Тензорный анализ сингулярного спектра

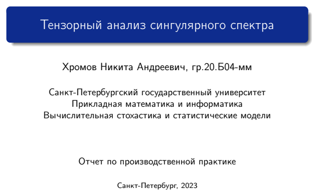
Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчет по производственной практике

Санкт-Петербург, 2023

Tensor SSA


Тензорный анализ сингулярного спектра
Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм
Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели
Отчет по производственной практике
Санкт-Петербург, 2023

Научный руководитель к.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э.,
кафедра статистического моделирования

Введение

- SSA – метод анализа временных рядов. В методе к особой траекторной матрице применяется матричное разложение SVD. Многие свойства SSA основаны на особом виде этой матрицы и свойствах SVD.
- Tensor SSA – обобщение метода SSA, предложенная в работе [Kouchaki, Sanei, 2013]. Суть обобщения состоит в расширении понятия траекторной матрицы до траекторного тензора и SVD до некоторого тензорного разложения.
- Среди тензорных разложений наибольшее сходство с SVD имеет HOSVD. Оно и было выбрано для использования в методе Tensor SSA.

Введение

- SSA – метод анализа временных рядов. В методе к особой траекторной матрице применяется матричное разложение SVD. Многие свойства SSA основаны на особом виде этой матрицы и свойствах SVD.
- Tensor SSA – обобщение метода SSA, предложенная в работе [Kouchaki, Sanei, 2013]. Суть обобщения состоит в расширении понятия траекторной матрицы до траекторного тензора и SVD до некоторого тензорного разложения.
- Среди тензорных разложений наибольшее сходство с SVD имеет HOSVD. Оно и было выбрано для использования в методе Tensor SSA.

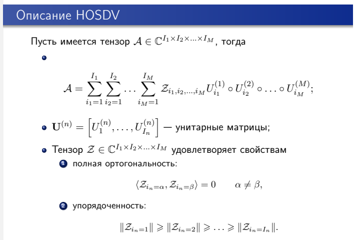
Singular spectrum analysis [1] является популярным методом анализа временных рядов. Этот метод используется, в частности, для выделения сигнала и выделения тренда и периодических компонент из временного ряда. Метод SSA основан на сингулярном разложении особой траекторной матрицы построенной по временному ряду.
В работе [2] предлагается обобщение метода SSA, Tensor SSA. Это обобщение заключается в том, чтобы вместо траекторной матрицы строить по ряду схожим образом траекторный тензор, а затем применять к нему некоторое тензорное разложение, схожее с матричным SVD. В этой работе утверждается о преимуществах Tensor SSA над обычным SSA.
Существует множество видов тензорных разложений. В этой работе использовалось разложение High-Order Singular Value Decomposition [3], являющееся многомерным аналогом SVD. Помимо него, интерес представляет разложение Canonical Polyadic Decomposition, оно было использовано в работе [2].

Была поставлена задача изучить выбранные варианты тензорных разложений, реализовать метод Tensor SSA, и сравнить с методом Basic SSA по точности выделения сигнала и компонент сигнала.

Описание HOSDV

Пусть имеется тензор $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$, тогда

- $$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \cdots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1, i_2, \ldots, i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \ldots \circ U_{i_M}^{(M)};$$
- $\mathbf{U}^{(n)} = \left[U_1^{(n)}, \ldots, U_{I_n}^{(n)}\right]$ — унитарные матрицы;
- Тензор $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ удовлетворяет свойствам
  1. полная ортогональность:
  $$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \qquad \alpha \neq \beta,$$
  2. упорядоченность:
  $$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geqslant \ldots \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|.$$

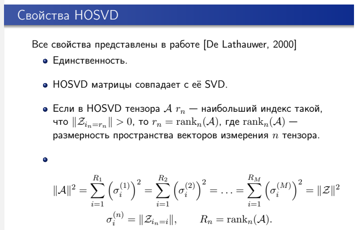


Любой комплекснозначный тензор $\mathcal{A}$ размерности $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$ может быть представлен в виде суммы тензоров ранга 1, то есть внешних произведений векторов, как показано на слайде. Такое представление называется HOSVD тензора $\mathcal{A}$, векторы $U_i^{(n)}$ называют i-м сингулярным вектором тензора $\mathcal{A}$ по измерению n, нормы подтензора $\mathcal{Z}$ с фиксированным n-м индексом равным i называют i-м сингулярным значением тензора $\mathcal{A}$ по измерению n.

