Тензорный анализ сингулярного спектра

Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Производственная практика (преддипломная практика)
(8 семестр)

Санкт-Петербург, 2023

Tensor SSA

Тензорный анализ сингулярного спектра
Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм
Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели
Производственная практика (преддипломная практика)
(8 семестр)
Санкт-Петербург, 2023

Научный руководитель д.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э.,
кафедра статистического моделирования

Постановка задачи

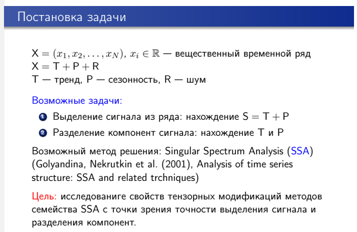
$\mathsf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$ — вещественный временной ряд
$\mathsf{X} = \mathsf{T} + \mathsf{P} + \mathsf{R}$
T — тренд, P — сезонность, R — шум

Возможные задачи:

1. Выделение сигнала из ряда: нахождение $\mathsf{S} = \mathsf{T} + \mathsf{P}$
2. Разделение компонент сигнала: нахождение T и P

Возможный метод решения: Singular Spectrum Analysis (SSA) (Golyandina, Nekrutkin et al. (2001), Analysis of time series structure: SSA and related trchniques)

Цель: исследованиге свойств тензорных модификаций методов семейства SSA с точки зрения точности выделения сигнала и разделения компонент.



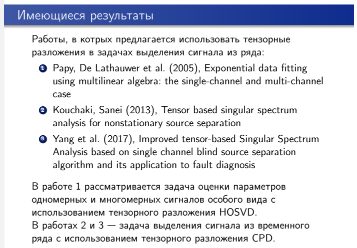
Временным рядом длины N называется последовательность N чисел. В общем случае, временной ряд является суммой трёх компонент: тренда T, сезонности P и шума R.
Можно рассматривать следующие задачи анализа временного ряда: Выделение сигнала $\mathsf{T} + \mathsf{P}$ из ряда, Отделение компонент сигнала T и P.
Одним из распространённых методов решения этих задач является алгоритм SSA, описанный в работе [1].
Цель этой работы - исследование свойств тензорных модификация методов семейства SSA с точки зрения точности выделения сигнала и отделения компонент сигнала.

Имеющиеся результаты

Работы, в котрых предлагается использовать тензорные разложения в задачах выделения сигнала из ряда:

1. Papy, De Lathauwer et al. (2005), Exponential data fitting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case
2. Kouchaki, Sanei (2013), Tensor based singular spectrum analysis for nonstationary source separation
3. Yang et al. (2017), Improved tensor-based Singular Spectrum Analysis based on single channel blind source separation algorithm and its application to fault diagnosis

В работе 1 рассматривается задача оценки параметров одномерных и многомерных сигналов особого вида с использованием тензорного разложения HOSVD.
В работах 2 и 3 — задача выделения сигнала из временного ряда с использованием тензорного разложения CPD.



На слайде представлены работы, в которых уже предлагалось использовать тензоры и тензорные разложения в задачах анализа временных рядов.
В первой работе [2] рассматривалась модель, в которой сигнал составляла сумма комплексных экспонент и нужно было оценить показатели их степеней. Для решения применялось тензорное разложение HOSVD, которое наследует большинство свойств матричного сингулярного разложения.
Во второй и третьей работах рассматривалась задача выделения сигнала из зашумлённого ряда с применением тензороного разложения CPD. Подробнее про разложения далее.

Пока был исследован только вариант перехода к тензорам, предложенный в первой работе.

ESPRIT

$\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) = \mathsf{S} + \mathsf{R}$, L – длина окна,
$K = N - L + 1 \geqslant L$.

Модель: $s_n = \sum_{j=1}^{r} a_j \exp\{i\varphi_j\} \exp\{(-\alpha_j + 2\pi i \omega_j)n\}$
Параметры алгоритма: L, R: $R \leqslant L < N$
R — число компонент, относимых к сигналу

Схема алгоритма ESPRIT для оценки α_j, ω_j

1. Вложение $\mathsf{X} \mapsto \mathbf{X} = [X_1 : X_2 : \ldots : X_K] \in \mathbb{R}^{L \times K}$,
   $X_i = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+L-1})^{\mathrm{T}}$
2. Разложение $\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{d} \sqrt{\lambda_j} U_j V_j^{\mathrm{T}}$, $d \leqslant L$
3. Группировка $\widehat{\mathbf{U}} = [U_1 : U_2 : \ldots : U_R]$, $R \leqslant d$
4. Восстановление $\mathbf{Z} : \widehat{\mathbf{U}}^{\uparrow} = \widehat{\mathbf{U}}_{\downarrow}\mathbf{Z}$,
   $\{z_1, z_2, \ldots, z_R\}$ — собственные числа $\mathbf{Z}$

Результат алгоритма z_j — оценка $\exp\{-\alpha_j + 2\pi i \omega\}$

ESPRIT

$\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) = \mathsf{S} + \mathsf{R}$, L – длина окна,
$K = N - L + 1 \geqslant L$.
Модель: $s_n = \sum_{j=1}^{r} a_j \exp\{i\varphi_j\} \exp\{(-\alpha_j + 2\pi i \omega_j)n\}$
Параметры алгоритма: L, R: $R \leqslant L < N$
R — число компонент, относимых к сигналу
Схема алгоритма ESPRIT для оценки α_j, ω_j
1. Вложение $\mathsf{X} \mapsto \mathbf{X} = [X_1 : X_2 : \ldots : X_K] \in \mathbb{R}^{L \times K}$, $X_i = (x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+L-1})^{\mathrm{T}}$
2. Разложение $\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{d} \sqrt{\lambda_j} U_j V_j^{\mathrm{T}}$, $d \leqslant L$
3. Группировка $\widehat{\mathbf{U}} = [U_1 : U_2 : \ldots : U_R]$, $R \leqslant d$
4. Восстановление $\mathbf{Z} : \widehat{\mathbf{U}}^{\uparrow} = \widehat{\mathbf{U}}_{\downarrow}\mathbf{Z}$, $\{z_1, z_2, \ldots, z_R\}$ — собственные числа $\mathbf{Z}$
Результат алгоритма z_j — оценка $\exp\{-\alpha_j + 2\pi i \omega\}$

В работе [2] предлагалась модификация алгоритма ESPRIT для оценки параметров сигнала, равного сумме экспоненциально-модулированных комплексных гармоник.
Пусть дан временной ряд X длины N, и он является суммой некоторого сигнала S и шума R. Выберем число L - длина окна, и пусть она такова, что $K = N - K + 1 \geqslant L$. Кроме того нужно выбрать параметр R, имеющий смысл числа компонент, которые мы относим к сигналу.
Алгоритм состоит из следующих четырёх этапов:

Вложение - по ряду X строится матрица $\mathbf{X}$, i-й столбец которой представляет собой набор элементов ряда с i-го по $i + L - 1$-й Разложение - матрица $\mathbf{X}$ представляется в виде своего сингулярного разложения в сумму d одноранговых матриц Группировка - по первым R левым сингулярным векторам строится матрица $\mathbf{U}$ с крышкой Восстановление - получившаяся на 3 шаге матрица $\mathbf{U}$ используется для решения уравнения, относительно $\mathbf{Z}$ (стрелка вверх означает удаление первой строки матрицы, стрелка вниз - последней). После этого находятся собственные числа полученной матрицы $\mathbf{Z}$, которые и считаются оценками экспонент, из которых можно получить оценки параметров.

SSA для выделения сигнала

$\mathsf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_N) = \mathsf{S} + \mathsf{R}$, L – длина окна,
$K = N - L + 1 \geqslant L$.

