

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика

Учебная практика 4 (научно-исследовательская работа) (семестр 7)

«ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА»

Выполнил:

Хромов Никита Андреевич

20.Б04-мм

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент

Голяндина Н. Э.

Санкт-Петербург

2023

## Оглавление

1.	Введение . . . . .	3
2.	HOSVD и его свойства . . . . .	4
2.1.	Свойства HOSVD . . . . .	5
3.	Описание метода Tensor SSA . . . . .	9
4.	Свойства Tensor SSA . . . . .	12
4.1.	Разделимость рядов в терминах Tensor SSA . . . . .	12
4.2.	Примеры разделимости рядов в тензорном случае . . . . .	13
4.3.	Ранг ряда в терминах Tensor SSA . . . . .	14
5.	Примеры использования Tensor SSA . . . . .	15
5.1.	Сравнение Tensor SSA и SSA . . . . .	16
6.	Описание метода Tensor MSSA для выделения сигнала . . . . .	20
7.	Свойства HOSVD MSSA . . . . .	21
8.	Численные сравнения полученных методов с известными . . . . .	24
8.1.	Принцип выбора числа компонент, относимых к сигналу . . . . .	24
8.2.	Численные сравнения . . . . .	25
9.	Альтернативные тензорные разложения . . . . .	32
10.	Заключение . . . . .	36
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>37</b>

## 1. Введение

Singular spectrum analysis (SSA) [1] является популярным методом анализа временных рядов. Этот метод используется, в частности, для выделения сигнала и выделения тренда и периодических компонент из временного ряда. Метод SSA основан на сингулярном разложении особой траекторной матрицы построенной по временному ряду

В работах [2, 3, 4] предлагается обобщение метода SSA, Tensor SSA, который основан на некотором тензорном разложении особого траекторного тензора, построенного по временному ряду. Причём, в этих работах утверждается о преимуществах Tensor SSA над обычным SSA.

Существует множество видов тензорных разложений, например High-Order Singular Value Decomposition (HOSVD) [5], Canonical Polyadic Decomposition (CPD) [6, 7], Tucker decomposition [8]. В частности, в работах [2, 3] используется разложение CPD, а в работе [4] — HOSVD.

Была поставлена задача изучить различные варианты тензорных разложений, реализовать метод Tensor SSA, выбрав некоторые из них и сравнить с методом Basic SSA по точности выделения сигнала и компонент сигнала, а также рассмотреть расширение метода SSA на многомерные ряды — метод MSSA [9], сформулировать и реализовать тензорную модификацию этого метода и сравнить её с другими методами семейства SSA по точности выделения сигнала. В качестве первого метода разложения был выбран метод HOSVD, который является обобщением метода SVD для матриц.

В ходе работы в этом семестре были добавлены разделы 6, 7 и 8, в которых описывается тензорная модификация метода MSSA — HOSVD MSSA и проводятся численные сравнения этого метода с известными.

## 2. HOSVD и его свойства

Ключевым этапом в алгоритме Tensor SSA является применение тензорного разложения HOSVD [5] к некоторому тензору. Приведём определение этого разложения и некоторые его свойства.

**Определение 2.1** (Произведение тензора и матрицы по измерению). Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ ,  $\mathbf{U}$  — матрица размерности  $J_n \times I_n$ , тогда произведением тензора  $\mathcal{A}$  и матрицы  $\mathbf{U}$  по измерению  $n$  ( $\mathcal{A} \times_n \mathbf{U}$ ) называется тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_M$ , который считается по формуле

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_M} = \sum_{i_n=1}^{I_n} a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_M} u_{j_n i_n}.$$

**Теорема 1** (Сингулярное разложение порядка  $M$ ). *Любой комплекснозначный тензор  $\mathcal{A}$  размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  может быть представлен в виде произведения*

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (1)$$

в котором

1.  $\mathbf{U}^{(n)} = [U_1^{(n)}, U_2^{(n)}, \dots, U_{I_n}^{(n)}]$  — унитарная матрица,
2.  $\mathcal{Z}$  — комплекснозначный тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , в котором каждый подтензор  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ , полученный фиксированием индекса  $i_n = \alpha$  удовлетворяет следующим свойствам
  - а. полная ортогональность: подтензоры  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  и  $\mathcal{Z}_{i_n=\beta}$  ортогональны для всех возможных значений  $n, \alpha, \beta : \alpha \neq \beta$ :

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \alpha \neq \beta,$$

- б. упорядоченность: подтензоры расположены в порядке убывания их норм Фробениуса:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\| \quad (2)$$

для всех  $n \in \overline{1:M}$ .

**Определение 2.2** (Сингулярное разложение тензора). Разложение вида (1) будем называть сингулярным разложением тензора  $\mathcal{A}$  порядка  $M$  или HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ .

**Определение 2.3** (Сингулярное число тензора). Обозначим  $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|$  и будем называть  $\sigma_i^{(n)}$   $i$ -м сингулярным числом тензора  $\mathcal{A}$  по измерению  $n$ .

**Определение 2.4** (Сингулярный вектор тензора). Векторы  $U_i^{(n)}$  будем называть  $i$ -м сингулярным вектором тензора  $\mathcal{A}$  по измерению  $n$ .

*Замечание.* Представление (1) можно записать в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1, i_2, \dots, i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)}. \quad (3)$$

Такое представление удобнее для описания алгоритма Tensor SSA.

## 2.1. Свойства HOSVD

Многие свойства метода SSA являются следствиями свойств SVD. В свою очередь, многие свойства HOSVD являются аналогами свойств SVD. Таким образом, аналогичность свойств SSA и Tensor SSA может быть выведена из аналогичности некоторых свойств SVD и HOSVD.

**Утверждение 2.1.** *Вычисление HOSVD тензора  $\mathcal{A}$  с  $M$  размерностями сводится к вычислению SVD на  $M$  матрицах  $\mathbf{A}_{(n)}$ , которые вычисляются развёрткой тензора по  $n$ -му измерению.*

Другими словами, если  $\mathcal{A}$  — тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , то его развёртка по  $n$ -му измерению — это матрица  $\mathbf{A}_{(n)}$  размерности  $I_n \times I_{n+1}I_{n+2} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}$ , в которой элемент  $a_{i_1 i_2 \dots i_M}$  тензора содержится в строке  $i_n$  и столбце с номером равным

$$(i_{n+1} - 1)I_{n+2}I_{n+3} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1} + (i_{n+2} - 1)I_{n+3}I_{n+4} \dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1} + \dots \\ + (i_M - 1)I_1 I_2 \dots I_{n-1} + (i_1 - 1)I_2 I_3 \dots I_{n-1} + (i_2 - 1)I_3 I_4 \dots I_{n-1} + \dots + i_{n-1}.$$

К каждой из полученных матриц применяется SVD, в результате чего получаются  $M$  матриц  $\mathbf{U}^{(n)}$ , составленных из левых сингулярных векторов соответствующих развёрток. Затем находится тензор сингулярных чисел

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{U}^{(1)\text{H}} \times_2 \mathbf{U}^{(2)\text{H}} \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)\text{H}}.$$

В результате получается искомое разложение

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}.$$

Из-за этой связи HOSVD со стандартным матричным SVD для многих свойств SVD существуют аналогичные свойства HOSVD.

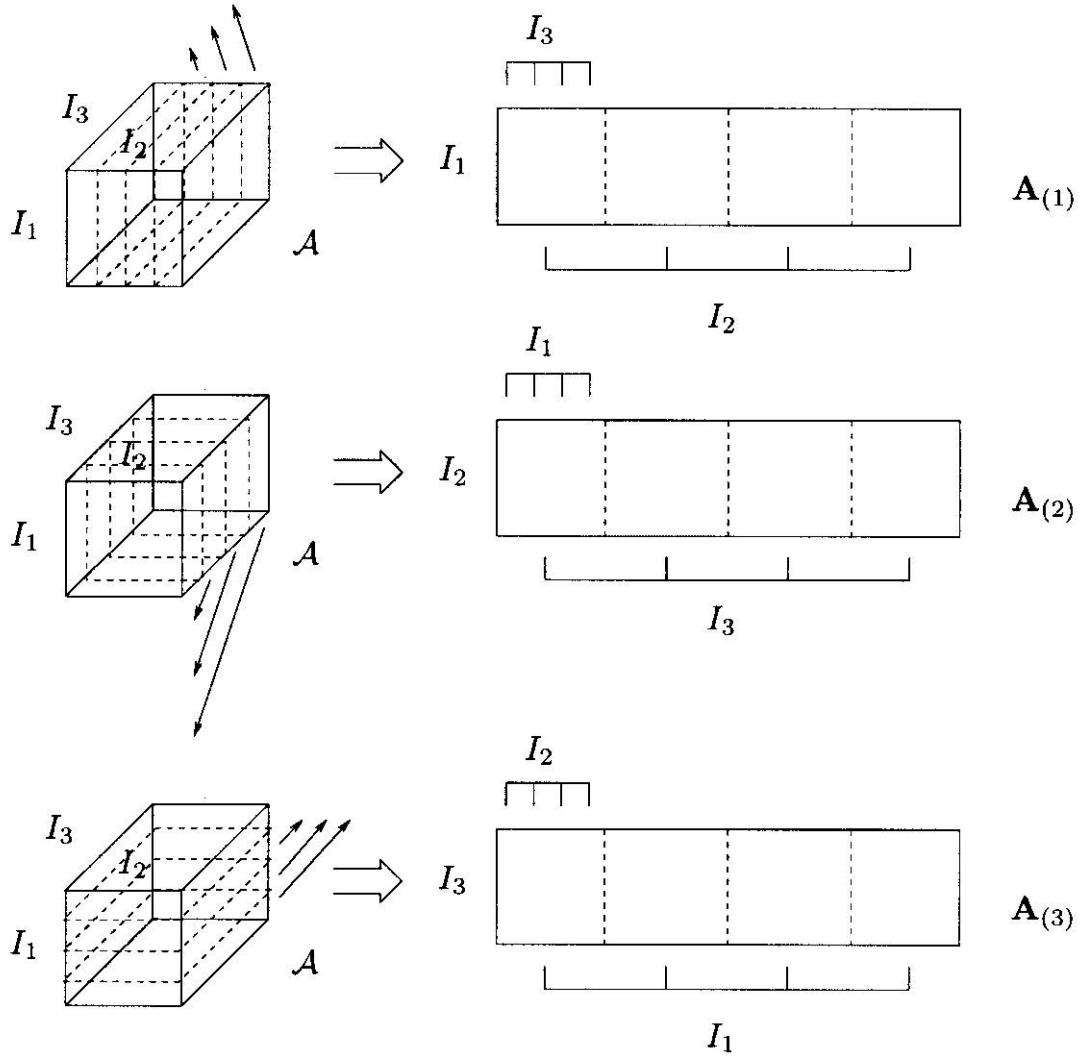


Рис. 1. Развёртка тензора  $\mathcal{A}$  размерности  $I_1 \times I_2 \times I_3$  в матрицы  $\mathbf{A}_{(1)}$ ,  $\mathbf{A}_{(2)}$ ,  $\mathbf{A}_{(3)}$  размерностей  $I_1 \times (I_2 I_3)$ ,  $I_2 \times (I_3 I_1)$ ,  $I_3 \times (I_1 I_2)$  соответственно

**Свойство 2.1** (Единственность).

1. Все сингулярные числа по каждому измерению определяются однозначно.
2. Если сингулярные числа по измерению  $n$  различны, то сингулярные векторы по измерению  $n$  определены в точности до умножения на коэффициент единичной нормы. Если  $U_\alpha^{(n)}$  умножается на  $e^{i\theta}$ , то  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  должен быть умножен на обратный коэффициент  $e^{-i\theta}$ .

