1 Описание метода Tensor MSSA

Пусть дан многомерный временной ряд X длины N размерности P, то есть

$$\mathsf{X} = (\mathsf{X}^{(1)}, \mathsf{X}^{(2)}, \ldots, \mathsf{X}^{(P)})^{\mathrm{T}},$$
$$\mathsf{X}^{(p)} = (x_{p1}, x_{p2}, \ldots, x_{pN}).$$

Рассматривается задача выделения сигнала из ряда с шумом.

Определение 1. (Траекторный тензор многомерного ряда) Траекторным тензором многомерного ряда X с параметром $L : 1 \leqslant L \leqslant N$ будем называть тензор $\mathcal{X}$ размерности $L \times K \times P$, где $K = N - L + 1$, слои вдоль третьего измерения которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{,,p} = \begin{pmatrix} x_{p1} & x_{p2} & \ldots & x_{pK} \\ x_{p2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{pL} & \ldots & \ldots & x_{pN} \end{pmatrix}, \qquad p \in \overline{1:P}.$$

Алгоритм Tensor MSSA для выделения сигнала из ряда с шумом сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших n-рангов, задаваемых пользователем.

1.1 Ранг ряда в терминах Tensor MSSA

Следующее утверждение позволяет определить принцип выбора n-рангов в алгоритме Tensor MSSA.

Утверждение 1. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_P$ - временные ряды длины N. Пусть $\mathbf{H}_1, \ldots, \mathbf{H}_P$ - траекторные матрицы этих рядов с параметром $L \leqslant N$. Обозначим $K = N - L + 1$.*

Построим матрицу $\mathbf{X} = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \ldots : \mathbf{H}_P] \in \mathbb{R}^{L \times KP}$. Её SVD *имеет вид:*

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{V}. \tag{1}$$

Построим тензор $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{L \times K \times P} : \mathcal{X}_{,,p} = \mathbf{H}_p$ (p-й слой тензора по 3-му измерению берём равным $\mathbf{H}_p$). Его HOSVD *имеет вид:*

$$\mathcal{X} = \mathcal{Z} \times_1 \hat{\mathbf{U}}_1 \times_2 \hat{\mathbf{U}}_2 \times_3 \hat{\mathbf{U}}_3. \tag{2}$$

Существуют такие SVD *матрицы $\mathbf{X}$ и* HOSVD *тензора $\mathcal{X}$, что $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}}_1$.*

Доказательство. Из свойств HOSVD известно, что в качестве $\hat{\mathbf{U}}_1$ можно выбрать матрицу $\hat{\mathbf{U}}$ левых сингулярных векторов из SVD матрицы $[\mathcal{X}]_{(1)}$ - развёртки тензора $\mathcal{A}$ по первому измерению. Эта развёртка имеет вид

$$[\mathcal{X}]_{(1)} = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \ldots : \mathbf{H}_P] = \mathbf{A},$$

откуда и следует искомое утверждение. □

Следствие 1.1. *Из этого утверждения и из того, что разложения* SVD *и* HOSVD *единственны с точностью до, возможно, некоторых ортогональных преобразований матриц сингулярных векторов, следует, что пространства, порождаемые левыми сингулярными векторами матрицы* $\mathbf{X}$ *и сингулярными векторами первого измерения тензора* $\mathcal{X}$*, совпадают.*

Замечание. На практике при вычислении HOSVD тензора используется алгоритм, который последовательно вычисляет SVD развёрток этого тензора по каждому измерению, и получившиеся матрицы левых сингулярных векторов используются в качестве матриц сингулярных векторов соответствующего измерения в формуле (2). Таким образом, на практике совпадают не только пространства, порождаемые описанными выше сингулярными векторами, но и сами матрицы этих векторов.

Следствие 1.2. *Пусть многомерный ряд* X *длины* N *имеет ранг* r *в терминах* MSSA*, и число* $L \in \overline{1:N}$ *таково, что* $r \leqslant \min(L, K)$*, где* $K = N - L + 1$*, и пусть* $\mathcal{X}$ *— траекторный тензор этого ряда. Тогда*

$$\operatorname{rank}_1(\mathcal{X}) = r, \qquad \operatorname{rank}_2(\mathcal{X}) = r.$$

Замечание. Ранг третьего измерения $\operatorname{rank}_3(\mathcal{X})$ имеет смысл отличный от смысла ранга ряда в теории MSSA. Этот ранг имеет смысл меры структурного отличия рядов друг от друга.

