# Тензорный анализ сингулярного спектра

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет Прикладная математика и информатика Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчет по производственной практике (научно-исследовательская работа) (6 семестр)

Санкт-Петербург, 2023

Tensor SSA

Тензорный анализ сингулярного спектра

Хромов Никита Андреевич, гр.20,504-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прихладная математика и информатика
Вычислительная стохостика и статистические модели

Отчет по производственной практике (изучно-исследовательская работа) (6 семестр)

Санкт-Петербург, 2023

Научный руководитель к.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э., кафедра статистического моделирования

Временной ряд длины 
$$N$$
:  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ .  $X = T + P + R$ .

#### Возможные задачи:

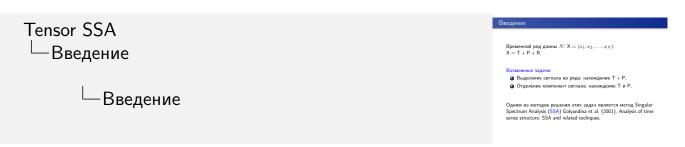
- **1** Выделение сигнала из ряда: нахождение T + P;
- Отделение компонент сигнала: нахождение Т и Р.

Одним из методов решения этих задач является метод Singular Spectrum Analysis (SSA) Golyandina et al. (2001), Analysis of time series structure: SSA and related techiques.

2/19

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



Временным рядом длины N называется последовательность N чисел. В общем случае, временной ряд является суммой трёх компонент: тренда  $\mathsf{T}$ , сезонности  $\mathsf{P}$  и шума  $\mathsf{R}$ .

Можно рассматривать задачи анализа временного ряда:

- 1. Выделение сигнала T+P из ряда;
- 2. Отделение компонент сигнала Т и Р.

Одним из методов решения этих задач является метод Singular Spectrum Analysis (SSA).

### Введение

SSA: ряд X 
$$\Rightarrow$$
 матрица  $\mathbf{X}$   $\Rightarrow$  SVD  $\mathbf{X}$  , Tensor SSA: ряд X  $\Rightarrow$  тензор  $\mathcal{X}$   $\Rightarrow$  тензорное разложение  $\mathcal{X}$ .

- Примеры тензорных разложений:
  - 4 High-order singular value decomposition (HOSVD);
  - 2 Canonical polyadic decomposition (CPD).
- Для выделения сигнала и оценки его параметров в работе Papy et al. (2005) применялось HOSVD, и в работе De Lathauwer et al. (2011) применялось CPD.

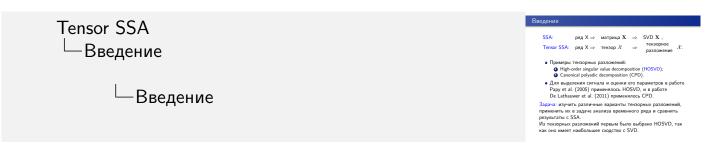
Задача: изучить различные варианты тензорных разложений, применить их в задаче анализа временного ряда и сравнить результаты с SSA.

Из тензорных разложений первым было выбрано HOSVD, так как оно имеет наибольшее сходство с SVD.

3/19

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



В методе SSA происходит построение особой матрицы по ряду и применение к ней сингулярного разложения.

Возможное обобщение этого метода — переход от матриц к тензорам: построение по ряду особого тензора и применение к нему некоторого тензорного разложения.

Существует множество видов тензорных разложений. Для нас интерес представляют High-Order Singular Value Decomposition (HOSVD), являющееся многомерным аналогом SVD, и Canonical Polyadic Decomposition (CPD). Оба этих разложения были использованы в разных работах для выделения из ряда сигнала и его оценки: HOSVD — в работе [2], и CPD — в работе [3]. Была поставлена задача изучить выбранные варианты тензорных разложений, реализовать метод Tensor SSA, и сравнить с методом Basic SSA по точности выделения сигнала и компонент сигнала.

Из тензорных разложений первым было выбрано HOSVD, так как оно имеет наибольшее сходство с SVD.

