

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика

Учебная практика 3 (научно-исследовательская работа)  
«TENSOR SSA ДЛЯ АНАЛИЗА ВРЕМЕННОГО РЯДА»

Выполнил:

Хромов Никита Андреевич

20.Б04-мм

Научный руководитель:

к. ф.-м. н., доцент

Голяндина Н. Э.

## Оглавление

1.	Введение . . . . .	3
2.	Описание метода TSSA . . . . .	4
3.	Свойства HOSVD . . . . .	6
4.	Свойства TSSA . . . . .	9
4.1.	Примеры разделимости рядов в тензорном случае . . . . .	10
5.	Другие разложения . . . . .	11
6.	Заключение . . . . .	12
<b>Список литературы . . . . .</b>		<b>13</b>

## 1. Введение

Здесь должно быть введение.

## 2. Описание метода TSSA

Дан временной ряд  $F$  длины  $N$

$$F = (f_1, f_2, \dots, f_N).$$

На первом этапе выбираются два натуральных параметра  $I, L : I + L - 1 \leq N$ , по ним высчитывается третий параметр  $J = N - I - L + 2$ . С учётом этих параметров строится траекторный тензор  $\mathcal{X}$  размерности  $I \times L \times J$  следующим образом

$$\mathcal{X}_{i,l,j} = f_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

Слои тензора будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{:,j} &= \begin{pmatrix} f_j & f_{j+1} & \dots & f_{j+L-1} \\ f_{j+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{j+I-1} & \dots & \dots & f_{j+I+L-2} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{X}_{:,l} &= \begin{pmatrix} f_l & f_{l+1} & \dots & f_{l+J-1} \\ f_{l+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{l+I-1} & \dots & \dots & f_{l+I+J-2} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{X}_{i,,} &= \begin{pmatrix} f_i & f_{i+1} & \dots & f_{i+J-1} \\ f_{i+1} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ f_{i+L-1} & \dots & \dots & f_{i+L+J-2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На втором этапе к полученному тензору применяется HOSVD [1] — тензорное разложение, являющееся обобщением SVD на большие размерности. Результатом разложения является набор из одного тензора  $\mathcal{Z}$  размерности  $I \times L \times J$  и трёх ортогональных матриц  $\mathbf{U}^{(1)}, \mathbf{U}^{(2)}, \mathbf{U}^{(3)}$  размерностей  $I \times I, L \times L, J \times J$  соответственно.

Этот набор удовлетворяет равенству

$$\mathcal{X} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \mathbf{U}^{(3)}, \quad (1)$$

где  $\times_n$  — произведение тензора на матрицу по  $n$ -му измерению. Оно определяется следующим образом: пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_K$ ,  $\mathbf{U}$  — матрица размерности

$J_n \times I_n$ , тогда  $\mathcal{A} \times_n \mathbf{U}$  — тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_K$ , который считается по формуле

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_K} = \sum_{i_n=1}^{I_n} a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_K} u_{j_n i_n}.$$

Обозначим за  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  подтензор тензора  $\mathcal{Z}$ , полученный фиксированием индекса  $i_n = \alpha$ . Тензор  $\mathcal{Z}$  удовлетворяет следующим свойствам:

1. подтензоры  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  и  $\mathcal{Z}_{i_n=\beta}$  ортогональны для всех возможных значений  $n, \alpha, \beta$  :  
 $\alpha \neq \beta$ :

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \alpha \neq \beta,$$

2. подтензоры расположены в порядке убывания их нормы Фробениуса:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех  $n \in \{1, 2, 3\}$ , где  $I_1 = I$ ,  $I_2 = L$ ,  $I_3 = J$ .

**Определение 2.1.** Обозначим  $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|$  и будем называть  $\sigma_i^{(n)}$   $i$ -м сингулярным числом тензора  $\mathcal{X}$  по измерению  $n$ .

**Определение 2.2.** Векторы  $\mathbf{U}_i^{(n)}$  будем называть  $i$ -м сингулярным вектором тензора  $\mathcal{X}$  по измерению  $n$ .

Разложение (1) можно представить в виде суммы

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$$

Такой вид позволяет провести третий этап — группировку. Множество индексов  $\mathfrak{S} = \{1, 2, \dots, \min(I, L, J)\}$  разбивается по смыслу на непересекающиеся множества

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, \quad k \neq l.$$

По каждой из групп строятся тензоры

$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}. \quad (2)$$

На четвёртом этапе, по каждому тензору вида (2), полученному после этапа группировки, восстанавливается ряд. По соображениям построения траекторного тензора,

компоненты ряда восстанавливаются усреднением вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$ . Другими словами, компоненты восстановленного ряда  $F^{(k)} = F^{(\mathfrak{S}_k)}$  высчитываются по формуле

$$f_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,l,j) \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{i,l,j}^{(\mathfrak{S}_k)}, \quad n \in \overline{1:N},$$

где  $\mathfrak{M}_n = \{(i, l, j) | 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J, i + l + j - 2 = n\}$ .

