

Тензорный анализ сингулярного спектра

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчет по производственной практике (научно-исследовательская
работа) (6 семестр)

Санкт-Петербург, 2023

Tensor SSA

Тензорный анализ сингулярного спектра

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчет по производственной практике (научно-исследовательская
работа) (6 семестр)

Санкт-Петербург, 2023

Научный руководитель к.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э.,
кафедра статистического моделирования

Введение

Временной ряд длины N : $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$.
 $X = T + P + R$.

Возможные задачи:

- ❶ Выделение сигнала из ряда: нахождение $T + P$;
- ❷ Отделение компонент сигнала: нахождение T и P .

Одним из методов решения этих задач является метод Singular Spectrum Analysis ([SSA](#)) Golyandina et al. (2001), Analysis of time series structure: SSA and related techniques.

Tensor SSA

└ Введение

└ Введение

Введение

Временной ряд длины N : $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$.
 $X = T + P + R$.

Возможные задачи:

- ❶ Выделение сигнала из ряда: нахождение $T + P$;
- ❷ Отделение компонент сигнала: нахождение T и P .

Одним из методов решения этих задач является метод Singular Spectrum Analysis ([SSA](#)) Golyandina et al. (2001), Analysis of time series structure: SSA and related techniques.

Временным рядом длины N называется последовательность N чисел. В общем случае, временной ряд является суммой трёх компонент: тренда T , сезонности P и шума R .

Можно рассматривать задачи анализа временного ряда:

1. Выделение сигнала $T + P$ из ряда;
2. Отделение компонент сигнала T и P .

Одним из методов решения этих задач является метод Singular Spectrum Analysis ([SSA](#)).

Введение

SSA: ряд $X \Rightarrow$ матрица $\mathbf{X} \Rightarrow \text{SVD } \mathbf{X}$,

Tensor SSA: ряд $X \Rightarrow$ тензор $\mathcal{X} \Rightarrow$ тензорное разложение \mathcal{X} .

- Примеры тензорных разложений:
 - 1 High-order singular value decomposition (**HOSVD**);
 - 2 Canonical polyadic decomposition (CPD).
- Для выделения сигнала и оценки его параметров в работе Pary et al. (2005) применялось HOSVD, и в работе De Lathauwer et al. (2011) применялось CPD.

Задача: изучить различные варианты тензорных разложений, применить их в задаче анализа временного ряда и сравнить результаты с SSA.

Из тензорных разложений первым было выбрано HOSVD, так как оно имеет наибольшее сходство с SVD.

Tensor SSA

└ Введение

└ Введение

Введение

SSA: ряд $X \Rightarrow$ матрица $\mathbf{X} \Rightarrow \text{SVD } \mathbf{X}$,
Tensor SSA: ряд $X \Rightarrow$ тензор $\mathcal{X} \Rightarrow$ тензорное разложение \mathcal{X} .

- Примеры тензорных разложений:
 - 1 High-order singular value decomposition (HOSVD);
 - 2 Canonical polyadic decomposition (CPD).
- Для выделения сигнала и оценки его параметров в работе Pary et al. (2005) применялось HOSVD, и в работе De Lathauwer et al. (2011) применялось CPD.

Задача: изучить различные варианты тензорных разложений, применить их в задаче анализа временного ряда и сравнить результаты с SSA.
 Из тензорных разложений первым было выбрано HOSVD, так как оно имеет наибольшее сходство с SVD.

В методе SSA происходит построение особой матрицы по ряду и применение к ней сингулярного разложения.

Возможное обобщение этого метода — переход от матриц к тензорам: построение по ряду особого тензора и применение к нему некоторого тензорного разложения.

Существует множество видов тензорных разложений. Для нас интерес представляют High-Order Singular Value Decomposition (HOSVD), являющееся многомерным аналогом SVD, и Canonical Polyadic Decomposition (CPD).

Оба этих разложения были использованы в разных работах для выделения из ряда сигнала и его оценки: HOSVD — в работе [2], и CPD — в работе [3]. Была поставлена задача изучить выбранные варианты тензорных разложений, реализовать метод Tensor SSA, и сравнить с методом Basic SSA по точности выделения сигнала и компонент сигнала.

Из тензорных разложений первым было выбрано HOSVD, так как оно имеет наибольшее сходство с SVD.