#### Описание HOSDV

Пусть имеется тензор  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times ... \times I_M}$ , тогда HOSVD  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1, i_2, \dots, i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)},$$

где

- ullet  ${f U}^{(n)} = \left[ U_1^{(n)}, \dots, U_{I_n}^{(n)} 
  ight] -$  унитарные матрицы;
- ullet Тензор  $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{I_1 imes I_2 imes \dots imes I_M}$  удовлетворяет свойствам
  - полная ортогональность:

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \qquad \alpha \neq \beta,$$

2 упорядоченность:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geqslant \ldots \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|.$$

4/19 Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA

#### Tensor SSA

 $ldsymbol{}^{ldsymbol{}ldsymbol{}}$ Известные результаты и определения

└─Описание HOSDV



Любой комплекснозначный тензор  $\mathcal A$  размерности  $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$ , может быть представлен в виде суммы тензоров ранга 1, то есть внешних произведений векторов, как показано на слайде. M называется количеством измерений тензора. Такое представление называется HOSVD тензора  $\mathcal A$ , векторы  $U_i^{(n)}$  называют i-м сингулярным вектором тензора  $\mathcal A$  по измерению n, нормы Фробениуса подтензора  $\mathcal Z$  с фиксированным n-м индексом равным i называют i-м сингулярным значением тензора  $\mathcal A$  по измерению n.

Свойство полной ортогональности является аналогом свойства диагональности матрицы сингулярных значений в SVD, а свойство упорядоченности собственных значений вдоль каждого измерения — аналог упорядоченности собственных значений.

### Свойства HOSVD

Все свойства представлены в работе De Lathauwer et al. (2000).

- HOSVD единственное M-ортогональное разложение.
- ullet При M=2 HOSVD совпадает с SVD.
- Пусть  $\mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$  размерность пространства векторов измерения n тензора. Если в HOSVD тензора  $\mathcal{A}$   $r_n$  наибольший индекс такой, что  $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\|>0$ , то  $r_n=\mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$ .

0

$$\|\mathcal{A}\|^{2} = \sum_{i=1}^{R_{1}} \left(\sigma_{i}^{(1)}\right)^{2} = \sum_{i=1}^{R_{2}} \left(\sigma_{i}^{(2)}\right)^{2} = \dots = \sum_{i=1}^{R_{M}} \left(\sigma_{i}^{(M)}\right)^{2} = \|\mathcal{Z}\|^{2}$$
$$\sigma_{i}^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_{n}=i}\|, \qquad R_{n} = \operatorname{rank}_{n}(\mathcal{A}).$$

5/19 Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA

#### Tensor SSA

 $ldsymbol{}^{ldsymbol{}ldsymbol{}}$ Известные результаты и определения

└─Свойства HOSVD

#### Свойства HOSV

- Все свойства представлены в работе De Lathauwer et al. (2000)

  в HOSVD единственное М-ортогональное разложение
- При M=2 HOSVD совпадает с SV
- Пустъ  $\mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$  размерностъ пространства векторов измерения n тензора. Если в HOSVD тензора  $\mathcal{A}$   $r_n$  наибольший индекс такой, что  $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\|>0$ , то  $r_n=\mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$ .

$$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} (\sigma_i^{(1)})^2 = \sum_{i=1}^{R_2} (\sigma_i^{(2)})^2 = \dots = \sum_{i=1}^{R_M} (\sigma_i^{(M)})^2 = \|Z\|^2$$
  
 $\sigma_i^{(n)} = \|Z_{i_n=i}\|, \quad R_n = \operatorname{rank}_n(A).$ 

- 1. HOSVD является единственным M-ортогональным разложением тензора, и сингулярные значения и векторы определяются с точностью до унитарных преобразований.
- 2. Результат применения HOSVD к тензору с двумя измерениями, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, в точности до унитарных преобразований сингулярных векторов и матрицы сингулярных значений.
- 3. n-рангом тензора  $\mathcal A$  называется размерность векторного пространства, порождённого векторами измерения n этого тензора. Обозначается  $R_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal A)$ . Если в HOSVD тензора  $\mathcal A$   $r_n$  наибольший индекс такой, что  $\|\mathcal Z_{i_n=r_n}\|>0$ , то  $r_n=\mathrm{rank}_n(\mathcal A)$ ; n-ранги являются характеристикой тензора, аналогичной матричным рангам. Однако в тензорном случае, n-ранги могут различаться, поэтому для каждого измерения определяется своя характеристика.
- 4. Квадрат нормы тензора совпадает с суммами квадратов сингулярных значений по каждому из измерений и совпадает с квадратом нормы тензора  ${\mathcal Z}$  из разложения.