Свойства HOSVD

Все свойства представлены в работе [De Lathauwer, 2000]

- Единственность.
- HOSVD матрицы совпадает с её SVD.
- Если в HOSVD тензора $\mathcal{A}$ r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$, то $r_n = \operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$, где $\operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$ — размерность пространства векторов измерения n тензора.
- $$\|\mathcal{A}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1}\left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2}\left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \ldots = \sum_{i=1}^{R_M}\left(\sigma_i^{(M)}\right)^2 = \|\mathcal{Z}\|^2$$
  $$\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|, \qquad R_n = \operatorname{rank}_n(\mathcal{A}).$$



1. HOSVD является единственным M-ортогональным разложением тензора, и сингулярные значения и векторы определяются с точностью до унитарных преобразований.
2. Результат применения HOSVD к тензору с двумя измерениями, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, в точности до унитарных преобразований сингулярных векторов и матрицы сингулярных значений.
3. n-рангом тензора $\mathcal{A}$ называется размерность векторного пространства, порождённого векторами измерения n этого тензора. Обозначается $R_n = \operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$. Если в HOSVD тензора $\mathcal{A}$ r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$, то $r_n = \operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$;
4. Квадрат нормы тензора совпадает с суммами квадратов сингулярных значений по каждому из измерений и совпадает с квадратом нормы тензора $\mathcal{Z}$ из разложения.

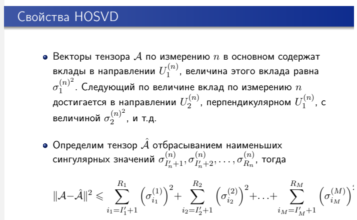
Свойства HOSVD

- Векторы тензора $\mathcal{A}$ по измерению n в основном содержат вклады в направлении $U_1^{(n)}$, величина этого вклада равна ${\sigma_1^{(n)}}^2$. Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U_1^{(n)}$, с величиной ${\sigma_2^{(n)}}^2$, и т.д.

- Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$, тогда

$$\|\mathcal{A}-\hat{\mathcal{A}}\|^2 \leqslant \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} \left(\sigma_{i_2}^{(2)}\right)^2 + \ldots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} \left(\sigma_{i_M}^{(M)}\right)^2.$$

Tensor SSA
└Известные результаты и определения
└Свойства HOSVD



1. Векторы тензора $\mathcal{A}$ по измерению n в основном содержат вклады в направлении $U_1^{(n)}$, и вклад в этом направлении равен ${\sigma_1^{(n)}}^2$. Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U(n)_1$, с величиной ${\sigma_2^{(n)}}^2$, и так далее.
2. Пусть $R_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$. Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$ для заданных значений I'_n, $n \in \overline{1:M}$, то есть заменяя нулями соответствующие части тензора $\mathcal{Z}$. Тогда квадрат нормы разности тензоров не превосходит суммы квадратов отброшенных сингулярных значений.

Эти свойства являются эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Однако для тензоров ситуация совершенно иная. Тензор, полученный усечением HOSVD в общем случае не является наилучшим приближением при заданных ограничениях на ранги измерений,

Описание метода Tensor SSA

Имеется временной ряд $\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Приведём формулировки алгоритма Tensor SSA для решения различных задач.

