Тензорный анализ сингулярного спектра

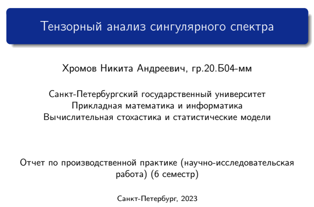
Хромов Никита Андреевич, гр.20.Б04-мм

Санкт-Петербургский государственный университет
Прикладная математика и информатика
Вычислительная стохастика и статистические модели

Отчет по производственной практике (научно-исследовательская работа) (6 семестр)

Санкт-Петербург, 2023

Tensor SSA



Научный руководитель к.ф.-м.н., доцент Голяндина Н.Э., кафедра статистического моделирования

Введение

Временной ряд длины N: $\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$.
$\mathsf{X} = \mathsf{T} + \mathsf{P} + \mathsf{R}$.

Возможные задачи:

1. Выделение сигнала из ряда: нахождение $\mathsf{T} + \mathsf{P}$;
2. Отделение компонент сигнала: нахождение T и P.

Одним из методов решения этих задач является метод Singular Spectrum Analysis (SSA) Golyandina et al. (2001), Analysis of time series structure: SSA and related techiques.

Введение

Временной ряд длины N: $\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$.
$\mathsf{X} = \mathsf{T} + \mathsf{P} + \mathsf{R}$.

Возможные задачи:

1. Выделение сигнала из ряда: нахождение $\mathsf{T} + \mathsf{P}$;
2. Отделение компонент сигнала: нахождение T и P.

Одним из методов решения этих задач является метод Singular Spectrum Analysis (SSA) Golyandina et al. (2001), Analysis of time series structure: SSA and related techiques.

Временным рядом длины N называется последовательность N чисел. В общем случае, временной ряд является суммой трёх компонент: тренда T, сезонности P и шума R.
Можно рассматривать задачи анализа временного ряда:

1. Выделение сигнала $\mathsf{T} + \mathsf{P}$ из ряда;
2. Отделение компонент сигнала T и P.

Одним из методов решения этих задач является метод Singular Spectrum Analysis (SSA).

Введение

SSA: ряд X $\Rightarrow$ матрица $\mathbf{X}$ $\Rightarrow$ SVD $\mathbf{X}$,

Tensor SSA: ряд X $\Rightarrow$ тензор $\mathcal{X}$ $\Rightarrow$ тензорное разложение $\mathbf{X}$.

- Примеры тензорных разложений:
  1. High-order singular value decomposition (HOSVD);
  2. Canonical polyadic decomposition (CPD).
- Для выделения сигнала и оценки его параметров в работе Papy et al. (2005) применялось HOSVD, и в работе De Lathauwer et al. (2011) применялось CPD.

Задача: изучить различные варианты тензорных разложений, применить их в задаче анализа временного ряда и сравнить результаты с SSA.
Из тензорных разложений первым было выбрано HOSVD, так как оно имеет наибольшее сходство с SVD.

Tensor SSA
└Введение

└Введение

Введение

SSA: ряд X $\Rightarrow$ матрица $\mathbf{X}$ $\Rightarrow$ SVD $\mathbf{X}$,

Tensor SSA: ряд X $\Rightarrow$ тензор $\mathcal{X}$ $\Rightarrow$ тензорное разложение $\mathbf{X}$.

- Примеры тензорных разложений:
  1. High-order singular value decomposition (HOSVD);
  2. Canonical polyadic decomposition (CPD).
- Для выделения сигнала и оценки его параметров в работе Papy et al. (2005) применялось HOSVD, и в работе De Lathauwer et al. (2011) применялось CPD.

Задача: изучить различные варианты тензорных разложений, применить их в задаче анализа временного ряда и сравнить результаты с SSA.
Из тензорных разложений первым было выбрано HOSVD, так как оно имеет наибольшее сходство с SVD.

В методе SSA происходит построение особой матрицы по ряду и применение к ней сингулярного разложения.
Возможное обобщение этого метода — переход от матриц к тензорам: построение по ряду особого тензора и применение к нему некоторого тензорного разложения.
Существует множество видов тензорных разложений. Для нас интерес представляют High-Order Singular Value Decomposition (HOSVD), являющееся многомерным аналогом SVD, и Canonical Polyadic Decomposition (CPD).
Оба этих разложения были использованы в разных работах для выделения из ряда сигнала и его оценки: HOSVD — в работе [2], и CPD — в работе [3].
Была поставлена задача изучить выбранные варианты тензорных разложений, реализовать метод Tensor SSA, и сравнить с методом Basic SSA по точности выделения сигнала и компонент сигнала.