### Свойства HOSVD

- Векторы тензора  $\mathcal A$  по измерению n в основном содержат вклады в направлении  $U_1^{(n)}$ , величина этого вклада равна  $\sigma_1^{(n)^2}$ . Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении  $U_2^{(n)}$ , перпендикулярном  $U_1^{(n)}$ , с величиной  $\sigma_2^{(n)^2}$ , и т.д.
- Определим тензор  $\hat{\mathcal{A}}$  отбрасыванием наименьших сингулярных значений  $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$ , тогда

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leqslant \sum_{i_1 = I_1' + 1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \ldots + \sum_{i_M = I_M' + 1}^{R_M} \left(\sigma_{i_M}^{(M)}\right)^2.$$

6/19 Xp

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA

#### Tensor SSA

 $ldsymbol{}^{ldsymbol{}ldsymbol{}}$ Известные результаты и определения

└─Свойства HOSVD

#### Свойства HOSVI

- Векторы тензора A по измерению n в основном содержат вклады в направлении  $U_1^{(n)}$ , величина этого вклада равна  $a_1^{(n)^2}$ . Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении  $U_2^{(n)}$ , перпендикулярном  $U_1^{(n)}$ ,
- Определим тензор  $\hat{\mathcal{A}}$  отбрасыванием наименьших сингулярных значений  $\sigma_{I_n'+1}^{(n)}, \sigma_{I_n'+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$ , тогда

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leqslant \sum_{i_1 = I_1' + 1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \ldots + \sum_{i_M = I_M' + 1}^{R_M} \left(\sigma_{i_M}^{(M)}\right)^2$$

- 1. Векторы тензора  $\mathcal A$  по измерению n в основном содержат вклады в направлении  $U_1^{(n)}$ , и вклад в этом направлении равен  $\sigma_1^{(n)^2}$ . Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении  $U_2^{(n)}$ , перпендикулярном  $U(n)_1$ , с величиной  $\sigma_2^{(n)^2}$ , и так далее.
- 2. Пусть  $R_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$ . Определим тензор  $\hat{\mathcal{A}}$  отбрасыванием наименьших сингулярных значений  $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \ldots, \sigma_{R_n}^{(n)}$  для заданных значений  $I'_n$ ,  $n \in \overline{1:M}$ , то есть заменяя нулями соответствующие части тензора  $\mathcal{Z}$ . Тогда квадрат нормы разности тензоров не превосходит суммы квадратов отброшенных сингулярных значений.

Эти свойства являются эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Однако для тензоров ситуация совершенно иная. Тензор, полученный усечением HOSVD в общем случае не является наилучшим приближением при заданных ограничениях на ранги измерений, но это приближение всё же можно считать достаточно точным.

## Описание метода HOSVD SSA

Имеется временной ряд  $X = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Приведём формулировки алгоритма HOSVD SSA для решения различных задач.

Входные данные алгоритма:  $I, L : 1 \le I, L \le N, I + L \le N + 1.$ Траекторный тензор: тензор размерности  $I \times L \times J = N - I - J + 2$ , строится по ряду:

$$\mathcal{X}_{i,l,j} = x_{i+l+j-2}$$
  $i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$ 

Слои траекторного тензора:

$$\mathcal{X}_{,,j} = \begin{pmatrix} x_j & x_{j+1} & \dots & x_{j+L-1} \\ x_{j+1} & x_{j+2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{j+I-1} & \dots & \dots & x_{j+I+L-2} \end{pmatrix}.$$

7/19 Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм Tensor SSA

Tensor SSA

└─Oписание HOSVD SSA и его свойства

└─Описание метода HOSVD SSA



Пусть имеется временной ряд  $\mathsf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Приведём формулировки алгоритма HOSVD SSA для решения различных задач. Входные данные алгоритма: два числа  $I, L: 1 \leqslant I, L \leqslant N, I+L \leqslant N+1.$ Введём понятие траекторного тензора: это тензор, составленный из элементов ряда таким образом, что его i, l, j-й элемент равен i + l + li-2-му элементу ряда. На слайде представлен слой траекторного тензора, полученный фиксированием третьего измерения индексом j. Похожим образом выглядят и остальные слои.

# HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

Задача: отделение компонент сигнала в ряде.

- **1** Вложение: выбор параметров I, L и построение по ним траекторного тензора  $\mathcal{X}$ ;
- **2** Разложение: Проведение HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_{i}^{(1)} \circ \mathbf{U}_{l}^{(2)} \circ \mathbf{U}_{j}^{(3)};$$

8/19

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA

#### Tensor SSA

└─Oписание HOSVD SSA и его свойства

HOSVD SSA: отделение компонент сигнала



Рассмотрим задачу отделения компонент сигнала в ряде.