Сингулярные векторы по измерению  $n$ , соответствующие одному и тому же сингулярному числу по измерению  $n$ , могут быть заменены любой унитарной линейной комбинацией. Соответствующие подтензоры  $\{\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}\}$  должны быть пересчитаны обратным образом. Формально  $\mathbf{U}^{(n)}$  можно заменить на  $\mathbf{U}^{(n)}\mathbf{Q}$ , где  $\mathbf{Q}$  — блочно-диагональная матрица,

состоящая из унитарных блоков, в которой блочное разбиение соответствует разбиению  $\mathbf{U}^{(n)}$  на наборы сингулярных векторов по измерению  $n$ , соответствующих одинаковым сингулярным значениям по измерению  $n$ . При этом тензор  $\mathcal{Z}$  должен быть заменён на  $\mathcal{Z} \times_n \mathbf{Q}^H$ .

В случае вещественнозначных тензоров единственность имеется в точности до знака, что соответствует умножению на унитарную матрицу.

**Свойство 2.2** (Обобщение). HOSVD тензора второго порядка сводится к его матричному SVD.

Это свойство означает, что результат применения HOSVD к тензору с двумя измерениями, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, в точности до унитарных преобразований сингулярных векторов и матрицы сингулярных значений.

Перед формулировкой следующих свойств необходимо ввести несколько определений.

**Определение 2.5** ( $n$ -ранг).  $n$ -рангом тензора  $\mathcal{A}$  называется размерность векторного пространства, порождённого векторами измерения  $n$  этого тензора. Обозначается  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ .

*Замечание.* В отличие от матричного случая,  $n$ -ранги тензора порядка выше 2 могут в общем случае отличаться.

**Определение 2.6** (Тензорный ранг).

1. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  имеет тензорный ранг равный 1, если он представим в виде

$$\mathcal{A} = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_M,$$

где  $a_k \in \mathbb{C}^{I_k}$ , а  $\circ$  обозначает внешнее произведение.

2. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  имеет ранг  $R$ , если он представим в виде линейной комбинации  $R$  тензоров ранга 1, и такое  $R$  минимальное. Обозначение:  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$ .

*Замечание.* В общем случае ранг тензора  $\mathcal{A}$  не равен его  $n$ -рангам, даже если они все равны между собой. Более того, всегда справедливо неравенство  $\text{rank}_n(\mathcal{A}) \leq \text{rank}(\mathcal{A})$ .

**Свойство 2.3** (Связь  $n$ -ранга тензора и ранга его развёртки по измерению  $n$ ). Векторы измерения  $n$  тензора  $\mathcal{A}$  являются столбцами его развёртки по измерению  $n$  и выполняется равенство

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}_{(n)}).$$

**Свойство 2.4** (Связь  $n$ -ранга тензора и его HOSVD). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$  размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)},$$

тогда, по определению, тензор  $\mathcal{Z}$  удовлетворяет свойству упорядоченности сингулярных чисел

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех  $n \in \overline{1:M}$ . Обозначим  $r_n$  — наибольший индекс такой, что  $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$ . Тогда

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = r_n. \quad (4)$$

**Свойство 2.5** (Норма). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (1), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ ,  $n \in \overline{1:M}$ . Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\|^2 &= \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2 = \\ &= \|\mathcal{Z}\|^2. \end{aligned}$$

**Определение 2.7** (Ориентированная энергия). Ориентированной по измерению  $n$  энергией тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  в направлении вектора  $X \in \mathbb{C}^{I_n}$  единичной нормы называют выражение

$$\text{OE}_n(X, \mathcal{A}) = \|X^H \mathbf{A}_{(n)}\|^2.$$

**Свойство 2.6** (Об ориентированной энергии). Направления экстремальной ориентированной энергии по измерению  $n$  соответствуют сингулярным векторам по измерению  $n$ , причем значение экстремальной энергии равно соответствующему квадрату сингулярного значения по измерению  $n$ .

Это означает, что векторы тензора  $\mathcal{A}$  по измерению  $n$  в основном содержат вклады в направлении  $U_1^{(n)}$ ; на это направление приходится  $\sigma_1^{(n)^2}$  энергии по отношению к общему количеству энергии в тензоре. Затем ориентированная энергия по измерению  $n$  достигает экстремума в направлении  $U_2^{(n)}$ , перпендикулярном  $U_1^{(n)}$ , с величиной  $\sigma_2^{(n)^2}$ , и так далее.



**Свойство 2.7** (Приближение). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (1), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ . Определим тензор  $\hat{\mathcal{A}}$  отбрасыванием наименьших сингулярных значений  $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$  для заданных значений  $I'_n$ ,  $n \in \overline{1:M}$ , то есть заменяя нулями соответствующие части тензора  $\mathcal{Z}$ . Тогда верно

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leq \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} \left(\sigma_{i_2}^{(2)}\right)^2 + \dots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} \left(\sigma_{i_M}^{(M)}\right)^2. \quad (5)$$

Это свойство является эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Однако для тензоров ситуация совершенно иная. Отбрасывая наименьшие сингулярные значения измерения  $n$ , мы получаем тензор  $\hat{\mathcal{A}}$  с рангом столбцов равным  $I'_1$ , рангом строк равным  $I'_2$  и т.д. Но этот тензор в общем случае не является наилучшим приближением при заданных ограничениях на ранги измерений. Тем не менее, предположение об упорядочении (2) подразумевает, что «энергия»  $\mathcal{A}$  в основном сосредоточена в части, соответствующей малым значениям  $i_1, i_2, \dots, i_M$ . Следовательно, если  $\sigma_{I'_n}^{(n)} \gg \sigma_{I'_n+1}^{(n)}$  (например, если  $I'_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ , то меньшие сингулярные значения по измерению  $n$  не существенны), то  $\hat{\mathcal{A}}$  всё ещё можно считать хорошим приближением  $\mathcal{A}$ . Ошибка ограничена выражением (5).

Все утверждения выше и их доказательства приведены в статье [5].

### 3. Описание метода Tensor SSA

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 3.1** (Траекторный тензор ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $I, L : 1 \leq I, L \leq N, I + L \leq N + 1$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размерности  $I \times L \times J = N - I - L + 2$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{i,l,j} = x_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

Слои траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $I, L$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{:,j} &= \begin{pmatrix} x_j & x_{j+1} & \dots & x_{j+L-1} \\ x_{j+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{j+I-1} & \dots & \dots & x_{j+I+L-2} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{X}_{:,l} &= \begin{pmatrix} x_l & x_{l+1} & \dots & x_{l+J-1} \\ x_{l+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{l+I-1} & \dots & \dots & x_{l+I+J-2} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{X}_{i,:} &= \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} & \dots & x_{i+J-1} \\ x_{i+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{i+L-1} & \dots & \dots & x_{i+L+J-2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд  $\mathbf{X}$  и параметры  $I, L : 1 \leq I, L \leq N, I + L \leq N + 1$ . В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма. Алгоритм Tensor SSA для отделения различных компонент ряда друг от друга заключается в проведении следующих четырёх шагов.

1. Выбор параметров  $I, L$  и построение по ним траекторного тензора  $\mathcal{X}$ ;
2. Проведение HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде (3)

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}; \quad (6)$$

3. Группировка: разбиение множества индексов  $\mathfrak{S} = \{1, 2, \dots, \min(I, L, J)\}$  по смыслу на непересекающиеся множества

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, k \neq l,$$

и построение тензоров

$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$$

4. Восстановление рядов  $\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$  по тензорам  $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$  посредством их усреднения вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$ :

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,l,j) \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{i,l,j}^{(\mathfrak{S}_k)}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \{(i, l, j) | 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J, i + l + j - 2 = n\}.$$

Результатом алгоритма является набор временных рядов  $\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(m)}$  такой, что

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}^{(k)}.$$

Алгоритм Tensor SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньшего, заданного пользователем, ранга, и может быть проведён двумя различными способами.

Первый способ заключается в приближении траекторного тензора путём усечения его HOSVD. Благодаря свойствам 2.7, 2.6 такое приближение можно считать достаточно точным, хоть оно и не оптимально. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом для отделения компонент ряда, поэтому опишем его, начиная с третьего шага.

3. Третий шаг заключается в выборе ранга сигнала  $r$  и усечении тензора сингулярных значений по этому рангу. Другими словами, имея ранг сигнала  $r$  и разложение траекторного тензора  $\mathcal{X}$  в виде (6), в тензоре  $\mathcal{Z}$  заменим матрицы-слои по каждому измерению с номерами  $k > r$  на нулевые, и по полученному тензору  $\hat{\mathcal{Z}}$  построим приближение траекторного тензора  $\hat{\mathcal{X}}$ .
4. На четвёртом шаге, используя усреднение тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$  получим ряд  $\hat{\mathbf{X}}$ . Этот ряд и будем считать сигналом.

Второй способ использует метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями  $n$ -рангов — High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [10]. При заданных тензоре  $\mathcal{A}$  и наборе  $n$ -рангов  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ , результатом метода будет тензор  $\hat{\mathcal{A}}$ ,  $n$ -ранги которого совпадают с набором  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ , и который решает задачу минимизации

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\| \rightarrow \min,$$

где минимум берётся по классу тензоров с заданными  $n$ -рангами. Исходя из определения, результат метода НООИ является оптимальным, в связи с чем его можно использовать для приближения траекторного тензора ряда.

Приведём вторую реализацию алгоритма Tensor SSA для отделения сигнала от шума, используя НООИ. Первый шаг алгоритма совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.

2. На втором шаге выбирается ранг сигнала  $r$  и к полученному ранее траекторному тензору  $\mathcal{X}$  применяется НООИ с набором  $n$ -рангов  $(r, r, r)$ . В результате получаем оптимальное приближение траекторного тензора  $\mathcal{X}$  тензором  $\hat{\mathcal{X}}$  со значениями  $n$ -рангов равными  $r$ .
3. Третий шаг — восстановление ряда по тензору  $\hat{\mathcal{X}}$  совпадает с четвёртым шагом в первом варианте алгоритма Tensor SSA для выделения в ряде сигнала из шума.

## 4. Свойства Tensor SSA

В силу аналогичности свойств SVD и HOSVD, многие определения и свойства из теории SSA [1] можно перенести на тензорный случай.