Параметры алгоритма: L, R: $R \leqslant L < N$
R — число компонент, относимых к сигналу

Схема алгоритма SSA для выделения сигнала

1. Вложение $\mathsf{X} \mapsto \mathbf{X} = [X_1 : X_2 : \dots : X_K] \in \mathbb{R}^{L \times K}$, $X_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L-1})^{\mathrm{T}}$
2. Разложение $\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{d} \sqrt{\lambda_j} U_j V_j^{\mathrm{T}}$, $d \leqslant L$
3. Группировка $\widetilde{\mathbf{S}} = \sum_{j=1}^{R} \sqrt{\lambda_j} U_j V_j^{\mathrm{T}}$, $R \leqslant d$
4. Восстановление Матрица $\widetilde{\mathbf{S}}$ усредняется вдоль побочных диагоналей: $\tilde{s}_k = \mathrm{mean}\left\{ \left(\widetilde{\mathbf{S}}_{ij} \right) \middle| i + j - 1 = k \right\}$

Результат алгоритма $\widetilde{\mathsf{S}} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_N)$ — оценка сигнала S

Теперь приведём алгоритм SSA для выделения сигнала.
Пусть дан временной ряд X длины N, и он является суммой некоторого (в этот раз непараметрического) сигнала S и шума R. Параметры алгоритма и первые два его шага совпадают с алгоритмом ESPRIT.
Группировка - по первым R слагаемым из сингулярного разложения строится новая матрица $\widetilde{\mathbf{S}}$. Восстановление - получившаяся на 3 шаге матрица $\widetilde{\mathbf{S}}$ усредняется вдоль побочных диагоналей, результаты усреднения считаются результатом алгоритма.

Тензорный переход

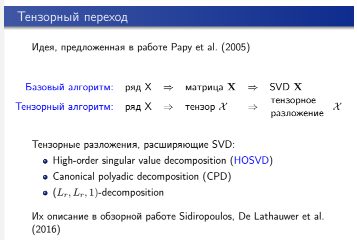
Идея, предложенная в работе Papy et al. (2005)

Базовый алгоритм:	ряд X	$\Rightarrow$	матрица $\mathbf{X}$	$\Rightarrow$	SVD $\mathbf{X}$	
Тензорный алгоритм:	ряд X	$\Rightarrow$	тензор $\mathcal{X}$	$\Rightarrow$	тензорное разложение	$\mathcal{X}$

Тензорные разложения, расширяющие SVD:

- High-order singular value decomposition (HOSVD)
- Canonical polyadic decomposition (CPD)
- $(L_r, L_r, 1)$-decomposition

Их описание в обзорной работе Sidiropoulos, De Lathauwer et al. (2016)



Как осуществить переход к тензорам? Если в SSA по ряду строится траекторная матрица, то в тензорном аналоге предлагается строить некоторый траекторный тензор, а сингулярное разложение предлагается заменить некоторым (аналогичным) тензорным разложением.
В работе [2] применяется разложение HOSVD (сингулярное разложение высшего порядка), однако существуют и другие тензорные разложения, которые расширяют сингулярное, CPD (каноническое полиадическое разложение) и $(L_r, L_r, 1)$-разложение.
CPD заключается в том, чтобы представить тензор в сумму как можно меньшего числа внешних произведений векторов, а $(L_r, L_r, 1)$-разложение заключается в том, чтобы представить тензор в виде суммы как можно меньшего числа слагаемых, котоыре выглядят, как внешне произведение матрицы ранга L_r на вектор.
Про HOSVD более подробно будет рассказано позже.
Описания этих и других тензорных разложений, а также примеры их применения в задачах обработки сигналов и машинного обучения, представлены в обзорной работе Sidiropoulus, De Lathauwer et al. от 2016.

Также выбор HOSVD можно обосновать тем, что оно среди всех разложений имеет наибольшее число свойств, схожих с обычным сингулярным разложением, и кроме того, другие разложения являются аппроксимациями или требуют предварительного знания некоторых параметров тензора.

Описание HOSVD

Пусть имеется тензор $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$, тогда HOSVD $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \cdots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1 i_2 \ldots i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \ldots \circ U_{i_M}^{(M)},$$

где

- $\mathbf{U}^{(n)} = \left[U_1^{(n)} : \ldots : U_{I_n}^{(n)} \right]$ — унитарные матрицы;
- Тензор $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ удовлетворяет свойствам
  1. полная ортогональность:
  $$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \qquad \alpha \neq \beta,$$
  2. упорядоченность:
  $$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geqslant \ldots \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|.$$

Любой комплекснозначный тензор $\mathcal{A}$ размерности $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$, может быть представлен в виде суммы тензоров ранга 1, то есть внешних произведений векторов, как показано на слайде. M называется количеством измерений тензора. Такое представление называется HOSVD тензора $\mathcal{A}$, векторы $U_i^{(n)}$ называют i-м сингулярным вектором тензора $\mathcal{A}$ по измерению n, нормы Фробениуса подтензора $\mathcal{Z}$ с фиксированным n-м индексом равным i называют i-м сингулярным значением тензора $\mathcal{A}$ по измерению n.

Свойство полной ортогональности является аналогом свойства диагональности матрицы сингулярных значений в SVD, а свойство упорядоченности собственных значений вдоль каждого измерения — аналог упорядоченности собственных значений.

Свойства HOSVD

Все свойства представлены в работе De Lathauwer et al. (2000)

- HOSVD — единственное M-ортогональное разложение.
- При $M = 2$ HOSVD совпадает с SVD.
- Пусть $\operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$ — размерность пространства векторов измерения n тензора. Если в HOSVD тензора $\mathcal{A}$ r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n = r_n}\| > 0$, то $r_n = \operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$.
-

$$\|\mathcal{A}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \ldots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2 = \|\mathcal{Z}\|^2$$

$$\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n = i}\|, \qquad R_n = \operatorname{rank}_n(\mathcal{A}).$$

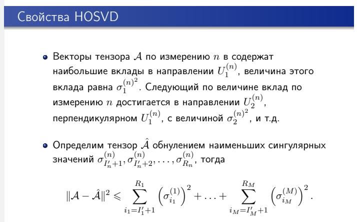
1. HOSVD является единственным M-ортогональным разложением тензора, и сингулярные значения и векторы определяются с точностью до унитарных преобразований.
2. Результат применения HOSVD к тензору с двумя измерениями, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, в точности до унитарных преобразований сингулярных векторов и матрицы сингулярных значений.
3. n-рангом тензора $\mathcal{A}$ называется размерность векторного пространства, порождённого векторами измерения n этого тензора. Обозначается $R_n = \operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$. Если в HOSVD тензора $\mathcal{A}$ r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n = r_n}\| > 0$, то $r_n = \operatorname{rank}_n(\mathcal{A})$; n-ранги являются характеристикой тензора, аналогичной матричным рангам. Однако в тензорном случае, n-ранги могут различаться, поэтому для каждого измерения определяется своя характеристика.
4. Квадрат нормы тензора совпадает с суммами квадратов сингулярных значений по каждому из измерений и совпадает с квадратом нормы тензора $\mathcal{Z}$ из разложения.

Свойства HOSVD

- Векторы тензора $\mathcal{A}$ по измерению n в содержат наибольшие вклады в направлении $U_1^{(n)}$, величина этого вклада равна $\sigma_1^{(n)^2}$. Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U_1^{(n)}$, с величиной $\sigma_2^{(n)^2}$, и т.д.

- Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ обнулением наименьших сингулярных значений $\sigma_{I_n'+1}^{(n)}, \sigma_{I_n'+2}^{(n)}, \ldots, \sigma_{R_n}^{(n)}$, тогда