- 1. Первый шаг алгоритма заключается в выборе параметров I,L и построение по ним траекторного тензора ряда.
- 2. Второй шаг алгоритма заключается в проведении разложения HOSVD траекторного тензора. В результате получается представление в виде суммы тензоров ранга 1 (то есть внешних произведений векторов).

# HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

 $\mathfrak{S} = \{1,\,2\,\dots,\,\min(I,L,J)\}$  по смыслу на непересекающиеся множества  $\mathfrak{S}_k,\,k\in\overline{1:m}$  и построение по этому разбиению тензоров

$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$$

**3** Восстановление: получение рядов  $\mathsf{X}^{(k)} = \mathsf{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$  по тензорам  $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$  посредством их усреднения вдоль плоскостей  $i+l+j=\mathrm{const}$  .

Результат алгоритма: набор рядов  $X^{(k)}$  таких, что

$$\mathsf{X} = \sum_{k=1}^{m} \mathsf{X}^{(k)}.$$

9/19

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA

#### Tensor SSA

└─Oписание HOSVD SSA и его свойства

HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

#### HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

- $m{\Theta}$  Группировка: разбиение множества индексов  $m{\Theta} = \{1,2,\dots,\min(I,L,J)\}$  по смыслу на непересекающиеся множества  $m{\Theta}_k$ ,  $k \in \overline{1}:m$  и построении по этому разбиению тензоров  $\mathcal{X}^{(m{\Theta}_k)} = \sum \sum \sum Z_{I,J,J} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_i^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}$ .
- © Восстановление: получение рядов  $X^{(k)} = X^{(G_k)}$  по тензорам  $X^{(G_k)}$  по посредством их усреднения вдоль плюхостей i+l+j= const.

  Результат алгоритма: набор рядов  $X^{(k)}$  таких, что  $Y = \sum_{i=1}^{m} Y^{(k)}$
- 1. Третий шаг: группировка. На этом шаге множество индексов суммирования разбивается на непересекающиеся множества по смыслу, и по этим множествам определяется набор тензоров, соответствующих различным компонентам сигнала.
- 2. Четвёртый шаг: восстановление. На этом шаге полученные после группировки тензоры усредняются вдоль плоскостей с фиксированным значением суммы индексов.

В результате усреднения получается набор временных рядов, в сумме дающий исходный ряд, этот набор и будет результатом алгоритма.

### HOSVD SSA: отделение сигнала усечением HOSVD

Задача: выделение сигнала из ряда.

Способы реализации HOSVD SSA для решения этой задачи: усечение HOSVD и High-order orthogonal iteration (HOOI). Начнём с усечения HOSVD.

Первые два шага в этом алгоритме — вложение и разложение, были описаны выше.

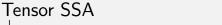
- ③ Усечение: выбор ранга сигнала r и обнуление матриц-слоёв тензора  $\mathcal Z$  с номерами k>r по каждому измерению. Построение по этому усечению тензора  $\hat{\mathcal X}$ .
- $oldsymbol{\Phi}$  Восстановление: усреднение тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  вдоль плоскостей  $i+l+j=\mathrm{const.}$

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд  $\hat{X}$  будем считать сигналом.

10/19

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



—Описание HOSVD SSA и его свойства

HOSVD SSA: отделение сигнала усечением HOSVD



Рассмотрим задачу выделения сигнала из ряда. Алгоритм HOSVD SSA для решения этой задачи может быть проведён двумя различными способами: используя усечение HOSVD и используя High-order orthogonal iteration (о втором будет сказано позже).

Первый способ заключается в усечении сингулярного разложения траекторного тензора. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом для отделения компонент ряда, поэтому опишем его, начиная с третьего шага.

- 3. Третий шаг заключается в выборе ранга сигнала r и усечении тензора сингулярных значений по этому рангу. Другими словами, имея ранг сигнала r и разложение траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , в тензоре  $\mathcal{Z}$  заменим матрицы-слои по каждому измерению с номерами k>r на нулевые, и по полученному тензору построим приближение траекторного тензора  $\hat{\mathcal{X}}$ .
- 4. На четвёртом шаге, используя усреднение тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  вдоль плоскостей  $i+l+j=\mathrm{const}$  получим ряд  $\hat{\mathbf{X}}$ . Этот ряд и будем считать сигналом.