### 4.1. Разделимость рядов в терминах Tensor SSA

**Утверждение 4.1.**  $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$ ,  $\hat{X} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N)$  — временные ряды длины  $N$ . Пусть ряд  $X$  является суммой этих рядов. Траекторные тензоры рядов равны соответственно:  $\tilde{\mathcal{X}}$ ,  $\hat{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{X}$ . Тогда существует сингулярное разложение тензора  $\mathcal{X}$  с параметрами  $I, L$ , которое можно представить в виде суммы сингулярных разложений тензоров  $\tilde{\mathcal{X}}$  и  $\hat{\mathcal{X}}$  с теми же параметрами в том и только том случае, когда взаимно ортогональны все подряды рядов  $\tilde{X}$  и  $\hat{X}$  длины  $I, L, J = N - I - L + 2$ , то есть

1.  $\tilde{x}_k \hat{x}_m + \dots + \tilde{x}_{k+I-1} \hat{x}_{m+I-1} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : N - I + 1},$
2.  $\tilde{x}_k \hat{x}_m + \dots + \tilde{x}_{k+L-1} \hat{x}_{m+L-1} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : N - L + 1},$
3.  $\tilde{x}_k \hat{x}_m + \dots + \tilde{x}_{k+J-1} \hat{x}_{m+J-1} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : N - J + 1}.$

*Доказательство.* Сингулярные разложения тензоров  $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{X}}$  могут быть представлены в виде следующих сумм:

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}, \\ \tilde{\mathcal{X}} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \tilde{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \tilde{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_j^{(3)}, \\ \hat{\mathcal{X}} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \hat{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \hat{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \hat{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \hat{\mathbf{U}}_j^{(3)}.\end{aligned}$$

Сумма  $\mathcal{X} = \sum_i \sum_l \sum_j \tilde{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \tilde{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_j^{(3)} + \sum_i \sum_l \sum_j \hat{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \hat{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \hat{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \hat{\mathbf{U}}_j^{(3)}$  является сингулярным разложением  $\mathcal{X}$  в том и только том случае, когда пары векторов  $\tilde{\mathbf{U}}_k^{(\sigma)}, \hat{\mathbf{U}}_m^{(\sigma)}$  взаимно ортогональны при всех возможных значениях  $\sigma, k, m$ . Это равносильно ортогональности линейных пространств  $\mathcal{L}_1^{(\sigma)}, \mathcal{L}_2^{(\sigma)}$ , построенных на векторах  $\tilde{\mathbf{U}}_k^{(\sigma)}$  и  $\hat{\mathbf{U}}_m^{(\sigma)}$  соответственно.

Рассмотрим пространства  $\mathcal{L}_1^{(1)}, \mathcal{L}_2^{(1)}$ : это пространства первых измерений тензоров  $\tilde{\mathcal{X}}$  и  $\hat{\mathcal{X}}$ , то есть пространства построенные на векторах вида  $\tilde{\mathcal{X}}_{i,l,j}$  и  $\hat{\mathcal{X}}_{i,l,j}$  соответственно. Вспоминая вид тензоров  $\tilde{\mathcal{X}}$  и  $\hat{\mathcal{X}}$  получаем, что условие ортогональности этих линейных пространств равносильно первому условию из формулировки утверждения.

Оставшиеся два условия получаются аналогично из условий ортогональности оставшихся двух пар линейных пространств.  $\square$

Из утверждения 4.1 следует, что понятие слабой разделимости ряда из теории SSA применимо и к тензорному случаю.

**Следствие 4.1.1.** *Если временные ряды  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\hat{\mathbf{X}}$  длины  $N$  слабо  $I$ - и  $L$ -разделимы в смысле теории SSA, то существует такое HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$  ряда  $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{X}} + \hat{\mathbf{X}}$ , что его можно разбить на две части, являющиеся HOSVD траекторных тензоров, составленных по рядам  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\hat{\mathbf{X}}$ .*

## 4.2. Примеры разделимости рядов в тензорном случае

Рассмотрим условия разделимости рядов  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$ ,  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$  в некоторых частных случаях.

- Отделимость от константного ряда

Пусть  $\tilde{x}_n = c \neq 0$  для  $n \in \overline{1:N}$ . Тогда необходимые и достаточные условия отделимости от него ряда  $\hat{X}$  в смысле Tensor SSA следующие:

1. Ряд  $\hat{X}$  имеет целый период  $T$ , и  $I/T$ ,  $L/T$ ,  $J/T$  — целые;
2.  $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \dots + \hat{x}_T = 0$ .

**Пример 4.1.** Ряд с элементами вида  $\tilde{x}_n = \cos(2\pi n/T + \varphi)$  длины  $N$  такой, что  $N+2$  делится нацело на  $T$ , будет слабо отделим от константного ряда при выборе параметров  $I, L$ :  $I + L < N + 1$ , делящихся нацело на  $T$ .

- Отделимость от экспоненциального ряда

Пусть  $\tilde{x}_n = e^{\alpha n}$  для  $n \in \overline{1:N}$ . Тогда необходимые и достаточные условия отделимости от него ряда  $\hat{X}$  в смысле Tensor SSA следующие:

1. Ряд  $(\tilde{x}_1\hat{x}_1, \tilde{x}_2\hat{x}_2, \dots, \tilde{x}_N\hat{x}_N)$  имеет целый период  $T$ , и  $I/T$ ,  $L/T$ ,  $J/T$  — целые;
2.  $\tilde{x}_1\hat{x}_1 + \tilde{x}_2\hat{x}_2 + \dots + \tilde{x}_N\hat{x}_N = 0$ .

**Пример 4.2.** Ряд с элементами вида  $\tilde{x}_n = e^{-\alpha n} \cos(2\pi n/T + \varphi)$  длины  $N$  такой, что  $N+2$  делится нацело на  $T$ , будет слабо отделим от ряда с элементами вида  $\hat{x}_n = e^{\alpha n}$  при выборе параметров  $I, L$ :  $I + L < N + 1$ , делящихся нацело на  $T$ .

- Отделимость от гармонического ряда

Пусть  $\tilde{x}_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$ , где  $0 < \omega < 1/2$ , и  $I, L, J > 2$ . Положим  $\hat{x}_n = \cos(2\pi\omega' n + \varphi')$ , тогда ряд  $\tilde{X}$  отделим от ряда  $\hat{X}$  в смысле Tensor SSA тогда и только тогда, когда  $\omega \neq \omega'$  и  $I\omega, I\omega', L\omega, L\omega', J\omega, J\omega'$  — целые числа.

*Замечание.* Результаты выше приведены в случае точной разделимости компонент в смысле теории SSA. В случае, когда точной разделимости нет, а есть только приближённая, в тензорном случае возникает такая ситуация, когда одни и те же одноранговые тензоры в HOSVD траекторного тензора могут быть отнесены сразу к нескольким компонентам. На данный момент это является нерешённой проблемой.

### 4.3. Ранг ряда в терминах Tensor SSA

**Утверждение 4.2.** Пусть временной ряд  $X$  имеет конечный ранг  $d$  в терминах SSA. Тогда для любых значений параметров  $I$  и  $L$  таких, что

$$d \leq \min(I, L, N - I - L + 2),$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , построенного по этому ряду с параметрами  $I$  и  $L$ , будет равно  $d$ .

Это утверждение является прямым следствием определения ранга ряда и свойства 2.4 HOSVD.

**Следствие 4.2.1.** *Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах Tensor SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.*

## 5. Примеры использования Tensor SSA

Рассмотрим несколько примеров использования Tensor SSA для анализа временных рядов.

**Пример 5.1** (Разделимость синуса и константы). Рассмотрим ряд с элементами  $x_n = 3 + \sin(2\pi n/3 + \pi/3)$ , где  $n \in \overline{0:15}$ . После построения траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с параметрами  $I = L = 6$  и его разложения получаем тензор сингулярных чисел  $\mathcal{Z}$  и матрицы сингулярных векторов  $\mathbf{U}^{(1)}$ ,  $\mathbf{U}^{(2)}$ ,  $\mathbf{U}^{(3)}$ . Так как все размерности траекторного тензора  $\mathcal{X}$  равны, его развёртки по всем измерениям совпадают, а значит совпадают и матрицы сингулярных векторов  $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}$ .

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -0.41 & 0.00 & 0.58 & 0.70 & -0.10 & 0.01 \\ -0.41 & 0.50 & -0.29 & 0.08 & 0.62 & 0.33 \\ -0.41 & -0.50 & -0.29 & 0.06 & 0.33 & -0.63 \\ -0.41 & -0.00 & 0.58 & -0.70 & 0.10 & -0.01 \\ -0.41 & 0.50 & -0.29 & -0.08 & -0.62 & -0.33 \\ -0.41 & -0.50 & -0.29 & -0.06 & -0.33 & 0.63 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Z}_{1,1,1} = -44.09,$$

$$-\mathcal{Z}_{2,2,2} = \mathcal{Z}_{3,3,2} = \mathcal{Z}_{2,3,3} = \mathcal{Z}_{3,2,3} = 2.60,$$

$$\mathcal{Z}_{2,3,2} = \mathcal{Z}_{3,2,2} = \mathcal{Z}_{2,2,3} = -\mathcal{Z}_{3,3,3} = -4.50,$$

$$\mathcal{Z}_{i,l,j} = 0 \text{ для всех остальных значений } i, l, j.$$

Видно, что первый сингулярный вектор постоянен, а второй и третий — периодические с периодом 3. Кроме того, по каждому из трёх измерений количество ненулевых сингулярных чисел равно 3 (например  $\|\mathcal{Z}_{:,1}\| > \|\mathcal{Z}_{:,2}\| = \|\mathcal{Z}_{:,3}\| > 0$ ,  $\|\mathcal{Z}_{:,j}\| = 0$  для всех остальных  $j$ ). Исходя из этого, имеет смысл отнести индекс  $\{1\}$  к константной компоненте ряда, индексы  $\{2, 3\}$  — к гармонической (синус), а остальные проигнорировать. После восстановления тензоров, полученных такой группировкой, получаем два ряда

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{X}} &= (3, 3, \dots, 3), \\ \tilde{\mathbf{X}} &= (0.86, 0, -0.86, 0.86, \dots, 0, -0.86, 0.86).\end{aligned}$$

Таким образом, константный ряд отделился от синуса.

**Пример 5.2** (Смешение двух косинусов). Рассмотрим ряд с элементами  $x_n = \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/4)$ ,  $n \in \overline{0 : 33}$ . Выбрав параметры  $I = L = 12$ , после разложения получаем тензор сингулярных значений  $\mathcal{Z}$  и, в силу равенства размерностей траекторного тензора, равные между собой матрицы сингулярных векторов  $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}$ . Тензор  $\mathcal{Z}$  имеет вид тензорного блока  $\mathcal{Z}'$  размерности  $4 \times 4 \times 4$ , окаймлённого нулями, в котором уже нельзя выделить блочно-диагональную структуру. Если рассмотреть матрицы сингулярных векторов, можно увидеть, что никакой сингулярный вектор не имеет периода равного 3 или 4:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.58 & 0 & \dots \\ -0.18 & 0.36 & 0.14 & -0.39 & \dots \\ -0.17 & -0.16 & 0.43 & 0.30 & \dots \\ 0.38 & -0.04 & -0.29 & 0.32 & \dots \\ 0.14 & 0.002 & -0.14 & -0.54 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, произошло смешение двух косинусов одинаковой амплитуды.