Результатом метода является набор временных рядов  $F^{(1)}, \dots, F^{(m)}$  такой, что  $F = \sum_{k=1}^m F^{(k)}$ .

### 3. Свойства HOSVD

Многие свойства метода SSA являются следствиями свойств SVD. В свою очередь, многие свойства HOSVD являются аналогами свойств SVD. Таким образом, аналогичность свойств SSA и TSSA может быть выведена из аналогичности некоторых свойств SVD и HOSVD.

**Утверждение 3.1.** *Вычисление HOSVD тензора  $\mathcal{A}$  с  $N$  размерностями сводится к вычислению SVD на  $N$  матрицах  $\mathbf{A}_{(n)}$ , которые вычисляются развёрткой тензора по  $n$ -му измерению [1].*

Другими словами, если  $\mathcal{A}$  — тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$ , то его развёртка по  $n$ -му измерению — это матрица  $\mathbf{A}_{(n)}$  размерности  $I_n \times I_{n+1}I_{n+2} \dots I_N I_1 I_2 \dots I_{n-1}$ , в которой элемент  $a_{i_1 i_2 \dots i_N}$  тензора содержится в строке  $i_n$  и столбце с номером равным

$$(i_{n+1} - 1)I_{n+2}I_{n+3} \dots I_N I_1 I_2 \dots I_{n-1} + (i_{n+2} - 1)I_{n+3}I_{n+4} \dots I_N I_1 I_2 \dots I_{n-1} + \dots \\ + (i_N - 1)I_1 I_2 \dots I_{n-1} + (i_1 - 1)I_2 I_3 \dots I_{n-1} + (i_2 - 1)I_3 I_4 \dots I_{n-1} + \dots + i_{n-1}.$$

К каждой из полученных матриц применяется SVD, в результате чего получаются  $N$  матриц  $\mathbf{U}^{(n)}$ , составленных из левых сингулярных векторов соответствующих развёрток. Затем находится тензор сингулярных чисел

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \times_1 \mathbf{U}^{(1)\text{H}} \times_2 \mathbf{U}^{(2)\text{H}} \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)\text{H}}.$$

В результате получается искомое разложение

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)}.$$

Из-за этой связи HOSVD с обычным матричным SVD для многих свойств SVD существуют аналогичные свойства HOSVD.