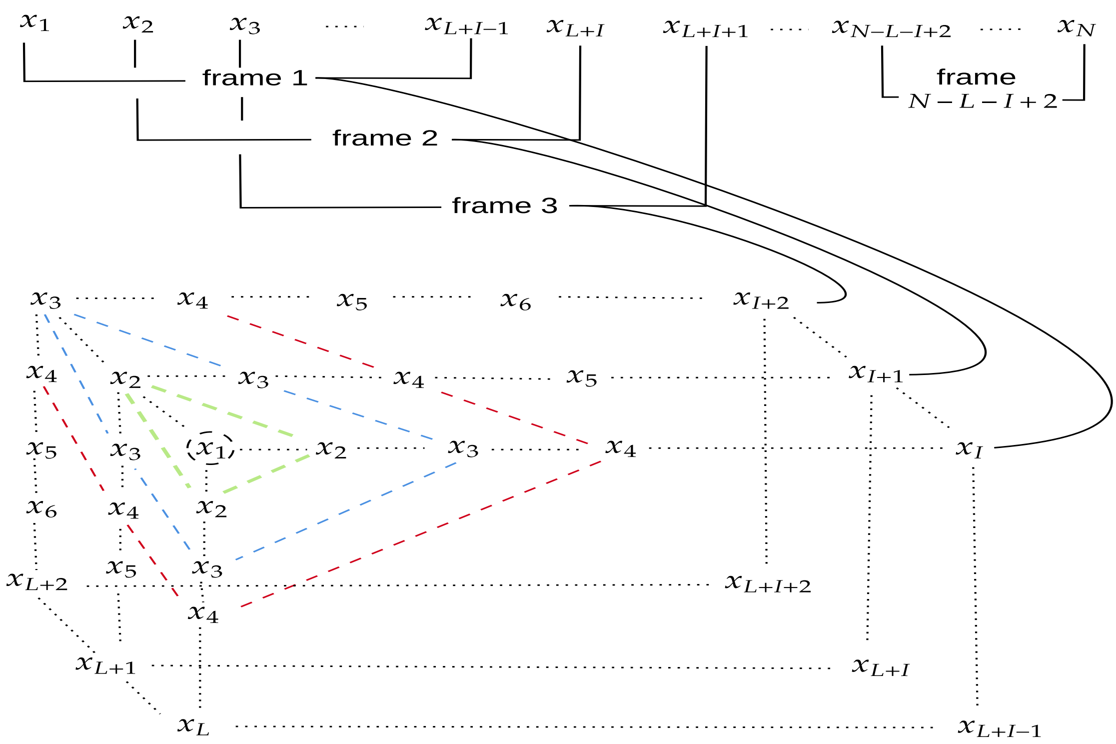
$$\|\mathcal{A} - \hat{\mathcal{A}}\|^2 \leqslant \sum_{i_1=I_1'+1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \ldots + \sum_{i_M=I_M'+1}^{R_M} \left(\sigma_{i_M}^{(M)}\right)^2.$$



1. Векторы тензора $\mathcal{A}$ по измерению n содержат наибольший вклад в направлении $U_1^{(n)}$, и вклад в этом направлении равен $\sigma_1^{(n)^2}$. Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U(n)_1$, с величиной $\sigma_2^{(n)^2}$, и так далее.
2. Пусть $R_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$. Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma_{I_n'+1}^{(n)}, \sigma_{I_n'+2}^{(n)}, \ldots, \sigma_{R_n}^{(n)}$ для заданных значений I_n', $n \in \overline{1:M}$, то есть заменяя нулями соответствующие части тензора $\mathcal{Z}$. Тогда квадрат нормы разности тензоров не превосходит суммы квадратов отброшенных сингулярных значений.

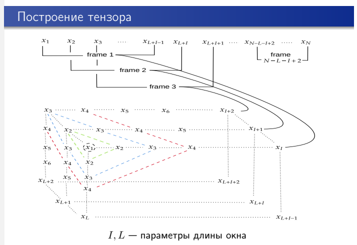
Эти свойства являются эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Однако для тензоров ситуация совершенно иная. Тензор, полученный усечением HOSVD в общем случае не является наилучшим приближением при заданных ограничениях на ранги измерений, но это приближение всё же можно считать достаточно точным.

Построение тензора



I, L — параметры длины окна

Tensor SSA
└HOSVD SSA: выделение сигнала
└Построение тензора



Теперь перейдём к описанию тензорных модификаций SSA, основные шаги которых были описаны в работе [2].

Аналогично построению траекторной матрицы в алгоритме SSA, траекторный тензор строится следующим образом: сначала выбираются параметры I и L, которые будем называть первой и второй длинами окна соответственно. Тогда k-й слой траекторного тензора вдоль 3-го измерения получается как траекторная матрица с длиной окна L, построенная по элементам ряда с k-го по $k+L+I-2$-й (визуализация представлена на слайде). При таком построении, получается, что на побочных диагоналях элементы совпадают (соединённые пунктирной линией одного цвета).

Траекторный тензор будем обозначать символом X-красивое.

High-Order SSA для выделения сигнала

- n-ранг тензора: размерность пространства, порождённого векторами вдоль n-измерения тензора
- В отличие от матричного случая, n-ранги тензора произвольной размерности могут в общем случае не совпадать

Основная идея алгоритма выделения сигнала — приблизить траекторный тензор тензором с фиксированными n-рангами, меньшими, чем у исходного.

High-Order SSA для выделения сигнала

- n-ранг тензора: размерность пространства, порождённого векторами вдоль n-измерения тензора
- В отличие от матричного случая, n-ранги тензора произвольной размерности могут в общем случае не совпадать

Основная идея алгоритма выделения сигнала — приблизить траекторный тензор тензором с фиксированными n-рангами, меньшими, чем у исходного.

Напомним понятие n-ранга тензора: это размерность пространства, порождённого векторами вдоль n-го измерения тензора. Также вспомним, что в отличие от матричного случая, n-ранги тензора произвольной размерности могут в общем случае не совпадать.

Основной идеей тензорной модификации алгоритма SSA для выделения сигнала является приближение траекторного тензора некоторым другим тензором с меньшими n-рангами.

HOSVD SSA: разложение и группировка

- Разложение: HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ имеет вид

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{N-I-L+2} \mathcal{Z}_{ilj} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}$$

- Группировка:

$$\widetilde{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{R} \sum_{l=1}^{R} \sum_{j=1}^{R} \mathcal{Z}_{ilj} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}$$

$R \leqslant \min(I, L, N-I-L+2)$ — параметр алгоритма

- Восстановление: усреднение тензора $\widetilde{\mathcal{X}}$ вдоль побочных плоскостей $\{i+l+j = \mathrm{const}\}$

HOSVD SSA: разложение и группировка
Разложение: HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ имеет вид
$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{N-I-L+2} \mathcal{Z}_{ilj} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}$
Группировка:
$\widetilde{\mathcal{X}} = \sum_{i=1}^{R} \sum_{l=1}^{R} \sum_{j=1}^{R} \mathcal{Z}_{ilj} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}$
$R \leqslant \min(I, L, N-I-L+2)$ — параметр алгоритма
Восстановление: усреднение тензора $\widetilde{\mathcal{X}}$ вдоль побочных плоскостей $\{i+l+j = \mathrm{const}\}$

Первая мысль — урезать тензор сингулярных значений в HOSVD траекторного тензора по каждому измерению. В силу свойств HOSVD, такое усечение не даёт оптимальное приближение тезнора, но всё же оно довольно точное.

На этапе разложения траекторный тензор предстваляется в виде тройной суммы одноранговых тензоров.

Этап группировки принимает вид обрезанной суммы, как представленно на слайде. У всех сумм один и тот же верхний предела в силу теоремы, которая будет сформулирована позже.

Процесс восстановления является обратным к этапу вложения и заключается в усреднении элементов полученного тензора вдоль побочных гиперплоскостей (на которых сумма индексов - константа).

Higher Order Orthogonal Iteration (HOOI)

Другой метод приближения произвольного тензора тензором заданных n-рангов — Higher Order Orthogonal Iteration (HOOI). Описание алгоритма HOOI и его свойства приведены в работе Sheehan et al. (2007) Higher Order Orthogonal Iteration of Tensors (HOOI) and its Relation to PCA and GLRAM.
При заданных $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ и $(R_1, R_2, \ldots, R_M)$ минимизируется норма Фробениуса

$$\|\mathcal{A} - \widetilde{\mathcal{A}}\|^2 \to \min,$$

где $\min$ по всем $\widetilde{\mathcal{A}} : \widetilde{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$, $\mathrm{rank}_n(\widetilde{\mathcal{A}}) = R_i$

Tensor SSA
└HOOI SSA

└Higher Order Orthogonal Iteration (HOOI)

Higher Order Orthogonal Iteration (HOOI)
Другой метод приближения произвольного тензора тензором заданных n-рангов — Higher Order Orthogonal Iteration (HOOI). Описание алгоритма HOOI и его свойства приведены в работе Sheehan et al. (2007) Higher Order Orthogonal Iteration of Tensors (HOOI) and its Relation to PCA and GLRAM.
При заданных $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ и $(R_1, R_2, \ldots, R_M)$ минимизируется норма Фробениуса
$$\|\mathcal{A} - \widetilde{\mathcal{A}}\|^2 \to \min,$$
где $\min$ по всем $\widetilde{\mathcal{A}} : \widetilde{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$, $\mathrm{rank}_n(\widetilde{\mathcal{A}}) = R_i$