Стоит отметить, что этот способ не является оптимальным.

## HOSVD SSA: отделение сигнала с помощью HOOI

Задача: выделение сигнала из ряда.

Второй способ использует HOOI — метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями n-рангов. В отличие от усечения, этот метод является оптимальным.

Первый шаг алгоритма — вложение, совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.

- **2** HOOI: Выбор ранга сигнала r и применение к  $\mathcal{X}$  HOOI с набором n-рангов (r, r, r). Результат оптимальное приближение тензором  $\hat{\mathcal{X}}$  с n-рангами r.
- f 3 Восстановление: усреднение тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  аналогично восстановлению в варианте с усечением.

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд  $\hat{X}$  будем считать сигналом.

11/19

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



—Описание HOSVD SSA и его свойства

HOSVD SSA: отделение сигнала с помощью HOOI



Второй способ использует метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями n-рангов — High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [?]. В отличие от усечения, этот метод является оптимальным, в том смысле, что на тензоре, полученном этим методом достигается минимум расстояния, в смысле нормы Фробениуса, до исходного тензора по всем тензорам с данными ограничениями на ранги.

Приведём вторую реализацию алгоритма HOSVD SSA для отделения сигнала от шума, используя HOOI. Первый шаг алгоритма — вложение, совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.

- 2. На втором шаге выбирается ранг сигнала r и к полученному ранее траекторному тензору  $\mathcal X$  применяется HOOI с набором n-рангов  $(r,\,r,\,r)$ . В результате получаем оптимальное приближение траекторного тензора  $\mathcal X$  тензором  $\hat{\mathcal X}$  со значениями n-рангов равными r.
- 3. Третий шаг восстановление ряда по тензору  $\hat{\mathcal{X}}$  усреднением совпадает с четвёртым шагом (восстановлением) в первом варианте алгоритма для выделения сигнала из ряда.

Полученный усреднением ряд  $\hat{X}$  будем считать сигналом.

## Свойства HOSVD SSA, разделимость рядов

Разделимость и ранг рядов являются важными понятиями в теории SSA. Рассмторим эти понятия для алгоритма HOSVD SSA

• Разделимость рядов

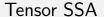
#### Утверждение

Если временные ряды  $\tilde{X}$  и  $\hat{X}$  длины N слабо I- и L-разделимы в смысле теории SSA, то существует такое HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$  ряда  $X = \tilde{X} + \hat{X}$ , что его можно в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов  $\tilde{X}$  и  $\hat{X}$ .

Понятие слабой разделимости рядов из SSA применимо к тензорному случаю

12/19 Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



—Описание HOSVD SSA и его свойства

Свойства HOSVD SSA, разделимость рядов



Метод SSA хорошо изучен и важную роль в теории играют понятия разделимости и ранга рядов. Рассмторим эти понятия для алгоритма HOSVD SSA.

Первое утверждение о разделимости позволяет перенести понятие слабой разделимости рядов из теории SSA на тензорный случай. Само утверждение заключается в том, что если временные ряды  $\tilde{X}$  и  $\hat{X}$  длины N слабо I- и L-разделимы в смысле теории SSA, то существует такое сингулярное разложение траекторного тензора  $\mathcal{X}$  ряда  $X = \tilde{X} + \hat{X}$ , что его можно в виде суммы сингулярных разложений траекторных тензоров, составленных по рядам  $\tilde{X}$  и  $\hat{X}$ .

Доказательство утверждения следует из ортогональности сингулярных векторов в HOSVD.

### Свойства HOSVD SSA, ранг ряда

#### Ранг ряда

#### Утверждение

Пусть временной ряд X имеет конечный ранг d в терминах SSA. Тогда для любых значений параметров I и L таких, что

$$d \leqslant \min(I, L, N - I - L + 2),$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в HOSVD траекторного тензора  $\mathcal X$  этого ряда с параметрами I и L будет равно d.

Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HOSVD SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

13/19

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



—Свойства HOSVD SSA, ранг ряда



Второе утверждение о ранге ряда говорит о том, что понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HOSVD SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

Само утверждение звучит заключается в том, что если ряд имеет конечный ранг d, то для любых допустимых параметров I,L количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в сингулярном разложении траекторного тензора  $\mathcal X$  будет равно d.