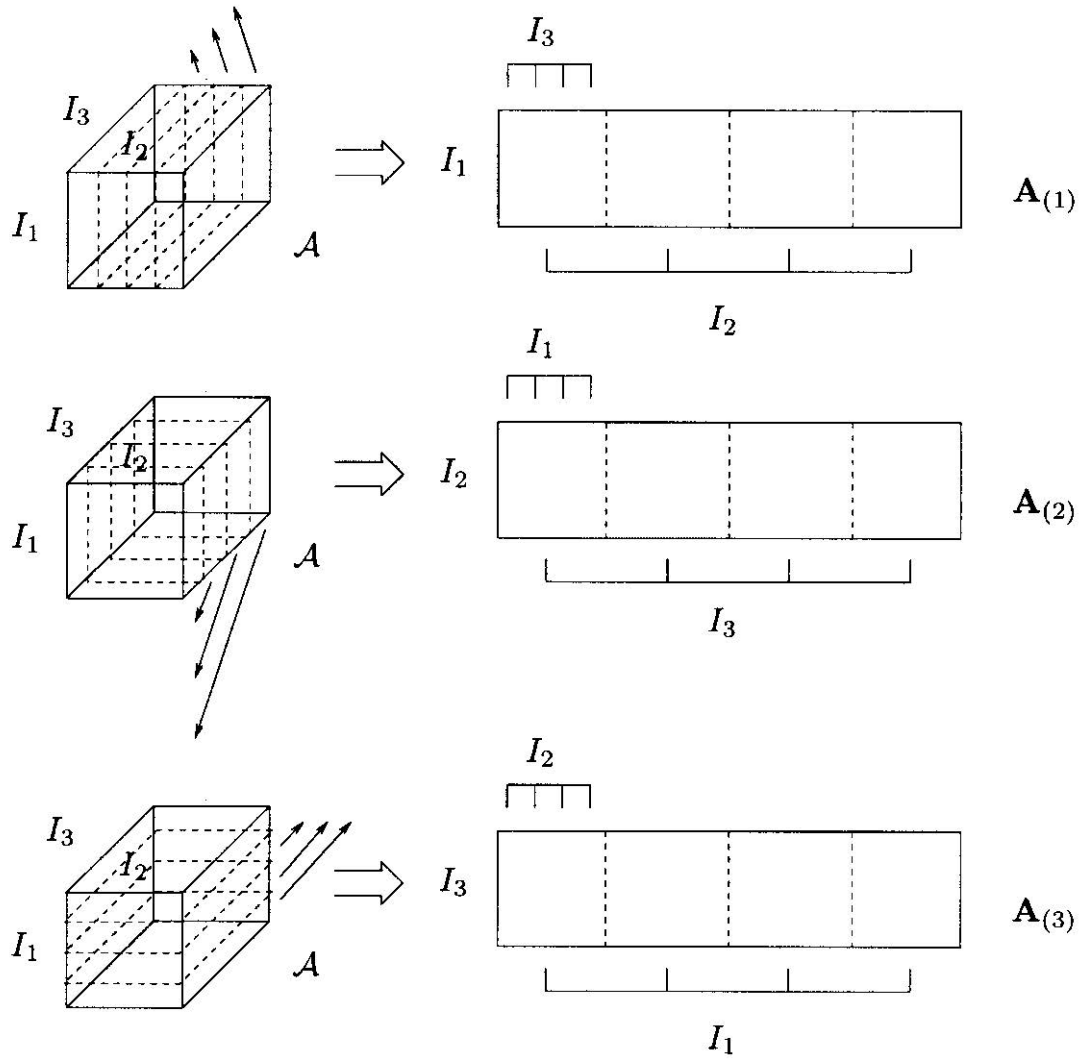


Рис. 1. Развёртка тензора  $\mathcal{A}$  размерности  $I_1 \times I_2 \times I_3$  в матрицы  $\mathbf{A}_{(1)}$ ,  $\mathbf{A}_{(2)}$ ,  $\mathbf{A}_{(3)}$  размерностей  $I_1 \times (I_2 I_3)$ ,  $I_2 \times (I_3 I_1)$ ,  $I_3 \times (I_1 I_2)$  соответственно

**Свойство 3.1** (Единственность).

1. Все сингулярные числа по каждому измерению определяются однозначно.
2. Если сингулярные числа по измерению  $n$  различны, то сингулярные векторы по измерению  $n$  определены в точности до умножения на коэффициент единичной нормы. Если  $U_\alpha^{(n)}$  умножается на  $e^{j\theta}$ , то  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  должен быть умножен на обратный коэффициент  $e^{-j\theta}$ .

Сингулярные векторы по измерению  $n$ , соответствующие одному и тому же сингулярному числу по измерению  $n$ , могут быть заменены любой унитарной линейной комбинацией. Соответствующие подтензоры  $\{\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}\}$  должны быть пересчитаны обратным образом. Формально  $\mathbf{U}^{(n)}$  можно заменить на  $\mathbf{U}^{(n)}\mathbf{Q}$ , где  $\mathbf{Q}$  — блочно-диагональная матрица,

состоящая из унитарных блоков, в которой блочное разбиение соответствует разбиению  $\mathbf{U}^{(n)}$  на наборы сингулярных векторов по измерению  $n$  соответствующих одинаковым сингулярным значениям по измерению  $n$ . При этом тензор  $\mathcal{Z}$  должен быть заменён на  $\mathcal{Z} \times_n \mathbf{Q}^H$ .

В случае вещественно-значных тензоров единственность имеется в точности до знака, что соответствует умножению на унитарную матрицу.

**Свойство 3.2** (Обобщение). HOSVD тензора второго порядка сводится к его матричному SVD.

Перед формулировкой следующих свойств необходимо ввести определение.

**Определение 3.1** ( $n$ -ранг).  $n$ -рангом тензора  $\mathcal{A}$  называется размерность векторного пространства, порождённого векторами измерения  $n$  этого тензора. Обозначается  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ .

*Замечание.* В отличие от матричного случая,  $n$ -ранги тензора порядка выше 2 могут в общем случае отличаться.