Другая мысль — использовать метод ортогональных итераций высшего порядка HOOI, который по тензору и заданным n-рангам находит другой тензор этих n-рангов, наиболее точно приближающий исходный.
Описание алгоритма HOOI и его свойства приведены в работе Sheehan et al. от 2007 г.
При заданных $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ и $(R_1, R_2, \ldots, R_M)$ минимизируется норма Фробениуса

$$\|\mathcal{A} - \widetilde{\mathcal{A}}\|^2 \to \min,$$

где $\min$ берётся по всем $\widetilde{\mathcal{A}} : \widetilde{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$, $\mathrm{rank}_n(\widetilde{\mathcal{A}}) = R_i$

HOOI SSA: разложение и восстановление

- HOOI: Выбор ранга сигнала r и применение к траекторному тензору $\mathcal{X}$ HOOI с набором n-рангов (r, r, r). Результат — оптимальное приближение тензором $\widehat{\mathcal{X}}$ с n-рангами r
- Восстановление: усреднение тензора $\widehat{\mathcal{X}}$ аналогично восстановлению в варианте с усечением HOSVD

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд $\widehat{\mathsf{X}}$ — оценка сигнала S

HOOI SSA: разложение и восстановление

- HOOI: Выбор ранга сигнала r и применение к траекторному тензору $\mathcal{X}$ HOOI с набором n-рангов (r, r, r). Результат — оптимальное приближение тензором $\widehat{\mathcal{X}}$ с n-рангами r
- Восстановление: усреднение тензора $\widehat{\mathcal{X}}$ аналогично восстановлению в варианте с усечением HOSVD

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд $\widehat{\mathsf{X}}$ — оценка сигнала S

Алгоритм выделения сигнала из ряда с использованием HOOI будет выглядеть следующим образом: шаг вложения такой же, а вместо шага разложения к тензору применяется метод ортогональных итераций. Этап восстановления тот же, что и в предыдущем алгоритме, то есть усреднение по побочным гиперплоскостям.

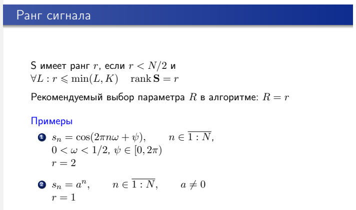
Ранг сигнала

S имеет ранг r, если $r < N/2$ и
$\forall L : r \leqslant \min(L, K) \quad \operatorname{rank} \mathbf{S} = r$

Рекомендуемый выбор параметра R в алгоритме: $R = r$

Примеры

1. $s_n = \cos(2\pi n\omega + \psi), \qquad n \in \overline{1:N},$
   $0 < \omega < 1/2$, $\psi \in [0, 2\pi)$
   $r = 2$
2. $s_n = a^n, \qquad n \in \overline{1:N}, \qquad a \neq 0$
   $r = 1$


Ранг сигнала
S имеет ранг r, если $r < N/2$ и
$\forall L : r \leqslant \min(L, K) \quad \operatorname{rank} \mathbf{S} = r$
Рекомендуемый выбор параметра R в алгоритме: $R = r$
Примеры
1. $s_n = \cos(2\pi n\omega + \psi), \qquad n \in \overline{1:N},$ $0 < \omega < 1/2$, $\psi \in [0, 2\pi)$ $r = 2$
2. $s_n = a^n, \qquad n \in \overline{1:N}, \qquad a \neq 0$ $r = 1$

Встаёт проблема выбора параметра R в обоих алгоритмах.
Важным понятием в теории SSA является понятие ранга ряда.
Говорят, что сигнал S имеет ранг r, если для любой длины окна L : $r \leqslant \min(L, K)$, ранг матрицы вложения $\mathbf{S}$, построенной по этой длине окна равен r.
Это понятие позволяет свести выбор параметра R из алгоритма к определению ранга сигнала, после чего R рекомендуется выбирать равным r.
Примеры:
Функция косинуса с частотой ω и фазой ψ при выполнении условий на частоту имеет ранг 2.
Показательная функция имеет ранг 1.

Ранг в HOSVD SSA

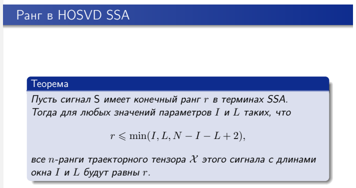
Теорема

Пусть сигнал S имеет конечный ранг r в терминах SSA. Тогда для любых значений параметров I и L таких, что

$$r \leqslant \min(I, L, N - I - L + 2),$$

все n-ранги траекторного тензора $\mathcal{X}$ этого сигнала с длинами окна I и L будут равны r.

Tensor SSA
└─Свойства HO-SSA в задаче выделения сигнала
└─Ранг в HOSVD SSA



Мной было получено утверждение, позволяющее перенести понятие ранга сигнала из теории SSA на тензорный вариант: при выполнении некоторых условий, все n-ранги траекторного тензора $\mathcal{X}$ будут равны рангу этого сигнала.

Таким образом, выбор R в тензорных алгоритмах аналогичен выбору R в стандартном алгоритме SSA.

Трудоёмкость алгоритмов HO-SSA

- HOSVD-SSA: вычисление HOSVD тензора размерности $I \times L \times J$ имеет трудоёмкость порядка
$$O(ILJ(\min(I, LJ) + \min(L, IJ) + \min(J, IL))).$$
Если требуется вычислить только усечение HOSVD с n-рангами (r_1, r_2, r_3), то трудоёмкость можно уменьшить до порядка
$$O(ILJ(r_1 + r_2 + r_3)).$$
- HOOI-SSA: HOOI — итеративный алгоритм. Трудоёмкость каждой итерации имеет порядок
$$O(r_1 r_2 r_3 (I + L + J)),$$
а скорость сходимости алгоритма линейная.

Рассмотрим трудоёмкость тензорных модификаций SSA. Так как шаг разложения является самым трудоёмким шагом в алгоритме HOSVD SSA, то для оценки трудоёмкости алгоритма достаточно оценить трудоёмкость сингулярного разложения траекторного тензора.
Из известных свойств HOSVD и асимптотической трудоёмкости матричного SVD асимптотическая сложность HOSVD траекторного тензора, и всего алгоритма, имеет вид
$$O(ILJ(\min(I, LJ) + \min(L, IJ) + \min(J, IL))).$$
Если требуется найти только первые r компонент SVD матрицы размерности $m \times n$, и r достаточно мало, то трудоёмкость можно уменьшить до $O(rmn)$. Тогда эту модификацию можно применить для нахождения усечения HOSVD n-рангами (r_1, r_2, r_3) и трудоёмкость составит
$$O(ILJ(r_1 + r_2 + r_3)).$$
Оценим трудоёмкость алгоритма HOOI SSA. Самым трудоёмким шагом в алгоритме HOOI SSA является применение к траекторному тензору алгоритма ортогональных итераций. Этот алгоритм является итерационным, и известно, что в тех же обозначениях каждая итерация имеет асимптотическую сложность
$$O(r_1 r_2 r_3 (I + L + J)),$$
причём скорость сходимости алгоритма линейная.

HOSVD SSA: разделение компонент сигнала

Пусть $\mathsf{S} = \sum_{k=1}^{m} \mathsf{S}_k$
Шаги вложения и разложения совпадают с алгоритмом HOSVD SSA для выделения сигнала.

- Группировка: разбиение множества индексов $\mathfrak{S} = \{1, 2\, \ldots, \min(I, L, J)\}$ по смыслу на непересекающиеся множества $\mathfrak{S}_k$, $k \in \overline{1:m}$ и построение по этому разбиению тензоров
$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{ilj} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$$
- Восстановление: получение рядов $\widetilde{\mathsf{S}}_k$ по тензорам $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $\{i + l + j = \mathrm{const}\}$

Результат алгоритма: $\widetilde{\mathsf{S}}_k$ — оценка S_k.