### 5.1. Сравнение Tensor SSA и SSA

Рассмотрим проблему отделения сигнала от шума на примерах различных рядов.

**Пример 5.3** (Отделение от экспоненты). Пусть сигнал задан временным рядом  $x_n = 2e^{0.035n}$ ,  $n \in \overline{1 : 23}$ . Подействуем на ряд белым гауссовским шумом с параметром  $\sigma^2 = 2.25$ .



Таблица 1. RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала, порождённого экспонентой.

$L$	4	6	12
MSE	0.65	0.55	<b>0.52</b>

Таблица 2. RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA сигнала, порождённого экспонентой.

Метод приближения \ $I \times L$					
	4×4	4×6	4×12	6×6	6×12
Усечение HOSVD	0.59	<b>0.56</b>	<b>0.56</b>	<b>0.56</b>	0.57
HOOI	0.58	0.55	<b>0.547</b>	0.56	0.56

В таблицах 1, 2, приведены значения отклонения восстановленного ряда от исходного ряда для различных значений параметров после использования SSA и двух вариаций Tensor SSA для выделения сигнала. RMSE здесь и далее высчитывается по 500 реализациям шума, если не указано иное.

**Пример 5.4** (Отделение от косинуса). Пусть сигнал задан временным рядом  $x_n = 30 \cos(2\pi n/12)$ ,  $n \in \overline{1:71}$ . В таблицах 3, 4, 5 приведены значения отклонения вос-

Таблица 3. RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала, порождённого косинусом.

вид шума \ $L$				
	12	24	30	36
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.82	1.42	<b>1.40</b>	1.42
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.31	1.03	<b>1.01</b>	1.03
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.88	1.37	<b>1.34</b>	1.36

становленного ряда от исходного ряда для различных вариантов шума и различных значений параметров после использования SSA и Tensor SSA. В реализациях красного шума параметр  $\delta$  был выбран равным  $\sqrt{5}$ .

**Пример 5.5** (Отделение от линейного ряда). Пусть сигнал задан временным рядом  $x_n = 2 + 0.1n$ ,  $n \in \overline{1:39}$ . Будем рассматривать два случая шума и в каждом из этих случаев по два варианта восстановления линейного сигнала из шума: по одной компоненте и по двум. В таблицах 6, 7 8, 9 приведены значения отклонения восстановленного

Таблица 4. RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA с использованием усечения HOSVD сигнала, порождённого косинусом.

$I \times L$ вид шума	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.64	1.53	1.57	1.66	1.62	<b>1.49</b>
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.18	1.12	1.14	1.21	1.19	<b>1.08</b>
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.58	<b>1.44</b>	1.47	1.57	1.54	1.46

Таблица 5. RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA с использованием HOOI сигнала, порождённого косинусом.

$I \times L$ вид шума	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.63	1.53	1.56	1.65	1.62	<b>1.49</b>
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.17	1.12	1.14	1.21	1.19	<b>1.08</b>
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.56	1.42	1.44	1.54	1.51	<b>1.39</b>

Таблица 6. RMSE восстановленного с помощью SSA линейного сигнала для разного количества компонент в восстановлении, случай большого шума.

$L$ Компонент	10	15	20
1	0.44	<b>0.42</b>	<b>0.42</b>
2	0.70	<b>0.66</b>	0.68

линейного ряда от исходного. Таблицам 6, 7 соответствует гауссовский шум с параметром  $\sigma^2 = 2.25$ , таблицам 6, 7 — гауссовский шум с параметром  $\sigma^2 = 0.04$ .

**Пример 5.6** (Случай, когда Tensor SSA срабатывает точнее, чем SSA). Пусть сигнал задан временным рядом  $x_n = \sin(2\pi n/3 + \pi/2)$ ,  $n \in \overline{1:9}$ . Подействуем на сигнал красным шумом с параметрами  $\varphi = 0.9, \delta = 0.1$ . В таблице 10 приведены результаты измерения средних отклонений восстановленного ряда от исходного для разных методов по 1000 реализаций шума.

Причины того, что в этом примере обе вариации Tensor SSA дают стабильно лучшие результаты, чем SSA, пока неизвестны и остаются для дальнейшего изучения.

Таблица 7. RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA линейного сигнала для разного количества компонент в восстановлении и разных методов восстановления, случай большого шума.

Компонент	$I \times L$	10×10	10×15	10×20	15×15	15×20
	Метод восстановления					
1	Усечение HOSVD	0.47	0.49	0.48	0.49	<b>0.46</b>
	HOOI	0.47	0.48	0.47	0.49	<b>0.45</b>
2	Усечение HOSVD	0.59	0.60	0.58	0.61	<b>0.57</b>
	HOOI	0.62	0.64	0.62	0.64	<b>0.61</b>

Таблица 8. RMSE восстановленного с помощью SSA линейного сигнала для разного количества компонент в восстановлении, случай малого шума.

Компонент	$L$	10	15	20
1		<b>0.09</b>	0.108	0.118
2		0.10	<b>0.093</b>	<b>0.093</b>

Таблица 9. RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA линейного сигнала для разного количества компонент в восстановлении и разных методов восстановления, случай малого шума.

Компонент	$I \times L$	10×10	10×15	10×20	15×15	15×20
	Метод восстановления					
1	Усечение HOSVD	0.133	0.145	0.136	0.147	<b>0.130</b>
	HOOI	0.132	0.144	0.136	0.146	<b>0.130</b>
2	Усечение HOSVD	0.123	0.130	0.125	0.133	<b>0.112</b>
	HOOI	0.123	0.130	0.124	0.133	<b>0.114</b>

Таблица 10. RMSE восстановленного с помощью различных методов короткого сигнала, порождённого синусом.

SSA	Tensor SSA (HOSVD)	Tensor SSA (HOOI)
0.116	0.110	<b>0.095</b>

## 6. Описание метода Tensor MSSA для выделения сигнала

Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T,$$

$$\mathbf{X}^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_N^{(i)}), i \in \overline{1:N}.$$

**Определение 6.1** (Траекторный тензор многомерного ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L : 1 \leq L \leq N$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размерности  $L \times K \times P$ ,  $K = N - L + 1$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{l,k,p} = x_{l+k-1}^{(p)} \quad l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, p \in \overline{1:P}.$$

Из определения следует, что  $p$ -й слой вдоль третьего измерения траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с длиной окна  $L$  является траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}^{(p)}$ , построенной по длине окна  $L$ , то есть

$$\mathcal{X}_{:,p} = \begin{pmatrix} x_1^{(p)} & x_2^{(p)} & \dots & x_K^{(p)} \\ x_2^{(p)} & x_3^{(p)} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_L^{(p)} & \dots & \dots & x_N^{(p)} \end{pmatrix}.$$

Алгоритм Tensor MSSA для выделения в ряде сигнала из шума, по аналогии с алгоритмом Tensor SSA, сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших, заданных пользователем,  $n$ -рангов. Для получения такого приближения можно использовать усечение HOSVD траекторного тензора.

На вход алгоритму подаётся многомерный временной ряд  $\mathbf{X}$  и параметр  $L : 1 \leq L \leq N$ . Алгоритм HOSVD MSSA для выделения в многомерном ряде сигнала из шума заключается в проведении следующих четырёх шагов.

1. Построение по  $P$ -мерному временному ряду  $\mathbf{X}$  траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с длиной окна  $L$ ;
2. Проведение HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде (3)

$$\mathcal{X} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \mathcal{Z}_{l,k,p} \mathbf{U}_l^{(1)} \circ \mathbf{U}_k^{(2)} \circ \mathbf{U}_p^{(3)}; \quad (7)$$

3. Выбор параметров  $R_1 \in \overline{1:L}$ ,  $R_2 \in \overline{1:K}$ ,  $R_3 \in \overline{1:P}$  и построение усечённого тензора

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{l,k,p} \mathbf{U}_l^{(1)} \circ \mathbf{U}_k^{(2)} \circ \mathbf{U}_p^{(3)};$$

4. Восстановление многомерного ряда  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}^{(P)})$  по тензору  $\tilde{\mathcal{X}}$  происходит следующим образом: ряды  $\tilde{\mathbf{X}}^{(p)}$  получаются усреднением матриц-слоёв  $\tilde{\mathcal{X}}_{:,p}$  вдоль псевдодиагоналей  $l + k = \text{const}$ .

Полученный в результате алгоритма ряд  $\tilde{\mathbf{X}}$  будем считать оценкой сигнала.

Так как шаг разложения является самым трудоёмким шагом в алгоритме, то для оценки трудоёмкости алгоритма достаточно оценить трудоёмкость HOSVD траекторного тензора. Из утверждения 2.1 следует, что вычисление HOSVD траекторного тензора размерности  $L \times K \times P$  сводится к вычислению SVD на трёх матрицах размерностей  $L \times KP$ ,  $K \times LP$ ,  $P \times LK$ . Вычисление SVD матрицы размерности  $m \times n$  имеет асимптотическую трудоёмкость, равную  $O(\min(mn^2, m^2n))$ . Таким образом, асимптотическая сложность HOSVD траекторного тензора, а следовательно и всего алгоритма, имеет вид  $O(LKP(\min(L, KP) + \min(K, LP) + \min(P, LK)))$ .

## 7. Свойства HOSVD MSSA

Пусть  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)}$  — временные ряды длины  $N$ ,  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T$  — многомерный временной ряд длины  $N$ ,  $\mathbf{H}_p$  — траекторные матрицы рядов  $\mathbf{X}^{(p)}$  с длиной окна  $L < N$ ,  $p \in \overline{1:P}$ . Обозначим  $K = N - L + 1$ .