Доказательство этого утверждения следует из свойств n-рангов сингулярного разложения.

### Примеры слабой разделимости

- Экспонента и косинус с экспоненциально-модулированной амплитудой:  $\tilde{x}_n = e^{-\alpha n} \cos(2\pi n/T + \varphi), \ \hat{x}_n = e^{\alpha n}, n \in \overline{1:N}.$ 
  - Если (N+2) : T, то при выборе I, L: I+L < N+1, делящихся нацело на T  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\hat{\mathbf{X}}$  слабо разделимы.
- Два косинуса:  $\tilde{x}_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi), \ \hat{x}_n = \cos(2\pi\omega' n + \varphi'), \ 0 < \omega < 1/2$ . тогда ряд  $\tilde{X}$  отделим от ряда  $\hat{X}$  в смысле Tensor SSA тогда и только тогда, когда  $\tilde{X}$  и  $\hat{X}$  слабо разделимы тогда и только тогда, когда  $\omega \neq \omega', \ I, L, J > 2$  и  $I\omega, \ I\omega', \ L\omega, \ L\omega', \ J\omega, \ J\omega'$  целые числа.

В последнем примере при одинаковых амплитудах происходит смешение компонент и в теории SSA говорят, что наблюдается приближённая разделимость.

Как формализовать приближённую и точную разделимость в теории HOSVD SSA пока неясно.

14/19

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



Примеры слабой разделимости



Рассмотрим примеры слабо разделимых в терминах HOSVD SSA рядов.

- 1. Ряд косинуса с экспоненциально-модулированной амплитудой слабо отделим от ряда экспоненты той же степени, если N+2 делится нацело на период косинуса и выбранные параметры делятся нацело на период.
- 2. Ряды, порождённые косинусами с разными частотами слабо отделимы, если все измерения траекторного тензора имеют размерность больше 2, и делятся нацело на периоды обоих косинусов.

В последнем примере при одинаковых амплитудах происходит смешение компонент.

B SSA эта ситуация формализована, в HOSVD SSA пока неясно как можно формализовать приближённую и точную разделимость.

## Сравнение HOSVD SSA и Basic SSA

- $x_n = 2e^{0.035n}$ , шум белый гауссовский,  $\sigma^2 = 2.25$ ;
- $x_n=2+0.1n$ , шум белый гауссовский,  $\sigma_1^2=2.25$ ,,  $\sigma_2^2=0.04$ ;
- $x_n=30\cos(2\pi n/12)$ , шум белый гауссовский,  $\sigma^2=25$ , и красный,  $\delta=\sqrt{5},\, \varphi_1=0.5, \varphi_2=0.9.$

Оценка точности — RMSE по 500 реализациям шума: X — ряд длины N,  $\mathsf{S}_i$  — выделенный в i-м эксперименте сигнал, тогда

$$\widehat{\mathrm{RMSE}}(m) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \widehat{\mathrm{MSE}}(\mathsf{S}_i, \mathsf{X})}, \qquad \widehat{\mathrm{MSE}}(\mathsf{S}, \mathsf{X}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (s_i - x_i)^2.$$

Во всех этих случаях метод SSA показал точность отделения сигнала выше, чем HOSVD SSA.

15/19

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



Cравнение HOSVD SSA и Basic SSA



Были проведены численные измерения точности восстановления сигнала при использовании SSA и предложенных методов HOSVD SSA на примерах трёх рядов: порождённого экспонентой, линейного и косинуса.

На экспоненциальный ряд действовали белым шумом и восстанавливали по одной компоненте.

Для линейного ряда рассматривались ситуации большого и малого шума и в обеих ситуациях сравнивалось восстановление по одной и двум компонентам.

На ряд косинуса действовали белым шумом и красным с разными параметрами.

Шло сравнение точности метода SSA и методов HOSVD SSA с использованием усечения и HOOI. Во всех приведённых выше случаях метод SSA оказался точнее остальных.

Оценка точности бралась равной корню из среднего значения среднеквадратичного отклонения восстановленного ряда от исходного по 500 реализациям шума.