Входные данные алгоритма: $I, L : 1 \leqslant I, L \leqslant N,\ I + L \leqslant N + 1.$

Траекторный тензор: тензор размерности $I \times L \times J = N - I - J + 2$, строится по ряду:

$$\mathcal{X}_{i,l,j} = x_{i+l+j-2} \qquad i \in \overline{1:I},\ l \in \overline{1:L},\ j \in \overline{1:J}.$$

Слои траекторного тензора:

$$\mathcal{X}_{,,j} = \begin{pmatrix} x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{j+L-1} \\ x_{j+1} & x_{j+2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{j+I-1} & \cdots & \cdots & x_{j+I+L-2} \end{pmatrix}.$$

Пусть имеется временной ряд $\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Приведём формулировки алгоритма Tensor SSA для решения различных задач. Входные данные алгоритма: два числа $I, L : 1 \leqslant I, L \leqslant N,\ I + L \leqslant N + 1$. Введём понятие траекторного тензора: это тензор, составленный из элементов ряда таким образом, что его i, l, j-й элемент равен $i + l + j - 2$-му элементу ряда. На слайде представлен слой траекторного тензора, полученный фиксированием третьего измерения индексом j. Похожим образом выглядят и остальные слои.

Tensor SSA: отделение компонент сигнала

Задача: отделение компонент сигнала в ряде.

1. Вложение: выбор параметров I, L и построение по ним траекторного тензора $\mathcal{X}$;
2. Разложение: Проведение HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$, получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)};$$

Tensor SSA: отделение компонент сигнала

Задача: отделение компонент сигнала в ряде.

1. Вложение: выбор параметров I, L и построение по ним траекторного тензора $\mathcal{X}$;
2. Разложение: Проведение HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$, получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)};$$

Рассмотрим задачу отделения компонент сигнала в ряде.

1. Первый шаг алгоритма заключается в выборе параметров I, L и построение по ним траекторного тензора ряда.
2. Второй шаг алгоритма заключается в проведении разложения HOSVD траекторного тензора. В результате получается представление в виде суммы тензоров ранга 1 (то есть внешних произведений векторов).

Tensor SSA: отделение компонент сигнала

3. Группировка: разбиение множества индексов $\mathfrak{S} = \{1, 2 \ldots, \min(I, L, J)\}$ по смыслу на непересекающиеся множества $\mathfrak{S}_k$, $k \in \overline{1 : m}$ и построение по этому разбиению тензоров
$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$$

4. Восстановление: получение рядов $\mathsf{X}^{(k)} = \mathsf{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ по тензорам $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $i + l + j = \mathrm{const}$.

Результат алгоритма: набор рядов $\mathsf{X}^{(k)}$ таких, что
$$\mathsf{X} = \sum_{k=1}^{m} \mathsf{X}^{(k)}.$$

Tensor SSA
└─Описание Tensor SSA и его свойства
└─Tensor SSA: отделение компонент сигнала

Tensor SSA: отделение компонент сигнала
Группировка: разбиение множества индексов $\mathfrak{S} = \{1, 2 \ldots, \min(I, L, J)\}$ по смыслу на непересекающиеся множества $\mathfrak{S}_k$, $k \in \overline{1 : m}$ и построение по этому разбиению тензоров $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$
Восстановление: получение рядов $\mathsf{X}^{(k)} = \mathsf{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ по тензорам $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $i + l + j = \mathrm{const}$.
Результат алгоритма: набор рядов $\mathsf{X}^{(k)}$ таких, что $\mathsf{X} = \sum_{k=1}^{m} \mathsf{X}^{(k)}.$

1. Третий шаг: группировка. На этом шаге множество индексов суммирования разбивается на непересекающиеся множества по смыслу, и по этим множествам определяется набор тензоров, соответствующих различным компонентам сигнала.
2. Четвёртый шаг: восстановление. На этом шаге полученные после группировки тензоры усредняются вдоль плоскостей с фиксированным значением суммы индексов.

В результате усреднения получается набор временных рядов, в сумме дающий исходный ряд, этот набор и будет результатом алгоритма.

Tensor SSA: отделение сигнала усечением HOSVD

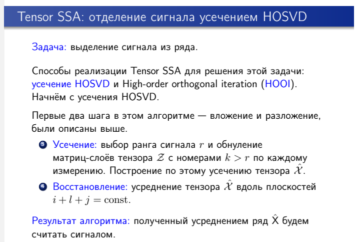
Задача: выделение сигнала из ряда.