Из тензорных разложений первым было выбрано HOSVD, так как оно имеет наибольшее сходство с SVD.

Описание HOSDV

Пусть имеется тензор $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$, тогда HOSVD $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \ldots \sum_{i_M=1}^{I_M} \mathcal{Z}_{i_1,i_2,\ldots,i_M} U_{i_1}^{(1)} \circ U_{i_2}^{(2)} \circ \ldots \circ U_{i_M}^{(M)},$$

где

- $\mathbf{U}^{(n)} = \left[U_1^{(n)}, \ldots, U_{I_n}^{(n)}\right]$ — унитарные матрицы;
- Тензор $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}^{I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M}$ удовлетворяет свойствам
  1. полная ортогональность:
  $$\langle \mathcal{Z}_{i_n=\alpha}, \mathcal{Z}_{i_n=\beta} \rangle = 0 \qquad \alpha \neq \beta,$$
  2. упорядоченность:
  $$\|\mathcal{Z}_{i_n=1}\| \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=2}\| \geqslant \ldots \geqslant \|\mathcal{Z}_{i_n=I_n}\|.$$

Любой комплекснозначный тензор $\mathcal{A}$ размерности $I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_M$, может быть представлен в виде суммы тензоров ранга 1, то есть внешних произведений векторов, как показано на слайде. M называется количеством измерений тензора. Такое представление называется HOSVD тензора $\mathcal{A}$, векторы $U_i^{(n)}$ называют i-м сингулярным вектором тензора $\mathcal{A}$ по измерению n, нормы Фробениуса подтензора $\mathcal{Z}$ с фиксированным n-м индексом равным i называют i-м сингулярным значением тензора $\mathcal{A}$ по измерению n.

Свойство полной ортогональности является аналогом свойства диагональности матрицы сингулярных значений в SVD, а свойство упорядоченности собственных значений вдоль каждого измерения — аналог упорядоченности собственных значений.

Свойства HOSVD

Все свойства представлены в работе De Lathauwer et al. (2000).

- HOSVD — единственное M-ортогональное разложение.
- При $M = 2$ HOSVD совпадает с SVD.
- Пусть $\mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$ — размерность пространства векторов измерения n тензора. Если в HOSVD тензора $\mathcal{A}$ r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$, то $r_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$.
- $$\|\mathcal{A}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \ldots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2 = \|\mathcal{Z}\|^2$$
$$\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|, \qquad R_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A}).$$

Свойства HOSVD

Все свойства представлены в работе De Lathauwer et al. (2000).

- HOSVD — единственное M-ортогональное разложение.
- При $M = 2$ HOSVD совпадает с SVD.
- Пусть $\mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$ — размерность пространства векторов измерения n тензора. Если в HOSVD тензора $\mathcal{A}$ r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$, то $r_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$.
- $$\|\mathcal{A}\|^2 = \sum_{i=1}^{R_1} \left(\sigma_i^{(1)}\right)^2 = \sum_{i=1}^{R_2} \left(\sigma_i^{(2)}\right)^2 = \ldots = \sum_{i=1}^{R_M} \left(\sigma_i^{(M)}\right)^2 = \|\mathcal{Z}\|^2$$
$$\sigma_i^{(n)} = \|\mathcal{Z}_{i_n=i}\|, \qquad R_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A}).$$

1. HOSVD является единственным M-ортогональным разложением тензора, и сингулярные значения и векторы определяются с точностью до унитарных преобразований.
2. Результат применения HOSVD к тензору с двумя измерениями, т.е. матрице, совпадает с результатом применения SVD к этой же матрице, в точности до унитарных преобразований сингулярных векторов и матрицы сингулярных значений.
3. n-рангом тензора $\mathcal{A}$ называется размерность векторного пространства, порождённого векторами измерения n этого тензора. Обозначается $R_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$. Если в HOSVD тензора $\mathcal{A}$ r_n — наибольший индекс такой, что $\|\mathcal{Z}_{i_n=r_n}\| > 0$, то $r_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$; n-ранги являются характеристикой тензора, аналогичной матричным рангам. Однако в тензорном случае, n-ранги могут различаться, поэтому для каждого измерения определяется своя характеристика.
4. Квадрат нормы тензора совпадает с суммами квадратов

Свойства HOSVD

- Векторы тензора $\mathcal{A}$ по измерению n в основном содержат вклады в направлении $U_1^{(n)}$, величина этого вклада равна ${\sigma_1^{(n)}}^2$. Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U_1^{(n)}$, с величиной ${\sigma_2^{(n)}}^2$, и т.д.

- Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \ldots, \sigma_{R_n}^{(n)}$, тогда

$$\|\mathcal{A}-\hat{\mathcal{A}}\|^2 \leqslant \sum_{i_1=I'_1+1}^{R_1} \left(\sigma_{i_1}^{(1)}\right)^2 + \sum_{i_2=I'_2+1}^{R_2} \left(\sigma_{i_2}^{(2)}\right)^2 + \ldots + \sum_{i_M=I'_M+1}^{R_M} \left(\sigma_{i_M}^{(M)}\right)^2.$$

1. Векторы тензора $\mathcal{A}$ по измерению n в основном содержат вклады в направлении $U_1^{(n)}$, и вклад в этом направлении равен ${\sigma_1^{(n)}}^2$. Следующий по величине вклад по измерению n достигается в направлении $U_2^{(n)}$, перпендикулярном $U(n)_1$, с величиной ${\sigma_2^{(n)}}^2$, и так далее.
2. Пусть $R_n = \mathrm{rank}_n(\mathcal{A})$. Определим тензор $\hat{\mathcal{A}}$ отбрасыванием наименьших сингулярных значений $\sigma_{I'_n+1}^{(n)}, \sigma_{I'_n+2}^{(n)}, \ldots, \sigma_{R_n}^{(n)}$ для заданных значений I'_n, $n \in \overline{1:M}$, то есть заменяя нулями соответствующие части тензора $\mathcal{Z}$. Тогда квадрат нормы разности тензоров не превосходит суммы квадратов отброшенных сингулярных значений.

Эти свойства являются эквивалентом высшего порядка связи между SVD матрицы и ее наилучшим приближением, в смысле наименьших квадратов, матрицей более низкого ранга. Однако для тензоров ситуация совершенно иная. Тензор, полученный усечением HOSVD в общем случае не является наилучшим приближением при заданных ограничениях на ранги измерений,

Описание метода HOSVD SSA

Имеется временной ряд $\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Приведём формулировки алгоритма HOSVD SSA для решения различных задач.

Входные данные алгоритма: $I, L : 1 \leqslant I, L \leqslant N,\ I + L \leqslant N + 1$.

Траекторный тензор: тензор размерности $I \times L \times J = N - I - J + 2$, строится по ряду:

$$\mathcal{X}_{i,l,j} = x_{i+l+j-2} \qquad i \in \overline{1:I},\ l \in \overline{1:L},\ j \in \overline{1:J}.$$

Слои траекторного тензора:

$$\mathcal{X}_{,,j} = \begin{pmatrix} x_j & x_{j+1} & \cdots & x_{j+L-1} \\ x_{j+1} & x_{j+2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_{j+I-1} & \cdots & \cdots & x_{j+I+L-2} \end{pmatrix}.$$

Пусть имеется временной ряд $\mathsf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$. Приведём формулировки алгоритма HOSVD SSA для решения различных задач. Входные данные алгоритма: два числа $I, L : 1 \leqslant I, L \leqslant N,\ I + L \leqslant N + 1$. Введём понятие траекторного тензора: это тензор, составленный из элементов ряда таким образом, что его i, l, j-й элемент равен $i + l + j - 2$-му элементу ряда. На слайде представлен слой траекторного тензора, полученный фиксированием третьего измерения индексом j. Похожим образом выглядят и остальные слои.

HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

Задача: отделение компонент сигнала в ряде.

1. Вложение: выбор параметров I, L и построение по ним траекторного тензора $\mathcal{X}$;

2. Разложение: Проведение HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$, получение его представления в виде

$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} \mathcal{Z}_{i,l,j}\mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)};$$

HOSVD SSA: отделение компонент сигнала
Задача: отделение компонент сигнала в ряде.
Вложение: выбор параметров I, L и построение по ним траекторного тензора $\mathcal{X}$;
Разложение: Проведение HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$, получение его представления в виде
$$\mathcal{X} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J} \mathcal{Z}_{i,l,j}\mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)};$$

Рассмотрим задачу отделения компонент сигнала в ряде.

1. Первый шаг алгоритма заключается в выборе параметров I, L и построение по ним траекторного тензора ряда.
2. Второй шаг алгоритма заключается в проведении разложения HOSVD траекторного тензора. В результате получается представление в виде суммы тензоров ранга 1 (то есть внешних произведений векторов).