**Свойство 3.3** (Связь  $n$ -ранга тензора и ранга его развёртки по измерению  $n$ ). Векторы размерности  $n$  тензора  $\mathcal{A}$  являются столбцами его развёртки по измерению  $n$  и выполняется равенство

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathbf{A}_{(n)}).$$

**Свойство 3.4** (Связь  $n$ -ранга тензора и его HOSVD). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$  размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_N$

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_N \mathbf{U}^{(N)},$$

тогда, по определению, тензор  $\mathcal{Z}$  удовлетворяет свойству упорядоченности сингулярных чисел

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех  $n \in \overline{1:N}$ . Обозначим  $r_n$  — наибольший индекс такой, что  $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$ . Тогда

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = r_n. \quad (3)$$

Все утверждения и их доказательства приведены в статье [1].



## 4. Свойства TSSA

В силу аналогичности свойств SVD и HOSVD, многие определения и свойства из теории SSA можно перенести на тензорный случай.

**Утверждение 4.1.**  $\tilde{F} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_N)$ ,  $\hat{F} = (\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_N)$  — временные ряды длины  $N$ . Пусть ряд  $F$  является суммой этих рядов. Траекторные тензоры рядов равны соответственно:  $\tilde{\mathcal{X}}$ ,  $\hat{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{X}$ . Тогда существует сингулярное разложение тензора  $\mathcal{X}$  с параметрами  $I, L$ , которое можно представить в виде суммы сингулярных разложений тензоров  $\tilde{\mathcal{X}}$  и  $\hat{\mathcal{X}}$  с теми же параметрами в том и только том случае, когда взаимно ортогональны все подряды рядов  $\tilde{F}$  и  $\hat{F}$  длины  $I, L, J = N - I - L + 2$ , то есть

1.  $\tilde{f}_k \hat{f}_m + \dots + \tilde{f}_{k+I-1} \hat{f}_{m+I-1} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : N - I + 1},$
2.  $\tilde{f}_k \hat{f}_m + \dots + \tilde{f}_{k+L-1} \hat{f}_{m+L-1} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : N - L + 1},$
3.  $\tilde{f}_k \hat{f}_m + \dots + \tilde{f}_{k+J-1} \hat{f}_{m+J-1} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : N - J + 1}.$

*Доказательство.* Сингулярные разложения тензоров  $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{X}}$  могут быть представлены в виде следующих сумм:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}, \\ \tilde{\mathcal{X}} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \tilde{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \tilde{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_j^{(3)}, \\ \hat{\mathcal{X}} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \hat{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \hat{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \hat{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \hat{\mathbf{U}}_j^{(3)}. \end{aligned}$$

Сумма  $\mathcal{X} = \sum_i \sum_l \sum_j \tilde{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \tilde{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \tilde{\mathbf{U}}_j^{(3)} + \sum_i \sum_l \sum_j \hat{\mathcal{Z}}_{i,l,j} \hat{\mathbf{U}}_i^{(1)} \circ \hat{\mathbf{U}}_l^{(2)} \circ \hat{\mathbf{U}}_j^{(3)}$  является сингулярным разложением  $\mathcal{X}$  в том и только том случае, когда пары векторов  $\tilde{\mathbf{U}}_k^{(\sigma)}, \hat{\mathbf{U}}_m^{(\sigma)}$  взаимно ортогональны при всех возможных значениях  $\sigma, k, m$ . Это равносильно ортогональности линейных пространств  $\mathcal{L}_1^{(\sigma)}, \mathcal{L}_2^{(\sigma)}$ , построенных на векторах  $\tilde{\mathbf{U}}_k^{(\sigma)}$  и  $\hat{\mathbf{U}}_m^{(\sigma)}$  соответственно.

Рассмотрим пространства  $\mathcal{L}_1^{(1)}, \mathcal{L}_2^{(1)}$ : это пространства первых измерений тензоров  $\tilde{\mathcal{X}}$  и  $\hat{\mathcal{X}}$ , то есть пространства построенные на векторах вида  $\tilde{\mathcal{X}}_{:,l,j}$  и  $\hat{\mathcal{X}}_{:,l,j}$  соответственно. Вспоминая вид тензоров  $\tilde{\mathcal{X}}$  и  $\hat{\mathcal{X}}$  получаем, что условие ортогональности этих линейных пространств равносильно первому условию из формулировки утверждения.

Оставшиеся два условия получаются аналогично из условий ортогональности оставшихся двух пар линейных пространств.  $\square$

Из утверждения 4.1 следует, что понятие слабой разделимости ряда из теории SSA [2] применимо и к тензорному случаю.

