

Санкт-Петербургский государственный университет  
Прикладная математика и информатика

Учебная практика 4 (научно-исследовательская работа) (семестр 8)

«ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРА»

Выполнил:

Хромов Никита Андреевич

20.Б04-мм

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., доцент

Голяндина Н. Э.

Санкт-Петербург

2024

# Оглавление

1.	Введение . . . . .	3
2.	Известные алгоритмы и результаты . . . . .	5
2.1.	SSA . . . . .	5
2.2.	MSSA . . . . .	8
2.3.	HOSVD . . . . .	9
2.4.	Свойства HOSVD . . . . .	11
3.	Описание метода HO-SSA . . . . .	14
3.1.	HO-SSA для разделения компонент сигнала . . . . .	15
3.2.	HO-SSA для выделения сигнала из ряда . . . . .	15
4.	Свойства HO-SSA . . . . .	17
4.1.	Разделимость рядов в терминах HO-SSA . . . . .	17
4.2.	Примеры разделимости рядов в алгоритме HO-SSA . . . . .	19
4.3.	Ранг ряда в терминах HO-SSA . . . . .	20
5.	Примеры использования HO-SSA . . . . .	20
5.1.	Сравнение HO-SSA и SSA . . . . .	22
6.	Описание метода HOSVD-MSSA . . . . .	26
6.1.	HOSVD-MSSA для выделения сигнала . . . . .	26
6.2.	HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала . . . . .	26
7.	Свойства HOSVD-MSSA . . . . .	27
7.1.	Свойства HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала . . . . .	27
7.2.	Примеры разделимости рядов в алгоритме HOSVD-MSSA . . . . .	30
7.3.	Свойства HOSVD-MSSA для выделения сигнала . . . . .	31
8.	Численные сравнения в задаче выделения сигнала . . . . .	34
8.1.	Результаты численных сравнений . . . . .	35
9.	Численные сравнения в задаче разделения компонент . . . . .	42
9.1.	Результаты численных сравнений . . . . .	44
10.	Альтернативные тензорные разложения . . . . .	45
11.	Заключение . . . . .	50
	<b>Список литературы . . . . .</b>	<b>51</b>

## 1. Введение

Singular spectrum analysis (SSA) [1] является популярным методом анализа временных рядов. Этот метод используется, в частности, для выделения сигнала и выделения тренда и периодических компонент из временного ряда. Метод SSA основан на сингулярном разложении особой матрицы построенной по временному ряду, называемой траекторной.

В работах [2, 3, 4] предлагается обобщение метода SSA, Tensor SSA, который основан на некотором тензорном разложении траекторного тензора, построенного по временному ряду. В работах [2, 3] рассматривается задача выделения сигнала из временного ряда, а в работе [4] — задача оценки частот периодических компонент сигнала. Причём, в этих работах утверждается о преимуществах тензорных модификаций над стандартным SSA.

Существует множество видов тензорных разложений, например High-Order Singular Value Decomposition (HOSVD) [5], Canonical Polyadic Decomposition (CPD) [6, 7], Tucker decomposition [8]. В частности, в работах [2, 3] используется разложение CPD, а в работе [4] — HOSVD.

Была поставлена задача реализовать тензорную модификацию метода SSA, выбрав некоторое тензорное разложение, в некотором смысле расширяющее SVD, и сравнить с методом SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала, а также рассмотреть расширение метода SSA на многомерные ряды — метод MSSA [9], сформулировать и реализовать тензорную модификацию этого метода и сравнить её с другими методами семейства SSA по точности выделения сигнала и разделения компонент сигнала. В качестве метода разложения был выбран метод HOSVD, который имеет наибольшее число свойств, справедливых для SVD.

Способ построения траекторного тензора и его разложение были выбраны из предложенных в статье [4], однако в отличие от этой статьи, в данной работе изучается применение выбранных средств в задаче выделения сигнала из временного ряда и в задаче отделения компонент сигнала.

В разделе 2.3 приведено описание разложения HOSVD и некоторые свойства этого разложения, необходимые для доказательства ключевых утверждений о тензорных модификациях SSA. В разделах 3, 4 представлено описание тензорных модификаций метода SSA — HOSVD-SSA и HOOI-SSA (оба этих метода в совокупности будем назы-

вать High-Order SSA или HO-SSA), и приведены утверждения, позволяющие использовать некоторые определения и свойства из теории базового SSA в модифицированных алгоритмах. В разделе 5 приведены примеры применения методов HO-SSA в задачах выделения сигнала из ряда и отделения компонент и численные сравнения этих методов с SSA. По итогам этого раздела была выявлена проблема сложности сопоставления компонент разложения с компонентами сигнала, и было установлено, что в большинстве рассмотренных случаев методы HO-SSA имеют меньшую точность, чем метод Basic SSA. В разделах 6, 7 и 8, описывается метод HOSVD-MSSA для выделения сигнала и проводятся численные сравнения этого метода с известными на гармонических сигналах особого вида. В этом семестре были добавлены разделы 6.2, 7.1, 7.2 и 9 в которых описывается метод HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала, формулируется общий критерий разделимости компонент, приводятся критерии разделимости компонент для некоторых частных случаев, и проводятся численные сравнения метода HOSVD-MSSA с другими известными методами семейства SSA в задаче разделения компонент. В результате были получены утверждения, позволяющие применять метод HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала, и было установлено преимущество этого метода над методом MSSA.

## 2. Известные алгоритмы и результаты

В этом разделе приведены описания алгоритмов SSA и MSSA, модификации которых рассматриваются в данной работе, а также описание метода HOSVD, применяемого в этих модификациях, некоторые свойства методов и важные определения.

### 2.1. SSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в книге [1].

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 2.1** (Оператор вложения). Оператором вложения  $\mathcal{H}_L$  с длиной окна  $L$  будем называть отображение, переводящее временной ряд  $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $N \geq L$ , в ганкелеву матрицу  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times K}$ ,  $K = N - L + 1$ , такую, что  $\mathbf{X}_{lk} = x_{l+k-1}$ . Результирующая матрица имеет вид

$$\mathcal{H}_L(\mathbf{X}) = \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_K \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_L & x_{L+1} & \dots & x_N \end{pmatrix}.$$

**Определение 2.2** (Траекторная матрица). Траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L < N$  называют матрицу  $\mathbf{X}$ , полученную применением оператора вложения  $\mathcal{H}_L$ , к ряду  $\mathbf{X}$ .

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X}_k$  и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

В алгоритме 1 описан метод SSA для разделения компонент сигнала, то есть нахождения рядов  $\mathbf{X}_k$ . В алгоритме 2 описан метод SSA для выделения сигнала, то есть нахождения  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ . Первые два шага в алгоритме 2 совпадают с соответствующими шагами алгоритма 1, поэтому описание алгоритма начинается с шага 3.

**Определение 2.3** (SSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется SSA-рангом временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d < N/2$  и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть

---

**Алгоритм 1 SSA** для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $m$ ,  $m \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ ,

$\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$ :

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, k \neq l.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ .

- 1: Вложение: построение траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  по длине окна  $L$ .
- 2: Разложение: проведение SVD траекторной матрицы  $\mathbf{X}$ , получение её представления в виде

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T, \quad R \leq d \leq \min(L, N - L + 1).$$

- 3: Группировка: построение матриц

$$\mathbf{X}_k = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление: вычисление рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  по матрицам  $\mathbf{X}_k$  посредством их усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ :

$$x_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,j) \in \mathfrak{M}_n} (\mathbf{X}_k)_{ij}, \quad n \in \overline{1 : N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \{(i, j) | 1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq N - L + 1, i + j - 1 = n\}.$$

---

**Алгоритм 2 SSA** для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $L : 1 < L < N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $1 \leq R \leq \min(L, N - L + 1)$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}$  — оценка сигнала  $\sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k$ .

- 3: Группировка: построение матрицы

$$\tilde{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^R \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T.$$

- 4: Восстановление ряда  $\tilde{\mathbf{X}}$  по матрице  $\tilde{\mathbf{X}}$  посредством её усреднения вдоль побочных диагоналей  $i + j = \text{const}$ .
- 

такой, что  $d \leq \min(L, N - L + 1)$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

*Замечание.* В качестве параметра  $R$  в алгоритмах 1 и 2 рекомендуется выбирать ранг

сигнала.

**Пример 2.1.** Ниже приведены примеры некоторых рядов, имеющих конечные ранги в терминах SSA.

- Ранг полиномиального ряда  $x_n = Q_d(n)$ , где  $Q_d$  — многочлен степени  $d$ , равен  $d+1$ .
- Ранг экспоненциального ряда  $x_n = Ce^{\alpha n}$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $C \neq 0$ , равен 1.
- Ранг экспоненциально-модулированного гармонического ряда

$$x_n = Ce^{\alpha n} \cos(2\pi n\omega + \psi),$$

где  $C \neq 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  и  $\omega \in [0, 1/2]$ , равен  $r(\omega)$ , где

$$r(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \{0, 1/2\}, \\ 2, & \omega \in (0, 1/2). \end{cases} \quad (1)$$

- Ранг суммы экспоненциально-модулированных гармоник

$$x_n = \sum_{i=1}^M Ce^{\alpha_i n} \cos(2\pi n\omega_i + \psi_i)$$

равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega),$$

где  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i, \alpha_i)$ , представленных в данном временном ряде.

**Определение 2.4** (Слабая SSA-разделимость). Временные ряды  $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$  и  $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$  называют слабо  $L$ -разделимыми в терминах SSA, если выполнены следующие условия:

1.  $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)},$
2.  $\sum_{k=0}^{N-L} \hat{x}_{i+k} \tilde{x}_{j+k} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : L}.$

**Утверждение 2.1.** Пусть  $X = \hat{X} + \tilde{X}$ , а  $X$ ,  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$  рядов  $X$ ,  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  является SVD матрицы  $X$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах SSA.

Утверждение 2.1 позволяет выделить множество временных рядов, которые можно разделить алгоритмом 1, а именно: слабо разделимые с некоторой длиной окна ряды.

## 2.2. MSSA

Все определения и утверждения из этого раздела можно найти в работах [9] и [10].

Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P),$$

$$\mathbf{X}_p = (x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)})^T.$$

**Определение 2.5** (Траекторная матрица многомерного временного ряда). Пусть  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$  — траекторные матрицы рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P$  соответственно, построенные по длине окна  $L$ . Траекторной матрицей многомерного временного ряда  $\mathbf{X}$  называется матрица  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{L \times KP}$ ,  $K = N - L + 1$ , построенная соединением матриц  $\mathbf{X}_p$  по столбцам, то есть

$$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \dots : \mathbf{X}_P].$$

Методы MSSA для разделения компонент и выделения сигнала совпадают с алгоритмами 1 и 2 соответственно, с точностью до изменения шагов вложения и разложения в соответствии с определением траекторной матрицы многомерного ряда (процедура восстановления временного ряда по матрице должна быть обратной к шагу вложения).

**Определение 2.6** (MSSA-ранг временного ряда). Число  $d$  называется MSSA-рангом  $P$ -мерного временного ряда  $\mathbf{X}$  длины  $N$ , если  $d < N/2$ , и для любой допустимой длины окна  $L$ , то есть такой, что  $d \leq \min(L, P(N - L + 1))$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L$ , равен  $d$ .

*Замечание.* Как и в SSA, в алгоритме MSSA рекомендуется в качестве параметра количества компонент, относимых к сигналу, выбирать ранг сигнала.

**Пример 2.2.** Рассмотрим  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  с элементами вида

$$x_n^{(p)} = \sum_{i=1}^{R(p)} a_i^{(p)} e^{-\alpha_i^{(p)} n} \cos \left( 2\pi \omega_i^{(p)} n + \varphi_i^{(p)} \right). \quad (2)$$

MSSA-ранг такого ряда равен

$$\sum_{(\omega, \alpha) \in \Omega} r(\omega), \quad (3)$$



где функция  $r(\omega)$  определена в уравнении (1), а  $\Omega$  — множество уникальных пар  $(\omega_i^{(p)}, \alpha_i^{(p)})$ , представленных в данном временном ряде.

*Замечание.* В дальнейшем в работе будут проведены сравнения методов SSA и MSSA с их тензорными модификациями HO-SSA и HOSVD-MSSA на многомерных сигналах вида (2). Это обосновано тем, что такая модель, а точнее её частный случай, в котором параметры  $R(p)$ ,  $\omega_i^{(p)}$  и  $\alpha_i^{(p)}$ , не зависят от номера ряда  $p$ , применяется в спектроскопии ядерного магнитного резонанса [11]. Кроме того, в работе [4] тоже рассматривается этот частный случай модели.

**Определение 2.7** (Слабая MSSA-разделимость).  $P$ -мерные временные ряды  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  длины  $N$  называются слабо  $L$ -разделимыми, если выполнены следующие условия:

1.  $\sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \tilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P},$
2.  $\sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(p)} \tilde{x}_{m+i}^{(p)} = 0, \quad \forall k, m \in \overline{1 : L}.$

**Утверждение 2.2.** Пусть  $X = \hat{X} + \tilde{X}$ , а  $X$ ,  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  — траекторные матрицы с длиной окна  $L$   $P$ -мерных рядов  $X$ ,  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  соответственно. Тогда сумма SVD матриц  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  является SVD матрицы  $X$  тогда и только тогда, когда ряды  $\hat{X}$  и  $\tilde{X}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах MSSA.

Как и в одномерном случае, это утверждение позволяет определять множество рядов, которые возможно разделить с помощью метода MSSA.

### 2.3. HOSVD

Ключевым этапом в алгоритмах HO-SSA и HOSVD-MSSA является применение тензорного разложения HOSVD к некоторому тензору. Приведём определение этого разложения и некоторые его свойства. Все утверждения из этого раздела и их доказательства приведены в статье [5].

**Определение 2.8** (Произведение тензора и матрицы по измерению). Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ ,  $U$  — матрица размерности  $J_n \times I_n$ , тогда произведением тензора  $\mathcal{A}$  и матрицы  $U$  по измерению  $n$  ( $\mathcal{A} \times_n U$ ) называется тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_{n-1} \times J_n \times I_{n+1} \times \dots \times I_M$ , который считается по формуле

$$(\mathcal{A} \times_n U)_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} j_n i_{n+1} \dots i_M} = \sum_{i_n=1}^{I_n} a_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n i_{n+1} \dots i_M} u_{j_n i_n}.$$

**Теорема 1** (Сингулярное разложение порядка  $M$ ). Любой комплекснозначный тензор  $\mathcal{A}$  размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  может быть представлен в виде произведения

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}, \quad (4)$$

в котором

1.  $\mathbf{U}^{(n)} = [U_1^{(n)} : U_2^{(n)} : \dots : U_{I_n}^{(n)}]$  — унитарная матрица,
2.  $\mathcal{Z}$  — комплекснозначный тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , в котором каждый подтензор  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$ , полученный фиксированием индекса  $i_n = \alpha$  удовлетворяет следующим свойствам
  - а. полная ортогональность: подтензоры  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  и  $\mathcal{Z}_{i_n=\beta}$  ортогональны для всех возможных значений  $n, \alpha, \beta : \alpha \neq \beta$ :

$$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \quad \alpha \neq \beta,$$

- б. упорядоченность: подтензоры расположены в порядке убывания их норм Фробениуса:

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\| \quad (5)$$

для всех  $n \in \overline{1 : M}$ .

**Определение 2.9** (Сингулярное разложение тензора). Разложение вида (4) будем называть сингулярным разложением тензора  $\mathcal{A}$  порядка  $M$  или HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ .

**Определение 2.10** (Сингулярное число тензора). Обозначим  $\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|$  и будем называть  $\sigma_i^{(n)}$   $i$ -м сингулярным числом тензора  $\mathcal{A}$  по измерению  $n$ .