Способы реализации Tensor SSA для решения этой задачи: усечение HOSVD и High-order orthogonal iteration (HOOI). Начнём с усечения HOSVD.

Первые два шага в этом алгоритме — вложение и разложение, были описаны выше.

3. Усечение: выбор ранга сигнала r и обнуление матриц-слоёв тензора $\mathcal{Z}$ с номерами $k > r$ по каждому измерению. Построение по этому усечению тензора $\hat{\mathcal{X}}$.
4. Восстановление: усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$.

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд $\hat{\mathsf{X}}$ будем считать сигналом.



Рассмотрим задачу выделения сигнала из ряда. Алгоритм Tensor SSA для решения этой задачи может быть проведён двумя различными способами: используя усечение HOSVD и используя High-order orthogonal iteration (о втором будет сказано позже).

Первый способ заключается в усечении сингулярного разложения траекторного тензора. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом для отделения компонент ряда, поэтому опишем его, начиная с третьего шага.

3. Третий шаг заключается в выборе ранга сигнала r и усечении тензора сингулярных значений по этому рангу. Другими словами, имея ранг сигнала r и разложение траекторного тензора $\mathcal{X}$, в тензоре $\mathcal{Z}$ заменим матрицы-слои по каждому измерению с номерами $k > r$ на нулевые, и по полученному тензору построим приближение траекторного тензора $\hat{\mathcal{X}}$.
4. На четвёртом шаге, используя усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \text{const}$ получим ряд $\hat{\mathsf{X}}$. Этот ряд и будем считать сигналом.

Стоит отметить, что этот способ не является оптимальным.

Tensor SSA: отделение сигнала с помощью HOOI

Задача: выделение сигнала из ряда.

Второй способ использует HOOI — метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями n-рангов. В отличие от усечения, этот метод является оптимальным.

Первый шаг алгоритма — вложение, совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.

2. HOOI: Выбор ранга сигнала r и применение к $\mathcal{X}$ HOOI с набором n-рангов (r, r, r). Результат — оптимальное приближение тензором $\hat{\mathcal{X}}$ с n-рангами r.
3. Восстановление: усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ аналогично восстановлению в варианте с усечением.

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд $\hat{\mathsf{X}}$ будем считать сигналом.

Tensor SSA: отделение сигнала с помощью HOOI
Задача: выделение сигнала из ряда.
Второй способ использует HOOI — метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями n-рангов. В отличие от усечения, этот метод является оптимальным.
Первый шаг алгоритма — вложение, совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.
2. HOOI: Выбор ранга сигнала r и применение к $\mathcal{X}$ HOOI с набором n-рангов (r, r, r). Результат — оптимальное приближение тензором $\hat{\mathcal{X}}$ с n-рангами r.
3. Восстановление: усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ аналогично восстановлению в варианте с усечением.
Результат алгоритма: полученный усреднением ряд $\hat{\mathsf{X}}$ будем считать сигналом.

Второй способ использует метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями n-рангов — High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [4]. В отличие от усечения, этот метод является оптимальным, в том смысле, что на тензоре, полученном этим методом достигается минимум расстояния, в смысле нормы Фробениуса, до исходного тензора по всем тензорам с данными ограничениями на ранги.
Приведём вторую реализацию алгоритма Tensor SSA для отделения сигнала от шума, используя HOOI. Первый шаг алгоритма — вложение, совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.

2. На втором шаге выбирается ранг сигнала r и к полученному ранее траекторному тензору $\mathcal{X}$ применяется HOOI с набором n-рангов (r, r, r). В результате получаем оптимальное приближение траекторного тензора $\mathcal{X}$ тензором $\hat{\mathcal{X}}$ со значениями n-рангов равными r.
3. Третий шаг — восстановление ряда по тензору $\hat{\mathcal{X}}$ усреднением совпадает с четвёртым шагом (восстановлением) в первом варианте алгоритма для выделения сигнала из ряда.