Теперь приведём описание алгоритма HOSVD SSA для решения задачи отделения компонент сигнала. Пусть сигнал S является суммой сигналов S_k. Шаги вложения и разложения аналогичны тем, что были в алгоритме HOSVD SSA для выделения сигнала, поэтому описание продолжим с шага группировки. На этом шаге множество индексов от одного до минимума по измерениям траекторного тензора разбивается пользователем на непересекающиеся множества $\mathfrak{S}_k$, и по каждому множеству строятся тензоры $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ образом, как показано на слайде. Следующий шаг: восстановление, по каждому тензору $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ восстанавливаются оценки рядов S_k путём усреднения этих тензоров вдоль побочных гиперплоскостей. Результатом алгоритма будет набор оценок сигналов, составляющих исходный сигнал.

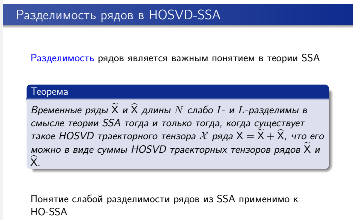
Разделимость рядов в HOSVD-SSA

Разделимость рядов является важным понятием в теории SSA

Теорема

Временные ряды $\widetilde{\mathsf{X}}$ и $\widehat{\mathsf{X}}$ длины N слабо I- и L-разделимы в смысле теории SSA тогда и только тогда, когда существует такое HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ ряда $\mathsf{X} = \widetilde{\mathsf{X}} + \widehat{\mathsf{X}}$, что его можно в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов $\widetilde{\mathsf{X}}$ и $\widehat{\mathsf{X}}$.

Понятие слабой разделимости рядов из SSA применимо к HO-SSA



Важную роль в теории SSA играет понятие разделимости. Мной было доказано следующее утверждение, позволяющее перенести понятие слабой разделимости из теории SSA на тензорный случай.

Временные ряды $\widetilde{\mathsf{X}}$ и $\widehat{\mathsf{X}}$ длины N слабо I- и L-разделимы в смысле теории SSA тогда и только тогда, когда существует такое HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ ряда $\mathsf{X} = \widetilde{\mathsf{X}} + \widehat{\mathsf{X}}$, что его можно в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов $\widetilde{\mathsf{X}}$ и $\widehat{\mathsf{X}}$.

MSSA

Многомерный временной ряд:

$$\mathsf{X} = (\mathsf{X}_1 : \mathsf{X}_2 : \ldots : \mathsf{X}_P), \qquad \mathsf{X}_p = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_N^{(p)}\right)^{\mathrm{T}}$$

Траекторная матрица этого ряда:

$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \ldots : \mathbf{X}_P]$,

$\mathbf{X}_p$ — траекторная матрица X_p

Дальнейшие шаги алгоритма MSSA (разложение траекторной матрицы и восстановление сигнала) аналогичны стандартному SSA.

В случаях, когда сигналы S_p имеют похожую структуру, использование MSSA даёт лучшие результаты, чем применение SSA к каждому ряду отдельно.

MSSA

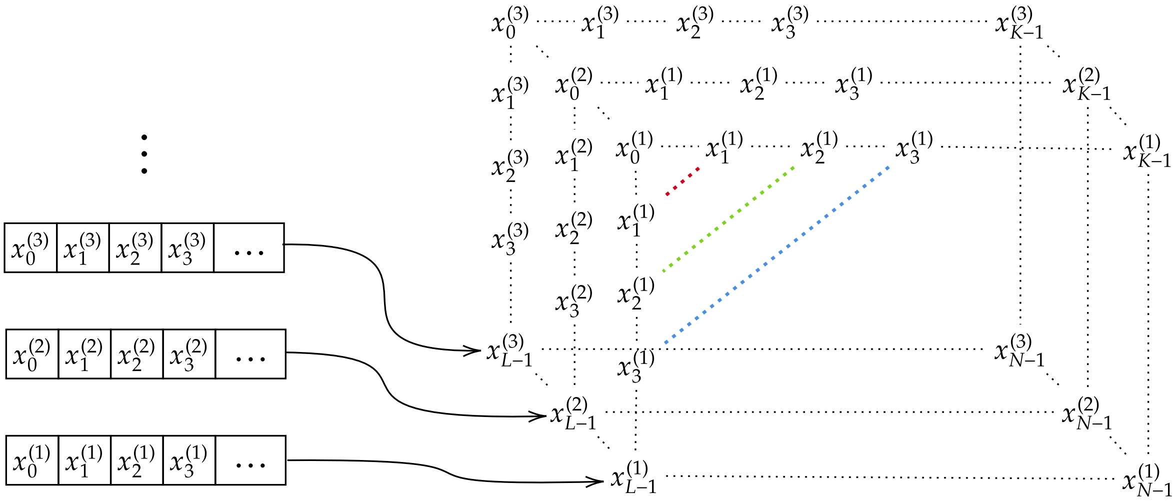
Многомерный временной ряд:
$\mathsf{X} = (\mathsf{X}_1 : \mathsf{X}_2 : \ldots : \mathsf{X}_P), \quad \mathsf{X}_p = \left(x_1^{(p)}, x_2^{(p)}, \ldots, x_N^{(p)}\right)^{\mathrm{T}}$
Траекторная матрица этого ряда:
$\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \ldots : \mathbf{X}_P]$,
$\mathbf{X}_p$ — траекторная матрица X_p
Дальнейшие шаги алгоритма MSSA (разложение траекторной матрицы и восстановление сигнала) аналогичны стандартному SSA.
В случаях, когда сигналы S_p имеют похожую структуру, использование MSSA даёт лучшие результаты, чем применение SSA к каждому ряду отдельно.

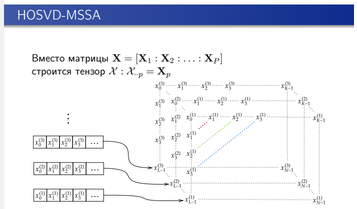
Теперь рассмотим расширение метода SSA для многомерных временных рядов: MSSA, причём будем рассматривать только задачу выделения сигнала. Под многомерным временным рядом будем понимать набор временных рядов одной длины. Траекторная матрица многомерного ряда с длиной окна L строится стыковкой траекторных тензоров одномерных рядов с той же длиной окна по столбцам. Дальнейшие шаги MSSA (а именно: разложение траекторной матрицы и восстановление сигнала) аналогичны стандартному SSA для одномерных рядов.

Стоит заметить, что из теории SSA известно, что в случаях, когда сигналы S_p имеют похожую в некотором смысле структуру, использование MSSA даёт лучшие результаты, чем применение SSA к каждому ряду отдельно.

HOSVD-MSSA

Вместо матрицы $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1 : \mathbf{X}_2 : \ldots : \mathbf{X}_P]$
строится тензор $\mathcal{X} : \mathcal{X}_{\cdot\cdot p} = \mathbf{X}_p$





В тензорной модификации вместо склеивания траекторных матриц по столбцам траекторный тензор строится склеиванием траекторных матриц рядов вдоль третьего измерения («накладыванием матриц в стопку»). Шаг разложения тот же, что и в алгоритме HOSVD SSA. Этап восстановления обратен этапу вложения.

Ранг сигнала в HOSVD-MSSA

Теорема

Многомерный временной ряд

$$\left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \ldots, x_N^{(p)}\right), \quad p = 1, 2, \ldots, P$$

имеет ранг r в терминах MSSA тогда и только тогда, когда для траекторного тензора $\mathcal{X}$, построенного по любой длине окна $L < N$ такой, что $\min(L, K) \geqslant r$ выполняется $\operatorname{rank}_1(\mathcal{X}) = \operatorname{rank}_2(\mathcal{X}) = r$.
Если к тому же $N > P$, то 3-ранг $\mathcal{X}$ будет равен рангу матрицы, в строках которой содержатся одномерные временные ряды, составляющие заданный многомерный ряд.

Tensor SSA
└Свойства HOSVD-MSSA для выделения сигнала
└Ранг сигнала в HOSVD-MSSA

Ранг сигнала в HOSVD-MSSA
Теорема
Многомерный временной ряд
$\left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \ldots, x_N^{(p)}\right), \quad p = 1, 2, \ldots, P$
имеет ранг r в терминах MSSA тогда и только тогда, когда для траекторного тензора $\mathcal{X}$, построенного по любой длине окна $L < N$ такой, что $\min(L, K) \geqslant r$ выполняется $\operatorname{rank}_1(\mathcal{X}) = \operatorname{rank}_2(\mathcal{X}) = r$.
Если к тому же $N > P$, то 3-ранг $\mathcal{X}$ будет равен рангу матрицы, в строках которой содержатся одномерные временные ряды, составляющие заданный многомерный ряд.