**Определение 2.11** (Сингулярный вектор тензора). Векторы  $U_i^{(n)}$  будем называть  $i$ -м сингулярным вектором тензора  $\mathcal{A}$  по измерению  $n$ .

*Замечание.* Представление (4) можно записать в виде

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \dots i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \dots \circ U_{i_M}^{(M)}. \quad (6)$$

Такое представление удобнее для описания алгоритма HO-SSA.

## 2.4. Свойства HOSVD

Многие свойства метода SSA являются следствиями свойств SVD. В свою очередь, многие свойства HOSVD являются аналогами свойств SVD. Таким образом, аналогичность свойств SSA и HO-SSA может быть выведена из аналогичности некоторых свойств SVD и HOSVD.

**Определение 2.12** (Развёртка тензора по измерению). Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , тогда его развёртка по  $n$ -му измерению — это матрица  $\mathbf{A}_{(n)}$  (или  $[\mathbf{A}]_n$ ) размерности  $I_n \times I_{n+1}I_{n+2}\dots I_M I_1 I_2 \dots I_{n-1}$ , в которой элемент  $a_{i_1 i_2 \dots i_M}$  тензора содержится в строке  $i_n$  и столбце с номером равным

$$1 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \left[ (i_k - 1) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^{k-1} I_m \right].$$

Пусть  $\mathcal{A}$  — тензор размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$ , применим SVD к развёрткам этого тензора вдоль каждого измерения, в результате чего получим  $M$  матриц  $\mathbf{U}^{(n)}$ , составленных из левых сингулярных векторов соответствующих развёрток. Теперь определим тензор  $\mathcal{Z}$  следующим образом

$$\mathcal{Z} = \mathcal{A} \times_1 (\mathbf{U}^{(1)})^H \times_2 (\mathbf{U}^{(2)})^H \dots \times_M (\mathbf{U}^{(M)})^H,$$

где верхний индекс  $H$  обозначает эрмитово сопряжение матрицы. Тогда исходный тензор  $\mathcal{A}$  можно представить в виде

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)}. \quad (7)$$

**Утверждение 2.3.** *Представление тензора  $\mathcal{A}$  в виде (7) является HOSVD этого тензора.*

Из-за этой связи HOSVD со стандартным матричным SVD для многих свойств SVD существуют аналогичные свойства HOSVD.

**Свойство 2.1** (Единственность).

1. Все сингулярные числа по каждому измерению определяются однозначно.
2. Если сингулярные числа по измерению  $n$  различны, то сингулярные векторы по измерению  $n$  определены в точности до умножения на коэффициент единичной нормы. Если  $U_\alpha^{(n)}$  умножается на  $e^{i\theta}$ , то  $\mathcal{Z}_{i_n=\alpha}$  должен быть умножен на обратный коэффициент  $e^{-i\theta}$ .

Сингулярные векторы по измерению  $n$ , соответствующие одному и тому же сингулярному числу по измерению  $n$ , могут быть заменены любой унитарной линейной комбинацией. Соответствующие подтензоры  $\{\mathcal{Z}_{in=\alpha}\}$  должны быть пересчитаны обратным образом. Формально  $\mathbf{U}^{(n)}$  можно заменить на  $\mathbf{U}^{(n)}\mathbf{Q}$ , где  $\mathbf{Q}$  — блочно-диагональная матрица, состоящая из унитарных блоков, в которой блочное разбиение соответствует разбиению  $\mathbf{U}^{(n)}$  на наборы сингулярных векторов по измерению  $n$ , соответствующих одинаковым сингулярным значениям по измерению  $n$ . При этом тензор  $\mathcal{Z}$  должен быть заменён на  $\mathcal{Z} \times_n \mathbf{Q}^H$ .

В случае вещественнозначных тензоров единственность имеется в точности до знака, что соответствует умножению на унитарную матрицу.

**Свойство 2.2** (Обобщение). HOSVD тензора является обобщением SVD в том смысле, что результат применения HOSVD к тензору с двумя измерениями, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, с точностью до унитарных преобразований сингулярных векторов и матрицы сингулярных значений.

Перед формулировкой следующих свойств необходимо ввести несколько определений.

**Определение 2.13** ( $n$ -ранг).  $n$ -рангом тензора  $\mathcal{A}$  называется размерность векторного пространства, порождённого векторами измерения  $n$  этого тензора. Обозначается  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ .

*Замечание.* В отличие от матричного случая,  $n$ -ранги тензора порядка выше 2 могут в общем случае отличаться.

**Определение 2.14** (Тензорный ранг).

1. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$  имеет тензорный ранг, равный 1, если он представим в виде

$$\mathcal{A} = a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_M,$$

где  $a_k \in \mathbb{C}^{I_k}$ , а  $\circ$  обозначает внешнее произведение.

2. Говорят, что тензор  $\mathcal{A}$  имеет ранг  $R$ , если он представим в виде линейной комбинации  $R$  тензоров ранга 1, и такое  $R$  минимальное. Обозначение:  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$ .

*Замечание.* В общем случае ранг тензора  $\mathcal{A}$  не равен его  $n$ -рангам, даже если они все равны между собой. Более того, всегда справедливо неравенство  $\text{rank}_n(\mathcal{A}) \leq \text{rank}(\mathcal{A})$ .

**Свойство 2.3** (Связь  $n$ -ранга тензора и ранга его развёртки по измерению  $n$ ). Векторы измерения  $n$  тензора  $\mathcal{A}$  являются столбцами его развёртки по измерению  $n$  и выполняется равенство

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = \text{rank}([\mathbf{A}]_n).$$

**Свойство 2.4** (Связь  $n$ -ранга тензора и его HOSVD). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$  размерности  $I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M$

$$\mathcal{A} = \mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}^{(1)} \times_2 \mathbf{U}^{(2)} \times_3 \dots \times_M \mathbf{U}^{(M)},$$

тогда, по определению, тензор  $\mathcal{Z}$  удовлетворяет свойству упорядоченности сингулярных чисел

$$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geq \dots \geq \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|$$

для всех  $n \in \overline{1 : M}$ . Обозначим  $r_n$  — наибольший индекс такой, что  $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$ . Тогда

$$\text{rank}_n(\mathcal{A}) = r_n. \quad (8)$$

**Свойство 2.5** (Норма). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (4), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ ,  $n \in \overline{1 : M}$ . Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}\|^2 &= \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \dots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2 = \\ &= \|\mathcal{Z}\|^2. \end{aligned}$$

**Определение 2.15** (Ориентированная энергия). Ориентированной по измерению  $n$  энергией тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \dots \times I_M}$  в направлении вектора  $X \in \mathbb{C}^{I_n}$  единичной нормы называют выражение

$$\text{OE}_n(X, \mathcal{A}) = \|X^H \mathbf{A}_{(n)}\|^2.$$

**Свойство 2.6** (Об ориентированной энергии). Направления экстремальной ориентированной энергии по измерению  $n$  соответствуют сингулярным векторам по измерению  $n$ , причем значение экстремальной энергии равно соответствующему квадрату сингулярного значения по измерению  $n$ .

Это означает, что векторы тензора  $\mathcal{A}$  по измерению  $n$  содержат наибольшие вклады в направлении  $U_1^{(n)}$ ; на это направление приходится  $\left(\sigma_1^{(n)}\right)^2$  энергии по отношению к общему количеству энергии в тензоре. Затем ориентированная энергия по измерению  $n$  достигает экстремума в направлении  $U_2^{(n)}$ , перпендикулярном  $U_1^{(n)}$ , с величиной  $\left(\sigma_2^{(n)}\right)^2$ , и так далее.

**Свойство 2.7** (Приближение). Пусть имеется HOSVD тензора  $\mathcal{A}$ , представленное в виде (4), и пусть  $R_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ . Определим тензор  $\hat{\mathcal{A}}$  отбрасыванием наименьших сингулярных значений  $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \dots, \sigma_{R_n}^{(n)}$  для заданных значений  $I'_n$ ,  $n \in \overline{1:M}$ , то есть заменяя нулями соответствующие части тензора  $\mathcal{Z}$ . Тогда верно

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leq \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} \left(\sigma_{i_2}^{(2)}\right)^2 + \dots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} \left(\sigma_{i_M}^{(M)}\right)^2. \quad (9)$$

Это свойство является эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Однако для тензоров ситуация совершенно иная. Отбрасывая наименьшие сингулярные значения измерения  $n$ , мы получаем тензор  $\hat{\mathcal{A}}$  с рангом столбцов равным  $I'_1$ , рангом строк равным  $I'_2$  и т.д. Но этот тензор в общем случае не является наилучшим приближением при заданных ограничениях на ранги измерений. Тем не менее, предположение об упорядочении (5) подразумевает, что «энергия»  $\mathcal{A}$  в основном сосредоточена в части, соответствующей малым значениям  $i_1, i_2, \dots, i_M$ . Следовательно, если  $\sigma_{I'_n}^{(n)} \gg \sigma_{I'_n+1}^{(n)}$  (например, если  $I'_n = \text{rank}_n(\mathcal{A})$ , то меньшие сингулярные значения по измерению  $n$  не существенны), то  $\hat{\mathcal{A}}$  всё ещё можно считать хорошим приближением  $\mathcal{A}$ . Ошибка ограничена выражением (9).

### 3. Описание метода HO-SSA

Пусть дан временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N).$$

**Определение 3.1** (Траекторный тензор ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $I, L : 1 \leq I, L \leq N, I + L \leq N + 1$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размерности  $I \times L \times J$ ,  $J = N - I - L + 2$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{ilj} = x_{i+l+j-2} \quad i \in \overline{1:I}, l \in \overline{1:L}, j \in \overline{1:J}.$$

В терминах оператора вложения 2.1 слои траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  с параметрами  $I, L$  имеют следующий вид

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{..j} &= \mathcal{H}_I \left( (x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+I+L-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{i..} &= \mathcal{H}_I \left( (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L+J-2}) \right), \\ \mathcal{X}_{i..} &= \mathcal{H}_L \left( (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L+J-2}) \right).\end{aligned}$$

На вход алгоритму подаётся временной ряд  $\mathbf{X}$  и параметры  $I, L : 1 \leq I, L \leq N, I + L \leq N + 1$ . Так как при замене одного из этих параметров на  $J = N - I - L + 2$  или при замене их между собой получаются те же самые траекторные тензоры с точностью до перестановки их измерений, то имеет смысл при рассмотрении нескольких наборов параметров рассматривать только те, которые дают уникальные тройки  $(I, L, J)$  без учёта порядка. В зависимости от целей определяются разные формулировки алгоритма.

### 3.1. HO-SSA для разделения компонент сигнала

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X}_k$  и шума  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^m \mathbf{X}_k + \mathbf{E}.$$

Алгоритм HO-SSA для разделения компонент сигнала сводится к представлению HOSVD траекторного тензора ряда  $\mathbf{X}$  в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов  $\mathbf{X}_k$ . Метод HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала представлен в алгоритме 3

### 3.2. HO-SSA для выделения сигнала из ряда

Алгоритм HO-SSA для выделения в ряде сигнала из шума сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньшего, заданного пользователем, ранга, и может быть проведён двумя различными способами.

Первый способ заключается в приближении траекторного тензора путём усечения его HOSVD (HOSVD-SSA). Благодаря свойствам 2.7, 2.6 такое приближение можно считать достаточно точным, хоть оно и не оптимально. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом 3, поэтому опишем его, начиная с третьего шага. Описание приведено в алгоритме 4.

---

**Алгоритм 3** HOSVD-SSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 \leq I, L \leq N$ ,  $I + L \leq N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $m$ ,  $R : m \leq R \leq \min(I, L, N - I - L + 2)$ ,  $\mathfrak{S}_1, \dots, \mathfrak{S}_m$ :

$$\{1, 2, \dots, R\} = \bigcup_{k=1}^m \mathfrak{S}_k \quad \mathfrak{S}_k \cap \mathfrak{S}_l = \emptyset, k \neq l.$$

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}_1, \tilde{\mathbf{X}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{X}}_m$  — оценки рядов  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m$ .

- 1: Вложение: построение траекторного тензора  $\mathcal{X}$  по параметрам  $I, L$ .
- 2: Разложение: проведение HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}. \quad (10)$$

- 3: Группировка: построение тензоров

$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}.$$

- 4: Восстановление: получение рядов  $\tilde{\mathbf{X}}_k$  по тензорам  $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$  посредством их усреднения вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$ :

$$\tilde{x}_n^{(k)} = \frac{1}{\#\mathfrak{M}_n} \sum_{(i,l,j) \in \mathfrak{M}_n} \mathcal{X}_{ilj}^{(\mathfrak{S}_k)}, \quad n \in \overline{1:N},$$

$$\mathfrak{M}_n = \left\{ (i, l, j) \mid 1 \leq i \leq I, 1 \leq l \leq L, 1 \leq j \leq J, i + l + j - 2 = n \right\}.$$


---

Второй способ использует метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями  $n$ -рангов — High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [12]. При заданных тензоре  $\mathcal{A}$  и наборе  $n$ -рангов  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ , результатом метода будет тензор  $\hat{\mathcal{A}}$ ,  $n$ -ранги которого совпадают с набором  $(R_1, R_2, \dots, R_M)$ , и который решает задачу минимизации

$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\| \rightarrow \min,$$

где минимум берётся по классу тензоров с заданными  $n$ -рангами. Исходя из определения, результат метода HOOI является оптимальным, в связи с чем его можно использовать для приближения траекторного тензора ряда.

Приведём вторую реализацию алгоритма HO-SSA для отделения сигнала от шума с использованием метода HOOI (HOOI-SSA). Первый шаг алгоритма совпадает с первым



шагом алгоритма 3, поэтому опишем его начиная со второго шага. Описание приведено в алгоритме 5.

---

**Алгоритм 4** HOSVD-SSA для выделения сигнала.

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 \leq I, L \leq N$ ,  $I + L \leq N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : I}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : J}$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{X}}$ .

- 3: По параметрам  $R_1, R_2, R_3$  и разложению траекторного тензора  $\mathcal{X}$  в виде (10), в тензоре  $\mathcal{Z}$  проводится замена матриц-слоёв с номерами  $k > R_m$  в соответствующих измерениях на нулевые, и по полученному тензору  $\hat{\mathcal{Z}}$  строится приближение траекторного тензора  $\hat{\mathcal{X}}$ .
  - 4: Усреднение тензора  $\hat{\mathcal{X}}$  вдоль плоскостей  $i + l + j = \text{const}$ , в результате чего получается оценка сигнала  $\hat{\mathbf{X}}$ .
- 

---

**Алгоритм 5** HOOI-SSA

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X}$ ,  $I, L : 1 \leq I, L \leq N$ ,  $I + L \leq N + 1$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : I}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : J}$ .

**Результат:**  $\hat{\mathbf{X}}$ .

- 2: Применение к построенному на первом шаге траекторному тензору  $\mathcal{X}$  алгоритма HOOI с набором  $n$ -рангов  $(R_1, R_2, R_3)$ , в результате чего получается тензор  $\hat{\mathcal{X}}$ .
  - 3: Восстановление сигнала, совпадает с шагом 4 алгоритма 4.
- 

## 4. Свойства HO-SSA

В силу аналогичности свойств SVD и HOSVD, многие определения и свойства из теории SSA [1] можно перенести на тензорный случай.