Полученный усреднением ряд $\hat{\mathsf{X}}$ будем считать сигналом.

Свойства Tensor SSA, разделимость рядов

1. Разделимость рядов

Утверждение

Если временные ряды $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$ длины N слабо I- и L-разделимы в смысле теории SSA, то существует такое HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ ряда $\mathsf{X} = \tilde{\mathsf{X}} + \hat{\mathsf{X}}$, что его можно в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$.

Понятие слабой разделимости рядов из SSA применимо к тензорному случаю

Свойства Tensor SSA, разделимость рядов
1. Разделимость рядов
Утверждение
Если временные ряды $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$ длины N слабо I- и L-разделимы в смысле теории SSA, то существует такое HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ ряда $\mathsf{X} = \tilde{\mathsf{X}} + \hat{\mathsf{X}}$, что его можно в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$.
Понятие слабой разделимости рядов из SSA применимо к тензорному случаю

В ходе работы были получены некоторые свойства, связывающие стандартный метод SSA с Tensor SSA.
Первое утверждение о разделимости позволяет перенести понятие слабой разделимости рядов из теории SSA на тензорный случай.
Само утверждение заключается в том, что если временные ряды $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$ длины N слабо I- и L-разделимы в смысле теории SSA, то существует такое сингулярное разложение траекторного тензора $\mathcal{X}$ ряда $\mathsf{X} = \tilde{\mathsf{X}} + \hat{\mathsf{X}}$, что его можно в виде суммы сингулярных разложений траекторных тензоров, составленных по рядам $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$.
Доказательство утверждения следует из ортогональности сингулярных векторов в HOSVD.
Кроме того были выведены условия слабой разделимости некоторых частных случаев временных рядов.

Свойства Tensor SSA, ранг ряда

2. Ранг ряда

Утверждение

Пусть временной ряд X имеет конечный ранг d в терминах SSA. Тогда для любых значений параметров I и L таких, что

$$d \leqslant \min(I, L, N - I - L + 2),$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ этого ряда с параметрами I и L будет равно d.

Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах Tensor SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

Свойства Tensor SSA, ранг ряда
Ранг ряда
Утверждение
Пусть временной ряд X имеет конечный ранг d в терминах SSA. Тогда для любых значений параметров I и L таких, что
$d \leqslant \min(I, L, N - I - L + 2)$,
количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ этого ряда с параметрами I и L будет равно d.
Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах Tensor SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

Второе утверждение о ранге ряда говорит о том, что понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах Tensor SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.
Само утверждение звучит заключается в том, что если ряд имеет конечный ранг d, то для любых допустимых параметров I, L количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в сингулярном разложении траекторного тензора $\mathcal{X}$ будет равно d.

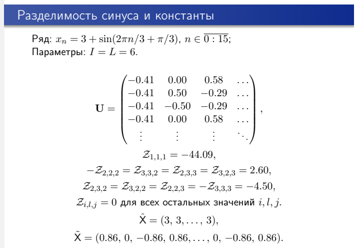
Доказательство этого утверждения следует из свойств n-рангов сингулярного разложения.

Разделимость синуса и константы

Ряд: $x_n = 3 + \sin(2\pi n/3 + \pi/3)$, $n \in \overline{0:15}$;
Параметры: $I = L = 6$.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -0.41 & 0.00 & 0.58 & \dots \\ -0.41 & 0.50 & -0.29 & \dots \\ -0.41 & -0.50 & -0.29 & \dots \\ -0.41 & 0.00 & 0.58 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Z}_{1,1,1} = -44.09,$$
$$-\mathcal{Z}_{2,2,2} = \mathcal{Z}_{3,3,2} = \mathcal{Z}_{2,3,3} = \mathcal{Z}_{3,2,3} = 2.60,$$
$$\mathcal{Z}_{2,3,2} = \mathcal{Z}_{3,2,2} = \mathcal{Z}_{2,2,3} = -\mathcal{Z}_{3,3,3} = -4.50,$$
$$\mathcal{Z}_{i,l,j} = 0 \text{ для всех остальных значений } i, l, j.$$
$$\hat{\mathsf{X}} = (3,\ 3, \dots,\ 3),$$
$$\tilde{\mathsf{X}} = (0.86,\ 0,\ -0.86,\ 0.86, \dots,\ 0,\ -0.86,\ 0.86).$$