HOSVD SSA: отделение компонент сигнала

3. Группировка: разбиение множества индексов $\mathfrak{S} = \{1, 2\, \ldots, \min(I, L, J)\}$ по смыслу на непересекающиеся множества $\mathfrak{S}_k$, $k \in \overline{1:m}$ и построение по этому разбиению тензоров
$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$$
4. Восстановление: получение рядов $\mathsf{X}^{(k)} = \mathsf{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ по тензорам $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $i + l + j = \mathrm{const}$.

Результат алгоритма: набор рядов $\mathsf{X}^{(k)}$ таких, что
$$\mathsf{X} = \sum_{k=1}^{m} \mathsf{X}^{(k)}.$$

HOSVD SSA: отделение компонент сигнала
3. Группировка: разбиение множества индексов $\mathfrak{S} = \{1, 2\, \ldots, \min(I, L, J)\}$ по смыслу на непересекающиеся множества $\mathfrak{S}_k$, $k \in \overline{1:m}$ и построение по этому разбиению тензоров
$$\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)} = \sum_{i \in \mathfrak{S}_k} \sum_{l \in \mathfrak{S}_k} \sum_{j \in \mathfrak{S}_k} \mathcal{Z}_{i,l,j} \mathbf{U}_i^{(1)} \circ \mathbf{U}_l^{(2)} \circ \mathbf{U}_j^{(3)}.$$
4. Восстановление: получение рядов $\mathsf{X}^{(k)} = \mathsf{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ по тензорам $\mathcal{X}^{(\mathfrak{S}_k)}$ посредством их усреднения вдоль плоскостей $i + l + j = \mathrm{const}$.
Результат алгоритма: набор рядов $\mathsf{X}^{(k)}$ таких, что
$$\mathsf{X} = \sum_{k=1}^{m} \mathsf{X}^{(k)}.$$

1. Третий шаг: группировка. На этом шаге множество индексов суммирования разбивается на непересекающиеся множества по смыслу, и по этим множествам определяется набор тензоров, соответствующих различным компонентам сигнала.
2. Четвёртый шаг: восстановление. На этом шаге полученные после группировки тензоры усредняются вдоль плоскостей с фиксированным значением суммы индексов.

В результате усреднения получается набор временных рядов, в сумме дающий исходный ряд, этот набор и будет результатом алгоритма.

HOSVD SSA: отделение сигнала усечением HOSVD

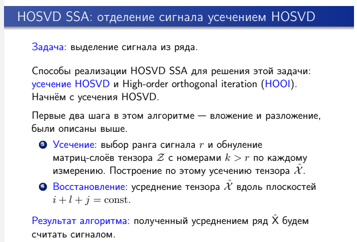
Задача: выделение сигнала из ряда.

Способы реализации HOSVD SSA для решения этой задачи: усечение HOSVD и High-order orthogonal iteration (HOOI). Начнём с усечения HOSVD.

Первые два шага в этом алгоритме — вложение и разложение, были описаны выше.

3. Усечение: выбор ранга сигнала r и обнуление матриц-слоёв тензора $\mathcal{Z}$ с номерами $k > r$ по каждому измерению. Построение по этому усечению тензора $\hat{\mathcal{X}}$.
4. Восстановление: усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \mathrm{const}$.

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд $\hat{\mathsf{X}}$ будем считать сигналом.


HOSVD SSA: отделение сигнала усечением HOSVD
Задача: выделение сигнала из ряда.
Способы реализации HOSVD SSA для решения этой задачи: усечение HOSVD и High-order orthogonal iteration (HOOI). Начнём с усечения HOSVD.
Первые два шага в этом алгоритме — вложение и разложение, были описаны выше.
3. Усечение: выбор ранга сигнала r и обнуление матриц-слоёв тензора $\mathcal{Z}$ с номерами $k > r$ по каждому измерению. Построение по этому усечению тензора $\hat{\mathcal{X}}$.
4. Восстановление: усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \mathrm{const}$.
Результат алгоритма: полученный усреднением ряд $\hat{\mathsf{X}}$ будем считать сигналом.

Рассмотрим задачу выделения сигнала из ряда. Алгоритм HOSVD SSA для решения этой задачи может быть проведён двумя различными способами: используя усечение HOSVD и используя High-order orthogonal iteration (о втором будет сказано позже).
Первый способ заключается в усечении сингулярного разложения траекторного тензора. Первые два шага этого алгоритма совпадают с алгоритмом для отделения компонент ряда, поэтому опишем его, начиная с третьего шага.