Описание HOSDV

Пусть имеется тензор $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$, тогда HOSVD \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1, i_2, \dots, i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)},$$

где

- $\mathbf{U}^{(n)} = [U_1^{(n)}, \dots, U_{I_n}^{(n)}]$ — унитарные матрицы;
- Тензор $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ удовлетворяет свойствам
 - 1 полная ортогональность:

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \alpha \neq \beta,$$

- 2 упорядоченность:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|.$$

Tensor SSA

└ Известные результаты и определения

└ Описание HOSDV

Описание HOSDV

Пусть имеется тензор $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$, тогда HOSVD \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1, i_2, \dots, i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)},$$

где

- $\mathbf{U}^{(n)} = [U_1^{(n)}, \dots, U_{I_n}^{(n)}]$ — унитарные матрицы;
- Тензор $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$ удовлетворяет свойствам
 - 1 полная ортогональность:

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \alpha \neq \beta,$$
 - 2 упорядоченность:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|.$$

Любой комплекснозначный тензор \mathcal{A} размерности $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$, может быть представлен в виде суммы тензоров ранга 1, то есть внешних произведений векторов, как показано на слайде. M называется количеством измерений тензора. Такое представление называется HOSVD тензора \mathcal{A} , векторы $U_i^{(n)}$ называют i -м сингулярным вектором тензора \mathcal{A} по измерению n , нормы Фробениуса подтензора \mathcal{Z} с фиксированным n -м индексом равным i называют i -м сингулярным значением тензора \mathcal{A} по измерению n .

Свойство полной ортогональности является аналогом свойства диагональности матрицы сингулярных значений в SVD, а свойство упорядоченности собственных значений вдоль каждого измерения — аналог упорядоченности собственных значений.

Свойства HOSVD

Все свойства представлены в работе De Lathauwer et al. (2000).

- HOSVD — единственное M -ортогональное разложение.
- При $M = 2$ HOSVD совпадает с SVD.
- Пусть $\text{rank}_n(\mathcal{A})$ — размерность пространства векторов измерения n тензора. Если в HOSVD тензора \mathcal{A} r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$, то $r_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$.

•

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2 = \|\mathcal{Z}\|^2$$

$$\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|, \quad R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A}).$$

Tensor SSA

Известные результаты и определения

Свойства HOSVD

Свойства HOSVD

Все свойства представлены в работе De Lathauwer et al. (2000).

- HOSVD — единственное M -ортогональное разложение.
- При $M = 2$ HOSVD совпадает с SVD.
- Пусть $\text{rank}_n(\mathcal{A})$ — размерность пространства векторов измерения n тензора. Если в HOSVD тензора \mathcal{A} r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$, то $r_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$.

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2 = \|\mathcal{Z}\|^2$$

$$\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|, \quad R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A}).$$

1. HOSVD является единственным M -ортогональным разложением тензора, и сингулярные значения и векторы определяются с точностью до унитарных преобразований.
2. Результат применения HOSVD к тензору с двумя измерениями, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, в точности до унитарных преобразований сингулярных векторов и матрицы сингулярных значений.
3. n -рангом тензора \mathcal{A} называется размерность векторного пространства, порождённого векторами измерения n этого тензора. Обозначается $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$. Если в HOSVD тензора \mathcal{A} r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$, то $r_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$; n -ранги являются характеристикой тензора, аналогичной матричным рангам. Однако в тензорном случае, n -ранги могут различаться, поэтому для каждого измерения определяется своя характеристика.
4. Квадрат нормы тензора совпадает с суммами квадратов сингулярных значений по каждому из измерений и совпадает с квадратом нормы тензора \mathcal{Z} из разложения.

Свойства HOSVD

- Векторы тензора \mathcal{A} по измерению n в основном содержат вклады в направлении $U_1^{(n)}$, величина этого вклада равна $\sigma_1^{(n)^2}$. Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U_1^{(n)}$, с величиной $\sigma_2^{(n)^2}$, и т.д.
- Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$, тогда

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leq \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \dots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} \left(\sigma_{i_M}^{(M)}\right)^2.$$

Tensor SSA

└ Известные результаты и определения

└ Свойства HOSVD

Свойства HOSVD

- Векторы тензора \mathcal{A} по измерению n в основном содержат вклады в направлении $U_1^{(n)}$, величина этого вклада равна $\sigma_1^{(n)^2}$. Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U_1^{(n)}$, с величиной $\sigma_2^{(n)^2}$, и т.д.

- Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$, тогда

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leq \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \dots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} \left(\sigma_{i_M}^{(M)}\right)^2.$$

- Векторы тензора \mathcal{A} по измерению n в основном содержат вклады в направлении $U_1^{(n)}$, и вклад в этом направлении равен $\sigma_1^{(n)^2}$. Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U_1^{(n)}$, с величиной $\sigma_2^{(n)^2}$, и так далее.
- Пусть $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$. Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$ для заданных значений I'_n , $n \in \overline{1:M}$, то есть заменяя нулями соответствующие части тензора \mathcal{Z} . Тогда квадрат нормы разности тензоров не превосходит суммы квадратов отброшенных сингулярных значений.

Эти свойства являются эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Однако для тензоров ситуация совершенно иная. Тензор, полученный усечением HOSVD в общем случае не является наилучшим приближением при заданных ограничениях на ранги измерений, но это приближение всё же можно считать достаточно точным.

Описание метода HOSVD SSA

Имеется временной ряд $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Приведём формулировки алгоритма HOSVD SSA для решения различных задач.

Входные данные алгоритма: $I, L : 1 \leq I, L \leq N, I + L \leq N + 1$.

Траекторный тензор: тензор размерности

$I \times L \times J = N - I - J + 2$, строится по ряду:

$$\mathcal{X}_{i,l,j} = x_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

Слои траекторного тензора:

$$\mathcal{X}_{:,j} = \begin{pmatrix} x_j & x_{j+1} & \dots & x_{j+L-1} \\ x_{j+1} & x_{j+2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{j+I-1} & \dots & \dots & x_{j+I+L-2} \end{pmatrix}.$$

Tensor SSA

└ Описание HOSVD SSA и его свойства

└ Описание метода HOSVD SSA

Описание метода HOSVD SSA

Имеется временной ряд $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Приведём формулировки алгоритма HOSVD SSA для решения различных задач.

Входные данные алгоритма: $I, L : 1 \leq I, L \leq N, I + L \leq N + 1$.

Траекторный тензор: тензор размерности

$I \times L \times J = N - I - J + 2$, строится по ряду:

$$\mathcal{X}_{i,l,j} = x_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

Слой траекторного тензора:

$$\mathcal{X}_{:,j} = \begin{pmatrix} x_j & x_{j+1} & \dots & x_{j+L-1} \\ x_{j+1} & x_{j+2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{j+I-1} & \dots & \dots & x_{j+I+L-2} \end{pmatrix}.$$

Пусть имеется временной ряд $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$. Приведём формулировки алгоритма HOSVD SSA для решения различных задач. Входные данные алгоритма: два числа $I, L : 1 \leq I, L \leq N, I + L \leq N + 1$. Введём понятие траекторного тензора: это тензор, составленный из элементов ряда таким образом, что его i, l, j -й элемент равен $i + l + j - 2$ -му элементу ряда. На слайде представлен слой траекторного тензора, полученный фиксированием третьего измерения индексом j . Похожим образом выглядят и остальные слои.

HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

Задача: отделение компонент сигнала в ряде.

- ❶ **Вложение:** выбор параметров I, L и построение по ним траекторного тензора \mathcal{X} ;
- ❷ **Разложение:** Проведение HOSVD траекторного тензора \mathcal{X} , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J z_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)};$$

Tensor SSA

└ Описание HOSVD SSA и его свойства

└ HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

Задача: отделение компонент сигнала в ряде.

- ❶ **Вложение:** выбор параметров I, L и построение по ним траекторного тензора \mathcal{X} ;
- ❷ **Разложение:** Проведение HOSVD траекторного тензора \mathcal{X} , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J z_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)};$$

Рассмотрим задачу отделения компонент сигнала в ряде.

1. Первый шаг алгоритма заключается в выборе параметров I, L и построение по ним траекторного тензора ряда.
2. Второй шаг алгоритма заключается в проведении разложения HOSVD траекторного тензора. В результате получается представление в виде суммы тензоров ранга 1 (то есть внешних произведений векторов).

HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

- ③ **Группировка:** разбиение множества индексов $\mathfrak{S} = \{1, 2, \dots, \min(I, L, J)\}$ по смыслу на непересекающиеся множества \mathfrak{S}_k , $k \in \overline{1:m}$ и построение по этому разбиению тензоров

$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$$

- ④ **Восстановление:** получение рядов $\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ по тензорам $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$.