### 4.1. Разделимость рядов в терминах HO-SSA

**Теорема 2.**  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N)$ ,  $\hat{\mathbf{X}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_N)$  — временные ряды длины  $N$ . Пусть ряд  $\mathbf{X}$  является суммой этих рядов. Траекторные тензоры рядов равны соответственно:  $\tilde{\mathcal{X}}$ ,  $\hat{\mathcal{X}}$ ,  $\mathcal{X}$ . Тогда существует сингулярное разложение тензора  $\mathcal{X}$  с параметрами  $I, L$ , которое можно представить в виде суммы сингулярных разложений тензоров  $\tilde{\mathcal{X}}$  и

$\hat{\mathcal{X}}$  с теми же параметрами в том и только том случае, когда взаимно ортогональны все подряды рядов  $\tilde{\mathcal{X}}$  и  $\hat{\mathcal{X}}$  длины  $I, L, J = N - I - L + 2$ , то есть

1.  $\tilde{x}_k \hat{x}_m + \dots + \tilde{x}_{k+I-1} \hat{x}_{m+I-1} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : (N - I + 1)},$
2.  $\tilde{x}_k \hat{x}_m + \dots + \tilde{x}_{k+L-1} \hat{x}_{m+L-1} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : (N - L + 1)},$
3.  $\tilde{x}_k \hat{x}_m + \dots + \tilde{x}_{k+J-1} \hat{x}_{m+J-1} = 0 \quad \forall k, m \in \overline{1 : (N - J + 1)}.$

*Доказательство.* Сингулярные разложения тензоров  $\mathcal{X}, \tilde{\mathcal{X}}, \hat{\mathcal{X}}$  могут быть представлены в виде следующих сумм:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \mathcal{Z}_{ilj} U_i^{(1)} \circ U_l^{(2)} \circ U_j^{(3)}, \\ \tilde{\mathcal{X}} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \tilde{\mathcal{Z}}_{ilj} \tilde{U}_i^{(1)} \circ \tilde{U}_l^{(2)} \circ \tilde{U}_j^{(3)}, \\ \hat{\mathcal{X}} &= \sum_{i=1}^I \sum_{l=1}^L \sum_{j=1}^J \hat{\mathcal{Z}}_{ilj} \hat{U}_i^{(1)} \circ \hat{U}_l^{(2)} \circ \hat{U}_j^{(3)}. \end{aligned}$$

Сумма  $\mathcal{X} = \sum_i \sum_l \sum_j \tilde{\mathcal{Z}}_{ilj} \tilde{U}_i^{(1)} \circ \tilde{U}_l^{(2)} \circ \tilde{U}_j^{(3)} + \sum_i \sum_l \sum_j \hat{\mathcal{Z}}_{ilj} \hat{U}_i^{(1)} \circ \hat{U}_l^{(2)} \circ \hat{U}_j^{(3)}$  является HOSVD тензора  $\mathcal{X}$  в том и только том случае, когда пары векторов  $\tilde{U}_k^{(\sigma)}, \hat{U}_m^{(\sigma)}$  взаимно ортогональны при всех возможных значениях  $\sigma, k, m$ . Это равносильно ортогональности линейных пространств  $\mathcal{L}_1^{(\sigma)}, \mathcal{L}_2^{(\sigma)}$ , построенных на векторах  $\tilde{U}_k^{(\sigma)}$  и  $\hat{U}_m^{(\sigma)}$  соответственно.

Рассмотрим пространства  $\mathcal{L}_1^{(1)}, \mathcal{L}_2^{(1)}$ : это пространства первых измерений тензоров  $\tilde{\mathcal{X}}$  и  $\hat{\mathcal{X}}$ , то есть пространства, построенные на векторах вида  $\tilde{\mathcal{X}}_{\cdot lj}$  и  $\hat{\mathcal{X}}_{\cdot lj}$  соответственно. Так как векторы вдоль первого измерения тензоров  $\tilde{\mathcal{X}}$  и  $\hat{\mathcal{X}}$  имеют вид  $(\tilde{x}_k, \tilde{x}_{k+1}, \dots, \tilde{x}_{k+I-1})^T$  и  $(\hat{x}_k, \hat{x}_{k+1}, \dots, \hat{x}_{k+I-1})^T$  соответственно, то условие ортогональности линейных пространств, построенных на этих векторах равносильно первому условию из формулировки теоремы.

Оставшиеся два условия получаются аналогично из условий ортогональности оставшихся двух пар линейных пространств.  $\square$

*Замечание.* Условия утверждения выше сильнее, чем для аналогичного утверждения 2.1 для стандартного SSA. Это позволяет предположить, что тензорный вариант может оказаться не лучше стандартного.

Из утверждения 2 следует, что понятие слабой разделимости ряда из теории SSA применимо и к тензорному случаю.

**Следствие.** Если временные ряды  $\tilde{X}$  и  $\hat{X}$  длины  $N$  слабо  $I$ - и  $L$ -разделимы в смысле теории SSA (определение 2.4), то существует такое HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$  ряда  $X = \tilde{X} + \hat{X}$ , что его можно разбить на две части, являющиеся HOSVD траекторных тензоров, составленных по рядам  $\tilde{X}$  и  $\hat{X}$ .

## 4.2. Примеры разделимости рядов в алгоритме HO-SSA

Рассмотрим условия разделимости рядов  $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N)$ ,  $\hat{X} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N)$  в некоторых частных случаях.

- Отделимость от константного ряда

Пусть  $\tilde{x}_n = c \neq 0$  для  $n \in \overline{1:N}$ . Тогда необходимые и достаточные условия отделимости от него ряда  $\hat{X}$  в смысле HO-SSA следующие:

1. Ряд  $\hat{X}$  имеет целый период  $T$ , и  $I/T$ ,  $L/T$ ,  $J/T$  — целые;
2.  $\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \dots + \hat{x}_T = 0$ .

**Пример 4.1.** Ряд с элементами вида  $\tilde{x}_n = \cos(2\pi n/T + \varphi)$  длины  $N$  такой, что  $N+2$  делится нацело на  $T$ , будет слабо отделим от константного ряда при выборе параметров  $I, L$ :  $I + L < N + 1$ , делящихся нацело на  $T$ .

- Отделимость от экспоненциального ряда

Пусть  $\tilde{x}_n = e^{\alpha n}$  для  $n \in \overline{1:N}$ . Тогда необходимые и достаточные условия отделимости от него ряда  $\hat{X}$  в смысле HO-SSA следующие:

1. Ряд  $(\tilde{x}_1\hat{x}_1, \tilde{x}_2\hat{x}_2, \dots, \tilde{x}_N\hat{x}_N)$  имеет целый период  $T$ , и  $I/T$ ,  $L/T$ ,  $J/T$  — целые;
2.  $\tilde{x}_1\hat{x}_1 + \tilde{x}_2\hat{x}_2 + \dots + \tilde{x}_N\hat{x}_N = 0$ .

**Пример 4.2.** Ряд с элементами вида  $\tilde{x}_n = e^{-\alpha n} \cos(2\pi n/T + \varphi)$  длины  $N$  такой, что  $N+2$  делится нацело на  $T$ , будет слабо отделим от ряда с элементами вида  $\hat{x}_n = e^{\alpha n}$  при выборе параметров  $I, L$ :  $I + L < N + 1$ , делящихся нацело на  $T$ .

- Отделимость от гармонического ряда

Пусть  $\tilde{x}_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$ , где  $0 < \omega < 1/2$ , и  $I, L, J > 2$ . Положим  $\hat{x}_n = \cos(2\pi\omega' n + \varphi')$ , тогда если  $\omega \neq \omega'$  и  $I\omega, I\omega', L\omega, L\omega', J\omega, J\omega'$  — целые числа, то ряд  $\tilde{X}$  отделим от ряда  $\hat{X}$  в смысле HO-SSA.

### 4.3. Ранг ряда в терминах HO-SSA

**Теорема 3.** Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  имеет конечный ранг  $d$  в терминах SSA (определение 2.3). Тогда для любых значений параметров  $I$  и  $L$  таких, что

$$d \leq \min(I, L, N - I - L + 2), \quad (11)$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , построенного по этому ряду с параметрами  $I$  и  $L$ , будет равно  $d$ .

*Доказательство.* Временной ряд  $\mathbf{X}$  имеет SSA-ранг  $d$ , если для любой длины окна  $L'$  такой, что  $d \leq \min(L', N - L' + 1)$ , ранг траекторной матрицы  $\mathbf{X}$  этого ряда, построенной по длине окна  $L'$ , равен  $d$ . Это равносильно тому, что для любых таких  $L'$  линейное пространство, построенное на векторах вида  $(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L'-1})^T$ , имеет размерность  $d$ . С другой стороны, после замены  $L'$  на  $I$ ,  $L$  или  $N - I - L + 2$  такой же вид имеют векторы траекторного тензора  $\mathcal{X}$  вдоль каждого измерения. Таким образом, если выполняется неравенство (11), то все  $n$ -ранги тензора  $\mathcal{X}$  равны  $d$ . Применение свойства 2.4 заканчивает доказательство.  $\square$

**Следствие.** Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HO-SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

## 5. Примеры использования HO-SSA

Рассмотрим несколько примеров использования HO-SSA для анализа временных рядов.

**Пример 5.1** (Разделимость синуса и константы). Рассмотрим ряд с элементами  $x_n = 3 + \sin(2\pi n/3 + \pi/3)$ , где  $n \in \overline{0:15}$ . После построения траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с параметрами  $I = L = 6$  и его разложения получаем тензор сингулярных чисел  $\mathcal{Z}$  и матрицы сингулярных векторов  $\mathbf{U}^{(1)}$ ,  $\mathbf{U}^{(2)}$ ,  $\mathbf{U}^{(3)}$ . Так как все размерности траекторного тензора  $\mathcal{X}$  равны, его развёртки по всем измерениям совпадают, а значит совпадают и матрицы

сингулярных векторов  $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}$ .

$$\mathbf{U} \approx \begin{pmatrix} -0.41 & 0.00 & 0.58 & 0.70 & -0.10 & 0.01 \\ -0.41 & 0.50 & -0.29 & 0.08 & 0.62 & 0.33 \\ -0.41 & -0.50 & -0.29 & 0.06 & 0.33 & -0.63 \\ -0.41 & -0.00 & 0.58 & -0.70 & 0.10 & -0.01 \\ -0.41 & 0.50 & -0.29 & -0.08 & -0.62 & -0.33 \\ -0.41 & -0.50 & -0.29 & -0.06 & -0.33 & 0.63 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Z} \approx \left( \begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} -44.09 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -2.60 & -4.50 & \dots & 0 & -4.50 & 2.60 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -4.50 & 2.60 & \dots & 0 & 2.60 & 4.50 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array} \right).$$

Здесь вертикальной чертой обозначено разделение тензора по третьему измерению. Все не указанные элементы тензора  $\mathcal{Z}$  равны 0. Видно, что первый сингулярный вектор постоянен, а второй и третий — периодические с периодом 3. Кроме того, по каждому из трёх измерений количество ненулевых сингулярных чисел равно 3 (например  $\|\mathcal{Z}_{..1}\| > \|\mathcal{Z}_{..2}\| = \|\mathcal{Z}_{..3}\| > 0$ ,  $\|\mathcal{Z}_{..j}\| = 0$  для всех остальных  $j$ ). Исходя из этого, имеет смысл отнести индекс  $\{1\}$  к константной компоненте ряда, индексы  $\{2, 3\}$  — к гармонической (синус), а остальные проигнорировать. После восстановления тензоров, полученных такой группировкой, получаем два ряда

$$\hat{\mathbf{X}} = (3, 3, \dots, 3),$$

$$\tilde{\mathbf{X}} = (0.86, 0, -0.86, 0.86, \dots, 0, -0.86, 0.86).$$

Таким образом, константный ряд отделился от синуса.

**Пример 5.2** (Смещение двух косинусов). Рассмотрим ряд с элементами

$$x_n = \cos(2\pi n/3) + \cos(2\pi n/4), \quad n \in \overline{0:33}.$$

Выбрав параметры  $I = L = 12$ , после разложения получаем тензор сингулярных значений  $\mathcal{Z}$  и, в силу равенства размерностей траекторного тензора, равные между собой

матрицы сингулярных векторов  $\mathbf{U}^{(1)} = \mathbf{U}^{(2)} = \mathbf{U}^{(3)} = \mathbf{U}$ . Тензор  $\mathcal{Z}$  имеет вид тензорного блока  $\mathcal{Z}'$  размерности  $4 \times 4 \times 4$ , окаймлённого нулями, в котором уже нельзя выделить блочно-диагональную структуру. Если рассмотреть матрицы сингулярных векторов, можно увидеть, что никакой сингулярный вектор не имеет периода равного 3 или 4:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -0.58 & 0 & \dots \\ -0.18 & 0.36 & 0.14 & -0.39 & \dots \\ -0.17 & -0.16 & 0.43 & 0.30 & \dots \\ 0.38 & -0.04 & -0.29 & 0.32 & \dots \\ 0.14 & 0.002 & -0.14 & -0.54 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Таким образом, произошло смешение двух косинусов одинаковой амплитуды.

### 5.1. Сравнение HO-SSA и SSA

Пусть временной ряд  $\mathbf{X}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (x_1, x_2, \dots, x_N), \\ x_n &= s_n + \varepsilon_n, \quad n \in \overline{1 : N}, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_N)$  — сигнал,  $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)$  — шум. Рассмотрим проблему отделения сигнала от шума на примерах различных рядов.

**Пример 5.3** (Выделение экспоненты). Пусть  $N = 23$ ,  $\varepsilon_n$  — независимые  $\mathbf{N}(0, 2.25)$  величины,

$$s_n = 2e^{0.035n}. \quad (13)$$

Таблица 1. SSA: RMSE оценки экспоненциального сигнала (13).

$L$	4	6	12
MSE	0.65	0.55	<b>0.52</b>

В таблицах 1 и 2 приведены значения отклонения восстановленного ряда от исходного ряда для различных значений параметров после использования SSA и двух

Таблица 2. HO-SSA: RMSE оценки экспоненциального сигнала (13).

Метод приближения \ $I \times L$					
	4×4	4×6	4×12	6×6	6×12
Усечение HOSVD	0.59	<b>0.56</b>	<b>0.56</b>	<b>0.56</b>	0.57
HOOI	0.58	0.55	<b>0.547</b>	0.56	0.56

вариаций HO-SSA для выделения сигнала. Большие параметры длин окна не рассматриваются, так как построенные по ним траекторные матрицы и траекторные тензоры будут совпадать с рассмотренными с точностью до перестановки размерностей. RMSE здесь и далее высчитывается по 500 реализациям шума, если не указано иное. Кроме того, здесь и далее жирным шрифтом выделены минимальные по строке значения RMSE, причём отличие этих минимальных значений от остальных в строке значимо при уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

**Пример 5.4** (Выделение косинуса). Пусть  $N = 71$ , рассматриваются три варианта шума: белый гауссовский с параметром  $\sigma^2 = 25$  и красный гауссовский с параметрами  $\delta^2 = 5$ ,  $\varphi = 0.5$  и  $\delta^2 = 5$ ,  $\varphi = 0.9$ .

$$s_n = 30 \cos(2\pi n/12). \quad (14)$$

В таблицах 3, 4, 5 приведены значения отклонения восстановленного ряда от исход-

Таблица 3. SSA: RMSE оценки синусоидального сигнала (14).

вид шума \ $L$				
	12	24	30	36
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.82	1.42	<b>1.40</b>	1.42
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.31	1.03	<b>1.01</b>	1.03
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.88	1.37	<b>1.34</b>	1.36

ного ряда для различных вариантов шума и различных значений параметров после использования SSA и HO-SSA.

**Пример 5.5** (Выделение линейного ряда). Пусть  $N = 39$ , рассматриваются два варианта белого гауссовского шума: с параметром  $\sigma^2 = 2.25$  и с параметром  $\sigma^2 = 0.04$ .

Таблица 4. HOSVD-SSA: RMSE оценки синусоидального сигнала (14).

$I \times L$ вид шума	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.64	1.53	1.57	1.66	1.62	<b>1.49</b>
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.18	1.12	1.14	1.21	1.19	<b>1.08</b>
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.58	<b>1.44</b>	1.47	1.57	1.54	1.46

Таблица 5. HOOI-SSA: RMSE оценки синусоидального сигнала (14).