3. Третий шаг заключается в выборе ранга сигнала r и усечении тензора сингулярных значений по этому рангу. Другими словами, имея ранг сигнала r и разложение траекторного тензора $\mathcal{X}$, в тензоре $\mathcal{Z}$ заменим матрицы-слои по каждому измерению с номерами $k > r$ на нулевые, и по полученному тензору построим приближение траекторного тензора $\hat{\mathcal{X}}$.
4. На четвёртом шаге, используя усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ вдоль плоскостей $i + l + j = \mathrm{const}$ получим ряд $\hat{\mathsf{X}}$. Этот ряд и будем считать сигналом.

Стоит отметить, что этот способ не является оптимальным.

HOSVD SSA: отделение сигнала с помощью HOOI

Задача: выделение сигнала из ряда.

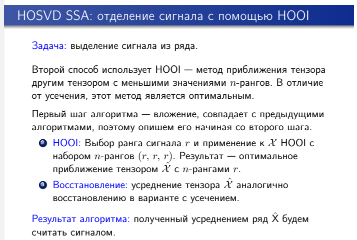
Второй способ использует HOOI — метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями n-рангов. В отличие от усечения, этот метод является оптимальным.

Первый шаг алгоритма — вложение, совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.

2. HOOI: Выбор ранга сигнала r и применение к $\mathcal{X}$ HOOI с набором n-рангов (r, r, r). Результат — оптимальное приближение тензором $\hat{\mathcal{X}}$ с n-рангами r.
3. Восстановление: усреднение тензора $\hat{\mathcal{X}}$ аналогично восстановлению в варианте с усечением.

Результат алгоритма: полученный усреднением ряд $\hat{\mathsf{X}}$ будем считать сигналом.

Tensor SSA
└Описание HOSVD SSA и его свойства
└HOSVD SSA: отделение сигнала с помощью HOOI



Второй способ использует метод приближения тензора другим тензором с меньшими значениями n-рангов — High-Order Orthogonal Iteration (HOOI) [?]. В отличие от усечения, этот метод является оптимальным, в том смысле, что на тензоре, полученном этим методом достигается минимум расстояния, в смысле нормы Фробениуса, до исходного тензора по всем тензорам с данными ограничениями на ранги.
Приведём вторую реализацию алгоритма HOSVD SSA для отделения сигнала от шума, используя HOOI. Первый шаг алгоритма — вложение, совпадает с предыдущими алгоритмами, поэтому опишем его начиная со второго шага.

2. На втором шаге выбирается ранг сигнала r и к полученному ранее траекторному тензору $\mathcal{X}$ применяется HOOI с набором n-рангов (r, r, r). В результате получаем оптимальное приближение траекторного тензора $\mathcal{X}$ тензором $\hat{\mathcal{X}}$ со значениями n-рангов равными r.
3. Третий шаг — восстановление ряда по тензору $\hat{\mathcal{X}}$ усреднением совпадает с четвёртым шагом (восстановлением) в первом варианте алгоритма для выделения сигнала из ряда.

Полученный усреднением ряд $\hat{\mathsf{X}}$ будем считать сигналом.

Свойства HOSVD SSA, разделимость рядов

Разделимость и ранг рядов являются важными понятиями в теории SSA. Рассмторим эти понятия для алгоритма HOSVD SSA

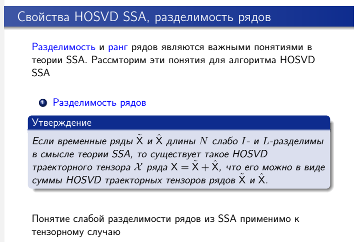
1. Разделимость рядов

Утверждение

Если временные ряды $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$ длины N слабо I- и L-разделимы в смысле теории SSA, то существует такое HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ ряда $\mathsf{X} = \tilde{\mathsf{X}} + \hat{\mathsf{X}}$, что его можно в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$.

Понятие слабой разделимости рядов из SSA применимо к тензорному случаю

Tensor SSA
└Описание HOSVD SSA и его свойства
└Свойства HOSVD SSA, разделимость рядов


Свойства HOSVD SSA, разделимость рядов
Разделимость и ранг рядов являются важными понятиями в теории SSA. Рассмторим эти понятия для алгоритма HOSVD SSA
1. Разделимость рядов
Утверждение
Если временные ряды $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$ длины N слабо I- и L-разделимы в смысле теории SSA, то существует такое HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ ряда $\mathsf{X} = \tilde{\mathsf{X}} + \hat{\mathsf{X}}$, что его можно в виде суммы HOSVD траекторных тензоров рядов $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$.
Понятие слабой разделимости рядов из SSA применимо к тензорному случаю

Метод SSA хорошо изучен и важную роль в теории играют понятия разделимости и ранга рядов. Рассмторим эти понятия для алгоритма HOSVD SSA.