Результат алгоритма: набор рядов $\mathbf{X}^{(k)}$ таких, что

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}^{(k)}.$$

Tensor SSA

└ Описание HOSVD SSA и его свойства

└ HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

- **Группировка:** разбиение множества индексов $\mathfrak{S} = \{1, 2, \dots, \min(I, L, J)\}$ по смыслу на непересекающиеся множества \mathfrak{S}_k , $k \in \overline{1:m}$ и построение по этому разбиению тензоров

$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$$

- **Восстановление:** получение рядов $\mathbf{X}^{(k)} = \mathbf{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ по тензорам $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$.

Результат алгоритма: набор рядов $\mathbf{X}^{(k)}$ таких, что

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}^{(k)}.$$

1. Третий шаг: группировка. На этом шаге множество индексов суммирования разбивается на непересекающиеся множества по смыслу, и по этим множествам определяется набор тензоров, соответствующих различным компонентам сигнала.
2. Четвёртый шаг: восстановление. На этом шаге полученные после группировки тензоры усредняются вдоль плоскостей с фиксированным значением суммы индексов.

В результате усреднения получается набор временных рядов, в сумме дающий исходный ряд, этот набор и будет результатом алгоритма.

HOSVD SSA: отделение сигнала усечением HOSVD

Задача: выделение сигнала из ряда.

Способы реализации HOSVD SSA для решения этой задачи: **усечение HOSVD** и High-order orthogonal iteration (**HOOI**).

Начнём с усечения HOSVD.

Первые два шага в этом алгоритме — вложение и разложение, были описаны выше.

- ③ **Усечение:** выбор ранга сигнала r и обнуление матриц-слоёв тензора \mathcal{Z} с номерами $k > r$ по каждому измерению. Построение по этому усечению тензора $\hat{\mathcal{X}}$.
- ④ **Восстановление:** усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$.

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд \hat{X} будем считать сигналом.

Tensor SSA

└ Описание HOSVD SSA и его свойства

└ HOSVD SSA: отделение сигнала усечением HOSVD

HOSVD SSA: отделение сигнала усечением HOSVD

Задача: выделение сигнала из ряда.

Способы реализации HOSVD SSA для решения этой задачи: **усечение HOSVD** и High-order orthogonal iteration (**HOOI**). Начнём с усечения HOSVD.

Первые два шага в этом алгоритме — вложение и разложение, были описаны выше.

- ③ **Усечение:** выбор ранга сигнала r и обнуление матриц-слоёв тензора \mathcal{Z} с номерами $k > r$ по каждому измерению. Построение по этому усечению тензора $\hat{\mathcal{X}}$.
- ④ **Восстановление:** усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$.

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд \hat{X} будем считать сигналом.

Рассмотрим задачу выделения сигнала из ряда. Алгоритм HOSVD SSA для решения этой задачи может быть проведён двумя различными способами: используя усечение HOSVD и используя High-order orthogonal iteration (о втором будет сказано позже).

Первый способ заключается в усечении сингулярного разложения траекторного тензора. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом для отделения компонент ряда, поэтому опишем его, начиная с третьего шага.

3. Третий шаг заключается в выборе ранга сигнала r и усечении тензора сингулярных значений по этому рангу. Другими словами, имея ранг сигнала r и разложение траекторного тензора \mathcal{X} , в тензоре \mathcal{Z} заменим матрицы-слои по каждому измерению с номерами $k > r$ на нулевые, и по полученному тензору построим приближение траекторного тензора $\hat{\mathcal{X}}$.
4. На четвёртом шаге, используя усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$ получим ряд \hat{X} . Этот ряд и будем считать сигналом.

Стоит отметить, что этот способ не является оптимальным.

HOSVD SSA: отделение сигнала с помощью HOOI

Задача: выделение сигнала из ряда.

Второй способ использует HOOI — метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями n -рангов. В отличие от усечения, этот метод является оптимальным.

Первый шаг алгоритма — вложение, совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.

- 2 **HOOI:** Выбор ранга сигнала r и применение к \mathcal{X} HOOI с набором n -рангов (r, r, r) . Результат — оптимальное приближение тензором $\hat{\mathcal{X}}$ с n -рангами r .
- 3 **Восстановление:** усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ аналогично восстановлению в варианте с усечением.

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд \hat{X} будем считать сигналом.