Мной было получено утверждение, позволяющее перенести понятие ранга ряда на тензорный вариант MSSA.
Многомерный временной ряд

$$\left(x_0^{(p)}, x_1^{(p)}, \ldots, x_N^{(p)}\right), \quad p = 1, 2, \ldots, P$$

имеет ранг r в терминах MSSA тогда и только тогда, когда для траекторного тензора $\mathcal{X}$, построенного по любой длине окна $L < N$ такой, что $\min(L, K) \geqslant r$ выполняется $\operatorname{rank}_1(\mathcal{X}) = \operatorname{rank}_2(\mathcal{X}) = r$.
Если к тому же $N > P$, то 3-ранг $\mathcal{X}$ будет равен рангу матрицы, в строках которой содержатся одномерные временные ряды, составляющие заданный многомерный ряд.

Таким образом, исходя из этого утверждения, можно вывести рекомендации по выбору параметров R_i.

Ранг сигнала в HOSVD-MSSA

- 1- и 2-ранги траекторного тензора $\mathcal{X}$ сигнала S совпадают с рангом этого сигнала в терминах MSSA
- 3-ранг имеет смысл степени структурного различия одномерных сигналов, составляющих данный многомерный

На этапе группировки рекомендуется брать $R_1 = R_2 = r$ и $R_3 = r_3$, где r — MSSA-ранг сигнала, а r_3 — ранг матрицы, составленной из S_p

Примеры $s_n^{(p)} = a_p \cos(2\pi n \omega_p + \psi_p)$, $p \in \{1, 2\}$, $n \in \overline{1:N}$, $a_p \neq 0$, $0 < \omega_p < 1/2$, $\psi_p \in [0, 2\pi)$

1. $\psi_1 = \psi_2,\ \omega_1 = \omega_2 \implies r = r_1 = r_2 = 2,\ r_3 = 1$
2. $\psi_1 \neq \psi_2,\ \omega_1 = \omega_2 \implies r = r_1 = r_2 = 2,\ r_3 = 2$
3. $\omega_1 \neq \omega_2 \implies r = r_1 = r_2 = 4,\ r_3 = 2$

Ранг сигнала в HOSVD-MSSA
1- и 2-ранги траекторного тензора $\mathcal{X}$ сигнала S совпадают с рангом этого сигнала в терминах MSSA
3-ранг имеет смысл степени структурного различия одномерных сигналов, составляющих данный многомерный
На этапе группировки рекомендуется брать $R_1 = R_2 = r$ и $R_3 = r_3$, где r — MSSA-ранг сигнала, а r_3 — ранг матрицы, составленной из S_p
Примеры $s_n^{(p)} = a_p \cos(2\pi n \omega_p + \psi_p)$, $p \in \{1, 2\}$, $n \in \overline{1:N}$, $a_p \neq 0$, $0 < \omega_p < 1/2$, $\psi_p \in [0, 2\pi)$
$\psi_1 = \psi_2,\ \omega_1 = \omega_2 \implies r = r_1 = r_2 = 2,\ r_3 = 1$
$\psi_1 \neq \psi_2,\ \omega_1 = \omega_2 \implies r = r_1 = r_2 = 2,\ r_3 = 2$
$\omega_1 \neq \omega_2 \implies r = r_1 = r_2 = 4,\ r_3 = 2$

R_1 и R_2 рекомендуется выбирать равными рангу сигнала в терминах MSSA, а R_3 равным рангу матрицы, составленной из одномерных сигналов, составляющих данный многомерный сигнал.
Этап группировки в алгоритме HO-MSSA рекомендуется проводить в соответствии с выбором параметров R и $R3$.
В качестве примера рассмотрим двумерный ряд, порождённый двумя косинусами.
Если сигналы отличаются только домножением на константу, то ранг сигнала в MSSA и его тензорном варианте равны 2, а ранг тензора вдоль третьего измерения равен 1.
Если сигналы отличаются на сдвиг по фазе, то ранг сигнала всё ещё равен 2, но ранг тензора вдоль 3-го измерения уже будет 2.

Если у синусов разные частоты, то ранг сигнала уже будет равен 4, а ранг r_3 – 2.

HO-MSSA: разделение компонент сигнала

Пусть $\mathsf{S} = \sum_{m=1}^{M} \mathsf{S}_m$

Шаги вложения и разложения совпадают с алгоритмом HO-MSSA для выделения сигнала

- Группировка разбиение множества индексов $\mathfrak{S} = \{1, 2, \ldots, \min(L, K)\}$ и $\mathfrak{P} = \{1, 2, \ldots, P\}$ по смыслу на подмножества $\mathfrak{S}_m$ и $\mathfrak{P}_m$, $m \in \overline{1:M}$, и построение по этому разбиению тензоров

$$\mathcal{X}_m = \sum_{l \in \mathfrak{S}_m} \sum_{k \in \mathfrak{S}_m} \sum_{p \in \mathfrak{P}_m} \mathcal{Z}_{lkp} \mathbf{U}_l^{(1)} \circ \mathbf{U}_k^{(2)} \circ \mathbf{U}_p^{(3)}$$

- Восстановление получение рядов $\widetilde{\mathsf{S}}_m$ по тензорам $\mathcal{X}_m$ путём усреднения их слоёв вдоль побочных диагоналей

Результат алгоритма: $\widetilde{\mathsf{S}}_m$ — оценка S_m

Наконец, приведём описание алгоритма HO-MSSA для отделения компонент сигнала.

Шаги вложения и разложения совпадают с соответствующими шагами в алгоритме HO-MSSA для выделения сигнала.

На этапе группировки строятся разбиения множества индексов $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{P}$ на подмножества $\mathfrak{S}_m$ и $\mathfrak{P}_m$, и по каждой паре этих множеств строятся тензоры $\mathcal{X}_m$

$$\mathcal{X}_m = \sum_{l \in \mathfrak{S}_m} \sum_{k \in \mathfrak{S}_m} \sum_{p \in \mathfrak{P}_m} \mathcal{Z}_{lkp} \mathbf{U}_l^{(1)} \circ \mathbf{U}_k^{(2)} \circ \mathbf{U}_p^{(3)}$$

Этап восстановления заключается в получении многомерных рядов $\widetilde{\mathsf{S}}_m$ по тензорам $\mathcal{X}_m$ аналогично шагу восстановления из алгоритма для выделения сигнала.

HO-MSSA: разделение компонент сигнала

$\widehat{\mathsf{X}}$, $\widetilde{\mathsf{X}}$, X — многомерные временные ряды, $\mathsf{X} = \widehat{\mathsf{X}} + \widetilde{\mathsf{X}}$
$\widehat{\mathcal{X}}$, $\widetilde{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X}$ — траекторные тензоры рядов $\widehat{\mathsf{X}}$, $\widetilde{\mathsf{X}}$, X с длиной окна L
$\Lambda_I(\mathsf{X}) = \operatorname{span}\left\{(x_i^{(p)}, x_{i+1}^{(p)}, \ldots, x_{i+I-1}^{(p)})\right\}$

Теорема

Такие HOSVD тензоров $\widehat{\mathsf{X}}$ и $\widetilde{\mathsf{X}}$, что их сумма является HOSVD тензора $\mathcal{X}$ существуют тогда и только тогда, когда ортогональны пары пространств:
$\Lambda_L(\widehat{\mathsf{X}})$ *с* $\Lambda_L(\widetilde{\mathsf{X}})$ *и* $\Lambda_K(\widehat{\mathsf{X}})$ *с* $\Lambda_K(\widetilde{\mathsf{X}})$

Этот критерий разделимости более строгий, чем в алгоритме MSSA

Этот критерий позволяет вывести рекомендации по выбору параметров L, $\mathfrak{S}_m$, $\mathfrak{P}_m$