Первое утверждение о разделимости позволяет перенести понятие слабой разделимости рядов из теории SSA на тензорный случай.

Само утверждение заключается в том, что если временные ряды $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$ длины N слабо I- и L-разделимы в смысле теории SSA, то существует такое сингулярное разложение траекторного тензора $\mathcal{X}$ ряда $\mathsf{X} = \tilde{\mathsf{X}} + \hat{\mathsf{X}}$, что его можно в виде суммы сингулярных разложений траекторных тензоров, составленных по рядам $\tilde{\mathsf{X}}$ и $\hat{\mathsf{X}}$.

Доказательство утверждения следует из ортогональности сингулярных векторов в HOSVD.

Свойства HOSVD SSA, ранг ряда

2. Ранг ряда

Утверждение

Пусть временной ряд X имеет конечный ранг d в терминах SSA. Тогда для любых значений параметров I и L таких, что

$$d \leqslant \min(I, L, N - I - L + 2),$$

количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ этого ряда с параметрами I и L будет равно d.

Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HOSVD SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

Свойства HOSVD SSA, ранг ряда
2. Ранг ряда
Утверждение
Пусть временной ряд X имеет конечный ранг d в терминах SSA. Тогда для любых значений параметров I и L таких, что
$$d \leqslant \min(I, L, N - I - L + 2),$$
количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в HOSVD траекторного тензора $\mathcal{X}$ этого ряда с параметрами I и L будет равно d.
Понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HOSVD SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.

Второе утверждение о ранге ряда говорит о том, что понятие ранга ряда имеет тот же смысл в терминах HOSVD SSA, что и в стандартной теории SSA, причём ряды конечного ранга имеют одинаковые ранги в тензорном и стандартном случаях.
Само утверждение звучит заключается в том, что если ряд имеет конечный ранг d, то для любых допустимых параметров I, L количество ненулевых сингулярных чисел по каждому измерению в сингулярном разложении траекторного тензора $\mathcal{X}$ будет равно d.

Доказательство этого утверждения следует из свойств n-рангов сингулярного разложения.

Примеры слабой разделимости

- Экспонента и косинус с экспоненциальной амплитудой: $\tilde{x}_n = e^{-\alpha n}\cos(2\pi n/T + \varphi)$, $\hat{x}_n = e^{\alpha n}$, $n \in \overline{1:N}$.

  Если $(N+2) \vdots T$, то при выборе $I,\ L:\ I + L < N + 1$, делящихся нацело на T $\tilde{\mathrm{X}}$ и $\hat{\mathrm{X}}$ слабо разделимы.
- Два косинуса: $\tilde{x}_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$, $\hat{x}_n = \cos(2\pi\omega' n + \varphi')$, $0 < \omega < 1/2$. тогда ряд $\tilde{\mathrm{X}}$ отделим от ряда $\hat{\mathrm{X}}$ в смысле Tensor SSA тогда и только тогда, когда $\tilde{\mathrm{X}}$ и $\hat{\mathrm{X}}$ слабо разделимы тогда и только тогда, когда $\omega \neq \omega'$, $I, L, J > 2$ и $I\omega$, $I\omega'$, $L\omega$, $L\omega'$, $J\omega$, $J\omega'$ — целые числа.

В последнем примере при одинаковых амплитудах происходит смешение компонент и в теории SSA говорят, что наблюдается приближённая разделимость.
Как формализовать приближённую и точную разделимость в теории HOSVD SSA пока неясно.

Tensor SSA
└Применение HOSVD SSA

└Примеры слабой разделимости

Примеры слабой разделимости
- Экспонента и косинус с экспоненциальной амплитудой: $\tilde{x}_n = e^{-\alpha n}\cos(2\pi n/T + \varphi)$, $\hat{x}_n = e^{\alpha n}$, $n \in \overline{1:N}$.
  Если $(N+2) \vdots T$, то при выборе $I,\ L:\ I + L < N + 1$, делящихся нацело на T $\tilde{\mathrm{X}}$ и $\hat{\mathrm{X}}$ слабо разделимы.
- Два косинуса: $\tilde{x}_n = \cos(2\pi\omega n + \varphi)$, $\hat{x}_n = \cos(2\pi\omega' n + \varphi')$, $0 < \omega < 1/2$. тогда ряд $\tilde{\mathrm{X}}$ отделим от ряда $\hat{\mathrm{X}}$ в смысле Tensor SSA тогда и только тогда, когда $\tilde{\mathrm{X}}$ и $\hat{\mathrm{X}}$ слабо разделимы тогда и только тогда, когда $\omega \neq \omega'$, $I, L, J > 2$ и $I\omega$, $I\omega'$, $L\omega$, $L\omega'$, $J\omega$, $J\omega'$ — целые числа.
В последнем примере при одинаковых амплитудах происходит смешение компонент и в теории SSA говорят, что наблюдается приближённая разделимость.
Как формализовать приближённую и точную разделимость в теории HOSVD SSA пока неясно.