Построим траекторную матрицу многомерного ряда  $\mathbf{X}$ :  $\mathbf{X} = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \dots : \mathbf{H}_P] \in \mathbb{R}^{L \times KP}$ , её SVD имеет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}.$$

Теперь построим траекторный тензор  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{L \times K \times P}$  этого многомерного ряда с длиной окна  $L$ , как описано в определении 6.1:  $\mathcal{X}_{:,p} = \mathbf{H}_p$ ,  $p \in \overline{1:P}$ , его HOSVD имеет вид

$$\mathcal{X} = \mathcal{Z} \times_1 \hat{\mathbf{U}}_1 \times_2 \hat{\mathbf{U}}_2 \times_3 \hat{\mathbf{U}}_3. \quad (8)$$

**Утверждение 7.1.** *Существуют такие SVD матрицы  $\mathbf{X}$  и HOSVD тензора  $\mathcal{X}$  разложения, что  $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}}_1$ .*

*Доказательство.* Из свойства 2.1 известно, что в качестве  $\hat{\mathbf{U}}_1$  можно выбрать матрицу  $\hat{\mathbf{U}}$  левых сингулярных векторов из SVD развёртки тензора  $\mathcal{X}$  по первому измерению  $[\mathcal{X}]_1$ . В свою очередь,  $[\mathcal{X}]_1 = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \dots : \mathbf{H}_P] = \mathbf{X}$ .  $\square$

Из этого утверждения и из того, что разложения SVD и HOSVD единственны с точностью до, возможно, некоторых ортогональных преобразований матриц сингулярных векторов, следует, что пространства, порождаемые левыми сингулярными векторами матрицы  $\mathbf{X}$  и сингулярными векторами первого измерения тензора  $\mathcal{X}$  совпадают.

При вычислении HOSVD тензора используется алгоритм, который последовательно вычисляет SVD развёрток этого тензора по каждому измерению, и получившиеся матрицы левых сингулярных векторов использует в качестве матриц сингулярных векторов соответствующего измерения в представлении (8). Таким образом, на практике совпадают не только пространства, порождаемые описанными выше сингулярными векторами, но и сами матрицы этих векторов.

В теории MSSA для выделения сигнала из ряда с шумом важным понятием является понятие ранга ряда.

**Определение 7.1** (Ранг многомерного ряда в теории MSSA). Число  $d$  называется рангом  $P$ -мерного ряда  $\mathbf{X}$ , если для любой длины окна  $L : d \leq \min(L, N - L + 1)$  ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$ , построенной по этой длине окна, будер равен  $d$ .

Таким образом, исходя из утверждения 7.1, ранг первого измерения траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , построенного по многомерному ряду  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L : d \leq \min(L, N - L + 1)$ , будет равен рангу  $d$  этого ряда из теории MSSA. Кроме того, для таких  $L$  ранг второго измерения этого траекторного тензора тоже будет равен  $d$ , так как  $\text{rank}_2 \mathcal{X} = \text{rank}[\mathcal{X}]_2$ , а матрица  $[\mathcal{X}]_2$  по построению совпадает с траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}$ , построенной по длине окна  $K = N - L - 1$ . Однако, ранг третьего измерения траекторного тензора  $\mathcal{X}$  не связан с рангом ряда и имеет смысл структурного различия рядов между собой.

**Определение 7.2** (HOSVD MSSA-ранг многомерного ряда). Рангом многомерного ряда в терминах HOSVD MSSA будем называть его ранг в терминах MSSA.

**Определение 7.3** (Ранг третьего измерения многомерного ряда). Рангом третьего измерения многомерного ряда будем называть ранг третьего измерения траекторного тензора этого ряда.

*Замечание.* Ранг третьего измерения определён корректно, так как по построению траекторного тензора набор векторов вдоль третьего измерения этого тензора не зависит от выбора длины окна  $L$ .

**Пример 7.1.** Пусть двумерный временной ряд  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)})^T$  состоит из временных рядов следующего вида:

$$x_n^{(m)} = a_m \sin(2\pi n \omega_m + \psi_m),$$

где  $m \in \{1, 2\}$ ,  $n \in \overline{1:N}$ ,  $a_m \neq 0$ ,  $0 < \omega_m < 1/2$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ . Обозначим за  $r$  ранг ряда  $\mathbf{X}$ , а за  $r_3$  ранг третьего измерения этого ряда. В таблице 11 представлены значения рангов этого ряда в терминах HOSVD MSSA в зависимости от различных значений параметров  $\psi_m$  и  $\omega_m$ .

Таблица 11. Ранги рядов в зависимости от параметров.

Параметры	$\psi_1 = \psi_2$	$\psi_1 \neq \psi_2$	$\omega_1 \neq \omega_2$
	$\omega_1 = \omega_2$	$\omega_1 = \omega_2$	
$r$	2	2	4
$r_3$	1	2	2

**Утверждение 7.2.** (О симметричности относительно замены длины окна) Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  и выбрана некоторая длина окна  $L$ ,  $\mathcal{X}$  — траекторный тензор этого ряда, построенный по длине окна  $L$ , а  $\mathcal{Y}$  — по длине окна  $K = N - L + 1$ , и пусть  $R_1, R_2, R_3$  — параметры, выбранные в третьем шаге алгоритма HOSVD MSSA, соответствующие  $\mathcal{X}$ , а  $R'_1, R'_2, R'_3$  — соответствующие  $\mathcal{Y}$ . Тогда если  $R_1 = R'_1, R_2 = R'_2, R_3 = R'_3$ , то оценки сигнала  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , построенные по  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  соответственно, совпадут.

*Доказательство.* По построению  $\mathcal{X}_{l,k,p} = x_{l+k-1}^{(p)} = x_{k+l-1}^{(p)} = \mathcal{Y}_{k,l,p}$ , где  $l \in \overline{1:L}$ ,  $k \in \overline{1:K}$ ,  $p \in \overline{1:P}$ . Это означает, что  $[\mathcal{X}]_1 = [\mathcal{Y}]_2$  и  $[\mathcal{X}]_2 = [\mathcal{Y}]_1$ , а  $[\mathcal{X}]_3 = [\mathcal{Y}]_3$ . Пусть усечение HOSVD  $\mathcal{X}$ , описанное в третьем шаге алгоритма, имеет вид

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{l,k,p} \mathbf{U}_l^{(1)} \circ \mathbf{U}_k^{(2)} \circ \mathbf{U}_p^{(3)},$$

тогда усечение HOSVD  $\mathcal{Y}$  будет иметь вид

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \sum_{l=1}^{R'_1} \sum_{k=1}^{R'_2} \sum_{p=1}^{R'_3} \mathcal{Z}_{l,k,p} \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_k^{(1)} \circ \mathbf{U}_p^{(3)} = \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{k,l,p} \mathbf{U}_k^{(2)} \circ \mathbf{U}_l^{(1)} \circ \mathbf{U}_p^{(3)},$$

Отсюда следует, что  $[\tilde{\mathcal{X}}]_1 = [\tilde{\mathcal{Y}}]_2$ ,  $[\tilde{\mathcal{X}}]_2 = [\tilde{\mathcal{Y}}]_1$  и  $[\tilde{\mathcal{X}}]_3 = [\tilde{\mathcal{Y}}]_3$ , а значит выполнено равенство  $\tilde{\mathcal{X}}_{l,k,p} = \tilde{\mathcal{Y}}_{k,l,p}$  или по другому  $\tilde{\mathcal{X}}_{:,p} = \tilde{\mathcal{Y}}_{:,p}^T$ , следовательно усреднения матриц  $\tilde{\mathcal{X}}_{:,p}$  и  $\tilde{\mathcal{Y}}_{:,p}$  вдоль псевдодиагоналей совпадут для всех  $p$ .  $\square$

## 8. Численные сравнения полученных методов с известными

В этой части представлены сравнения методов SSA, MSSA, 2D-SSA [9], HOOI SSA и HOSVD MSSA по точности восстановления сигнала из многомерных рядов вида

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)}), \\ \mathbf{X}^{(p)} &= (s_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, \dots, s_N^{(p)} + \varepsilon_N^{(p)}), \\ s_n^{(p)} &= a_p \cos(2\pi n \omega_p + \psi_p), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\varepsilon_n^{(p)}$  — независимые  $N(0, 25)$  величины (белый гауссовский шум), а  $s_n^{(p)}$  — элементы искомого сигнала. В качестве оценки точности восстановления сигнала было взято средне-квадратичное отклонение (RMSE) восстановленного сигнала от истинного его значения по 500 реализациям шума. Под применением одномерных методов (SSA и HOOI SSA) для выделения многомерного сигнала  $\mathbf{X}$  понимается применение этих методов к каждому из рядов  $\mathbf{X}^{(p)}$  отдельно.

### 8.1. Принцип выбора числа компонент, относимых к сигналу

В каждом из методов семейства SSA важным этапом является выбор числа компонент разложения траекторной матрицы или тензора ряда, по которым будет восстанавливаться сигнал. В теории SSA утверждается, что в общем случае для получения наибольшей точности восстановления сигнала нужно брать число компонент, равное рангу этого сигнала в терминах конкретного метода. Приведём выражения, позволяющие находить ранги сигналов вида (9), для каждого рассматриваемого метода. Ранг сигнала в терминах метода  $T$  будем обозначать  $r_T$ , например:  $r_{\text{SSA}}$  — ранг сигнала в терминах SSA,  $r_{\text{HOSVD-MSSA}}$  — в терминах HOSVD MSSA и т.д.

**SSA** В терминах SSA любой одномерный сигнал вида  $s_n = a \cos(2\pi n \omega + \psi)$ , где  $a \neq 0$ ,  $0 \leq \psi \leq 2\pi$  и  $0 \leq \omega \leq 1/2$  имеет ранг  $r_{\text{SSA}} = 2$ , если  $0 < \omega < 1/2$  и  $r_{\text{SSA}} = 1$  при  $\omega \in \{0, 1/2\}$  и  $\psi \notin \{\pi/2, 3\pi/2\}$ .



**HOOI SSA** По следствию из утверждения 4.2 ранг любого сигнала в терминах HOOI SSA совпадает с рангом этого сигнала в терминах SSA.

**MSSA** Пусть множество  $G \subseteq \overline{1 : P}$  таково, что  $\forall p_1, p_2 \in G \quad p_1 \neq p_2 \Rightarrow \omega_{p_1} \neq \omega_{p_2}$  и содержит наибольшее число элементов среди всех множеств, удовлетворяющих этому условию. Тогда в терминах MSSA ранг многомерного сигнала  $\mathbf{S} = (\mathbf{S}^{(1)}, \dots, \mathbf{S}^{(P)})$ , где элементы  $\mathbf{S}^{(p)}$  имеют вид (9), равен сумме SSA-рангов сигналов  $\mathbf{S}^{(p')}$ , где  $p'$  проходит множество  $G$ .

**HOSVD MSSA** По определению 7.2  $r_{\text{HOSVD-MSSA}} = r_{\text{MSSA}}$ . Кроме того в терминах HOSVD MSSA возникает дополнительный параметр - ранг третьего измерения, который будем обозначать  $r_3$ . Ранг третьего измерения для многомерного сигнала считается в соответствии с определением как ранг третьего измерения траекторного тензора, построенного по этому сигналу.