# Сравнение HOSVD SSA и Basic SSA

Таблица: RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала, порождённого косинусом. N=71

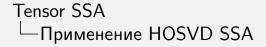
	12	24	30	36
белый, $\sigma^2 = 25$	1.82	1.42	1.40	1.42
красный, $\varphi=0.5$	1.31	1.03	1.01	1.03
красный, $\varphi=0.9$	1.88	1.37	1.34	1.36

Таблица: RMSE восстановленного с помощью HOSVD SSA с использованием HOOI сигнала, порождённого косинусом. N=71

I  imes L вид шума	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
белый, $\sigma^2=25$	1.63	1.53	1.56	1.65	1.62	1.49
красный, $\varphi=0.5$	1.17	1.12	1.14	1.21	1.19	1.08
красный, $\varphi=0.9$	1.56	1.42	1.44	1.54	1.51	1.39

16/19 Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



└─Cравнение HOSVD SSA и Basic SSA



На этом слайде показан результат сравнения SSA и HOSVD SSA с использованием HOOI на примере ряда, порождённого косинусом для разных видов шума. Во всех случаях SSA показал лучший результат, чем HOSVD SSA.

## Особый случай

Приведём особый пример, в котором HOSVD SSA оказался точнее базового SSA.

$$x_n = \sin(2\pi n/3 + \pi/2), n \in \overline{1:9}.$$

Шум: красный с параметрами  $\delta = 0.1, \, \varphi = 0.9.$ 

Таблица: RMSE восстановленного с помощью различных методов короткого сигнала, порождённого синусом.

SSA	HOSVD SSA (HOSVD)	HOSVD SSA (HOOI)		
0.116	0.110	0.095		

17/19

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



 $ldsymbol{ldsymbol{ldsymbol{ldsymbol{eta}}}}$ Особый случай



Был найден случай временного ряда и шума, для которого метод HOSVD SSA с использованием HOOI оказался в среднем точнее, чем SSA.

Сигнал задан коротким синусом со слайда, на него подействовали красным шумом с параметрами  $\delta=0.1,\,\varphi=0.9.$ 

Отклонение считалось аналогично предыдущим примерам по 500 реализациям шума. Из таблицы видно, что в случае так заданного ряда, метод HOSVD SSA оказывается точнее стандартного SSA, причём самым точным оказался метод с использованием HOOI.

Причины данного явления на данном этапе остаются неизвестными.

#### Заключение

#### Таким образом:

- Описан и реализован алгоритм HOSVD SSA.
- Выведены аналоги важных свойств SSA для метода HOSVD SSA.
- Описаны примеры использования метода.
- Проведено численное сравнение точности методов HOSVD SSA и SSA, найден особый случай.

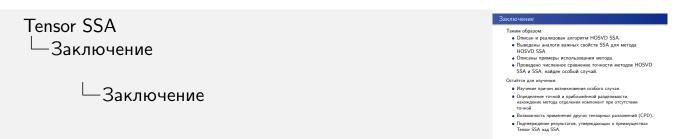
#### Остаётся для изучения:

- Изучение причин возникновения особого случая.
- Определение точной и приближённой разделимости, нахождение метода отделения компонент при отсутствии точной.
- Возможность применения других тензорных разложений (CPD).
- Подтверждение результатов, утверждающих о преимуществах Tensor SSA над SSA.

18/19

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



#### В результате работы

- был описан и реализован алгоритм HOSVD SSA;
- были выведены аналоги важных свойств SSA для метода HOSVD SSA:
- Были описаны примеры использования метода;
- было проведено численное сравнение точности методов HOSVD SSA и SSA, найден особый случай.

#### Для дальнейшего изучения остаётся

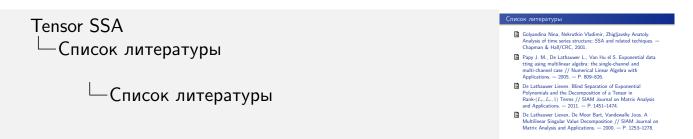
- изучение причин возникновения особого случая;
- определение точной и приближённой разделимости, нахождение метода отделения компонент при отсутствии точной;
- возможность применения других тензорных разложений, в частности CPD;
- подтверждение результатов, утверждающих о преимуществах Tensor SSA над SSA:

### Список литературы

- Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly.
  Analysis of time series structure: SSA and related techiques. —
  Chapman & Hall/CRC, 2001.
- Papy J. M., De Lathauwer L., Van Hu el S. Exponential data tting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. 2005. P. 809–826.
- De Lathauwer Lieven. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank- $(L_r,L_r,1)$  Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2011. P. 1451–1474.
- De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2000. P. 1253–1278.

19/19 Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Tensor SSA



На данном слайде представлен список основных источников, используемых в моей работе.