Пример 1.1 (Ранги рядов)**.** Пусть многомерный ряд X имеет следующий вид:

$$s_n^{(m)} = a_m \cos(2\pi n \omega_m + \psi_m),\ m \in \{1,\, 2\},\ n \in \overline{1:N},$$
$$N > 7,\ a_m \neq 0,\ 0 < \omega_m < \frac{1}{2},\ 0 \leqslant \psi < 2\pi.$$

Обозначим r — ранг ряда X в терминах MSSA, $r_i = \operatorname{rank}_i(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ — траекторный тензор, построенный по ряду X с длиной окна L такой, что $r \leqslant \min(L, K)$, $K = N - L + 1$. Тогда

1. если $\psi_1 = \psi_2$, $\omega_1 = \omega_2$, то $r = r_1 = r_2 = 2$, $r_3 = 1$,
2. если $\psi_1 \neq \psi_2$, $\omega_1 = \omega_2$, то $r = r_1 = r_2 = 2$, $r_3 = 2$,
3. если $\omega_1 \neq \omega_2$, то $r = r_1 = r_2 = 4$, $r_3 = 2$.

1.2 Алгоритм HOSVD MSSA для выделения сигнала

На вход алгоритму подаётся многомерный временной ряд X длины N и размерности P. Параметры алгоритма: $L:\ 1 \leqslant L \leqslant N$, R, $R_3:\ R \leqslant \min(L, K)$, $R_3 \leqslant P$, где $K = N - L + 1$. Алгоритм Tensor MSSA для выделения сигнала из ряда с шумом заключается в проведении следующих четырёх шагов.

1. Выбор параметра L и построение по нему траекторного тензора $\mathcal{X}$;
2. Проведение HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$, получение его представления в виде
$$\mathcal{X} = \sum_{l=1}^{L}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} \mathcal{Z}_{l,k,p}\mathbf{U}_l^{(1)} \circ \mathbf{U}_k^{(2)} \circ \mathbf{U}_p^{(3)}; \tag{3}$$
3. Группировка: выбор параметров R, R_3 имеющих смысл числа компонент, относимых к сигналу, и построение тензора
$$\hat{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R}\sum_{k=1}^{R}\sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{l,k,p}\mathbf{U}_l^{(1)} \circ \mathbf{U}_k^{(2)} \circ \mathbf{U}_p^{(3)}.$$
4. Восстановление сигнала $\hat{\mathsf{X}}$ по тензору $\hat{\mathcal{X}}$ посредством его усреднения вдоль плоскостей $l + k + p = \mathrm{const}$:
$$\hat{x}_n = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(l,k,p)\in\mathfrak{M}_n} \hat{\mathcal{X}}_{l,k,p}, \qquad n \in \overline{1:N},$$
$$\mathfrak{M}_n = \{(l,\, k,\, p) \mid 1 \leqslant l \leqslant L,\, 1 \leqslant k \leqslant K,\, 1 \leqslant p \leqslant P,\, l + k + p - 2 = n\}.$$

Результатом алгоритма является временной ряд $\hat{\mathsf{X}}$, принимаемый за оценку сигнала.

Замечание. В качестве параметра R в общем случае рекомендуется выбирать ранг искомого сигнала, а в качестве параметра R_3 — ранг траекторного тензора сигнала по третьему измерению.

1.3 Сравнение HOSVD MSSA и MSSA

Пусть сигнал задан многомерным временным рядом

$$\mathsf{S} = \begin{pmatrix} s_1^{(1)}, & s_2^{(1)}, & \dots, s_N^{(1)} \\ s_1^{(2)}, & s_2^{(2)}, & \dots, s_N^{(2)} \end{pmatrix}$$

$$s_n^{(m)} = a_m \cos(2\pi n \omega_m + \psi_m),\ N = 71,\ a_1 = 30,\ a_2 = 20.$$

На сигнал подействовали белым гауссовским шумом, с параметром $\sigma = 5$.

Таблица 1: RMSE восстановленных с помощью MSSA и HOSVD MSSA сигналов для каждого набора параметров сигнала.

Условия	Метод \ L	12	24	36	48	60
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$	MSSA	1.78	1.34	1.24	**1.20**	1.42
$\psi_1 = \psi_2 = 0$	HOSVD MSSA	1.35	**1.10**	**1.10**	**1.10**	1.35
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$	MSSA	1.78	1.34	1.25	**1.20**	1.41
$\psi_1 = 0,\ \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	HOSVD MSSA	1.41	**1.19**	1.20	**1.19**	1.41
$\omega_1 = \frac{1}{12},\ \omega_2 = \frac{1}{8}$	MSSA	2.63	1.94	1.74	**1.69**	1.95
$\psi_1 = 0,\ \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	HOSVD MSSA	1.95	**1.67**	1.69	**1.67**	1.95

В таблице 1 приведены значения отклонения восстановленного ряда от исходного ряда для различных значений параметров после использования алгоритмов MSSA и HOSVD MSSA для выделения сигнала. RMSE посчитан по 500 реализациям шума, методы сравнивались на одних и тех же наборах реализаций шума.