Tensor SSA

└ Описание HOSVD SSA и его свойства

└ HOSVD SSA: отделение сигнала с помощью HOOI

HOSVD SSA: отделение сигнала с помощью HOOI

Задача: выделение сигнала из ряда.

Второй способ использует HOOI — метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями n -рангов. В отличие от усечения, этот метод является оптимальным.

Первый шаг алгоритма — вложение, совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.

- 2 **HOOI:** Выбор ранга сигнала r и применение к \mathcal{X} HOOI с набором n -рангов (r, r, r) . Результат — оптимальное приближение тензором $\hat{\mathcal{X}}$ с n -рангами r .
- 3 **Восстановление:** усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ аналогично восстановлению в варианте с усечением.

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд \hat{X} будем считать сигналом.

Второй способ использует метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями n -рангов — High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [?]. В отличие от усечения, этот метод является оптимальным, в том смысле, что на тензоре, полученном этим методом достигается минимум расстояния, в смысле нормы Фробениуса, до исходного тензора по всем тензорам с данными ограничениями на ранги.

Приведём вторую реализацию алгоритма HOSVD SSA для отделения сигнала от шума, используя HOOI. Первый шаг алгоритма — вложение, совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.

2. На втором шаге выбирается ранг сигнала r и к полученному ранее траекторному тензору \mathcal{X} применяется HOOI с набором n -рангов (r, r, r) . В результате получаем оптимальное приближение траекторного тензора \mathcal{X} тензором $\hat{\mathcal{X}}$ со значениями n -рангов равными r .
3. Третий шаг — восстановление ряда по тензору $\hat{\mathcal{X}}$ усреднением совпадает с четвёртым шагом (восстановлением) в первом варианте алгоритма для выделения сигнала из ряда.

Полученный усреднением ряд \hat{X} будем считать сигналом.

Свойства HOSVD SSA, разделимость рядов

Разделимость и **ранг** рядов являются важными понятиями в теории SSA. Рассмотрим эти понятия для алгоритма HOSVD SSA

1 Разделимость рядов

Утверждение

Если временные ряды \tilde{X} и \hat{X} длины N слабо I - и L -разделимы в смысле теории SSA, то существует такое HOSVD траекторного тензора \mathcal{X} ряда $X = \tilde{X} + \hat{X}$, что его можно в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов \tilde{X} и \hat{X} .

Понятие слабой разделимости рядов из SSA применимо к тензорному случаю

Tensor SSA

└ Описание HOSVD SSA и его свойства

└ Свойства HOSVD SSA, разделимость рядов

Свойства HOSVD SSA, разделимость рядов

Разделимость и ранг рядов являются важными понятиями в теории SSA. Рассмотрим эти понятия для алгоритма HOSVD SSA

1 Разделимость рядов

Утверждение

Если временные ряды \tilde{X} и \hat{X} длины N слабо I - и L -разделимы в смысле теории SSA, то существует такое HOSVD траекторного тензора \mathcal{X} ряда $X = \tilde{X} + \hat{X}$, что его можно в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов \tilde{X} и \hat{X} .

Понятие слабой разделимости рядов из SSA применимо к тензорному случаю

Метод SSA хорошо изучен и важную роль в теории играют понятия разделимости и ранга рядов. Рассмотрим эти понятия для алгоритма HOSVD SSA.

Первое утверждение о разделимости позволяет перенести понятие слабой разделимости рядов из теории SSA на тензорный случай.

Само утверждение заключается в том, что если временные ряды \tilde{X} и \hat{X} длины N слабо I - и L -разделимы в смысле теории SSA, то существует такое сингулярное разложение траекторного тензора \mathcal{X} ряда $X = \tilde{X} + \hat{X}$, что его можно в виде суммы сингулярных разложений траекторных тензоров, составленных по рядам \tilde{X} и \hat{X} .

Доказательство утверждения следует из ортогональности сингулярных векторов в HOSVD.

Свойства HOSVD SSA, ранг ряда

② Ранг ряда

Утверждение

Пусть временной ряд X имеет конечный ранг d в терминах SSA. Тогда для любых значений параметров I и L таких, что

$$d \leq \min(I, L, N - I - L + 2),$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в HOSVD траекторного тензора \mathcal{X} этого ряда с параметрами I и L будет равно d .

Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HOSVD SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

Tensor SSA

└ Описание HOSVD SSA и его свойства

└ Свойства HOSVD SSA, ранг ряда

Свойства HOSVD SSA, ранг ряда

● Ранг ряда

Утверждение

Пусть временной ряд X имеет конечный ранг d в терминах SSA. Тогда для любых значений параметров I и L таких, что

$$d \leq \min(I, L, N - I - L + 2),$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в HOSVD траекторного тензора \mathcal{X} этого ряда с параметрами I и L будет равно d .

Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HOSVD SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

Второе утверждение о ранге ряда говорит о том, что понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HOSVD SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

Само утверждение звучит заключается в том, что если ряд имеет конечный ранг d , то для любых допустимых параметров I, L количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в сингулярном разложении траекторного тензора \mathcal{X} будет равно d .

Доказательство этого утверждения следует из свойств n -рангов сингулярного разложения.

Примеры слабой разделимости

- Экспонента и косинус с экспоненциально-модулированной амплитудой: $\tilde{x}_n = e^{-\alpha n} \cos(2\pi n/T + \varphi)$, $\hat{x}_n = e^{\alpha n}$, $n \in \overline{1:N}$.

Если $(N+2) \vdots T$, то при выборе $I, L: I+L < N+1$, делящихся нацело на T \tilde{X} и \hat{X} слабо разделимы.

- Два косинуса: $\tilde{x}_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$, $\hat{x}_n = \cos(2\pi\omega' n + \varphi')$, $0 < \omega < 1/2$. тогда ряд \tilde{X} отделим от ряда \hat{X} в смысле Tensor SSA тогда и только тогда, когда \tilde{X} и \hat{X} слабо разделимы тогда и только тогда, когда $\omega \neq \omega'$, $I, L, J > 2$ и $I\omega, I\omega', L\omega, L\omega', J\omega, J\omega'$ — целые числа.

В последнем примере при одинаковых амплитудах происходит смешение компонент и в теории SSA говорят, что наблюдается приближённая разделимость.

Как формализовать приближённую и точную разделимость в теории HOSVD SSA пока неясно.

Tensor SSA

└ Применение HOSVD SSA

└ Примеры слабой разделимости

Примеры слабой разделимости

- Экспонента и косинус с экспоненциально-модулированной амплитудой: $\tilde{x}_n = e^{-\alpha n} \cos(2\pi n/T + \varphi)$, $\hat{x}_n = e^{\alpha n}$, $n \in \overline{1:N}$.
Если $(N+2) \vdots T$, то при выборе $I, L: I+L < N+1$, делящихся нацело на T \tilde{X} и \hat{X} слабо разделимы.
- Два косинуса: $\tilde{x}_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$, $\hat{x}_n = \cos(2\pi\omega' n + \varphi')$, $0 < \omega < 1/2$. тогда ряд \tilde{X} отделим от ряда \hat{X} в смысле Tensor SSA тогда и только тогда, когда \tilde{X} и \hat{X} слабо разделимы тогда и только тогда, когда $\omega \neq \omega'$, $I, L, J > 2$ и $I\omega, I\omega', L\omega, L\omega', J\omega, J\omega'$ — целые числа.

В последнем примере при одинаковых амплитудах происходит смешение компонент и в теории SSA говорят, что наблюдается приближённая разделимость.
Как формализовать приближённую и точную разделимость в теории HOSVD SSA пока неясно.

Рассмотрим примеры слабо разделимых в терминах HOSVD SSA рядов.

1. Ряд косинуса с экспоненциально-модулированной амплитудой слабо отделим от ряда экспоненты той же степени, если $N+2$ делится нацело на период косинуса и выбранные параметры делятся нацело на период.
2. Ряды, порождённые косинусами с разными частотами слабо отделимы, если все измерения траекторного тензора имеют размерность больше 2, и делятся нацело на периоды обоих косинусов.

В последнем примере при одинаковых амплитудах происходит смешение компонент.

В SSA эта ситуация формализована, в HOSVD SSA пока неясно как можно формализовать приближённую и точную разделимость.

Сравнение HOSVD SSA и Basic SSA

- $x_n = 2e^{0.035n}$, шум — белый гауссовский, $\sigma^2 = 2.25$;
- $x_n = 2 + 0.1n$, шум — белый гауссовский, $\sigma_1^2 = 2.25$, $\sigma_2^2 = 0.04$;
- $x_n = 30 \cos(2\pi n/12)$, шум — белый гауссовский, $\sigma^2 = 25$, и красный, $\delta = \sqrt{5}$, $\varphi_1 = 0.5$, $\varphi_2 = 0.9$.

