -0.21 & -0.17 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = [Y_1,\, Y_2,\, Y_3,\, Y_4] = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.25 & -0.25 & -0.17 \\ -0.08 & 0.21 & -0.00 & -0.17 \\ -0.17 & 0.04 & 0.25 & -0.17 \\ 0.25 & -0.25 & -0.25 & -0.17 \\ -0.08 & 0.21 & -0.00 & -0.17 \\ -0.17 & 0.04 & 0.25 & -0.17 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = [Z_1,\, Z_2,\, Z_3,\, Z_4] = \begin{pmatrix} -0.00 & -0.14 & -0.08 & 0.17 \\ -0.25 & -0.11 & 0.25 & 0.17 \\ 0.25 & 0.25 & -0.17 & 0.17 \\ -0.00 & -0.14 & -0.08 & 0.17 \\ -0.25 & -0.11 & 0.25 & 0.17 \\ 0.25 & 0.25 & -0.17 & 0.17 \end{pmatrix},$$

притом точных приближений тремя тензорами ранга 1 нет.

По виду векторов видно, что четвёртая компонента разложения соответствует константному ряду, а остальные три имеют период равный 3. Таким образом, несмотря на отсутствие ограничений на ортогональность в определении ранговых разложений тензора, наблюдается отделимость константного ряда от периодического ряда при наличии условий слабой разделимости в терминах SSA и отсутствия шума. Однако понятия ранга в терминах SSA и в терминах CP различаются, так как в терминах SSA синус с периодом 3 имеет ранг 2, а в терминах рангового разложения, как показано выше, такой синус имеет ранг 3.

Другим недостатком CP разложения является то, что это итерационный метод, причём процесс итерации начинается с генерации случайной матрицы, в связи с чем на одних и тех же данных он может выдавать разные результаты, в том числе может как сойтись, так и нет.

Возможно можно добиться лучших результатов, используя CP или его модификации, если строить тензор по ряду другим образом и подбирать другие параметры разложения. Этот вопрос предлагается изучить в будущих работах.

7. Заключение

В работе было показано, что по своим свойствам Tensor SSA с использованием HOSVD имеет много общего с Basic SSA с использованием SVD. Однако, есть и особенности, кардинально меняющие свойства методов, которые можно использовать для анализа временных рядов.

В результате исследования метода Tensor SSA с HOSVD были сделаны следующие выводы: метод можно использовать для выделения сигнала, однако остался неизученным вопрос о том, как с его помощью разделять компоненты сигнала. Также, в большинстве случаев, как Tensor SSA с HOSVD, так и Tensor SSA с мультилинейной аппроксимацией, оказались хуже, чем Basic SSA в точности выделения сигнала. Удалось построить только один пример, где Basic SSA менее точно выделяет сигнал. Это противоречит результатам работы [10], где показано преимущество TSSA с мультилинейной аппроксимацией. Однако, в этой статье сравнение идет для сигнала в виде суммы двух комплексных экспонент по точности оценке частоты сигналов.

Таким образом, остались открытыми вопросы: подтвердить преимущество Tensor SSA с HOSVD для выделения сигнала, о котором утверждается в статье [10] а также найти методы, которые разделяют компоненты сигнала, например в работе [11] предлагается метод CPD для разделения комплексных экспонент.

Список литературы

1. Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techiques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
2. Kouchaki Samaneh, Sanei Saeid. Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation // 2013 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP). — IEEE. — 2013.
3. Improved Tensor-Based Singular Spectrum Analysis Based on Single Channel Blind Source Separation Algorithm and Its Application to Fault Diagnosis / Yang Dan, Yi Cancan, Xu Zengbin, Zhang Yi, Ge Mao, and Liu Changming // Applied Sciences. — 2017. — Vol. 7, no. 4.
4. De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1253–1278. — Access mode: https://doi.org/10.1137/S0895479896305696.
5. Harshman Richard A. Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-model factor analysis. — 1970. — Vol. 16. — P. 1–84.
6. Carroll J. Douglas, Chang Jih Jie. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition // Psychometrika. — 1970. — Vol. 35. — P. 283–319.
7. Tucker Ledyard R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis // Psychometrika. — 1966. — Vol. 31. — P. 279–311.
8. De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. On the Best Rank-1 and Rank-$(R_1, R_2, ..., R_N)$ Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1324–1342.
9. Hillar Christopher J., Lim Lek-Heng. Most Tensor Problems Are NP-Hard // J. ACM. — 2013. — Vol. 60, no. 6. — Access mode: https://doi.org/10.1145/2512329.
10. Papy J. M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
11. De Lathauwer Lieven. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank-$(L_r, L_r, 1)$ Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and

Applications. — 2011. — Vol. 32, no. 4. — P. 1451–1474.