HO-MSSA: разделение компонент сигнала
$\widehat{\mathsf{X}}$, $\widetilde{\mathsf{X}}$, X — многомерные временные ряды, $\mathsf{X} = \widehat{\mathsf{X}} + \widetilde{\mathsf{X}}$
$\widehat{\mathcal{X}}$, $\widetilde{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X}$ — траекторные тензоры рядов $\widehat{\mathsf{X}}$, $\widetilde{\mathsf{X}}$, X с длиной окна L
$\Lambda_I(\mathsf{X}) = \operatorname{span}\left\{(x_i^{(p)}, x_{i+1}^{(p)}, \ldots, x_{i+I-1}^{(p)})\right\}$
Теорема
Такие HOSVD тензоров $\widehat{\mathsf{X}}$ и $\widetilde{\mathsf{X}}$, что их сумма является HOSVD тензора $\mathcal{X}$ существуют тогда и только тогда, когда ортогональны пары пространств:
$\Lambda_L(\widehat{\mathsf{X}})$ с $\Lambda_L(\widetilde{\mathsf{X}})$ и $\Lambda_K(\widehat{\mathsf{X}})$ с $\Lambda_K(\widetilde{\mathsf{X}})$
Этот критерий разделимости более строгий, чем в алгоритме MSSA
Этот критерий позволяет вывести рекомендации по выбору параметров L, $\mathfrak{S}_m$, $\mathfrak{P}_m$

Мной было получено утверждение, позволяющее выводить рекомендации по выбору параметров L, $\mathfrak{S}_m$ и $\mathfrak{P}_m$ в алгоритме HO-MSSA для разделения компонент.
Пусть $\widehat{\mathsf{X}}$, $\widetilde{\mathsf{X}}$, X — многомерные временные ряды ($\mathsf{X} = \widehat{\mathsf{X}} + \widetilde{\mathsf{X}}$), $\widehat{\mathcal{X}}$, $\widetilde{\mathcal{X}}$, $\mathcal{X}$ — траекторные тензоры рядов $\widehat{\mathsf{X}}$, $\widetilde{\mathsf{X}}$, X соответственно с длиной окна L. Обозначим $\Lambda_I(\mathsf{X}) = \operatorname{span}\left\{(x_i^{(p)}, x_{i+1}^{(p)}, \ldots, x_{i+I-1}^{(p)})\right\}$.

Теорема

Такие HOSVD тензоров $\widehat{\mathsf{X}}$ и $\widetilde{\mathsf{X}}$, что их сумма является HOSVD тензора $\mathcal{X}$ существуют тогда и только тогда, когда ортогональны пары пространств:
$\Lambda_L(\widehat{\mathsf{X}})$ *с* $\Lambda_L(\widetilde{\mathsf{X}})$ *и* $\Lambda_K(\widehat{\mathsf{X}})$ *с* $\Lambda_K(\widetilde{\mathsf{X}})$

Стоит заметить, что этот критерий разделимости более строгий, чем в алгоритме MSSA.

Численные сравнения: выделение сигнала

$$\mathsf{X} = (\mathsf{X}_1 : \ldots : \mathsf{X}_P)\,,$$
$$\mathsf{X}_p = \left(s_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, \ldots, s_N^{(p)} + \varepsilon_N^{(p)}\right),$$
$$s_n^{(p)} = a_p \cos(2\pi n \omega_p + \psi_p),$$

где $n \in \overline{1:71}$, $p \in \overline{1:5}$, $\varepsilon_n^{(p)}$ — белый гауссовский шум с дисперсией 25, $s_n^{(p)}$ — элементы искомого сигнала.

Оценка точности — RMSE по 500 реализациям шума.

Численные сравнения: выделение сигнала

$$\mathsf{X} = (\mathsf{X}_1 : \ldots : \mathsf{X}_P)\,,$$
$$\mathsf{X}_p = \left(s_1^{(p)} + \varepsilon_1^{(p)}, \ldots, s_N^{(p)} + \varepsilon_N^{(p)}\right),$$
$$s_n^{(p)} = a_p \cos(2\pi n \omega_p + \psi_p),$$

где $n \in \overline{1:71}$, $p \in \overline{1:5}$, $\varepsilon_n^{(p)}$ — белый гауссовский шум с дисперсией 25, $s_n^{(p)}$ — элементы искомого сигнала.

Оценка точности — RMSE по 500 реализациям шума.

Было проведено два набора численных сравнений.

Первый набор численных сравнений исследовал зависимость точности выделения сигнала в многомерных сигналах тензорных модификаций и известных методов семейства SSA. Рассматриваемый сигнал имеет вид экспоненциально-модулированной гармоники, шум – белый гауссовский со стандартным отклонением 5. Оценка точности производилась по RMSE по 500 реализациям шума. Все методы сравнивались на одних и тех же реализациях шума.

Было рассмотрено несколько вариантов значения P, приведём наиболее показательный случай, когда P=5.

Численные сравнения: ранги сигналов

Параметры	(HOOI) SSA	(HOSVD) MSSA	r_3	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = 1/12,\ \psi_p = 0$	2	2	1	2
$a_1 = a_4 = 30$ $a_2 = a_5 = 20,\ a_3 = 25$ $\omega_p = 1/12,\ \psi_p = 0$	2	2	1	6
$a_p = 30,\ \omega_p = 1/12$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$	2	2	2	2
$a_p = 30,\ \psi_p = 2(p-1)\pi/3$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1/12$ $\omega_4 = \omega_5 = 1/8$	2	4	4	10

Для начала рассмотрим ранги сигналов для каждого метода при различных наборах параметров. Меньше всего ранги во всех методах в случае, когда сигналы не отличаются между собой. Когда сигналы отличаются только на амплитуду вырастает только 2D-SSA ранг. Когда амплитуды и частоты сигналов равны, а частоты меняются линейно по p возрастает ранг третьего измерения в HOSVD MSSA. И наконец, когда амплитуды равны, фаза меняется линейно, а частоты разные, сильно возрастают ранги как HOSVD MSSA, так и 2D-SSA.

Численные сравнения: RMSE оценок сигналов

Параметры	SSA	HOOI-SSA	MSSA	HOSVD-MSSA	2D-SSA
$a_p = 30$ $\omega_p = 1/12,\ \psi_p = 0$	1.34	1.41	0.95	0.75	**0.73**
$a_1 = a_4 = 30$ $a_2 = a_5 = 20,\ a_3 = 25$ $\omega_p = 1/12,\ \psi_p = 0$	1.38	1.41	1.07	**0.86**	1.45
$a_p = 30,\ \omega_p = 1/12$ $\psi_p = 2(p-1)\pi/3$	1.38	1.41	1.07	1.05	**0.84**
$a_p = 30,\ \psi_p = 2(p-1)\pi/3$ $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1/12$ $\omega_4 = \omega_5 = 1/8$	**1.38**	1.41	1.50	1.49	1.78

Теперь рассмотрим точность выделения сигнала каждым методом. Различия между всеми значениями в каждой строке значимы с уровнем значимости 0.05. Видно, что метод HOSVD MSSA работает лучше остальных методов в случае, когда сигналы отличаются только амплитудой, причём он всегда даёт более точные результаты, чем стандартный MSSA. В случае же когда сигналы отличаются и по фазе, и по частоте, самым точным оказывается применение SSA по отдельности к каждому ряду. HO-SSA во всех сравнениях проигрывает стандартному SSA.