$I \times L$ вид шума	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
белый шум, $\sigma^2 = 25$	1.63	1.53	1.56	1.65	1.62	<b>1.49</b>
красный шум, $\varphi = 0.5$	1.17	1.12	1.14	1.21	1.19	<b>1.08</b>
красный шум, $\varphi = 0.9$	1.56	1.42	1.44	1.54	1.51	<b>1.39</b>

$$s_n = 2 + 0.1n. \quad (15)$$

В каждом из случаев шума будем рассматривать по два варианта восстановления линейного сигнала: по одной компоненте и по двум. В таблицах 6, 7, 8, 9 приведены

Таблица 6. SSA: RMSE оценки линейного сигнала (15), случай  $\sigma^2 = 2.25$ .

$L$ Компонент	10	15	20
1	0.44	<b>0.42</b>	<b>0.42</b>
2	0.70	<b>0.66</b>	0.68

значения отклонения восстановленного линейного ряда от исходного. Таблицам 6, 7 соответствует гауссовский шум с параметром  $\sigma^2 = 2.25$ , таблицам 8, 9 — гауссовский шум с параметром  $\sigma^2 = 0.04$ .



Таблица 7. HO-SSA: RMSE оценки линейного сигнала (15), случай  $\sigma^2 = 2.25$ .

Компонент	$I \times L$	10×10	10×15	10×20	15×15	15×20
	Метод восстановления					
1	Усечение HOSVD	0.47	0.49	0.48	0.49	<b>0.46</b>
	HOOI	0.47	0.48	0.47	0.49	<b>0.45</b>
2	Усечение HOSVD	0.59	0.60	0.58	0.61	<b>0.57</b>
	HOOI	0.62	0.64	0.62	0.64	<b>0.61</b>

Таблица 8. SSA: RMSE оценки линейного сигнала (15), случай  $\sigma^2 = 0.04$ .

Компонент	$L$	10	15	20
1		<b>0.09</b>	0.108	0.118
2		0.10	<b>0.093</b>	<b>0.093</b>

Таблица 9. HO-SSA: RMSE оценки линейного сигнала (15), случай  $\sigma^2 = 0.04$ .

Компонент	$I \times L$	10×10	10×15	10×20	15×15	15×20
	Метод восстановления					
1	HOSVD-SSA	0.133	0.145	0.136	0.147	<b>0.130</b>
	HOOI-SSA	0.132	0.144	0.136	0.146	<b>0.130</b>
2	HOSVD-SSA	0.123	0.130	0.125	0.133	<b>0.112</b>
	HOOI-SSA	0.123	0.130	0.124	0.133	<b>0.114</b>

**Пример 5.6** (Случай, когда HO-SSA выделяет сигнал точнее, чем SSA). Пусть  $N = 9$ , шум — красный гауссовский с параметрами  $\delta = 0.1$ ,  $\varphi = 0.9$ .

$$s_n = \sin(2\pi n/3 + \pi/2). \quad (16)$$

В таблице 10 приведены результаты измерения средних отклонений восстановленного ряда от исходного для разных методов по 1000 реализаций шума.

Таблица 10. Сравнение SSA и HO-SSA: RMSE оценки короткого синусоидального сигнала (16).

SSA	HOSVD-SSA	HOOI-SSA
0.116	0.110	<b>0.095</b>

Причины, по которым в этом примере обе вариации HO-SSA дают стабильно лучшие результаты, чем SSA, пока неизвестны и остаются для дальнейшего изучения.

## 6. Описание метода HOSVD-MSSA

В данном разделе приведены описания алгоритмов HOSVD-MSSA для выделения сигнала из ряда и для разделения компонент сигнала.

### 6.1. HOSVD-MSSA для выделения сигнала

Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T,$$

$$\mathbf{X}^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_N^{(i)}), i \in \overline{1:N}.$$

**Определение 6.1** (Траекторный тензор многомерного ряда). Траекторным тензором ряда  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L : 1 \leq L \leq N$  будем называть тензор  $\mathcal{X}$  размерности  $L \times K \times P$ ,  $K = N - L + 1$ , элементы которого удовлетворяют равенству

$$\mathcal{X}_{lkp} = x_{l+k-1}^{(p)} \quad l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, p \in \overline{1:P}.$$

Из определения следует, что  $p$ -й слой вдоль третьего измерения траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с длиной окна  $L$  является траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}^{(p)}$ , построенной по длине окна  $L$ . Пользуясь определением 2.1 оператора вложения, можно записать следующее представление

$$\mathcal{X}_{..p} = \mathcal{H}_L(\mathbf{X}^{(p)}).$$

Метод HOSVD-MSSA для выделения в ряде сигнала из шума, по аналогии с алгоритмом HOSVD-SSA, сводится к получению как можно более точного приближения траекторного тензора тензором меньших, заданных пользователем,  $n$ -рангов. Для получения такого приближения используется усечение HOSVD траекторного тензора. Описание метода приведено в алгоритме 6.

### 6.2. HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть есть два  $P$ -мерных временных ряда  $\widehat{\mathbf{X}}$  и  $\widetilde{\mathbf{X}}$  длины  $N$  и  $\mathbf{X} = \widehat{\mathbf{X}} + \widetilde{\mathbf{X}}$ . Их траекторные тензоры с длиной окна  $L$  обозначим  $\widehat{\mathcal{X}}, \widetilde{\mathcal{X}}, \mathcal{X}$  соответственно.

---

**Алгоритм 6** HOSVD-MSSA для выделения сигнала
 

---

**Входные данные:**  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T$ ,  $L : 1 \leq L \leq N$ , где  $N$  — длина  $\mathbf{X}$ ,  $R_1 \in \overline{1 : L}$ ,  $R_2 \in \overline{1 : K}$ ,  $R_3 \in \overline{1 : P}$ , где  $K = N - L + 1$ .

**Результат:**  $\tilde{\mathbf{X}}$ .

- 1: Построение по  $P$ -мерному временному ряду  $\mathbf{X}$  траекторного тензора  $\mathcal{X}$  с длиной окна  $L$ .
- 2: Вычисление HOSVD траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , получение его представления в виде (6)

$$\mathcal{X} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}. \quad (17)$$

- 3: Построение по параметрам  $R_1, R_2, R_3$  усечённого тензора

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.$$

- 4: Восстановление многомерного ряда  $\tilde{\mathbf{X}} = (\tilde{\mathbf{X}}^{(1)}, \dots, \tilde{\mathbf{X}}^{(P)})$  по тензору  $\tilde{\mathcal{X}}$ , которое происходит следующим образом: ряды  $\tilde{\mathbf{X}}^{(p)}$  получаются усреднением матриц-слоёв  $\tilde{\mathcal{X}}_{..p}$  вдоль побочных диагоналей  $l + k = \text{const}$ .
- 

Метод HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала сводится к получению представления HOSVD траекторного тензора наблюдаемого сигнала  $\mathbf{X}$  в виде суммы HOSVD траекторных тензоров компонент  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$ . Первые два шага этого алгоритма совпадают с первыми двумя шагами алгоритма 6, поэтому описание алгоритма приводится, начиная с 3 шага. Описание метода приведено в алгоритме 7.

## 7. Свойства HOSVD-MSSA

В этом разделе описаны свойства, позволяющие перенести некоторые определения из теории SSA для анализа многомерных рядов на тензорный случай.

### 7.1. Свойства HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала

Пусть  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  представим в виде суммы временных рядов  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{X}}$ , и пусть выбрана длина окна  $L$ . Обозначим  $K = N - L + 1$ ,  $\mathcal{X}$ ,  $\hat{\mathcal{X}}$  и  $\tilde{\mathcal{X}}$  — траекторные тензоры рядов  $\mathbf{X}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  соответственно, построенные по

---

**Алгоритм 7** HOSVD-MSSA для разделения компонент сигнала.

---

**Входные данные:**  $X$ ,  $L : 1 \leq L \leq N$ ,  $K = N - L + 1$ ,  $\widehat{\mathfrak{S}}, \widetilde{\mathfrak{S}} \subseteq \overline{1 : \min(L, K)} : \widehat{\mathfrak{S}} \cap \widetilde{\mathfrak{S}} = \emptyset$ ,  
 $\widehat{\mathfrak{P}}, \widetilde{\mathfrak{P}} \subseteq \overline{1 : P}$

**Результат:**  $\overset{\circ}{\widehat{X}}, \overset{\circ}{\widetilde{X}}$  — оценки  $\widehat{X}$  и  $\widetilde{X}$  соответственно.

---

3: Группировка: построение тензоров

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \widehat{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \widetilde{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \widehat{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}, \\ \widetilde{\mathcal{X}} &= \sum_{l \in \widetilde{\mathfrak{S}}} \sum_{k \in \widehat{\mathfrak{S}}} \sum_{p \in \widetilde{\mathfrak{P}}} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}.\end{aligned}$$

4: Восстановление рядов  $\overset{\circ}{\widehat{X}}$  и  $\overset{\circ}{\widetilde{X}}$  по тензорам  $\widehat{\mathcal{X}}$  и  $\widetilde{\mathcal{X}}$  соответственно путём применения к каждому из этих тензоров шага 4 алгоритма 6.

---

длине окна  $L$ ,  $\widehat{X}$  и  $\widetilde{X}$  — матрицы, в строках которых стоят одномерные ряды, составляющие ряды  $\widehat{X}$  и  $\widetilde{X}$  соответственно,  $\widehat{\Lambda}^{(I)}$  — пространство, порождённое векторами вида  $\left(\hat{x}_i^{(p)}, \hat{x}_{i+1}^{(p)}, \dots, \hat{x}_{i+I-1}^{(p)}\right)^T$ , где  $i \in \overline{1 : (N - I + 1)}$ ,  $p \in \overline{1 : P}$ . Аналогично определяется пространство  $\widetilde{\Lambda}^{(I)}$  для ряда  $\widetilde{X}$ . Также определим  $\widehat{\Lambda}_3$  и  $\widetilde{\Lambda}_3$  — пространства, порождённые столбцами матриц  $\widehat{X}$  и  $\widetilde{X}$  соответственно.

**Определение 7.1.** Многомерные временные ряды  $\widehat{X}$  и  $\widetilde{X}$  называются слабо  $L$ -разделимыми в терминах HOSVD-MSSA, если выполняются равенства

$$\begin{aligned}1. \quad & \sum_{k=0}^{L-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \widetilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - L + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P}, \\ 2. \quad & \sum_{k=0}^{K-1} \hat{x}_{i+k}^{(p)} \widetilde{x}_{j+k}^{(p')} = 0, \quad \forall i, j \in \overline{1 : (N - K + 1)}, p, p' \in \overline{1 : P},\end{aligned}$$

*Замечание.* Условия 1 и 2 равносильны ортогональности пар пространств  $\widehat{\Lambda}^{(L)}$  с  $\widetilde{\Lambda}^{(L)}$  и  $\widehat{\Lambda}^{(K)}$  с  $\widetilde{\Lambda}^{(K)}$  соответственно.

**Теорема 4.** Такие HOSVD тензоров  $\widehat{\mathcal{X}}$  и  $\widetilde{\mathcal{X}}$ , что их сумма является HOSVD тензора  $\mathcal{X}$ , существуют тогда и только тогда, когда ряды  $\widehat{X}$  и  $\widetilde{X}$  слабо  $L$ -разделимы.

*Доказательство.* Рассмотрим два случая: когда пространства  $\widehat{\Lambda}_3$  и  $\widetilde{\Lambda}_3$  ортогональны, и когда ортогональности нет.

Пусть пространства  $\widehat{\Lambda}_3$  и  $\widetilde{\Lambda}_3$  ортогональны, то есть  $\sum_{p=1}^P \hat{x}_i^{(p)} \tilde{x}_j^{(p)} = 0$  для любых  $i, j \in \overline{1 : N}$ . Рассмотрим HOSVD тензоров  $\widehat{\mathcal{X}}$  и  $\widetilde{\mathcal{X}}$ :

$$\widehat{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \widehat{\mathcal{Z}}_{lkp} \widehat{U}_l^{(1)} \circ \widehat{U}_k^{(2)} \circ \widehat{U}_p^{(3)}, \quad (18)$$

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \widetilde{\mathcal{Z}}_{lkp} \widetilde{U}_l^{(1)} \circ \widetilde{U}_k^{(2)} \circ \widetilde{U}_p^{(3)}. \quad (19)$$

Сумма таких представлений будет являться HOSVD тензора  $\mathcal{X}$  в том и только том случае, когда для любого  $\sigma \in \{1, 2, 3\}$  пространства, порождённые векторами  $\widehat{U}_i^{(\sigma)}$  ортогональны пространствам, порождённым векторами  $\widetilde{U}_i^{(\sigma)}$ , что равносильно ортогональности пространств, порождённых векторами тензора  $\widehat{\mathcal{X}}$  вдоль измерения  $\sigma$  и векторами тензора  $\widetilde{\mathcal{X}}$  вдоль того же измерения для всех  $\sigma$ . При условии ортогональности пространств  $\widehat{\Lambda}_3$  и  $\widetilde{\Lambda}_3$ , это условие равносильно ортогональности пар пространств  $\widehat{\Lambda}^{(L)}$  с  $\widetilde{\Lambda}^{(L)}$  и  $\widehat{\Lambda}^{(K)}$  с  $\widetilde{\Lambda}^{(K)}$ .

Пусть теперь пространства  $\widehat{\Lambda}_3$  и  $\widetilde{\Lambda}_3$  неортогональны. Определим пространство  $\Lambda_3 = \{\alpha \hat{y} + \beta \tilde{y} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \hat{y} \in \widehat{\Lambda}_3, \tilde{y} \in \widetilde{\Lambda}_3\}$  и матрицу  $\mathbf{U}_3 = [U_1^{(3)} : U_2^{(3)} : \dots : U_P^{(3)}]$ , столбцы которой составляют ортонормированный базис пространства  $\Lambda_3$ . Так как  $\widehat{\Lambda}_3 \subseteq \Lambda_3$ , то  $\{U_p^{(3)}\}$  также является ортонормированным базисом пространства  $\widehat{\Lambda}_3$ , следовательно существуют тензор  $\widehat{\mathcal{Z}}$  и ортогональные матрицы  $\widehat{\mathbf{U}}_1 = [\widehat{U}_1^{(1)} : \widehat{U}_2^{(1)} : \dots : \widehat{U}_L^{(1)}]$  и  $\widehat{\mathbf{U}}_2 = [\widehat{U}_1^{(2)} : \widehat{U}_2^{(2)} : \dots : \widehat{U}_K^{(2)}]$  такие, что выражение

$$\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \widehat{\mathcal{Z}}_{lkp} \widehat{U}_l^{(1)} \circ \widehat{U}_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}$$

является HOSVD тензора  $\widehat{\mathcal{X}}$  с точностью до перенумерации элементов  $\widehat{\mathcal{Z}}$  и соответствующей перестановки столбцов матриц  $\widehat{\mathbf{U}}_\sigma$  и  $\mathbf{U}_3$ . Аналогично существуют тензор  $\widetilde{\mathcal{Z}}$  и ортогональные матрицы  $\widetilde{\mathbf{U}}_1 = [\widetilde{U}_1^{(1)} : \widetilde{U}_2^{(1)} : \dots : \widetilde{U}_L^{(1)}]$  и  $\widetilde{\mathbf{U}}_2 = [\widetilde{U}_1^{(2)} : \widetilde{U}_2^{(2)} : \dots : \widetilde{U}_K^{(2)}]$  такие, что выражение

$$\sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^K \sum_{p=1}^P \widetilde{\mathcal{Z}}_{lkp} \widetilde{U}_l^{(1)} \circ \widetilde{U}_k^{(2)} \circ U_p^{(3)}$$

является HOSVD тензора  $\widetilde{\mathcal{X}}$ .