Рассмотрим ряд с элементами $x_n = 3 + \sin(2\pi n/3 + \pi/3)$, где $n \in \overline{0:15}$. После построения траекторного тензора $\mathcal{X}$ с параметрами $I = L = 6$ и его разложения получаем тензор сингулярных чисел $\mathcal{Z}$ и матрицы сингулярных векторов $\mathbf{U}^{(1)}$, $\mathbf{U}^{(2)}$, $\mathbf{U}^{(3)}$. Так как все размерности траекторного тензора $\mathcal{X}$ равны, значит совпадают и матрицы сингулярных векторов $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}$.
Видно, что первый сингулярный вектор постоянен, а второй и третий — периодические с периодом 3. Кроме того, по каждому из трёх измерений количество ненулевых сингулярных чисел равно 3 (например $\|\mathcal{Z}_{,,1}\| > \|\mathcal{Z}_{,,2}\| = \|\mathcal{Z}_{,,3}\| > 0$, $\|\mathcal{Z}_{,,j}\| = 0$ для всех остальных j). Исходя из этого, имеет смысл отнести индекс $\{1\}$ к константной компоненте ряда, индексы $\{2,\ 3\}$ — к гармонической (синус), а остальные проигнорировать. После восстановления тензоров, полученных такой группировкой, получаем два ряда на слайде.

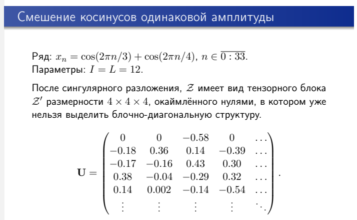
Таким образом, константный ряд отделился от синуса в случае выполнения условий точной разделимости.

Смешение косинусов одинаковой амплитуды

Ряд: $x_n = \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/4)$, $n \in \overline{0:33}$.
Параметры: $I = L = 12$.

После сингулярного разложения, $\mathcal{Z}$ имеет вид тензорного блока $\mathcal{Z}'$ размерности $4 \times 4 \times 4$, окаймлённого нулями, в котором уже нельзя выделить блочно-диагональную структуру.

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.58 & 0 & \dots \\ -0.18 & 0.36 & 0.14 & -0.39 & \dots \\ -0.17 & -0.16 & 0.43 & 0.30 & \dots \\ 0.38 & -0.04 & -0.29 & 0.32 & \dots \\ 0.14 & 0.002 & -0.14 & -0.54 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$



Рассмотрим ряд с элементами $x_n = \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/4)$, $n \in \overline{0:33}$. Выбрав параметры $I = L = 12$, после разложения получаем тензор сингулярных значений $\mathcal{Z}$ и, в силу равенства размерностей траекторного тензора, равные между собой матрицы сингулярных векторов $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}$. Тензор $\mathcal{Z}$ имеет вид тензорного блока $\mathcal{Z}'$ размерности $4 \times 4 \times 4$, окаймлённого нулями, в котором уже нельзя выделить блочно-диагональную структуру. Если рассмотреть матрицы сингулярных векторов, можно увидеть, что никакой сингулярный вектор не имеет периода равного 3 или 4: (на слайде)

Таким образом, произошло смешение двух косинусов одинаковой амплитуды, и несмотря на наличие слабой разделимости, отсутствие точной разделимости не даёт отделить косинусы.