Численные сравнения: разделимость многомерных рядов

$$x_n^{(p)} = \hat{s}_n^{(p)} + \tilde{s}_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)}$$

$n \in \overline{1:44}$, $p \in \overline{1:12}$

Рассматриваемые варианты рядов:

1. $\hat{s}_n^{(p)} = 2\cos(2\pi n/5), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = \cos(2\pi n/3)$
2. $\hat{s}_n^{(p)} = 2c_1^{(p)}\cos(2\pi n/5), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)}\cos(2\pi n/3)$
3. $\hat{s}_n^{(p)} = 2c_1^{(p)}\cos(2\pi n/5 + p\pi/6),$
   $\tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)}\cos(2\pi n/3 + p\pi/9)$
4. $\hat{s}_n^{(p)} = 2c_1^{(p)}\cos(2\pi n/5 + \varphi_1^{(p)}),$
   $\tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)}\cos(2\pi n/3 + \varphi_2^{(p)})$

Численные сравнения: разделимость многомерных рядов

$$x_n^{(p)} = \hat{s}_n^{(p)} + \tilde{s}_n^{(p)} + \varepsilon_n^{(p)}$$

$n \in \overline{1:44}$, $p \in \overline{1:12}$

Рассматриваемые варианты рядов:

1. $\hat{s}_n^{(p)} = 2\cos(2\pi n/5), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = \cos(2\pi n/3)$
2. $\hat{s}_n^{(p)} = 2c_1^{(p)}\cos(2\pi n/5), \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)}\cos(2\pi n/3)$
3. $\hat{s}_n^{(p)} = 2c_1^{(p)}\cos(2\pi n/5 + p\pi/6),$ $\tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)}\cos(2\pi n/3 + p\pi/9)$
4. $\hat{s}_n^{(p)} = 2c_1^{(p)}\cos(2\pi n/5 + \varphi_1^{(p)}),$ $\tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)}\cos(2\pi n/3 + \varphi_2^{(p)})$

Второй набор численных сравнений исследовал точность отделения компонент в многомерных рядах методом HO-MSSA. Все ряды имели вид суммы двух сигналов $\hat{s}_n^{(p)}$ и $\tilde{s}_n^{(p)}$ и белого гауссовского шума со стандартным отклонением 0.1.
Были рассмотрены следующие варианты пар сигналов:

1. Оба сигнала полностью совпадали во всех каналах
2. Сигналы отличались по каналам только амплитудой (далее все сигналы будут отличатся амплитудой по каналам, кроме случая 6)
3. Линейно меняющаяся с номером канала фаза
4. У сигналов фазы отличаются во всех каналах случайным образом

Численные сравнения: разделимость многомерных рядов

5. $\hat{s}_n^{(p)} = 3c_1^{(p)}, \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)} \cos(2\pi n/3)$
6. $\hat{s}_n^{(p)} = 2\cos(2\pi n/5),$
   $$\tilde{s}_n^{(p)} = \begin{cases} \cos(2\pi n/3), & 1 \leqslant p \leqslant 10, \\ 0.4\cos(2\pi n/6), & 11 \leqslant p \leqslant 12 \end{cases}$$
   $n \in \overline{1:59}$
7. $\hat{s}_n^{(p)} = 2\cos(2\pi n/5)\cos(2\pi p/3),$
   $\tilde{s}_n^{(p)} = 0.5\cos(2\pi n/3)\cos(2\pi p/6)$

$\varepsilon_n^{(p)}$ — белый гауссовский шум со стандартным отклонением 0.1
Оценка точности — RMSE по 1000 реализациям шума.

Численные сравнения: разделимость многомерных рядов
$\hat{s}_n^{(p)} = 3c_1^{(p)}, \quad \tilde{s}_n^{(p)} = c_2^{(p)} \cos(2\pi n/3)$
$\hat{s}_n^{(p)} = 2\cos(2\pi n/5),$ $\tilde{s}_n^{(p)} = \begin{cases} \cos(2\pi n/3), & 1 \leqslant p \leqslant 10, \\ 0.4\cos(2\pi n/6), & 11 \leqslant p \leqslant 12 \end{cases}$ $n \in \overline{1:59}$
$\hat{s}_n^{(p)} = 2\cos(2\pi n/5)\cos(2\pi p/3),$ $\tilde{s}_n^{(p)} = 0.5\cos(2\pi n/3)\cos(2\pi p/6)$
$\varepsilon_n^{(p)}$ — белый гауссовский шум со стандартным отклонением 0.1
Оценка точности — RMSE по 1000 реализациям шума.

5. Один сигнал — это константа
6. Первый сигнал имел один период по всем каналам, а период второго сигнала в последних двух каналах отличается от периода в остальных каналах
7. Амплитуды сигналов менялись по каналам с периодичностью 6

Использовался белый гауссовский шум со стандартным отклонением 0.1, Оценка точности производилась с помощью RMSE по 1000 реализаций шума. Все методы сравнивались на одних и тех же реализациях шума при оптимальных параметрах для каждого метода.

Численные сравнения: RMSE оценок компонент сигнала

Вид сигнала	MSSA	HOSVD-MSSA	2D-SSA
1	0.026	0.019	**0.014**
	0.025	0.016	**0.014**
2	0.029	**0.019**	0.086
	0.029	**0.019**	0.083
3	**0.026**	**0.025**	0.117
	0.025	**0.025**	0.114
4	**0.026**	**0.025**	0.034
	0.025	**0.025**	0.033
5	**0.017**	**0.017**	0.023
	0.025	**0.019**	0.033
6	0.024	0.018	**0.012**
	0.024	**0.018**	0.031
	0.024	**0.014**	0.026
7	0.031	**0.023**	0.025
	0.030	**0.022**	0.024

На слайде приведены значения RMSE оценки компонент сигналов для каждого случая для методов MSSA, HO-MSSA и 2D-SSA. Результаты сравнения точности разделимости аналогичны резульататм предыдущих сравнений: HO-MSSA разделяет компоненты не менее точно, чем остальные методы во всех случаях, кроме случаев равных амплитуд и различных частот, где метод 2D-SSA разделяет одну компоненту точнее.

Выводы

- HO-SSA и HOSVD-MSSA являются прямыми обобщениями SSA и MSSA, однако устроены существенно сложнее и имеют бо́льшую трудоёмкость
- Обе модификации усложняют алгоритм необходимостью подбора дополнительного параметра
- В рассмотренных примерах HOSVD-SSA выделил сигнал и разделил компоненты менее точно, чем SSA
- В рассмотренных примерах HOSVD-MSSA выделил сигнал и разделил компоненты точнее, чем MSSA

Выводы

- HO-SSA и HOSVD-MSSA являются прямыми обобщениями SSA и MSSA, однако устроены существенно сложнее и имеют бо́льшую трудоёмкость
- Обе модификации усложняют алгоритм необходимостью подбора дополнительного параметра
- В рассмотренных примерах HOSVD-SSA выделил сигнал и разделил компоненты менее точно, чем SSA
- В рассмотренных примерах HOSVD-MSSA выделил сигнал и разделил компоненты точнее, чем MSSA

Можно подвести следующие итоги:

- HO-SSA и HOSVD-MSSA являются прямыми обобщениями SSA и MSSA, однако устроены существенно сложнее и имеют бо́льшую трудоёмкость
- Обе модификации усложняют алгоритм необходимостью подбора дополнительного параметра
- В рассмотренных примерах HOSVD-SSA выделил сигнал и разделил компоненты менее точно, чем SSA
- В рассмотренных примерах HOSVD-MSSA выделил сигнал и разделил компоненты точнее, чем MSSA

Остаётся для исследования

- Возможность применения других тензорных разложений
- Нахождение семейства сигналов, для которых HOSVD-MSSA работает существенно точнее, чем MSSA и 2D-SSA
- Формулировка понятия сильной разделимости для тензорных алгоритмов по аналогии с теорией SSA

Остаётся для исследования

- Возможность применения других тензорных разложений
- Нахождение семейства сигналов, для которых HOSVD-MSSA работает существенно точнее, чем MSSA и 2D-SSA
- Формулировка понятия сильной разделимости для тензорных алгоритмов по аналогии с теорией SSA

В дальнейших планах:

- Возможность применения других тензорных разложений
- Нахождение семейства сигналов, для которых HOSVD-MSSA работает существенно точнее, чем MSSA и 2D-SSA
- Формулировка понятия сильной разделимости для тензорных алгоритмов по аналогии с теорией SSA

Список литературы

- Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techiques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
- Papy J. M., De Lathauwer L., Van Hu el S. Exponential data tting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — P. 809–826.
- De Lathauwer Lieven. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank-$(L_r, L_r, 1)$ Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2011. — P. 1451–1474.
- De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — P. 1253–1278.

Список литературы

Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techiques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
Papy J. M., De Lathauwer L., Van Hu el S. Exponential data tting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — P. 809–826.
De Lathauwer Lieven. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank-$(L_r, L_r, 1)$ Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2011. — P. 1451–1474.
De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — P. 1253–1278.

На данном слайде представлен список основных источников, используемых в моей работе.