Ортогональность пар пространств  $\widehat{\Lambda}^{(L)}$  с  $\widetilde{\Lambda}^{(L)}$  и  $\widehat{\Lambda}^{(K)}$  с  $\widetilde{\Lambda}^{(K)}$  равносильна ортогональности пар векторов  $\widehat{U}_l^{(1)}$  с  $\widetilde{U}_{l'}^{(1)}$  и  $\widehat{U}_k^{(2)}$  с  $\widetilde{U}_{k'}^{(2)}$  для всех  $l, l', k, k'$ , что равносильно тому, что  $\mathbf{U}_1 = [\widehat{\mathbf{U}}_1 : \widetilde{\mathbf{U}}_1]$  и  $\mathbf{U}_2 = [\widehat{\mathbf{U}}_2 : \widetilde{\mathbf{U}}_2]$  — ортогональные матрицы. Ортогональность матриц

$\mathbf{U}_\sigma$  равносильна тому, что выражение

$$\mathcal{Z} \times_1 \mathbf{U}_1 \times_2 \mathbf{U}_2 \times_3 \mathbf{U}_3,$$

где

$$\mathcal{Z}_{lkp} = \begin{cases} \hat{\mathcal{Z}}_{lkp}, & l \in \overline{1:L}, k \in \overline{1:K}, \\ \tilde{\mathcal{Z}}_{l-L, k-K, p}, & l \in \overline{(L+1):2L}, k \in \overline{(K+1):2K}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

является HOSVD тензора  $\mathcal{X}$  с точностью до перенумерации элементов  $\mathcal{Z}$  и соответствующей перестановки столбцов матриц  $\mathbf{U}_\sigma$ . С другой стороны, это выражение является суммой HOSVD тензоров  $\hat{\mathcal{X}}$  и  $\tilde{\mathcal{X}}$ .  $\square$

**Следствие.** Таким образом, если ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах HOSVD-MSSA, то исходя из теоремы можно выделить следующие рекомендации к выбору множеств  $\hat{\mathfrak{P}}$  и  $\tilde{\mathfrak{P}}$  в алгоритме 7: если  $\sum_{p=1}^P \hat{x}_i^{(p)} \tilde{x}_j^{(p)} = 0$  для любых  $i, j \in \overline{1:N}$ , то рекомендуется выбирать множества  $\hat{\mathfrak{P}}$  и  $\tilde{\mathfrak{P}}$  непересекающимися, а иначе — равными.

*Замечание.* Как следует из определения 2.7, условия слабой разделимости в алгоритме MSSA отличаются от условий в алгоритме HOSVD-MSSA: вместо условия 2 требуется, чтобы для любых  $k, m \in \overline{1:L}$  выполнялось

$$\sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^{K-1} \hat{x}_{k+i}^{(p)} \tilde{x}_{m+i}^{(p)} = 0.$$

Это условие является менее строгим, чем условие 2 слабой HOSVD-MSSA разделимости, однако случаи, когда эти условия выполняются не одновременно, достаточно редки.

## 7.2. Примеры разделимости рядов в алгоритме HOSVD-MSSA

Рассмотрим условия разделимости 2-мерных рядов  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  длины  $N$  в некоторых частных случаях.

- Разделимость константных рядов от гармоник

Пусть  $\hat{x}_n^{(p)} = C_p$  а  $\tilde{x}_n^{(p)} = A_p \cos(2\pi\omega_p n + \varphi_p)$ , где  $C_p, A_p \neq 0$ ,  $\omega_p \in (0, 1/2)$ . Тогда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах HOSVD-MSSA тогда и только тогда, когда  $L\omega_p, K\omega_p$  — целые для любых  $p$ .

**Пример 7.1.** Пусть  $N = 40$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = 1/30$ ,  $C_1 = 3$ ,  $C_2 = -1.5$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ . Эти ряды не будут слабо разделимы в терминах HOSVD-MSSA ни при какой длине окна, однако будут разделимы в терминах MSSA при  $L = 30$ .

- Разделимость разночастотных гармоник

Пусть  $\hat{x}_n^{(p)} = \hat{A}_p \cos(2\pi\hat{\omega}n + \hat{\varphi}_p)$ ,  $\tilde{x}_n^{(p)} = \tilde{A}_p \cos(2\pi\tilde{\omega}n + \tilde{\varphi}_p)$ , где  $\hat{A}_p, \tilde{A}_p \neq 0$ ,  $\hat{\omega}, \tilde{\omega} \in (0, 1/2)$ ,  $\hat{\omega} \neq \tilde{\omega}$ . Тогда ряды  $\hat{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{X}}$  слабо  $L$ -разделимы в терминах HOSVD-MSSA тогда и только тогда, когда  $L(\hat{\omega} + \tilde{\omega})$ ,  $L(\hat{\omega} - \tilde{\omega})$ ,  $K(\hat{\omega} + \tilde{\omega})$  и  $K(\hat{\omega} - \tilde{\omega})$  — целые.

### 7.3. Свойства HOSVD-MSSA для выделения сигнала

Пусть  $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)}$  — временные ряды длины  $N$ ,  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)})^T$  — многомерный временной ряд длины  $N$ ,  $\mathbf{H}_p$  — траекторные матрицы рядов  $\mathbf{X}^{(p)}$  с длиной окна  $L < N$ ,  $p \in \overline{1:P}$ . Обозначим  $K = N - L + 1$ .

Построим траекторную матрицу многомерного ряда  $\mathbf{X}$ :  $\mathbf{X} = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \dots : \mathbf{H}_P] \in \mathbb{R}^{L \times KP}$ , её SVD имеет вид

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T.$$

Теперь построим траекторный тензор  $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^{L \times K \times P}$  этого многомерного ряда с длиной окна  $L$ , как описано в определении 6.1:  $\mathcal{X}_{..p} = \mathbf{H}_p$ ,  $p \in \overline{1:P}$ , его HOSVD имеет вид

$$\mathcal{X} = \mathcal{Z} \times_1 \hat{\mathbf{U}}_1 \times_2 \hat{\mathbf{U}}_2 \times_3 \hat{\mathbf{U}}_3. \quad (20)$$

**Утверждение 7.1.** *Существуют такие SVD матрицы  $\mathbf{X}$  и HOSVD тензора  $\mathcal{X}$  разложения, что  $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}}_1$ .*

*Доказательство.* Из свойства 2.3 известно, что в качестве  $\hat{\mathbf{U}}_1$  можно выбрать матрицу  $\hat{\mathbf{U}}$  левых сингулярных векторов из SVD развёртки тензора  $\mathcal{X}$  по первому измерению  $[\mathcal{X}]_1$ . В свою очередь,  $[\mathcal{X}]_1 = [\mathbf{H}_1 : \mathbf{H}_2 : \dots : \mathbf{H}_P] = \mathbf{X}$ .  $\square$

**Следствие.** Из этого утверждения и из того, что разложения SVD и HOSVD единственны с точностью до, возможно, некоторых ортогональных преобразований матриц сингулярных векторов, следует, что пространства, порождаемые левыми сингулярными векторами матрицы  $\mathbf{X}$  и сингулярными векторами первого измерения тензора  $\mathcal{X}$  совпадают.

*Замечание.* При вычислении HOSVD тензора используется алгоритм, который последовательно вычисляет SVD развёрток этого тензора по каждому измерению, и получившиеся матрицы левых сингулярных векторов использует в качестве матриц сингулярных векторов соответствующего измерения в представлении (20). Такой алгоритм обоснован утверждением 2.3. Таким образом, на практике совпадают не только пространства, порождаемые описанными выше сингулярными векторами, но и матрицы, составленные из этих векторов.

**Теорема 5.** Пусть  $\mathbf{X}$  —  $P$ -мерный временной ряд длины  $N$ , тогда справедливы следующие утверждения.

1.  $\mathbf{X}$  имеет ранг  $d$  в терминах теории MSSA (определение 2.6) тогда и только тогда, когда для траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , построенного по любой длине окна  $L < N$  такой, что  $d \leq \min(L, K)$  выполняется

$$\text{rank}_1(\mathcal{X}) = \text{rank}_2(\mathcal{X}) = d.$$

2. 3-Ранг  $\mathcal{X}$  равен рангу матрицы, в строках которой содержатся одномерные временные ряды, составляющие заданный многомерный ряд.

*Доказательство.* Исходя из утверждения 7.1, ранг первого измерения траекторного тензора  $\mathcal{X}$ , построенного по многомерному ряду  $\mathbf{X}$  с длиной окна  $L$  такой, что  $d \leq \min(L, N - L + 1)$ , будет равен рангу  $d$  этого ряда из теории MSSA. Кроме того, для таких  $L$  ранг второго измерения этого траекторного тензора тоже будет равен  $d$ , так как  $\text{rank}_2(\mathcal{X}) = \text{rank}([\mathcal{X}]_2)$ , а матрица  $[\mathcal{X}]_2$  по построению совпадает с траекторной матрицей ряда  $\mathbf{X}$ , построенной по длине окна  $K = N - L - 1$ .

Векторы вдоль третьего измерения траекторного тензора  $\mathcal{X}$  имеют вид

$$\left(x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(P)}\right), \quad i \in \overline{1:N}.$$

Размерность пространства порождённого этими векторами совпадает с рангом матрицы, в которой столбцами будут являться эти векторы, а эта матрица совпадает с матрицей, в строках которой содержатся одномерные временные ряды, составляющие заданный многомерный ряд.  $\square$

*Замечание.* По построению траекторного тензора набор векторов вдоль третьего измерения этого тензора не зависит от выбора длины окна  $L$ , поэтому и 3-ранг траекторного тензора не зависит от выбора длины окна.



**Пример 7.2.** Пусть двумерный временной ряд  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)})^T$  состоит из временных рядов следующего вида:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}^{(m)} &= (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_N^{(m)}), \\ x_n^{(m)} &= a_m \sin(2\pi n \omega_m + \psi_m),\end{aligned}$$

где  $m \in \{1, 2\}$ ,  $n \in \overline{1:N}$ ,  $a_m \neq 0$ ,  $0 < \omega_m < 1/2$ ,  $0 \leq \psi < 2\pi$ . Обозначим за  $r$  ранг ряда  $\mathbf{X}$ , а за  $r_3$  ранг третьего измерения этого ряда. В таблице 11 представлены значения рангов этого ряда в терминах HOSVD-MSSA в зависимости от различных значений параметров  $\psi_m$  и  $\omega_m$ .

Таблица 11. Ранги рядов в зависимости от параметров.

Параметры	$\psi_1 = \psi_2$	$\psi_1 \neq \psi_2$	$\omega_1 \neq \omega_2$
	$\omega_1 = \omega_2$	$\omega_1 \neq \omega_2$	
$r$	2	2	4
$r_3$	1	2	2

**Утверждение 7.2.** (О симметричности относительно замены длины окна) Пусть дан  $P$ -мерный временной ряд  $\mathbf{X}$  длины  $N$  и выбрана некоторая длина окна  $L$ ,  $\mathcal{X}$  — тензорный тензор этого ряда, построенный по длине окна  $L$ , а  $\mathcal{Y}$  — по длине окна  $K = N - L + 1$ , и пусть  $R_1, R_2, R_3$  — параметры, выбранные в третьем шаге алгоритма HOSVD-MSSA, соответствующие  $\mathcal{X}$ , а  $R'_1, R'_2, R'_3$  — соответствующие  $\mathcal{Y}$ . Тогда если  $R_1 = R'_1, R_2 = R'_2, R_3 = R'_3$ , то оценки сигнала  $\tilde{\mathbf{X}}$  и  $\tilde{\mathbf{Y}}$ , построенные по  $\mathcal{X}$  и  $\mathcal{Y}$  соответственно, совпадут.

*Доказательство.* По построению  $\mathcal{X}_{lkp} = x_{l+k-1}^{(p)} = x_{k+l-1}^{(p)} = \mathcal{Y}_{klp}$ , где  $l \in \overline{1:L}$ ,  $k \in \overline{1:K}$ ,  $p \in \overline{1:P}$ . Это означает, что  $[\mathcal{X}]_1 = [\mathcal{Y}]_2$  и  $[\mathcal{X}]_2 = [\mathcal{Y}]_1$ , а  $[\mathcal{X}]_3 = [\mathcal{Y}]_3$ . Пусть усечение HOSVD  $\mathcal{X}$ , описанное в третьем шаге алгоритма, имеет вид

$$\tilde{\mathcal{X}} = \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(1)} \circ U_k^{(2)} \circ U_p^{(3)},$$

тогда усечение HOSVD  $\mathcal{Y}$  будет иметь вид

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \sum_{l=1}^{R'_1} \sum_{k=1}^{R'_2} \sum_{p=1}^{R'_3} \mathcal{Z}_{lkp} U_l^{(2)} \circ U_k^{(1)} \circ U_p^{(3)} = \sum_{k=1}^{R_2} \sum_{l=1}^{R_1} \sum_{p=1}^{R_3} \mathcal{Z}_{klp} U_k^{(2)} \circ U_l^{(1)} \circ U_p^{(3)}.$$

Отсюда следует, что  $[\tilde{\mathcal{X}}]_1 = [\tilde{\mathcal{Y}}]_2$ ,  $[\tilde{\mathcal{X}}]_2 = [\tilde{\mathcal{Y}}]_1$  и  $[\tilde{\mathcal{X}}]_3 = [\tilde{\mathcal{Y}}]_3$ , а значит выполнено равенство  $\tilde{\mathcal{X}}_{lkp} = \tilde{\mathcal{Y}}_{klp}$  или, по другому,  $\tilde{\mathcal{X}}_{..p} = \tilde{\mathcal{Y}}_{..p}^T$ , следовательно усреднения матриц  $\tilde{\mathcal{X}}_{..p}$  и  $\tilde{\mathcal{Y}}_{..p}$  вдоль побочных диагоналей совпадут для всех  $p$ .  $\square$

## 8. Численные сравнения в задаче выделения сигнала

В этой части представлены сравнения методов SSA, MSSA, 2D-SSA [9], HOOI-SSA и HOSVD-MSSA по точности восстановления сигнала из многомерных рядов вида

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= (\mathbf{X}^{(1)}, \dots, \mathbf{X}^{(P)}), \\ \mathbf{X}^{(p)} &= (s_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, \dots, s_N^{(p)} + \varepsilon_N^{(p)}), \\ s_n^{(p)} &= a_p \cos(2\pi n \omega_p + \psi_p), \quad a_p \neq 0 \end{aligned} \quad (21)$$

где  $\varepsilon_n^{(p)}$  — независимые  $N(0, 25)$  величины (белый гауссовский шум), а  $s_n^{(p)}$  — элементы искомого сигнала. В качестве оценки точности восстановления сигнала было взято средне-квадратичное отклонение (RMSE) восстановленного сигнала от истинного его значения по 500 реализациям шума. Под применением одномерных методов (SSA и HOOI-SSA) для выделения многомерного сигнала  $\mathbf{X}$  понимается применение этих методов к каждому из рядов  $\mathbf{X}^{(p)}$  отдельно.

**Принцип выбора числа компонент, относимых к сигналу** В каждом из методов семейства SSA важным этапом является выбор числа компонент разложения траекторной матрицы или тензора ряда, по которым будет восстанавливаться сигнал. В теории SSA утверждается, что в общем случае для получения наибольшей точности восстановления сигнала рекомендуется брать число компонент, равное рангу этого сигнала в терминах конкретного метода. Ранг сигнала в терминах метода  $T$  будем обозначать  $r_T$ , например:  $r_{\text{SSA}}$  — ранг сигнала в терминах SSA,  $r_{\text{MSSA}}$  — в терминах MSSA и т.д.

Ранги сигнала (21) в терминах методов SSA и MSSA приведены в примерах 2.1 и 2.2 соответственно.