Сравнение Tensor SSA и Basic SSA

- $x_n = 2e^{0.035n}$, шум — белый гауссовский, $\sigma^2 = 2.25$;
- $x_n = 2 + 0.1n$, шум — белый гауссовский, $\sigma_1^2 = 2.25$, $\sigma_2^2 = 0.04$;
- $x_n = 30\cos(2\pi n/12)$, шум — белый гауссовский, $\sigma^2 = 25$, и красный, $\delta = \sqrt{5}$, $\varphi_1 = 0.5, \varphi_2 = 0.9$.

Во всех этих случаях метод SSA показал точность отделения сигнала выше, чем Tensor SSA.

Сравнение Tensor SSA и Basic SSA
- $x_n = 2e^{0.035n}$, шум — белый гауссовский, $\sigma^2 = 2.25$;
- $x_n = 2 + 0.1n$, шум — белый гауссовский, $\sigma_1^2 = 2.25$, $\sigma_2^2 = 0.04$;
- $x_n = 30\cos(2\pi n/12)$, шум — белый гауссовский, $\sigma^2 = 25$, и красный, $\delta = \sqrt{5}$, $\varphi_1 = 0.5, \varphi_2 = 0.9$.
Во всех этих случаях метод SSA показал точность отделения сигнала выше, чем Tensor SSA.

Были проведены численные измерения точности восстановления сигнала при использовании SSA и предложенных методов Tensor SSA на примерах трёх рядов: порождённого экспонентой, линейного и косинуса.
На экспоненциальный ряд действовали белым шумом и восстанавливали по одной компоненте.
Для линейного ряда рассматривались ситуации большого и малого шума и в обеих ситуациях сравнивалось восстановление по одной и двум компонентам.
На ряд косинуса действовали белым шумом и красным с разными параметрами.

Шло сравнение точности метода SSA и методов Tensor SSA с использованием усечения и HOOI. Во всех приведённых выше случаях метод SSA оказался точнее остальных.

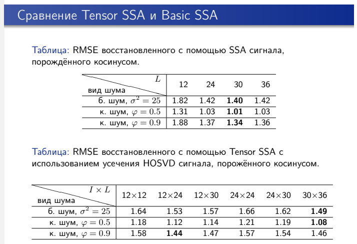
Сравнение Tensor SSA и Basic SSA

Таблица: RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала, порождённого косинусом.

вид шума \ L	12	24	30	36
б. шум, $\sigma^2 = 25$	1.82	1.42	**1.40**	1.42
к. шум, $\varphi = 0.5$	1.31	1.03	**1.01**	1.03
к. шум, $\varphi = 0.9$	1.88	1.37	**1.34**	1.36

Таблица: RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA с использованием усечения HOSVD сигнала, порожённого косинусом.

вид шума \ $I \times L$	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
б. шум, $\sigma^2 = 25$	1.64	1.53	1.57	1.66	1.62	**1.49**
к. шум, $\varphi = 0.5$	1.18	1.12	1.14	1.21	1.19	**1.08**
к. шум, $\varphi = 0.9$	1.58	**1.44**	1.47	1.57	1.54	1.46



В таблицах приведены значения отклонения восстановленного ряда от исходного для различных вариантов шума и различных значений параметров после использования SSA и Tensor SSA.

Корень среднего среднеквадратичного отклонения взят по 500 реализациям каждого шума.

На этом слайде показан результат Tensor SSA с использованием усечения. Видно, что во всех случаях, лучший результат для SSA оказывается меньше лучшего результата для Tensor SSA.

Сравнение Tensor SSA и Basic SSA

Таблица: RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала, порождённого косинусом.

вид шума \ L	12	24	30	36
б. шум, $\sigma^2 = 25$	1.82	1.42	**1.40**	1.42
к. шум, $\varphi = 0.5$	1.31	1.03	**1.01**	1.03
к. шум, $\varphi = 0.9$	1.88	1.37	**1.34**	1.36

Таблица: RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA с использованием HOOI сигнала, порождённого косинусом.