**2D-SSA** Элементы многомерного сигнала вида (9) можно представить в виде суммы

$$s_n^{(p)} = \sum_{m=1}^d A_m(p, n),$$

$$A_m(p, n) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi p \omega'_m) \\ \sin(2\pi p \omega'_m) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi n \omega''_m) \\ \sin(2\pi n \omega''_m) \end{pmatrix},$$

где  $(\omega'_m, \omega''_m) \neq (\omega'_j, \omega''_j)$  для  $m \neq j$  и  $\omega'_m, \omega''_m \in (0, 1/2)$ . Тогда ранг данного многомерного сигнала в терминах 2D-SSA равен сумме

$$r_{\text{2D-SSA}} = \sum_{m=1}^d \nu_m,$$

где

$$\nu_m = 2 \operatorname{rank} \begin{pmatrix} a_m & b_m & c_m & d_m \\ d_m & -c_m & -b_m & a_m \end{pmatrix}.$$

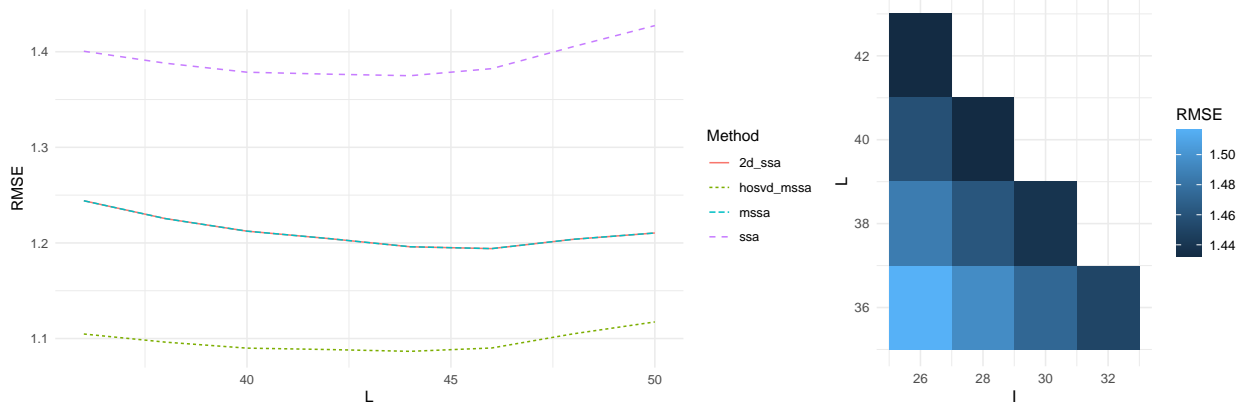
## 8.2. Численные сравнения

Рассмотрим некоторые варианты сигнала вида (9).

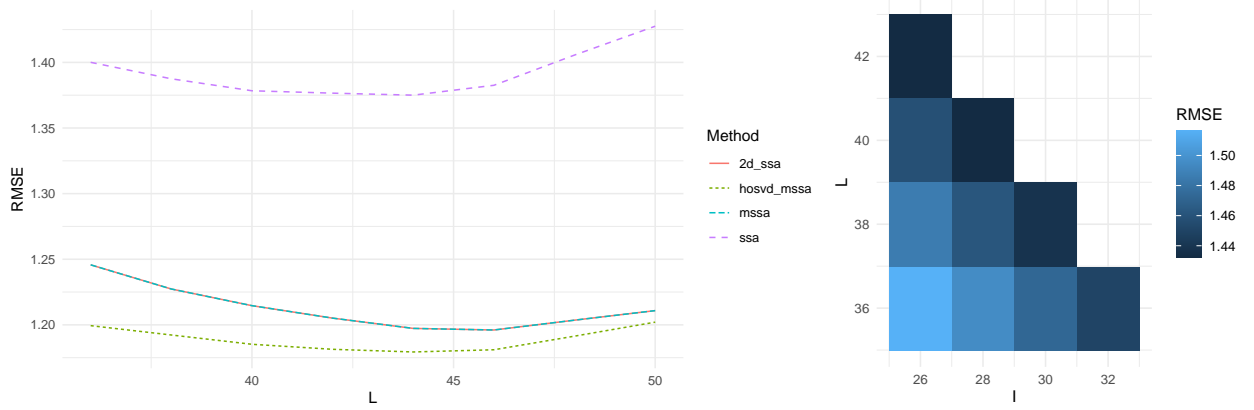
**Пример 8.1.**  $P = 2$ ,  $a_1 = 30$ ,  $a_2 = 20$ .

*Замечание.* В методе 2D-SSA параметр длины окна двумерный, то есть  $L_{xy} = (L_x, L_y)$ .

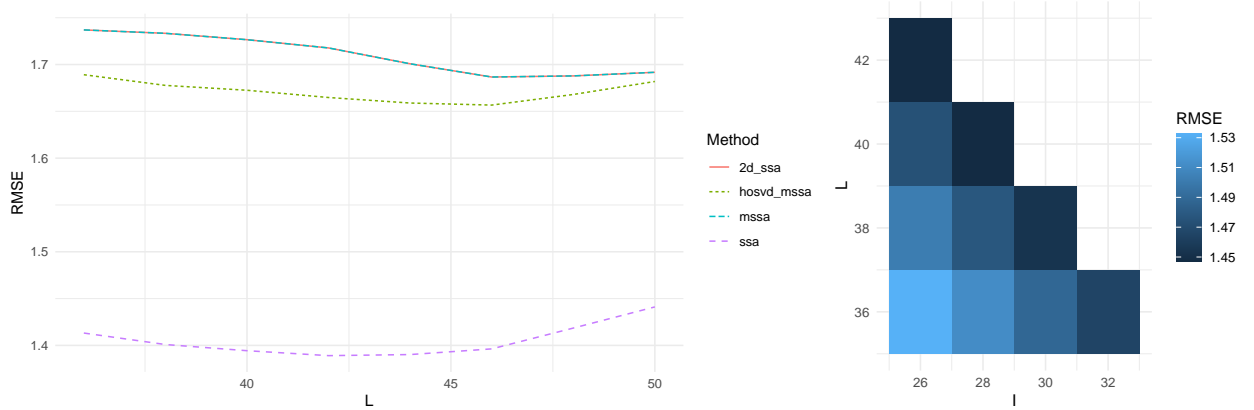
Здесь и далее полагается  $L_y = [(P + 1)/2]$  и  $L_x = L$ , где  $[t]$  обозначает взятие целой части числа  $t$ .



(a)  $\omega_1 = \omega_2 = 1/12$ ,  $\psi_1 = \psi_2 = 0$



(b)  $\omega_1 = \omega_2 = 1/12$ ,  $\psi_1 = 0$ ,  $\psi_2 = \pi/4$



(c)  $\omega_1 = 1/12$ ,  $\omega_2 = 1/8$ ,  $\psi_1 = 0$ ,  $\psi_2 = \pi/4$

Рис. 2. Зависимости точности выделения сигнала от длин окна для каждого из методов SSA, MSSA, HOSVD MSSA, 2D-SSA (слева), HOOI SSA (справа).

Таблица 12. Значения рангов сигнала из примера 8.1 для каждого метода в зависимости от параметров

Параметры	(HOOI) SSA	(HOSVD) MSSA	$r_3$	2D-SSA
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = \psi_2 = 0$	2	2	1	2
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	2	2	2	2
$\omega_1 = \frac{1}{12}, \omega_2 = \frac{1}{8}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	2	4	2	4

Таблица 13. Минимальные RMSE восстановленного с помощью различных методов сигнала из примера 8.1, для разных значений параметров.

Параметры	SSA	HOOI SSA	MSSA	HOSVD MSSA	2D-SSA
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = \psi_2 = 0$	1.37	1.43	1.19	<b>1.09</b>	1.19
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	1.38	1.43	1.20	<b>1.18</b>	1.20
$\omega_1 = \frac{1}{12}, \omega_2 = \frac{1}{8}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	<b>1.39</b>	1.45	1.69	1.66	1.69

**Пример 8.2.**  $P = 5$ .

**Пример 8.3.**  $P = 9$ .

В таблицах 12, 14, 16 приведены значения рангов сигналов в каждом из методов в зависимости от значения параметров  $\omega_p, \psi_p$  для примеров 8.1, 8.2, 8.3 соответственно. Для одномерных методов (SSA и HOOI SSA) указаны ранги каждого одномерного сигнала  $\mathbf{S}^{(p)}$ . В таблицах 13, 15, 17 приведены минимальные значения среднеквадратичного отклонения восстановленного сигнала от истинного для каждого метода и при различных значениях параметров для примеров 8.1, 8.2, 8.3 соответственно. На графиках 2, 3, 4 приведены зависимости точности восстановления сигнала от выбора параметра  $L$  для методов SSA, MSSA, HOSVD MSSA и 2D-SSA, и от выбора параметров  $I, L$  для метода HOOI SSA для примеров 8.1, 8.2, 8.3 соответственно.