Рассмотрим примеры слабо разделимых в терминах HOSVD SSA рядов.

1. Ряд косинуса с экспоненциальной амплитудой слабо отделим от ряда экспоненты той же степени, если $N+2$ делится нацело на период косинуса и выбранные параметры делятся нацело на период.
2. Ряды, порождённые косинусами с разными частотами слабо отделимы, если все измерения траекторного тензора имеют размерность больше 2, и делятся нацело на периоды обоих косинусов.

В последнем примере при одинаковых амплитудах происходит смешение компонент.
В SSA эта ситуация формализована, в HOSVD SSA пока неясно как можно формализовать приближённую и точную разделимость.

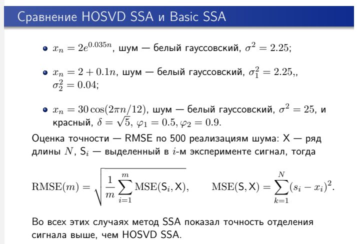
Сравнение HOSVD SSA и Basic SSA

- $x_n = 2e^{0.035n}$, шум — белый гауссовский, $\sigma^2 = 2.25$;
- $x_n = 2 + 0.1n$, шум — белый гауссовский, $\sigma_1^2 = 2.25$,, $\sigma_2^2 = 0.04$;
- $x_n = 30\cos(2\pi n/12)$, шум — белый гауссовский, $\sigma^2 = 25$, и красный, $\delta = \sqrt{5}$, $\varphi_1 = 0.5, \varphi_2 = 0.9$.

Оценка точности — RMSE по 500 реализациям шума: X — ряд длины N, S_i — выделенный в i-м эксперименте сигнал, тогда

$$\mathrm{RMSE}(m) = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mathrm{MSE}(\mathsf{S}_i, \mathsf{X})}, \qquad \mathrm{MSE}(\mathsf{S}, \mathsf{X}) = \sum_{k=1}^{N}(s_i - x_i)^2.$$

Во всех этих случаях метод SSA показал точность отделения сигнала выше, чем HOSVD SSA.



Были проведены численные измерения точности восстановления сигнала при использовании SSA и предложенных методов HOSVD SSA на примерах трёх рядов: порождённого экспонентой, линейного и косинуса.

На экспоненциальный ряд действовали белым шумом и восстанавливали по одной компоненте.

Для линейного ряда рассматривались ситуации большого и малого шума и в обеих ситуациях сравнивалось восстановление по одной и двум компонентам.

На ряд косинуса действовали белым шумом и красным с разными параметрами.

Шло сравнение точности метода SSA и методов HOSVD SSA с использованием усечения и HOOI. Во всех приведённых выше случаях метод SSA оказался точнее остальных.

Оценка точности бралась равной корню из среднего значения среднеквадратичного отклонения восстановленного ряда от исходного по 500 реализациям шума.

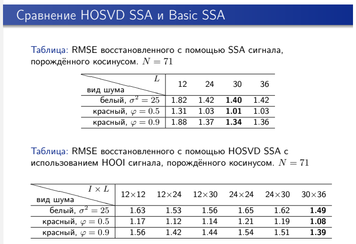
Сравнение HOSVD SSA и Basic SSA

Таблица: RMSE восстановленного с помощью SSA сигнала, порождённого косинусом. $N = 71$

вид шума \ L	12	24	30	36
белый, $\sigma^2 = 25$	1.82	1.42	**1.40**	1.42
красный, $\varphi = 0.5$	1.31	1.03	**1.01**	1.03
красный, $\varphi = 0.9$	1.88	1.37	**1.34**	1.36

Таблица: RMSE восстановленного с помощью HOSVD SSA с использованием HOOI сигнала, порождённого косинусом. $N = 71$

вид шума \ $I \times L$	12×12	12×24	12×30	24×24	24×30	30×36
белый, $\sigma^2 = 25$	1.63	1.53	1.56	1.65	1.62	**1.49**
красный, $\varphi = 0.5$	1.17	1.12	1.14	1.21	1.19	**1.08**
красный, $\varphi = 0.9$	1.56	1.42	1.44	1.54	1.51	**1.39**



На этом слайде показан результат сравнения SSA и HOSVD SSA с использованием HOOI на примере ряда, порождённого косинусом для разных видов шума. Во всех случаях SSA показал лучший результат, чем HOSVD SSA.