вид шума \ $I \times L$	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
б. шум, $\sigma^2 = 25$	1.63	1.53	1.56	1.65	1.62	**1.49**
к. шум, $\varphi = 0.5$	1.17	1.12	1.14	1.21	1.19	**1.08**
к. шум, $\varphi = 0.9$	1.56	1.42	1.44	1.54	1.51	**1.39**

Сравнение Tensor SSA и Basic SSA

Таблица: RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала, порождённого косинусом.

Таблица: RMSE восстановленного с помощью Tensor SSA с использованием HOOI сигнала, порождённого косинусом.

На этом слайде показан результат Tensor SSA с использованием HOOI. Всё ещё во всех случаях SSA показывает лучший результат, чем Tensor SSA.

Кроме того, лучший результат для Tensor SSA с использованием HOOI в случае красного шума с параметром 0.9 оказался меньше, чем соответствующий лучший результат для Tensor SSA с усечением.

Особый случай

$x_n = \sin(2\pi n/3 + \pi/2)$, $n \in \overline{1:9}$.
Шум: красный с параметрами $\delta = 0.1$, $\varphi = 0.9$.

SSA	Tensor SSA (HOSVD)	Tensor SSA (HOOI)
0.116	0.110	**0.095**

Таблица: RMSE восстановленного с помощью различных методов короткого сигнала, порождённого синусом

Особый случай
$x_n = \sin(2\pi n/3 + \pi/2)$, $n \in \overline{1:9}$.
Шум: красный с параметрами $\delta = 0.1$, $\varphi = 0.9$.
SSA Tensor SSA (HOSVD) Tensor SSA (HOOI)
0.116 0.110 0.095
Таблица: RMSE восстановленного с помощью различных методов короткого сигнала, порождённого синусом

Был найден случай временного ряда и шума, для которого метод Tensor SSA с использованием HOOI оказался в среднем точнее, чем SSA.
Сигнал задан коротким синусом со слайда, на него подействовали красным шумом с параметрами $\delta = 0.1$, $\varphi = 0.9$.
Корень среднего среднеквадратичного отклонения взят по 500 реализациям шума. Из таблицы видно, что в случае так заданного ряда, метод Tensor SSA оказывается точнее стандартного SSA, причём самым точным оказался метод с использованием HOOI.

Причины данного явления на данном этапе остаются неизвестными.

Заключение

Таким образом:

- Описан и реализован алгоритм Tensor SSA.
- Выведены аналоги важных свойств SSA для метода Tensor SSA.
- Описаны примеры использования метода.
- Проведено численное сравнение точности методов Tensor SSA и SSA, найден особый случай.

Остаётся для изучения:

- Возможность применения других тензорных разложений.
- Подтверждение результатов, утверждающих о преимуществах Tensor SSA над SSA.
- Изучение причин возникновения особого случая.
- Определение точной разделимости, нахождение метода отделения компонент при её отсутствии.

Заключение
Таким образом:
- Описан и реализован алгоритм Tensor SSA.
- Выведены аналоги важных свойств SSA для метода Tensor SSA.
- Описаны примеры использования метода.
- Проведено численное сравнение точности методов Tensor SSA и SSA, найден особый случай.
Остаётся для изучения:
- Возможность применения других тензорных разложений.
- Подтверждение результатов, утверждающих о преимуществах Tensor SSA над SSA.
- Изучение причин возникновения особого случая.
- Определение точной разделимости, нахождение метода отделения компонент при её отсутствии.

Текст про заключение

Список литературы

- Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techiques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
- Kouchaki Samaneh, Sanei Saeid. Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation // 2013 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP). — IEEE. — 2013.
- De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — P. 1253–1278.
- De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. On the Best Rank-1 and Rank-$(R_1, R_2, ..., R_N)$ Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — P. 1324–1342.

Список литературы
Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techiques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
Kouchaki Samaneh, Sanei Saeid. Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation // 2013 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP). — IEEE. — 2013.
De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — P. 1253–1278.
De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. On the Best Rank-1 and Rank-$(R_1, R_2, ..., R_N)$ Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — P. 1324–1342.

На данном слайде представлен список основных источников, используемых в моей работе.