**Следствие 4.1.1.** *Если временные ряды  $\tilde{F}$  и  $\hat{F}$  длины  $N$  слабо  $I$ - и  $L$ -разделимы в смысле теории SSA, то существует такое HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$  ряда  $F = \tilde{F} + \hat{F}$ , что его можно разбить на две части, являющиеся HOSVD траекторных тензоров, составленных по рядам  $\tilde{F}$  и  $\hat{F}$ .*

*Замечание.* Понятие сильной разделимости можно перенести со стандартного случая на тензорный непосредственно, с поправкой на определение 2.1 сингулярных чисел для тензора.

#### 4.1. Примеры разделимости рядов в тензорном случае

Рассмотрим условия разделимости рядов  $\tilde{F} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_N)$ ,  $\hat{F} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2, \dots, \hat{f}_N)$  в некоторых частных случаях.

- Отделимость от константного ряда

Пусть  $\tilde{f}_n = c \neq 0$  для  $n \in \overline{1:N}$ . Тогда необходимые и достаточные условия отделимости от него ряда  $\hat{F}$  в смысле TSSA следующие:

1. Ряд  $\hat{F}$  имеет целый период  $T$ , и  $I/T$ ,  $L/T$ ,  $J/T$  — целые;
2.  $\hat{f}_1 + \hat{f}_2 + \dots + \hat{f}_T = 0$ .

- Отделимость от экспоненциального ряда

Пусть  $\tilde{f}_n = e^{\alpha n}$  для  $n \in \overline{1:N}$ . Тогда необходимые и достаточные условия отделимости от него ряда  $\hat{F}$  в смысле TSSA следующие:

1. Ряд  $(\tilde{f}_1 \hat{f}_1, \tilde{f}_2 \hat{f}_2, \dots, \tilde{f}_N \hat{f}_N)$  имеет целый период  $T$ , и  $I/T$ ,  $L/T$ ,  $J/T$  — целые;
2.  $\tilde{f}_1 \hat{f}_1 + \tilde{f}_2 \hat{f}_2 + \dots + \tilde{f}_T \hat{f}_T = 0$ .

- Отделимость от гармонического ряда

Пусть  $\tilde{f}_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$ , где  $0 < \omega < 1/2$ , и  $I, L, J > 2$ . Положим  $\hat{f}_n = \cos(2\pi\omega' n + \varphi')$ , тогда ряд  $\tilde{F}$  отделим от ряда  $\hat{F}$  в смысле TSSA тогда и только тогда, когда  $\omega \neq \omega'$  и  $I\omega$ ,  $I\omega'$ ,  $L\omega$ ,  $L\omega'$ ,  $J\omega$ ,  $J\omega'$  — целые числа.

## 5. Другие разложения

Помимо HOSVD, существует ещё одно разложение тензора в сумму тензоров 1 ранга: CANDECOMP-PARAFAC (CP) [3, 4]. Это разложение нам не подходит, так как количество компонент в этом разложении равно тензорному рангу, который в общем случае не удовлетворяет одному из основных свойств SSA: ранг траекторного тензора, построенного по сумме двух рядов может оказаться больше, чем сумма рангов траекторных тензоров, построенных на каждом из этих рядов.

Кроме того можно рассмотреть следующий случай. В терминах CP ряды  $f_1^{(i)} = 3$ ,  $f_2^{(i)} = \sin(2\pi i/3)$  имеют тензорные ранги 1 и 3 соответственно, а у ряда  $f^{(i)} = f_1^{(i)} + f_2^{(i)}$  ранг равен 3. Притом ни один из элементов разложения не даёт константный ряд, то есть разделения константного ряда от синуса не произошло, хотя в теории SSA эти ряды являются сильно разделимыми при условии делимости всех измерений на период синуса. Другим недостатком CP разложения является то, что это итерационный метод, причём процесс итерации начинается с генерации случайной матрицы, в связи с чем на одних и тех же данных он может выдавать разные результаты, в том числе может как сойтись, так и нет. Возможно можно добиться лучших результатов, используя CP, если строить тензор по ряду другим образом, подбирать другие параметры разложения и использовать другие методы вычисления CP, однако изучение этого вопроса выходит за рамки этой работы.

## 6. Заключение

Здесь должно быть заключение.

## Список литературы

1. De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1253–1278. — Access mode: <https://doi.org/10.1137/S0895479896305696>.
2. Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techniques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
3. Harshman Richard A. Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-model factor analysis. — 1970. — Vol. 16. — P. 1–84.
4. Carroll J. Douglas, Chang Jih Jie. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition // Psychometrika. — 1970. — Vol. 35. — P. 283–319.