Особый случай

Приведём особый пример, в котором HOSVD SSA оказался точнее базового SSA.

$x_n = \sin(2\pi n/3 + \pi/2)$, $n \in \overline{1:9}$.
Шум: красный с параметрами $\delta = 0.1$, $\varphi = 0.9$.

Таблица: RMSE восстановленного с помощью различных методов короткого сигнала, порождённого синусом.

SSA	HOSVD SSA (HOSVD)	HOSVD SSA (HOOI)
0.116	0.110	**0.095**

Особый случай
Приведём особый пример, в котором HOSVD SSA оказался точнее базового SSA.
$x_n = \sin(2\pi n/3 + \pi/2)$, $n \in \overline{1:9}$.
Шум: красный с параметрами $\delta = 0.1$, $\varphi = 0.9$.
Таблица: RMSE восстановленного с помощью различных методов короткого сигнала, порождённого синусом.
SSA HOSVD SSA (HOSVD) HOSVD SSA (HOOI)
0.116 0.110 0.095

Был найден случай временного ряда и шума, для которого метод HOSVD SSA с использованием HOOI оказался в среднем точнее, чем SSA.
Сигнал задан коротким синусом со слайда, на него подействовали красным шумом с параметрами $\delta = 0.1$, $\varphi = 0.9$.
Отклонение считалось аналогично предыдущим примерам по 500 реализациям шума. Из таблицы видно, что в случае так заданного ряда, метод HOSVD SSA оказывается точнее стандартного SSA, причём самым точным оказался метод с использованием HOOI.

Причины данного явления на данном этапе остаются неизвестными.

Заключение

Таким образом:

- Описан и реализован алгоритм HOSVD SSA.
- Выведены аналоги важных свойств SSA для метода HOSVD SSA.
- Описаны примеры использования метода.
- Проведено численное сравнение точности методов HOSVD SSA и SSA, найден особый случай.

Остаётся для изучения:

- Изучение причин возникновения особого случая.
- Определение точной и приближённой разделимости, нахождение метода отделения компонент при отсутствии точной.
- Возможность применения других тензорных разложений (CPD).
- Подтверждение результатов, утверждающих о преимуществах Tensor SSA над SSA.

Заключение
Таким образом:
Описан и реализован алгоритм HOSVD SSA.
Выведены аналоги важных свойств SSA для метода HOSVD SSA.
Описаны примеры использования метода.
Проведено численное сравнение точности методов HOSVD SSA и SSA, найден особый случай.
Остаётся для изучения:
Изучение причин возникновения особого случая.
Определение точной и приближённой разделимости, нахождение метода отделения компонент при отсутствии точной.
Возможность применения других тензорных разложений (CPD).
Подтверждение результатов, утверждающих о преимуществах Tensor SSA над SSA.

В результате работы

- был описан и реализован алгоритм HOSVD SSA;
- были выведены аналоги важных свойств SSA для метода HOSVD SSA;
- Были описаны примеры использования метода;
- было проведено численное сравнение точности методов HOSVD SSA и SSA, найден особый случай.

Для дальнейшего изучения остаётся

- изучение причин возникновения особого случая;
- определение точной и приближённой разделимости, нахождение метода отделения компонент при отсутствии точной;
- возможность применения других тензорных разложений, в частности CPD;
- подтверждение результатов, утверждающих о преимуществах Tensor SSA над SSA;

Список литературы

- Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techiques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
- Papy J. M., De Lathauwer L., Van Hu el S. Exponential data tting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — P. 809–826.
- De Lathauwer Lieven. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank-$(L_r, L_r, 1)$ Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2011. — P. 1451–1474.
- De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — P. 1253–1278.

Список литературы
Golyandina Nina, Nekrutkin Vladimir, Zhigljavsky Anatoly. Analysis of time series structure: SSA and related techiques. — Chapman & Hall/CRC, 2001.
Papy J. M., De Lathauwer L., Van Hu el S. Exponential data tting using multilinear algebra: the single-channel and multi-channel case // Numerical Linear Algebra with Applications. — 2005. — P. 809–826.
De Lathauwer Lieven. Blind Separation of Exponential Polynomials and the Decomposition of a Tensor in Rank-$(L_r, L_r, 1)$ Terms // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2011. — P. 1451–1474.
De Lathauwer Lieven, De Moor Bart, Vandewalle Joos. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. — 2000. — P. 1253–1278.

На данном слайде представлен список основных источников, используемых в моей работе.