Оценка точности — RMSE по 500 реализациям шума: X — ряд длины N , S_i — выделенный в i -м эксперименте сигнал, тогда

$$\widehat{\text{RMSE}}(m) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \widehat{\text{MSE}}(S_i, X)}, \quad \widehat{\text{MSE}}(S, X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (s_i - x_i)^2.$$

Во всех этих случаях метод SSA показал точность отделения сигнала выше, чем HOSVD SSA.

Tensor SSA

└ Применение HOSVD SSA

└ Сравнение HOSVD SSA и Basic SSA

Сравнение HOSVD SSA и Basic SSA

- $x_n = 2e^{0.035n}$, шум — белый гауссовский, $\sigma^2 = 2.25$;
- $x_n = 2 + 0.1n$, шум — белый гауссовский, $\sigma_1^2 = 2.25$, $\sigma_2^2 = 0.04$;
- $x_n = 30 \cos(2\pi n/12)$, шум — белый гауссовский, $\sigma^2 = 25$, и красный, $\delta = \sqrt{5}$, $\varphi_1 = 0.5$, $\varphi_2 = 0.9$.

Оценка точности — RMSE по 500 реализациям шума: X — ряд длины N , S_i — выделенный в i -м эксперименте сигнал, тогда

$$\widehat{\text{RMSE}}(m) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \widehat{\text{MSE}}(S_i, X)}, \quad \widehat{\text{MSE}}(S, X) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (s_i - x_i)^2.$$

Во всех этих случаях метод SSA показал точность отделения сигнала выше, чем HOSVD SSA.

Были проведены численные измерения точности восстановления сигнала при использовании SSA и предложенных методов HOSVD SSA на примерах трёх рядов: порождённого экспонентой, линейного и косинуса.

На экспоненциальный ряд действовали белым шумом и восстанавливали по одной компоненте.

Для линейного ряда рассматривались ситуации большого и малого шума и в обеих ситуациях сравнивалось восстановление по одной и двум компонентам.

На ряд косинуса действовали белым шумом и красным с разными параметрами.

Шло сравнение точности метода SSA и методов HOSVD SSA с использованием усечения и HOOI. Во всех приведённых выше случаях метод SSA оказался точнее остальных.

Оценка точности бралась равной корню из среднего значения среднеквадратичного отклонения восстановленного ряда от исходного по 500 реализациям шума.

Сравнение HOSVD SSA и Basic SSA

Таблица: RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала, порождённого косинусом. $N = 71$

L вид шума	12	24	30	36
белый, $\sigma^2 = 25$	1.82	1.42	1.40	1.42
красный, $\varphi = 0.5$	1.31	1.03	1.01	1.03
красный, $\varphi = 0.9$	1.88	1.37	1.34	1.36

Таблица: RMSE восстановленного с помощью HOSVD SSA с использованием HOOI сигнала, порождённого косинусом. $N = 71$

$I \times L$ вид шума	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
белый, $\sigma^2 = 25$	1.63	1.53	1.56	1.65	1.62	1.49
красный, $\varphi = 0.5$	1.17	1.12	1.14	1.21	1.19	1.08
красный, $\varphi = 0.9$	1.56	1.42	1.44	1.54	1.51	1.39

Tensor SSA

└ Применение HOSVD SSA

└ Сравнение HOSVD SSA и Basic SSA

Сравнение HOSVD SSA и Basic SSA

Таблица: RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала, порождённого косинусом. $N = 71$

L вид шума	12	24	30	36
белый, $\sigma^2 = 25$	1.82	1.42	1.40	1.42
красный, $\varphi = 0.5$	1.31	1.03	1.01	1.03
красный, $\varphi = 0.9$	1.88	1.37	1.34	1.36

Таблица: RMSE восстановленного с помощью HOSVD SSA с использованием HOOI сигнала, порождённого косинусом. $N = 71$

$I \times L$ вид шума	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
белый, $\sigma^2 = 25$	1.63	1.53	1.56	1.65	1.62	1.49
красный, $\varphi = 0.5$	1.17	1.12	1.14	1.21	1.19	1.08
красный, $\varphi = 0.9$	1.56	1.42	1.44	1.54	1.51	1.39

На этом слайде показан результат сравнения SSA и HOSVD SSA с использованием HOOI на примере ряда, порождённого косинусом для разных видов шума. Во всех случаях SSA показал лучший результат, чем HOSVD SSA.