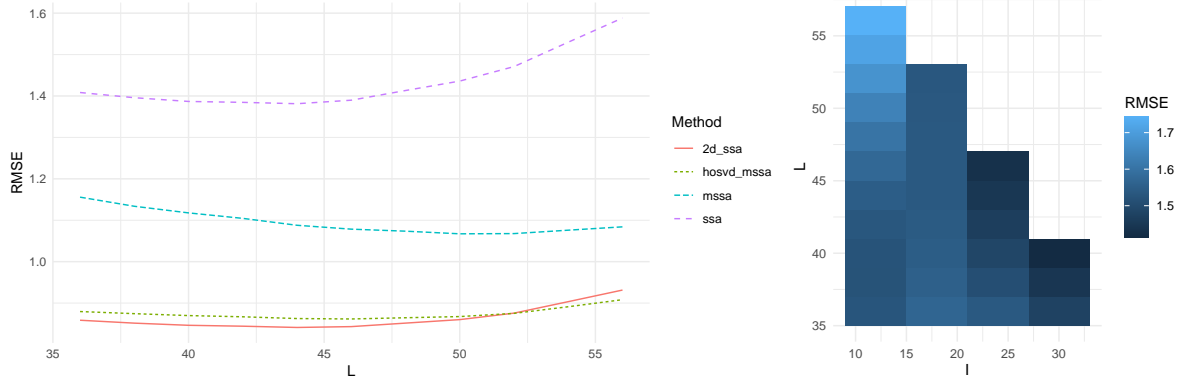
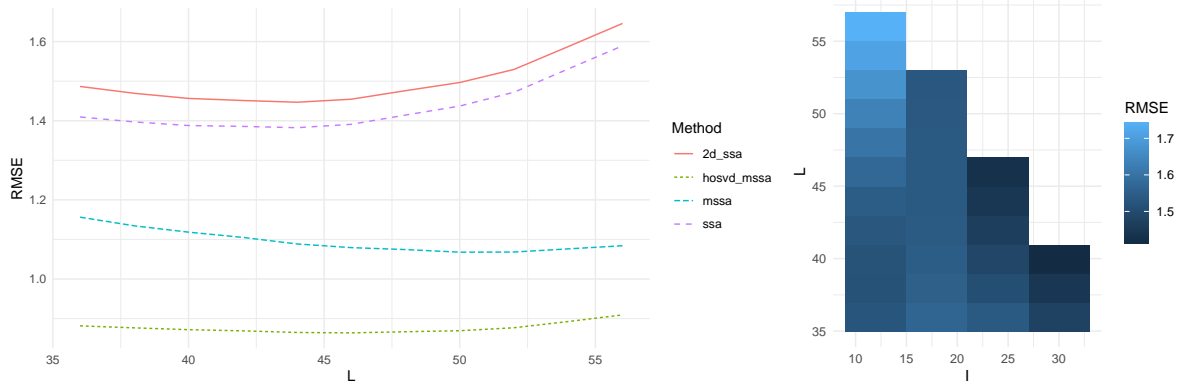
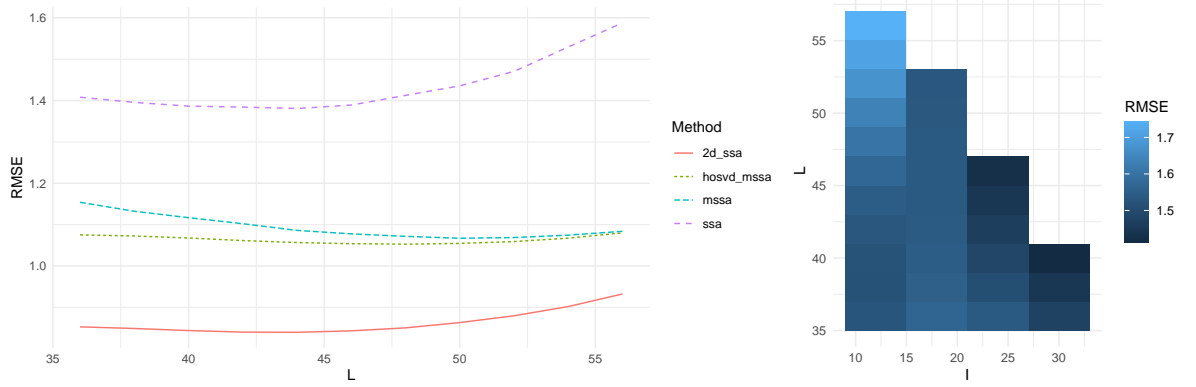
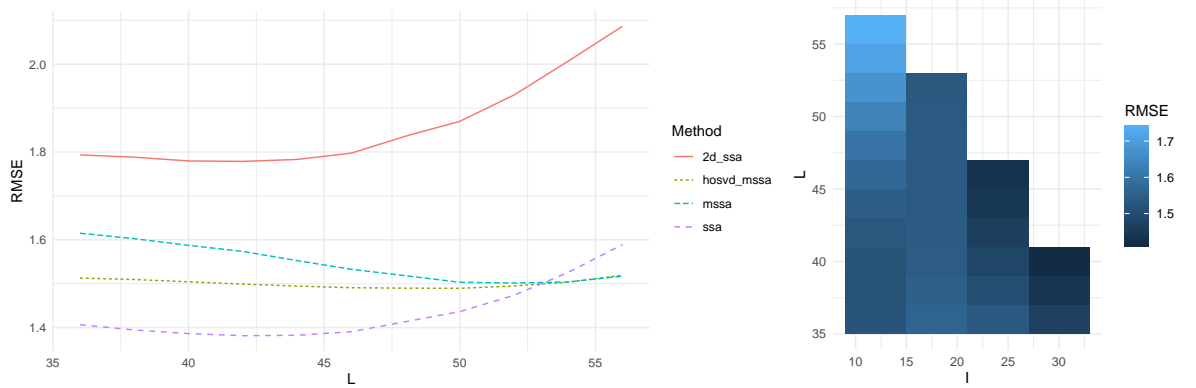
(a)  $a_p = 30$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 0$ (b)  $a_1 = a_4 = 30$ ,  $a_2 = a_5 = 20$ ,  $a_3 = 25$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 0$ (c)  $a_p = 30$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$ (d)  $a_p = 30$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1/12$ ,  $\omega_4 = \omega_5 = 1/8$ ,  $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$ 

Рис. 3. Зависимости точности выделения сигнала из примера 8.2 от длин окна для каждого из методов SSA, MSSA, HOSVD MSSA, 2D-SSA (слева), HOOI SSA (справа).

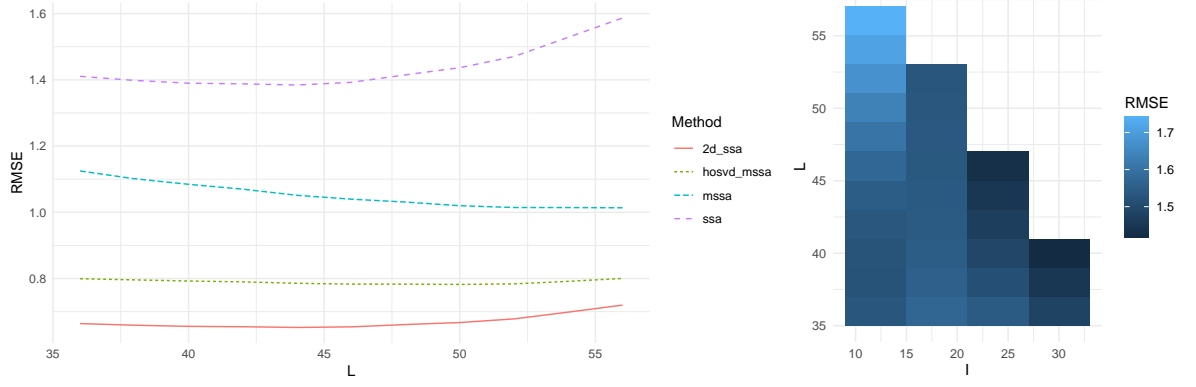
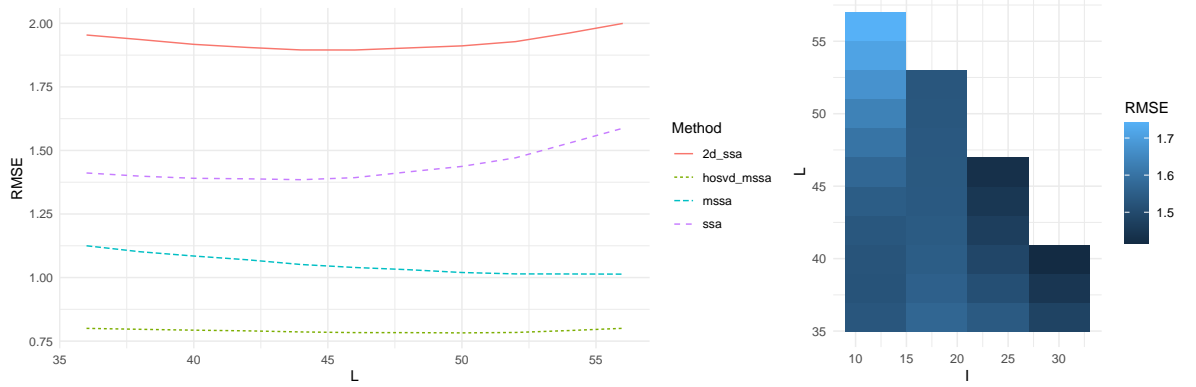
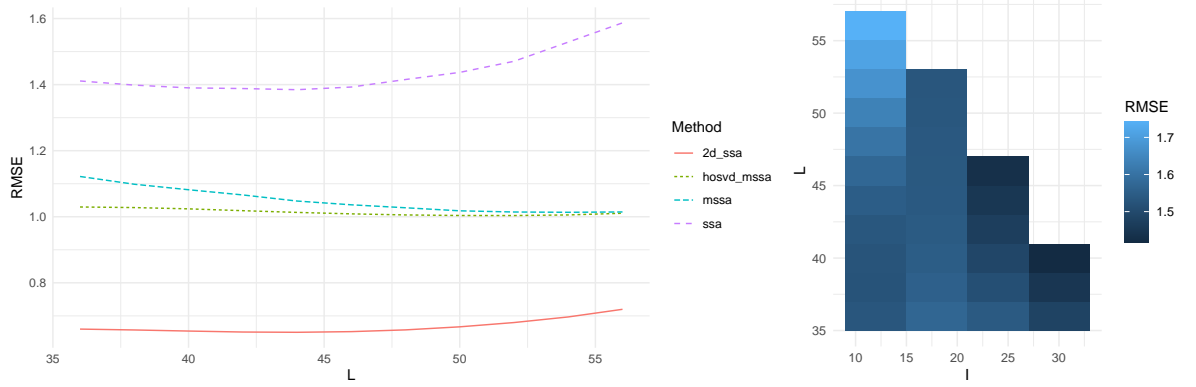
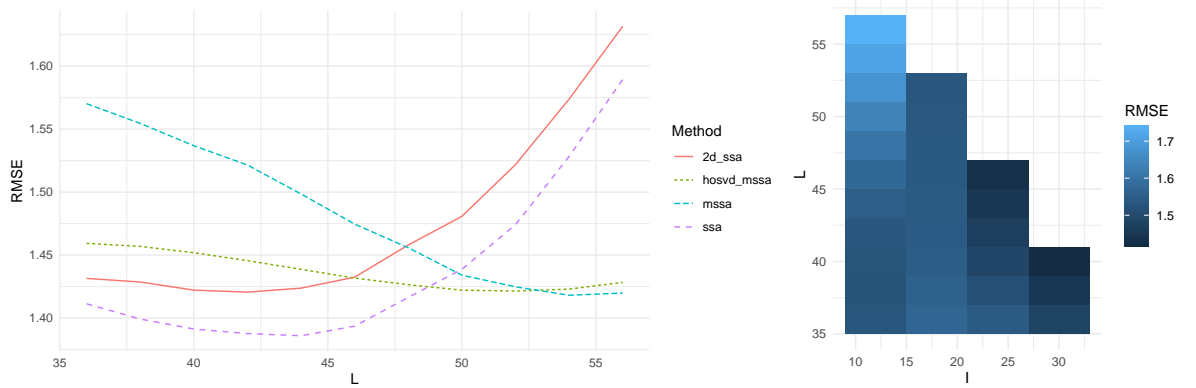
(a)  $a_p = 30$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 0$ (b)  $a_p = a_{p+5} = 30 - 2(p-1)$ ,  $1 \leq p \leq 4$ ,  $a_5 = 22$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 0$ (c)  $a_p = 30$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 2(p-1)\pi/5$ (d)  $a_p = 30$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $1 \leq p \leq 7$ ,  $\omega_8 = \omega_9 = 1/8$ ,  $\psi_p = 2(p-1)\pi/5$ 

Рис. 4. Зависимости точности выделения сигнала из примера 8.3 от длин окна для каждого из методов SSA, MSSA, HOSVD MSSA, 2D-SSA (слева), HOOI SSA (справа).

Таблица 14. Значения рангов сигнала из примера 8.2 для каждого метода в зависимости от параметров

Параметры	(HOOI) SSA	(HOSVD) MSSA	$r_3$	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	2
$a_1 = a_4 = 30$ $a_2 = a_5 = 20, a_3 = 25$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	6
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12},$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$	2	2	2	2
$a_p = 30, \psi_p = 2(p-1)\pi/3$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{12}$ $\omega_4 = \omega_5 = \frac{1}{8}$	2	4	4	10

Таблица 15. Минимальные RMSE восстановленного с помощью различных методов сигнала из примера 8.2, для разных значений параметров.