Тензорные алгоритмы выделения сигнала сводятся к приближению траекторного тензора некоторым тензором  $(R_1, R_2, R_3)$ -ранга. Теоремы 3 и 5 позволяют свести задачу выбора  $R_1, R_2, R_3$  к нахождению  $r_{\text{SSA}}$  в одномерном случае и  $r_{\text{MSSA}}$  и  $r_3$  в многомерном, где  $r_3$  — ранг матрицы, составленной из одномерных сигналов, образующих данный

многомерный сигнал. Тогда рекомендуемым выбором  $(R_1, R_2, R_3)$  в алгоритме HO-SSA будет  $R_1 = R_2 = R_3 = r_{\text{SSA}}$ , а в алгоритме HOSVD-MSSA —  $R_1 = R_2 = r_{\text{MSSA}}$ ,  $R_3 = r_3$ .

Элементы многомерного сигнала вида (21) можно представить в виде суммы

$$s_n^{(p)} = \sum_{m=1}^d A_m(p, n),$$

$$A_m(p, n) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi p \omega'_m) \\ \sin(2\pi p \omega'_m) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ c_m & d_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(2\pi n \omega''_m) \\ \sin(2\pi n \omega''_m) \end{pmatrix},$$

где  $(\omega'_m, \omega''_m) \neq (\omega'_j, \omega''_j)$  для  $m \neq j$  и  $\omega'_m, \omega''_m \in (0, 1/2)$ . В статье [13] утверждается, что тогда ранг данного многомерного сигнала в терминах 2D-SSA равен сумме

$$r_{\text{2D-SSA}} = \sum_{m=1}^d \nu_m,$$

где

$$\nu_m = 2 \text{rank} \begin{pmatrix} a_m & b_m & c_m & d_m \\ d_m & -c_m & -b_m & a_m \end{pmatrix}.$$

### 8.1. Результаты численных сравнений

Рассмотрим некоторые варианты сигнала вида (21). В таблицах 12, 14, 16 приведены значения рангов сигналов в каждом из методов в зависимости от значения параметров  $\omega_p$ ,  $\psi_p$  для случаев  $P = 2$ ,  $P = 5$  и  $P = 9$  соответственно. Для одномерных методов (SSA и HOOI-SSA) указаны ранги каждого одномерного сигнала  $S^{(p)}$ .

В таблицах 13, 15, 17 приведены минимальные значения среднеквадратичного отклонения восстановленного сигнала от истинного для каждого метода и при различных значениях параметров для случаев  $P = 2$ ,  $P = 5$  и  $P = 9$  соответственно. Жирным шрифтом выделены минимальные по методам значения RMSE оценки сигнала для фиксированного набора параметров. Отличие этих минимальных значений от остальных значимо при уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

На графиках 1, 2 и 3 приведены зависимости точности восстановления сигнала от выбора параметра  $L$  для методов SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA, и от выбора параметров  $I, L$  для метода HOOI-SSA для случаев  $P = 2$ ,  $P = 5$  и  $P = 9$  соответственно.

*Замечание.* В методе 2D-SSA параметр длины окна двумерный, то есть  $L_{xy} = (L_x, L_y)$ .

Будем полагать  $L_y = [(P + 1)/2]$  и  $L_x = L$ , где  $[t]$  обозначает взятие целой части числа  $t$ .

**Выводы из численных сравнений** Таким образом, метод HOSVD-MSSA выделил сигнал точнее, чем метод MSSA во всех примерах, и оказался точнее метода 2D-SSA в случае малого числа рядов и в случае различающихся амплитуд у сигналов, причём последнее преимущество увеличилось с увеличением размерности ряда. Однако в случаях равных сигналов и сигналов с меняющейся линейно фазой метод 2D-SSA оказался точнее, чем HOSVD-MSSA, причём это преимущество увеличилось при увеличении размерности ряда.

**Трудоёмкости алгоритмов** Так как шаг разложения является самым трудоёмким шагом в алгоритмах HOSVD-SSA и HOSVD-MSSA, то для оценки трудоёмкости алгоритма достаточно оценить трудоёмкость HOSVD траекторного тензора. Оценим трудоёмкость алгоритма HOSVD-MSSA, трудоёмкость HOSVD-SSA получается аналогично подстановкой других обозначений размерностей.

Из утверждения 2.3 следует, что вычисление HOSVD траекторного тензора размерности  $L \times K \times P$  сводится к вычислению SVD на трёх матрицах размерностей  $L \times KP$ ,  $K \times LP$ ,  $P \times LK$ . Вычисление SVD матрицы размерности  $m \times n$  имеет асимптотическую трудоёмкость, равную  $O(\min(mn^2, m^2n))$ . Таким образом, асимптотическая сложность HOSVD траекторного тензора, а следовательно и всего алгоритма, имеет вид

$$O(LKP(\min(L, KP) + \min(K, LP) + \min(P, LK))). \quad (22)$$

Если требуется вычислить только усечение HOSVD с  $n$ -рангами  $(r_1, r_2, r_3)$ , то так как трудоёмкость вычисления первых  $r$  компонент SVD матрицы  $m \times n$  при  $r \ll \min(m, n)$  равна  $O(rmn)$ , трудоёмкость HOSVD можно уменьшить до порядка

$$O(LKP(r_1 + r_2 + r_3)). \quad (23)$$

Самым трудоёмким шагом в алгоритме HOOI-SSA является применение к траекторному тензору алгоритма HOOI. Описание этого алгоритма для приближения тензора размерности  $I \times J \times K$  тензором с  $n$ -рангами  $(r_1, r_2, r_3)$  можно найти в статье [14]. Этот алгоритм является итерационным, и в обозначениях выше каждая итерация имеет асимптотическую сложность

$$O(r_1 r_2 r_3 (I + L + J)), \quad (24)$$

а скорость сходимости алгоритма линейная.

Таблица 12. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: ранги сигнала вида (21),  $P = 2$ ,  $a_1 = 30$ ,  $a_2 = 20$ .

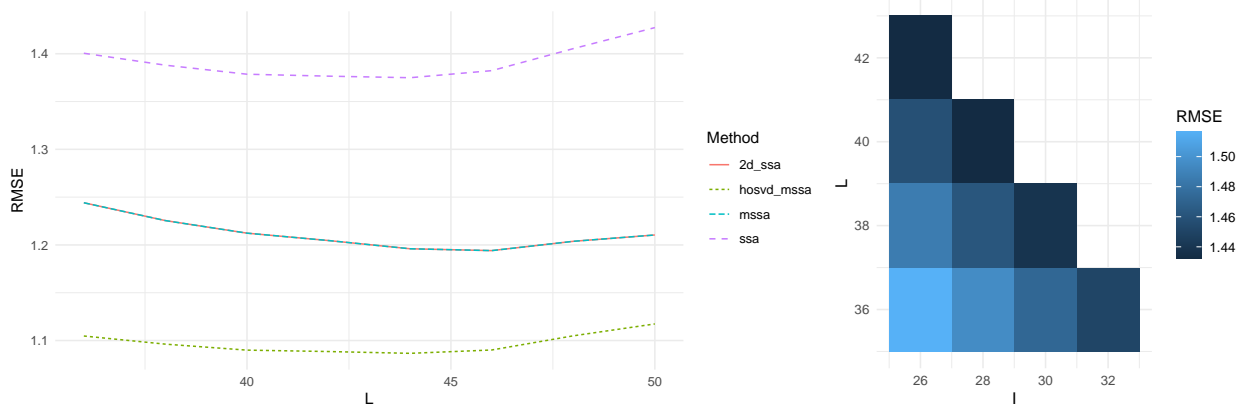
Параметры	(HOOI) SSA	(HOSVD) MSSA	$r_3$	2D-SSA
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = \psi_2 = 0$	2	2	1	2
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	2	2	2	2
$\omega_1 = \frac{1}{12}, \omega_2 = \frac{1}{8}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	2	4	2	4

Таблица 13. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: минимальные RMSE оценки сигнала вида (21),  $P = 2$ ,  $a_1 = 30$ ,  $a_2 = 20$ .

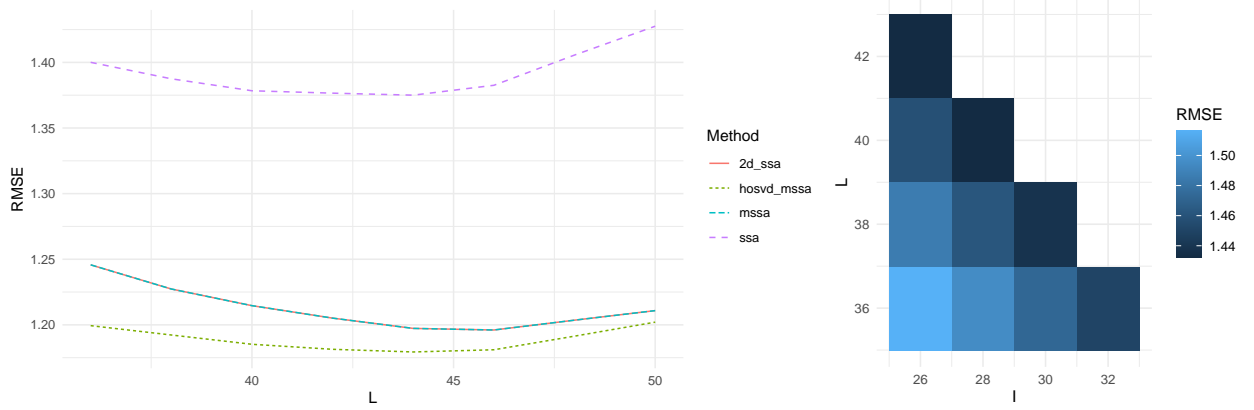
Параметры	SSA	HOOI-SSA	MSSA	HOSVD-MSSA	2D-SSA
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = \psi_2 = 0$	1.37	1.43	1.19	<b>1.09</b>	1.19
$\omega_1 = \omega_2 = \frac{1}{12}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	1.38	1.43	1.20	<b>1.18</b>	1.20
$\omega_1 = \frac{1}{12}, \omega_2 = \frac{1}{8}$ $\psi_1 = 0, \psi_2 = \frac{\pi}{4}$	<b>1.39</b>	1.45	1.69	1.66	1.69

Таблица 14. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: ранги сигнала вида (21),  $P = 5$ .

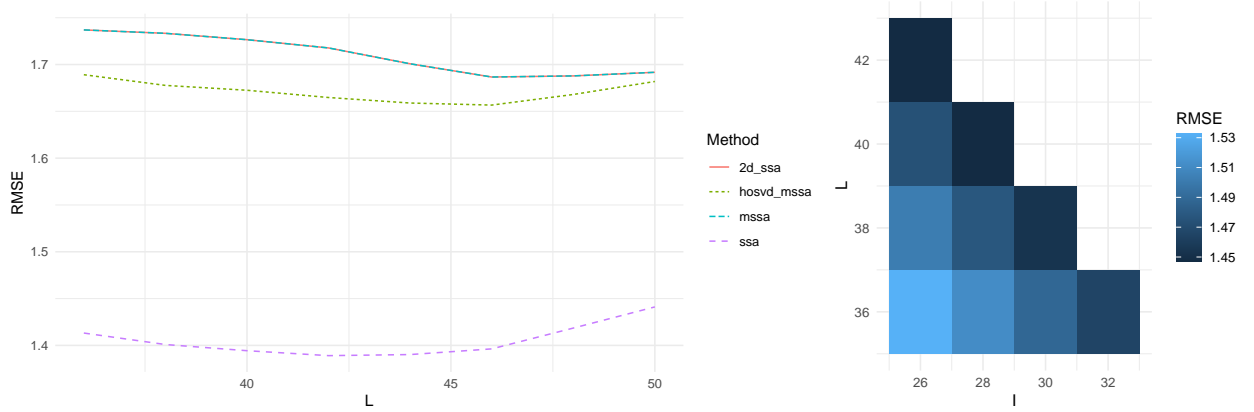
Параметры	(HOOI) SSA	(HOSVD) MSSA	$r_3$	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	2
$a_1 = a_4 = 30$ $a_2 = a_5 = 20, a_3 = 25$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	6
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12},$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$	2	2	2	2
$a_p = 30, \psi_p = 2(p-1)\pi/3$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{12}$ $\omega_4 = \omega_5 = \frac{1}{8}$	2	4	4	10



(a)  $\omega_1 = \omega_2 = 1/12, \psi_1 = \psi_2 = 0$



(b)  $\omega_1 = \omega_2 = 1/12, \psi_1 = 0, \psi_2 = \pi/4$



(c)  $\omega_1 = 1/12, \omega_2 = 1/8, \psi_1 = 0, \psi_2 = \pi/4$

Рис. 1. Зависимости точности выделения сигнала от длин окна для каждого из методов SSA, MSSA, HOSVD-MSSA, 2D-SSA (слева), HOOI-SSA (справа),  $P = 2, a_1 = 30, a_2 = 20$ .

Таблица 15. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: минимальные RMSE оценки сигнала вида (21),  $P = 5$ .

Параметры	SSA	HOOI-SSA	MSSA	HOSVD-MSSA	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.34	0.00	0.95	0.75	<b>0.73</b>
$a_1 = a_4 = 30$ $a_2 = a_5 = 20, a_3 = 25$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.38	1.41	1.07	<b>0.86</b>	1.45
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12}$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$	1.38	1.41	1.07	1.05	<b>0.84</b>
$a_p = 30, \psi_p = 2(p-1)\pi/3$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \frac{1}{12}$ $\omega_4 = \omega_5 = \frac{1}{8}$	<b>1.38</b>	1.41	1.50	1.49	1.78

Таблица 16. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: ранги сигнала вида (21),  $P = 9$ .