Особый случай

Приведём особый пример, в котором HOSVD SSA оказался точнее базового SSA.

$$x_n = \sin(2\pi n/3 + \pi/2), n \in \overline{1:9}.$$

Шум: красный с параметрами $\delta = 0.1$, $\varphi = 0.9$.

Таблица: RMSE восстановленного с помощью различных методов короткого сигнала, порождённого синусом.

SSA	HOSVD SSA (HOSVD)	HOSVD SSA (HOOI)
0.116	0.110	0.095

Tensor SSA

└ Применение HOSVD SSA

└ Особый случай

Особый случай

Приведём особый пример, в котором HOSVD SSA оказался точнее базового SSA.

$$x_n = \sin(2\pi n/3 + \pi/2), n \in \overline{1:9}.$$

Шум: красный с параметрами $\delta = 0.1$, $\varphi = 0.9$.

Таблица: RMSE восстановленного с помощью различных методов короткого сигнала, порождённого синусом.

SSA	HOSVD SSA (HOSVD)	HOSVD SSA (HOOI)
0.116	0.110	0.095

Был найден случай временного ряда и шума, для которого метод HOSVD SSA с использованием HOOI оказался в среднем точнее, чем SSA.

Сигнал задан коротким синусом со слайда, на него действовали красным шумом с параметрами $\delta = 0.1$, $\varphi = 0.9$.

Отклонение считалось аналогично предыдущим примерам по 500 реализациям шума. Из таблицы видно, что в случае так заданного ряда, метод HOSVD SSA оказывается точнее стандартного SSA, причём самым точным оказался метод с использованием HOOI.

Причины данного явления на данном этапе остаются неизвестными.

Заклучение

Таким образом:

- Описан и реализован алгоритм HOSVD SSA.
- Выведены аналоги важных свойств SSA для метода HOSVD SSA.
- Описаны примеры использования метода.
- Проведено численное сравнение точности методов HOSVD SSA и SSA, найден особый случай.

Остаётся для изучения:

- Изучение причин возникновения особого случая.
- Определение точной и приближённой разделимости, нахождение метода отделения компонент при отсутствии точной.
- Возможность применения других тензорных разложений (CPD).
- Подтверждение результатов, утверждающих о преимуществах Tensor SSA над SSA.

Tensor SSA

└─Заклучение

└─Заклучение

Заклучение

Таким образом:

- Описан и реализован алгоритм HOSVD SSA.
- Выведены аналоги важных свойств SSA для метода HOSVD SSA.
- Описаны примеры использования метода.
- Проведено численное сравнение точности методов HOSVD SSA и SSA, найден особый случай.

Остаётся для изучения:

- Изучение причин возникновения особого случая.
- Определение точной и приближённой разделимости, нахождение метода отделения компонент при отсутствии точной.
- Возможность применения других тензорных разложений (CPD).
- Подтверждение результатов, утверждающих о преимуществах Tensor SSA над SSA.





В результате работы

- был описан и реализован алгоритм HOSVD SSA;
- были выведены аналоги важных свойств SSA для метода HOSVD SSA;
- Были описаны примеры использования метода;
- было проведено численное сравнение точности методов HOSVD SSA и SSA, найден особый случай.

Для дальнейшего изучения остаётся

- изучение причин возникновения особого случая;
- определение точной и приближённой разделимости, нахождение метода отделения компонент при отсутствии точной;
- возможность применения других тензорных разложений, в частности CPD;
- подтверждение результатов, утверждающих о преимуществах Tensor SSA над SSA;

Список литературы





-  Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techniques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
-  Papy J. M., De Lathauwer L., Van Hu el S. Exponential data tting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — P. 809–826.
-  De Lathauwer Lieven. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank- $(L_r, L_r, 1)$ Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2011. — P. 1451–1474.
-  De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — P. 1253–1278.

Tensor SSA

└ Список литературы

└ Список литературы

Список литературы

-  Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techniques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
-  Papy J. M., De Lathauwer L., Van Hu el S. Exponential data tting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — P. 809–826.
-  De Lathauwer Lieven. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank- $(L_r, L_r, 1)$ Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2011. — P. 1451–1474.
-  De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — P. 1253–1278.

На данном слайде представлен список основных источников, используемых в моей работе.