Параметры	SSA	HOOI SSA	MSSA	HOSVD MSSA	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.34	0.00	0.95	0.75	<b>0.73</b>
$a_1 = a_4 = 30$ $a_2 = a_5 = 20, a_3 = 25$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.38	1.41	1.07	<b>0.86</b>	1.45
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12}$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$	1.38	1.41	1.07	1.05	<b>0.84</b>
$a_p = 30, \psi_p = 2(p-1)\pi/3$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{12}$ $\omega_4 = \omega_5 = \frac{1}{8}$	<b>1.38</b>	1.41	1.50	1.49	1.78

Таким образом, метод HOSVD MSSA выделил сигнал точнее, чем метод MSSA во всех примерах, и оказался точнее метода 2D-SSA в случае малого числа рядов и в случае различающихся амплитуд у сигналов, причём последнее преимущество увеличи-

Таблица 16. Значения рангов сигнала из примера 8.3 для каждого метода в зависимости от параметров

Параметры	(HOOI) SSA	(HOSVD) MSSA	$r_3$	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	2
$a_p = a_{p+5} = 30 - 2(p-1), 1 \leq p \leq 4$ $a_5 = 22, \omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	10
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12},$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/5$	2	2	2	2
$a_p = 30, \psi_p = 2(p-1)\pi/5$ $\omega_p = \frac{1}{12}, 1 \leq p \leq 7$ $\omega_8 = \omega_9 = \frac{1}{8}$	2	4	4	10

Таблица 17. Минимальные RMSE восстановленного с помощью различных методов сигнала из примера 8.3, для разных значений параметров.

Параметры	SSA	HOOI SSA	MSSA	HOSVD MSSA	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.38	1.42	1.01	0.78	<b>0.65</b>
$a_p = a_{p+5} = 30 - 2(p-1)$ $1 \leq p \leq 4, a_5 = 22$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.38	1.42	1.01	<b>0.78</b>	1.90
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12}$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/5$	1.38	1.42	1.01	1.00	<b>0.65</b>
$a_p = 30, \psi_p = 2(p-1)\pi/5$ $\omega_p = \frac{1}{12}, 1 \leq p \leq 7$ $\omega_8 = \omega_9 = \frac{1}{8}$	<b>1.39</b>	1.42	1.42	1.42	1.42

лось с увеличением размерности ряда. Однако в случаях равных сигналов и сигналов с меняющейся линейно фазой метод 2D-SSA оказался точнее, чем HOSVD MSSA, причём это преимущество увеличилось при увеличении размерности ряда.

## 9. Альтернативные тензорные разложения

Помимо HOSVD, существует ещё один тип тензорных разложений: ранговое разложение тензора. Идея заключается в представлении тензора  $\mathcal{A}$  в виде линейной комбинации  $R$  тензоров ранга 1, где  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$ . Однако нахождение этого ранга в общем случае является NP-трудной задачей [11].

CANDECOMP-PARAFAC [6, 7]— итерационный метод приближения тензора суммой заданного пользователем числа тензоров ранга 1. То есть по параметру  $K$  этот метод считает наилучшее приближение входного тензора суммой  $K$  тензоров ранга 1. Заметим, что из-за отсутствия каких-либо требований к ортогональности в определении рангового разложения тензора, многие свойства, верные в теории SSA, могут потерять справедливость при использовании этого разложения.

Рассмотрим ряды  $\tilde{x}_n = 3$ ,  $\hat{x}_n = \sin(2\pi n/3)$ ,  $n \in \overline{0:15}$ . Построим по этим рядам траекторные тензоры с параметрами  $I = L = 6$ . Тогда ранг траекторного тензора  $\tilde{\mathcal{X}}$ , соответствующего константному ряду, равен 1, так как его можно представить в виде

$$\tilde{\mathcal{X}} = 3X \circ X \circ X,$$

где  $X = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ . Ранг траекторного тензора  $\hat{\mathcal{X}}$ , соответствующего синусу, равен 3, так как его можно представить в виде

$$\hat{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k X_k \circ Y_k \circ Z_k,$$



где

$$\lambda_1 = 160.56, \lambda_2 = 65.69, \lambda_3 = 123.76,$$

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3] = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.25 & 0.06 \\ 0.25 & -0.06 & -0.25 \\ -0.09 & -0.19 & 0.19 \\ -0.16 & 0.25 & 0.06 \\ 0.25 & -0.06 & -0.25 \\ -0.09 & -0.19 & 0.19 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3] = \begin{pmatrix} -0.25 & -0.15 & 0.21 \\ 0.18 & -0.10 & -0.25 \\ 0.07 & 0.25 & 0.04 \\ -0.25 & -0.15 & 0.21 \\ 0.18 & -0.10 & -0.25 \\ 0.07 & 0.25 & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, Z_3] = \begin{pmatrix} -0.10 & -0.25 & -0.01 \\ 0.25 & 0.12 & -0.24 \\ -0.15 & 0.13 & 0.25 \\ -0.10 & -0.25 & -0.01 \\ 0.25 & 0.12 & -0.24 \\ -0.15 & 0.13 & 0.25 \end{pmatrix},$$

притом точных приближений двумя тензорами ранга 1 нет.

Траекторный тензор ряда  $x_n = \tilde{x}_n + \hat{x}_n$ , построенный с параметрами  $I = L = 6$  представим в виде суммы

$$\mathcal{X} = \sum_{k=1}^4 \lambda_k X_k \circ Y_k \circ Z_k,$$

где

$$\lambda_1 = 320.17, \lambda_2 = 120.97, \lambda_3 = 209.38, \lambda_4 = 648$$

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3, X_4] = \begin{pmatrix} -0.25 & -0.25 & 0.25 & -0.17 \\ 0.11 & 0.25 & -0.04 & -0.17 \\ 0.14 & 0.00 & -0.21 & -0.17 \\ -0.25 & -0.25 & 0.25 & -0.17 \\ 0.11 & 0.25 & -0.04 & -0.17 \\ 0.14 & 0.00 & -0.21 & -0.17 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.25 & -0.25 & -0.17 \\ -0.08 & 0.21 & -0.00 & -0.17 \\ -0.17 & 0.04 & 0.25 & -0.17 \\ 0.25 & -0.25 & -0.25 & -0.17 \\ -0.08 & 0.21 & -0.00 & -0.17 \\ -0.17 & 0.04 & 0.25 & -0.17 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] = \begin{pmatrix} -0.00 & -0.14 & -0.08 & 0.17 \\ -0.25 & -0.11 & 0.25 & 0.17 \\ 0.25 & 0.25 & -0.17 & 0.17 \\ -0.00 & -0.14 & -0.08 & 0.17 \\ -0.25 & -0.11 & 0.25 & 0.17 \\ 0.25 & 0.25 & -0.17 & 0.17 \end{pmatrix},$$

притом точных приближений тремя тензорами ранга 1 нет.

По виду векторов видно, что четвёртая компонента разложения соответствует константному ряду, а остальные три имеют период равный 3. Таким образом, несмотря на отсутствие ограничений на ортогональность в определении ранговых разложений тензора, наблюдается отделимость константного ряда от периодического ряда при наличии условий слабой разделимости в терминах SSA и отсутствия шума. Однако понятия ранга в терминах SSA и в терминах CPD различаются, так как в терминах SSA синус с периодом 3 имеет ранг 2, а в терминах рангового разложения, как показано выше, такой синус имеет ранг 3.

Другим недостатком CPD является то, что это итерационный метод, причём процесс итерации начинается с генерации случайной матрицы, в связи с чем на одних и тех же данных он может выдавать разные результаты, в том числе может как сойтись, так и нет.

Возможно можно добиться лучших результатов, используя CPD или его модификации, если строить тензор по ряду другим образом и подбирать другие параметры разложения. Этот вопрос предлагается изучить в будущих работах.

## 10. Заключение

В работе было показано, что по своим свойствам Tensor SSA и Tensor MSSA с использованием HOSVD имеют много общего с Basic SSA и MSSA соответственно. Однако, есть и особенности, кардинально меняющие свойства методов, которые можно использовать для анализа временных рядов.

В результате исследования методов Tensor SSA и Tensor MSSA с HOSVD были сделаны следующие выводы: методы можно использовать для выделения сигнала, однако остался неизученным вопрос о том, как с их помощью разделять компоненты сигнала. Также, в большинстве случаев, как Tensor SSA с HOSVD, так и Tensor SSA с мультилинейной аппроксимацией, оказались хуже, чем Basic SSA в точности выделения сигнала. Удалось построить только один пример, где Basic SSA менее точно выделяет сигнал. Это противоречит результатам работы [4], где показано преимущество TSSA с мультилинейной аппроксимацией. Однако, в этой статье сравнение идет для сигнала в виде суммы двух комплексных экспонент по точности оценке частоты сигналов.

С другой стороны, метод HOSVD MSSA выделил сигнал точнее метода MSSA во всех рассмотренных случаях, но в некоторых из них данный метод оказался менее точным, чем метод 2D-SSA.

Таким образом, остались открытыми вопросы: подтвердить преимущество Tensor SSA с HOSVD для выделения сигнала, о котором утверждается в статье [4], найти методы, которые разделяют компоненты сигнала, например в работе [12] предлагается метод CPD для разделения комплексных экспонент, а также расширить теорию HOSVD MSSA.

## Список литературы

1. Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techniques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
2. Kouchaki Samaneh, Sanei Saeid. Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation // 2013 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP). — IEEE. — 2013.
3. Improved Tensor-Based Singular Spectrum Analysis Based on Single Channel Blind Source Separation Algorithm and Its Application to Fault Diagnosis / Yang Dan, Yi Cancan, Xu Zengbin, Zhang Yi, Ge Mao, and Liu Changming // Applied Sciences. — 2017. — Vol. 7, no. 4.
4. Papy J. M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
5. De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1253–1278.
6. Harshman Richard A. Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-model factor analysis. — 1970. — Vol. 16. — P. 1–84.
7. Carroll J. Douglas, Chang Jih Jie. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition // Psychometrika. — 1970. — Vol. 35. — P. 283–319.
8. Tucker Ledyard R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis // Psychometrika. — 1966. — Vol. 31. — P. 279–311.
9. Golyandina Nina, Zhigljavsky Anatoly. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — Springer Berlin, Heidelberg, 2020.
10. De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. On the Best Rank-1 and Rank- $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1324–1342.
11. Hillar Christopher J., Lim Lek-Heng. Most Tensor Problems Are NP-Hard // J. ACM. — 2013. — Vol. 60, no. 6.
12. De Lathauwer Lieven. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decompo-

sition of a Tensor in Rank- $(L_r, L_r, 1)$  Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 32, no. 4. — P. 1451–1474.