Параметры	(HOOI) SSA	(HOSVD) MSSA	$r_3$	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	2
$a_p = a_{p+5} = 30 - 2(p-1), 1 \leq p \leq 4$ $a_5 = 22, \omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	2	2	1	10
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12},$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/5$	2	2	2	2
$a_p = 30, \psi_p = 2(p-1)\pi/5$ $\omega_p = \frac{1}{12}, 1 \leq p \leq 7$ $\omega_8 = \omega_9 = \frac{1}{8}$	2	4	4	10

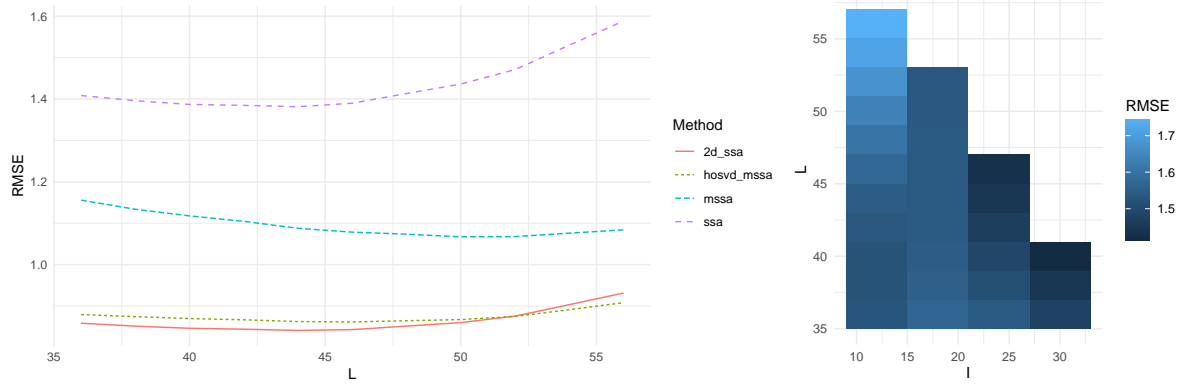
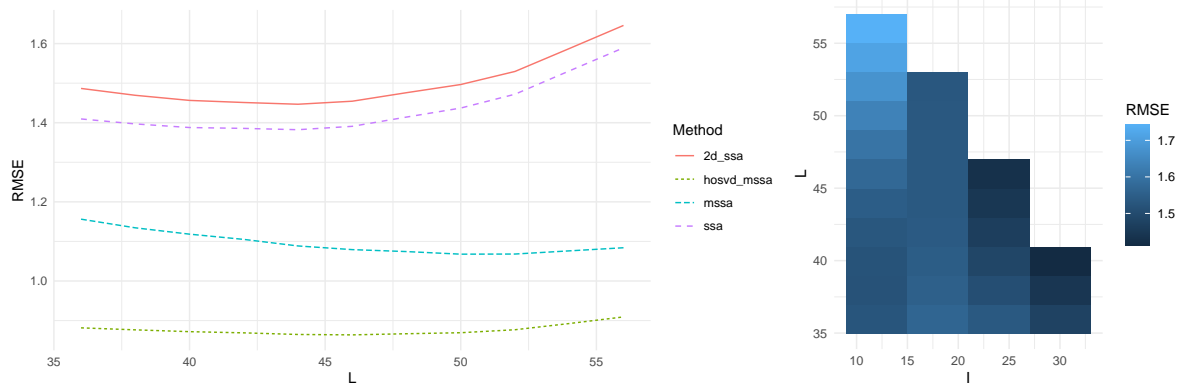
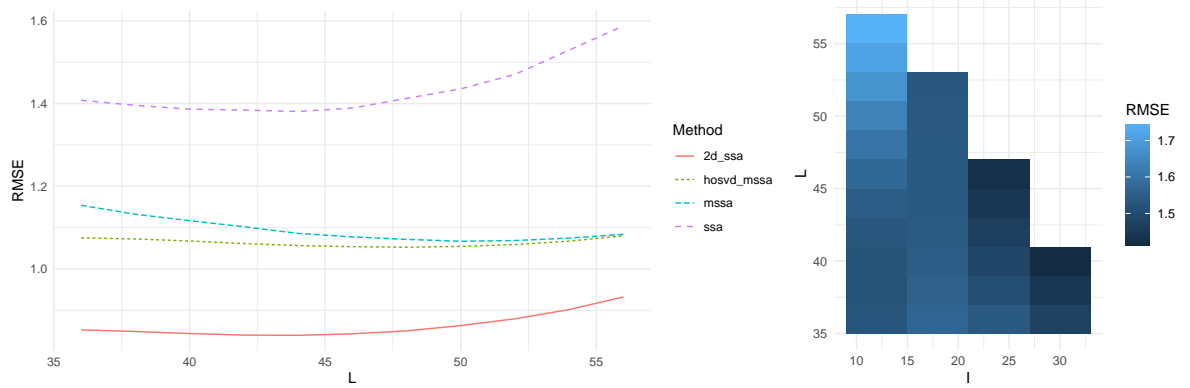
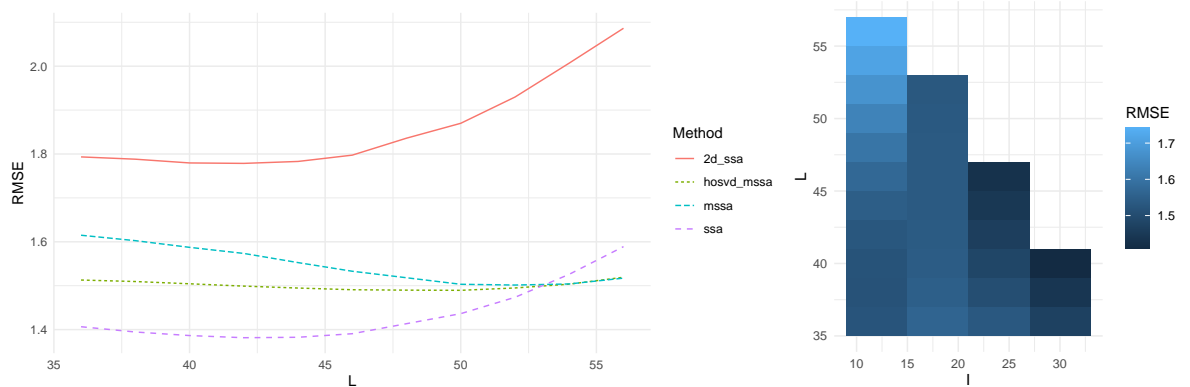
(a)  $a_p = 30$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 0$ (b)  $a_1 = a_4 = 30$ ,  $a_2 = a_5 = 20$ ,  $a_3 = 25$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 0$ (c)  $a_p = 30$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$ (d)  $a_p = 30$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1/12$ ,  $\omega_4 = \omega_5 = 1/8$ ,  $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$ 

Рис. 2. Зависимости точности выделения сигнала от длин окна для каждого из методов SSA, MSSA, HOSVD-MSSA, 2D-SSA (слева), HOOI-SSA (справа),  $P = 5$ .



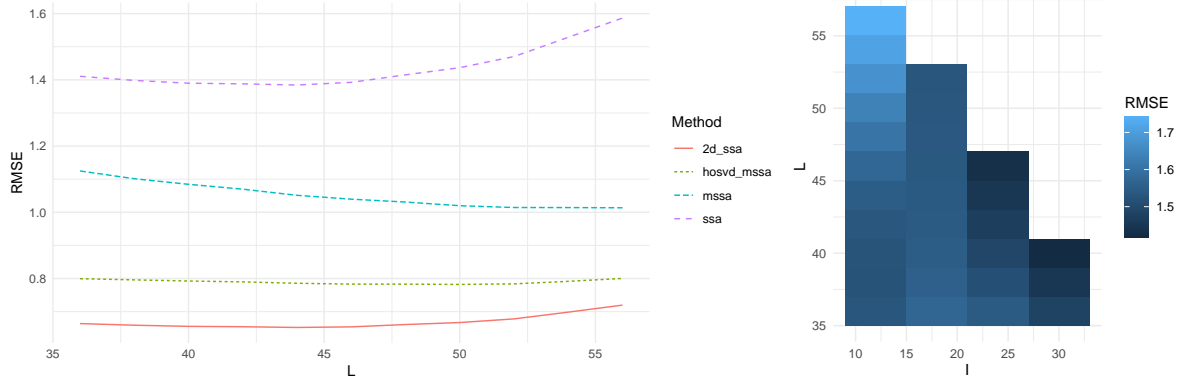
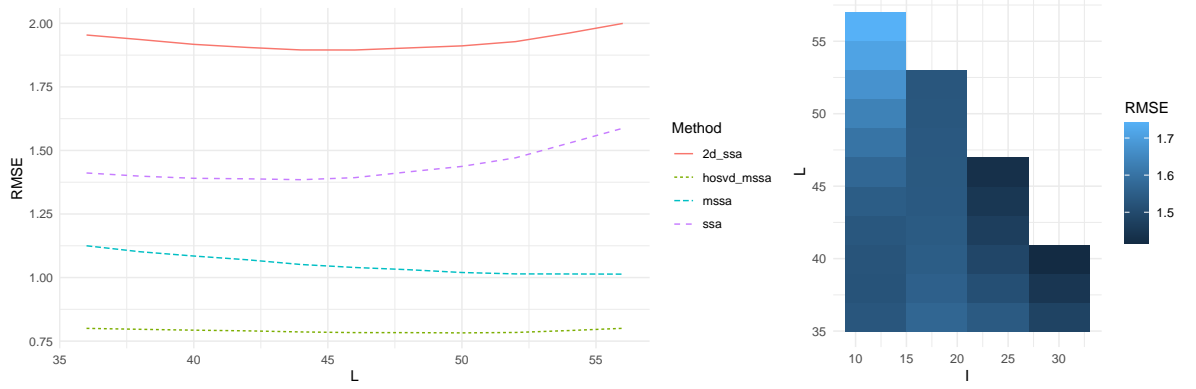
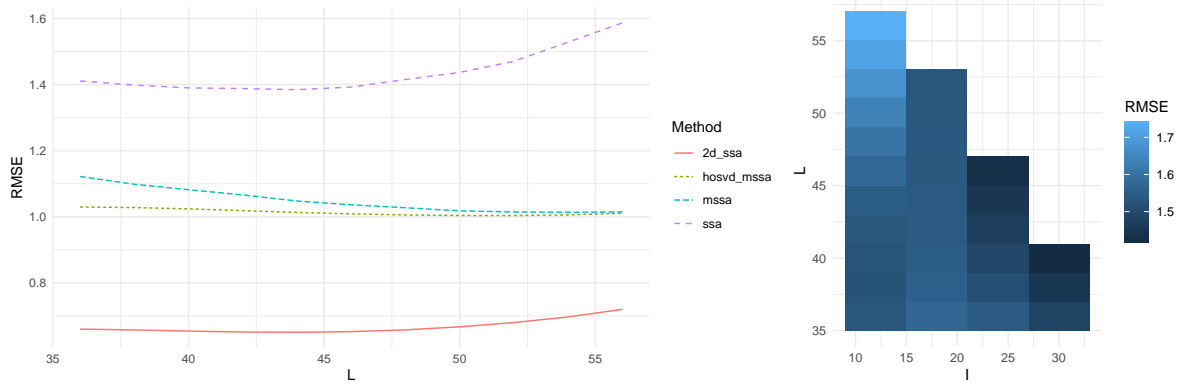
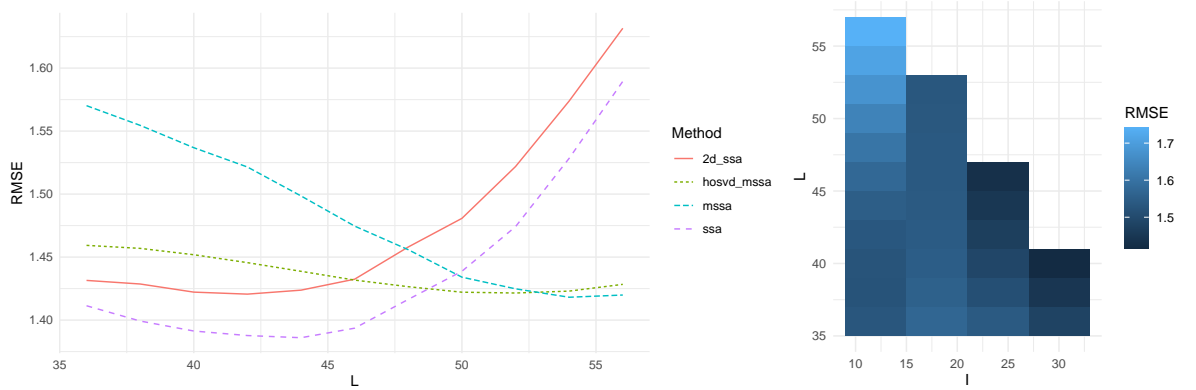
(a)  $a_p = 30$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 0$ (б)  $a_p = a_{p+5} = 30 - 2(p-1)$ ,  $1 \leq p \leq 4$ ,  $a_5 = 22$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 0$ (с)  $a_p = 30$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $\psi_p = 2(p-1)\pi/5$ (д)  $a_p = 30$ ,  $\omega_p = 1/12$ ,  $1 \leq p \leq 7$ ,  $\omega_8 = \omega_9 = 1/8$ ,  $\psi_p = 2(p-1)\pi/5$ 

Рис. 3. Зависимости точности выделения сигнала от длин окна для каждого из методов SSA, MSSA, HOSVD-MSSA, 2D-SSA (слева), HOOI-SSA (справа),  $P = 9$ .

Таблица 17. Сравнение SSA, HOOI-SSA, MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: минимальные RMSE оценки сигнала вида (21),  $P = 9$ .

Параметры	SSA	HOOI-SSA	MSSA	HOSVD-MSSA	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.38	1.42	1.01	0.78	<b>0.65</b>
$a_p = a_{p+5} = 30 - 2(p - 1)$ $1 \leq p \leq 4, a_5 = 22$ $\omega_p = \frac{1}{12}, \psi_p = 0$	1.38	1.42	1.01	<b>0.78</b>	1.90
$a_p = 30, \omega_p = \frac{1}{12}$ $\psi_p = 2(p - 1)\pi/5$	1.38	1.42	1.01	1.00	<b>0.65</b>
$a_p = 30, \psi_p = 2(p - 1)\pi/5$ $\omega_p = \frac{1}{12}, 1 \leq p \leq 7$ $\omega_8 = \omega_9 = \frac{1}{8}$	<b>1.39</b>	1.42	1.42	1.42	1.42

## 9. Численные сравнения в задаче разделения компонент

Рассматриваются временные ряды  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_P)$ ,  $\mathbf{X}_p = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \dots, x_N^{(p)}\right)^T$ , вида

$$x_n^{(p)} = \hat{s}_n^{(p)} + \tilde{s}_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)},$$

где  $\varepsilon_n^{(p)}$  — белый гауссовский шум со стандартным отклонением  $\sigma = 0.1$ . Рассматриваемые варианты сигналов  $\hat{s}_n^{(p)}, \tilde{s}_n^{(p)}$ :

1.  $N = 44, P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 2 \cos(2\pi n/5), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = \cos(2\pi n/3). \quad (25)$$

2.  $N = 44, P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 2c_1^{(p)} \cos(2\pi n/5), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)} \cos(2\pi n/3), \quad (26)$$

$$c_1 = (-0.63, 0.18, -0.84, 1.60, 0.33, -0.82, 0.49, 0.74, 0.58, -0.31, 1.51, 0.39)$$

$$c_2 = (-0.62, -2.21, 1.12, -0.04, -0.02, 0.94, 0.82, 0.59, 0.92, 0.78, 0.07, -1.99).$$

Амплитуды  $c_j^{(p)}$  взяты случайным образом из распределения  $N(0, 1)$  и фиксированы для каждой реализации шума и для всех дальнейших примеров.

3.  $N = 44, P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 2c_1^{(p)} \cos(2\pi n/5 + p\pi/6), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)} \cos(2\pi n/3 + p\pi/9). \quad (27)$$

4.  $N = 44, P = 12$ ,

$$\begin{aligned} \hat{s}_n^{(p)} &= 2c_1^{(p)} \cos(2\pi n/5 + \varphi_1^{(p)}), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)} \cos(2\pi n/3 + \varphi_2^{(p)}), \\ \varphi_1 &= (4.60, 3.00, 2.75, 0.44, 1.99, 4.16, 5.74, 2.88, 4.09, 3.01, 0.53, 2.13), \\ \varphi_2 &= (4.35, 5.41, 1.54, 0.62, 3.26, 2.56, 1.84, 2.09, 1.62, 4.81, 5.50, 5.27). \end{aligned} \quad (28)$$

Фазы  $\varphi_j^{(p)}$  взяты случайным образом из распределения  $U(0, 2\pi)$  и фиксированы для каждой реализации шума.

5.  $N = 44, P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 3c_1^{(p)}, \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)} \cos(2\pi n/3). \quad (29)$$

6.  $N = 59, P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 2 \cos(2\pi n/5), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = \begin{cases} \cos(2\pi n/3), & 1 \leq p \leq 10, \\ 0.4 \cos(2\pi n/6), & 11 \leq p \leq 12. \end{cases} \quad (30)$$

7.  $N = 29, P = 12$ ,

$$\hat{s}_n^{(p)} = 2 \cos(2\pi n/5) \cos(2\pi p/3), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = 0.5 \cos(2\pi n/3) \cos(2\pi p/6). \quad (31)$$

Сравнивались методы MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA по точности разделения компонент сигнала. В качестве оценки точности разделения компонент сигнала было взято RMSE каждой восстановленной компоненты сигнала от истинного её значения по 1000 реализациям шума, причём сравнения разных методов производилось на одних реализациях шума при выборе оптимальных для каждого метода параметров длины окна  $L$ . Оптимальность длины окна проверялась эмпирически.

**Принцип соотношения компонент сингулярного разложения с компонентами сигнала** Решение о том, к какой компоненте сигнала относить то или иное слагаемое сингулярного разложения траекторной матрицы или тензора, принимается из вида сингулярных векторов, образующих это слагаемое. А именно: сингулярный вектор должен иметь такой же вид, как и компонента сигнала. Например, если сигнал является суммой

двух гармоник с периодами 5 и 3, то в случае MSSA и 2D-SSA к первой компоненте имеет смысл относить те слагаемые, левые сингулярные векторы которых являются гармониками с периодом 5, а ко второй — с периодом 3. В случае HOSVD-MSSA к первой компоненте имеет смысл относить те слагаемые, сингулярные векторы по первому и второму измерению которых являются гармониками с периодом 5, а ко второй — с периодом 3.

### 9.1. Результаты численных сравнений

В таблице 18 представлены индексы сингулярных векторов, относимых к компонентам сигнала: индексы над горизонтальной чертой отвечают компоненте  $\hat{s}_n^{(p)}$ , под горизонтальной чертой — компоненте  $\tilde{s}_n^{(p)}$ . В столбце  $\mathfrak{P}_i$  выписаны соответствующие множества из алгоритма 7, принцип их выбора указан в следствии к теореме 4. Сигнал  $\tilde{s}_n^{(p)}$  в уравнении (30) представляется в виде суммы двух сигналов

$$\begin{aligned}\tilde{s}_n^{(p)} &= \tilde{r}_n^{(p)} + \tilde{q}_n^{(p)}, \\ \tilde{r}_n^{(p)} &= \begin{cases} \cos(2\pi n/3), & 1 \leq p \leq 10, \\ 0, & 11 \leq p \leq 12, \end{cases} \\ \tilde{q}_n^{(p)} &= \begin{cases} 0, & 1 \leq p \leq 10, \\ 0.4 \cos(2\pi n/6), & 11 \leq p \leq 12, \end{cases}\end{aligned}$$

поэтому считается, что сигнал состоит из трёх компонент:  $\hat{s}_n^{(p)}$ ,  $\tilde{r}_n^{(p)}$  и  $\tilde{q}_n^{(p)}$ . Из-за этого в таблице 18 в строке, отвечающей сигналу (30) выписаны три набора индексов: первый соответствует  $\hat{s}_n^{(p)}$ , второй —  $\tilde{r}_n^{(p)}$ , третий —  $\tilde{q}_n^{(p)}$ . Максимальные значения индексов для каждого примера совпадает рангом соответствующего сигнала в терминах каждого из методов.

По аналогии, в таблице 19 представлены минимальные значения RMSE восстановленных компонент сигналов. Жирным шрифтом выделены минимальные по методам значения RMSE для данного сигнала. Отличие выделенных значений от остальных в строке значимо при уровне значимости  $\alpha = 0.05$ .

**Выводы из численных сравнений** Таким образом, метод HOSVD-MSSA разделяет компоненты сигнала не менее точно, чем метод MSSA во всех примерах, причём его

точность выше в случае, когда у сигналов не меняются фазы при изменении номера сигнала. Также метод HOSVD-MSSA оказался точнее метода 2D-SSA в случае различающихся амплитуд у сигналов.

Таблица 18. Сравнение MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: индексы компонент сигналов.

Вид сигнала	(HOSVD) MSSA	$\mathfrak{P}_i$	2D-SSA
(25)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{1, 2}{1, 2}$	$\frac{1, 2}{3, 4}$
(26)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{1, 2}{1, 2}$	$\frac{\overline{1 : 8}, 13, 14, 19, 20}{9 : 12, \overline{15 : 18}, \overline{21 : 24}}$
(27)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{\overline{1 : 4}}{\overline{1 : 4}}$	$\frac{\overline{1 : 8}, 13, 14, 19, 20}{9 : 12, \overline{15 : 18}, \overline{21 : 24}}$
(28)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{\overline{1 : 4}}{\overline{1 : 4}}$	$\frac{\overline{1 : 6}, \overline{9 : 12}, 17, 18}{7, 8, \overline{13 : 16}, \overline{19 : 24}}$
(29)	$\frac{1}{2, 3}$	$\frac{1, 2}{1, 2}$	$\frac{\overline{1 : 5}, 12}{\overline{6 : 11}, \overline{13 : 18}}$
(30)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{\overline{1 : 3}}{\overline{1 : 3}}$	$\frac{1, 2}{\overline{3 : 6}, 9, 10}$
	$\frac{5, 6}{5, 6}$	$\frac{\overline{1 : 3}}{\overline{1 : 3}}$	$\frac{7, 8, 11, 12}{7, 8, 11, 12}$
(31)	$\frac{1, 2}{3, 4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\overline{1 : 4}}{\overline{5 : 8}}$

## 10. Альтернативные тензорные разложения

Помимо HOSVD, существуют и другие тензорные разложения, в некотором смысле расширяющие SVD. Например, ранговое разложение тензора. Суть этого разложения заключается в представлении тензора  $\mathcal{A}$  в виде линейной комбинации  $R$  тензоров ранга 1, где  $R = \text{rank}(\mathcal{A})$ . Однако нахождение этого ранга в общем случае является NP-трудной задачей [15].

CANDECOMP-PARAFAC [6, 7]— итерационный метод приближения тензора суммой заданного пользователем числа тензоров ранга 1. То есть по параметру  $K$  этот метод считает наилучшее приближение входного тензора суммой  $K$  тензоров ранга 1.

Таблица 19. Сравнение MSSA, HOSVD-MSSA и 2D-SSA: минимальные RMSE оценок компонент сигналов.

Вид сигнала	MSSA	HOSVD-MSSA	2D-SSA
(25)	0.026	0.019	<b>0.014</b>
	0.025	0.016	<b>0.014</b>
(26)	0.029	<b>0.019</b>	0.086
	0.029	<b>0.019</b>	0.083
(27)	<b>0.026</b>	<b>0.025</b>	0.117
	<b>0.025</b>	<b>0.025</b>	0.114
(28)	<b>0.026</b>	<b>0.025</b>	0.034
	<b>0.025</b>	<b>0.025</b>	0.033
(29)	<b>0.017</b>	<b>0.017</b>	0.023
	0.025	<b>0.019</b>	0.033
(30)	0.024	0.018	<b>0.012</b>
	0.024	<b>0.018</b>	0.031
	0.024	<b>0.014</b>	0.026
(31)	0.031	<b>0.023</b>	0.025
	0.030	<b>0.022</b>	0.024

Заметим, что из-за отсутствия каких-либо требований к ортогональности в определении рангового разложения тензора, многие свойства, верные в теории SSA, могут потерять справедливость при использовании этого разложения.

Рассмотрим ряды  $\tilde{x}_n = 3$ ,  $\hat{x}_n = \sin(2\pi n/3)$ ,  $n \in \overline{0:15}$ . Построим по этим рядам траекторные тензоры с параметрами  $I = L = 6$ . Тогда ранг траекторного тензора  $\tilde{\mathcal{X}}$ , соответствующего константному ряду, равен 1, так как его можно представить в виде

$$\tilde{\mathcal{X}} = 3X \circ X \circ X,$$

где  $X = (1, 1, 1, 1, 1, 1)$ . Ранг траекторного тензора  $\hat{\mathcal{X}}$ , соответствующего синусу, равен 3, так как его можно представить в виде

$$\hat{\mathcal{X}} = \sum_{k=1}^3 \lambda_k X_k \circ Y_k \circ Z_k,$$

где

$$\lambda_1 = 160.56, \lambda_2 = 65.69, \lambda_3 = 123.76,$$

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3] = \begin{pmatrix} -0.16 & 0.25 & 0.06 \\ 0.25 & -0.06 & -0.25 \\ -0.09 & -0.19 & 0.19 \\ -0.16 & 0.25 & 0.06 \\ 0.25 & -0.06 & -0.25 \\ -0.09 & -0.19 & 0.19 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3] = \begin{pmatrix} -0.25 & -0.15 & 0.21 \\ 0.18 & -0.10 & -0.25 \\ 0.07 & 0.25 & 0.04 \\ -0.25 & -0.15 & 0.21 \\ 0.18 & -0.10 & -0.25 \\ 0.07 & 0.25 & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, Z_3] = \begin{pmatrix} -0.10 & -0.25 & -0.01 \\ 0.25 & 0.12 & -0.24 \\ -0.15 & 0.13 & 0.25 \\ -0.10 & -0.25 & -0.01 \\ 0.25 & 0.12 & -0.24 \\ -0.15 & 0.13 & 0.25 \end{pmatrix},$$

притом точных приближений двумя тензорами ранга 1 нет.

Траекторный тензор ряда  $x_n = \tilde{x}_n + \hat{x}_n$ , построенный с параметрами  $I = L = 6$  представим в виде суммы

$$\mathcal{X} = \sum_{k=1}^4 \lambda_k X_k \circ Y_k \circ Z_k,$$

где

$$\lambda_1 = 320.17, \lambda_2 = 120.97, \lambda_3 = 209.38, \lambda_4 = 648$$

$$\mathbf{X} = [X_1, X_2, X_3, X_4] = \begin{pmatrix} -0.25 & -0.25 & 0.25 & -0.17 \\ 0.11 & 0.25 & -0.04 & -0.17 \\ 0.14 & 0.00 & -0.21 & -0.17 \\ -0.25 & -0.25 & 0.25 & -0.17 \\ 0.11 & 0.25 & -0.04 & -0.17 \\ 0.14 & 0.00 & -0.21 & -0.17 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] = \begin{pmatrix} 0.25 & -0.25 & -0.25 & -0.17 \\ -0.08 & 0.21 & -0.00 & -0.17 \\ -0.17 & 0.04 & 0.25 & -0.17 \\ 0.25 & -0.25 & -0.25 & -0.17 \\ -0.08 & 0.21 & -0.00 & -0.17 \\ -0.17 & 0.04 & 0.25 & -0.17 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Z} = [Z_1, Z_2, Z_3, Z_4] = \begin{pmatrix} -0.00 & -0.14 & -0.08 & 0.17 \\ -0.25 & -0.11 & 0.25 & 0.17 \\ 0.25 & 0.25 & -0.17 & 0.17 \\ -0.00 & -0.14 & -0.08 & 0.17 \\ -0.25 & -0.11 & 0.25 & 0.17 \\ 0.25 & 0.25 & -0.17 & 0.17 \end{pmatrix},$$

притом точных приближений тремя тензорами ранга 1 нет.

По виду векторов видно, что четвёртая компонента разложения соответствует константному ряду, а остальные три имеют период равный 3. Таким образом, несмотря на отсутствие ограничений на ортогональность в определении ранговых разложений тензора, наблюдается отделимость константного ряда от периодического ряда при наличии условий слабой разделимости в терминах SSA и отсутствия шума. Однако понятия ранга в терминах SSA и в терминах CPD различаются, так как в терминах SSA синус



с периодом 3 имеет ранг 2, а в терминах рангового разложения, как показано выше, такой синус имеет ранг 3.

Другим недостатком CPD является то, что это итерационный метод, причём процесс итерации начинается с генерации случайной матрицы, в связи с чем на одних и тех же данных он может выдавать разные результаты, в том числе может как сойтись, так и нет.

Возможно можно добиться лучших результатов, используя CPD или его модификации, если строить тензор по ряду некоторым другим образом и подбирать другие параметры разложения. Этот вопрос предлагается изучить в будущих работах.

## 11. Заключение

В работе было показано, что по своим свойствам HO-SSA и HOSVD-MSSA имеют много общего с Basic SSA и MSSA соответственно. Однако, есть и особенности, кардинально меняющие свойства методов, которые можно использовать для анализа временных рядов.

В результате исследования методов HO-SSA и HOSVD-MSSA с HOSVD были сделаны следующие выводы: методы можно использовать для выделения сигнала, и, в некоторых случаях, разделения компонент сигнала. В большинстве рассмотренных примеров, как HOSVD-SSA, так и HOOI-SSA, оказались хуже, чем Basic SSA в точности выделения сигнала. Удалось построить только один пример, где тензорная модификация выделяет сигнал точнее, чем Basic SSA. В работе [4] утверждалось преимущество тензорной модификации алгоритма ESPRIT [16], основанного на подпространстве сигнала, и применяемого для оценки частот параметрического сигнала, над базовым алгоритмом в большем числе случаев. В данной работе показано, что это преимущество отсутствует для тензорной модификации алгоритма SSA, также основанного на подпространстве сигнала, но применяемого в задачах выделения сигнала и разделения компонент сигнала.

С другой стороны, метод HOSVD-MSSA оказался точнее метода MSSA в задачах выделения сигнала и разделения компонент сигнала во всех рассмотренных случаях, но в случаях сигналов с равными амплитудами данный метод оказался менее точным, чем метод 2D-SSA.

Таким образом, остались открытыми вопросы: найти семейство сигналов, для которых метод HOSVD-MSSA разделяет компоненты точнее, чем метод MSSA, исследовать другие тензорные разложения в задачах выделения сигнала и разделения компонент, например в работе [17] предлагается метод CPD для разделения комплексных экспонент, а также перенести понятие сильной разделимости из теории MSSA на метод HOSVD-MSSA.

## Список литературы

1. Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techniques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
2. Kouchaki Samaneh, Sanei Saeid. Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation // 2013 IEEE International Workshop on Machine Learning for Signal Processing (MLSP). — IEEE. — 2013.
3. Improved Tensor-Based Singular Spectrum Analysis Based on Single Channel Blind Source Separation Algorithm and Its Application to Fault Diagnosis / Yang Dan, Yi Cancan, Xu Zengbin, Zhang Yi, Ge Mao, and Liu Changming // Applied Sciences. — 2017. — Vol. 7, no. 4.
4. Papy J. M., De Lathauwer L., Van Huffel S. Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — Vol. 12, no. 8. — P. 809–826.
5. De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1253–1278.
6. Harshman Richard A. Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-model factor analysis. — 1970. — Vol. 16. — P. 1–84.
7. Carroll J. Douglas, Chang Jih Jie. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition // Psychometrika. — 1970. — Vol. 35. — P. 283–319.
8. Tucker Ledyard R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis // Psychometrika. — 1966. — Vol. 31. — P. 279–311.
9. Golyandina Nina, Zhigljavsky Anatoly. Singular Spectrum Analysis for Time Series. — 2 ed. — Springer Berlin, Heidelberg, 2020.
10. Степанов Д. В., Голяндина Н. Э. Варианты метода «Гусеница»-SSA для прогноза многомерных временных рядов // Труды IV Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления». — 2005. — С. 1831–1848.
11. Algorithm for Time-Domain NMR Data Fitting Based on Total Least Squares // Journal of Magnetic Resonance, Series A. — 1994. — Vol. 110, no. 2. — P. 228–237.
12. De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. On the Best Rank-1 and Rank-

- $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  Approximation of Higher-Order Tensors // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — Vol. 21, no. 4. — P. 1324–1342.
13. Golyandina N. E., Usevich K. D. 2D-Extension of Singular Spectrum Analysis: Algorithm and Elements of Theory // Matrix Methods: Theory, Algorithms and Applications. — P. 449–473.
  14. Sheehan Bernard N., Saad Yousef. Higher Order Orthogonal Iteration of Tensors (HOOI) and its Relation to PCA and GLRAM // Proceedings of the 2007 SIAM International Conference on Data Mining (SDM). — P. 355–365.
  15. Hillar Christopher J., Lim Lek-Heng. Most Tensor Problems Are NP-Hard // J. ACM. — 2013. — Vol. 60, no. 6.
  16. Roy R., Kailath T. ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques // IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. — 1989. — Vol. 37, no. 7. — P. 984–995.
  17. De Lathauwer Lieven. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank- $(L_r, L_r, 1)$  Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2011. — Vol. 32, no. 4. — P. 1451–1474.