Формулировка задачи

Запишем уравнение для потери на излучение гравитационных волн углового момента J системой двух нейтронных звёзд (НЗ), вращающихся по круговым орбитам друг вокруг друга:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{32}{5}\frac{m_1^2 m_2^2}{M^2}\frac{G}{c^5}a^4\omega^5, \tag{1}$$

где $m_1 \geq m_2$ — массы компонент, $M = m_1 + m_2$, a — расстояние между компонентами, а ω — угловая скорость орбитального движения. Заметим, что мы пишем уравнение именно для потерь углового момента, а не полной энергии E системы, как это обычно принято, потому что эти два уравнения в случае обмена масс неэквивалентны (см. приложение в статье Jaranowsi and Krolak 1992).

Угловая скорость вращения есть

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}, \tag{2}$$

а угловой момент

$$J = m_1 m_2 \sqrt{\frac{Ga}{M}}. \tag{3}$$

Введём единицу длины — начальное расстояние между компонентами $a = a_0 x$, $x(0) = 1$ и времени $t = t_0\tau$, где

$$t_0 = \sqrt{\frac{a_0^3}{GM}}. \tag{4}$$

Аналогично можно ввести единицу энергии

$$E_0 = \frac{GM^2}{a_0}. \tag{5}$$

Пусть теперь масса меньшей НЗ составляет долю q от полной массы M системы: $q = m_2/M$. Тогда уравнение (1) можно переписать в виде:

$$\frac{d}{d\tau}\left(q(1-q)\sqrt{x}\right) = -\alpha_{\rm G}\frac{q^2(1-q)^2}{x^{7/2}}, \tag{6}$$

где

$$\alpha_{\rm G} = \frac{32}{5}\left(\frac{GM}{a_0 c^2}\right)^{5/2}. \tag{7}$$

Уравнение (6) можно переписать в виде, более удобном для расчётов:

$$\frac{d}{d\tau}\Big(\frac{1}{q(1-q)\sqrt{x}}\Big) = \frac{\alpha_{\mathrm{G}}}{x^{9/2}}. \tag{8}$$

Если массообмена нет, $q = \mathrm{const}$, то уравнение (8) легко интегрируется, приводя к известному решению $a^4 \sim (t_{\mathrm{m}} - t)$, где t_{m} — момент слияния.

Обратимся теперь к перетеканию. Размер полости Роша обычно параметризуется как:

$$R_{\mathrm{R}} = af(q), \tag{9}$$

где $f(q)$ — известная затабулированная функция. Следует обратить внимание, что, например, в книге Бисикало для q используется выражение $q = m_2/m_1$! В дальнейшем при необходимости мы будем этот параметр обозначать как $q' = q/(1-q)$. Уравнение состояния даёт нам зависимость $m_2 = m_2(R_2)$. Приравнивая $R_2 = R_{\mathrm{R}}$, получаем второе уравнение задачи:

$$q = \frac{m_2}{M} = \frac{1}{M} m_2\big(a_0 x f(q)\big). \tag{10}$$

Продифференцировав выражение (10) по времени и подставив $dx/d\tau$ в (8), можно получить условие устойчивости перетекания в виде:

$$\frac{d\ln R_2}{d\ln m_2} \geq \frac{d\ln f(q)}{d\ln q} - 2\frac{1-2q}{1-q}. \tag{11}$$

Реализация

Опишем кратко подробности расчётов, реализующих вышеприведённые соотношения.

Масс-Радиус

Для зависимости масса–радиус используются аппроксимации, предложенные в статье Сотани и др. в области НЗ малых масс. Параметр η задаёт пользователь. Задав m_2, из их формулы (2) находим u_{c}. Его подстановка в их (3) даёт z, а значит и R_2.

Размер полости Роша

Для аппроксимации используется выражение (см., например, книгу Бисикало, не забыв, что у них используется q')

$$f(q) = \frac{0.49(q')^{2/3}}{0.6(q')^{2/3} + \ln(1 + (q')^{1/3})}. \tag{12}$$

Замечательно, что этот результат можно обобщить, использовав пост-ньютоновское приближение согласно работе (Ratkovic et al.), см. их формулы (53–55). Сделана пользовательская опция: релятивистская коррекция on/off.

Реализация численной схемы

Поскольку второе уравнение (10) — в общем случае нелинейное, для решения системы реализована неявная схема по времени, где на каждом шаге решение ищется методом Ньютона. Уравнение (8) записывается как:

$$\frac{1}{q_{n+1}(1-q_{n+1})\sqrt{x_{n+1}}} - \frac{1}{q_n(1-q_n)\sqrt{x_n}} = \alpha_{\mathrm{G}} \triangle\tau \left[\frac{\chi}{x_{n+1}^{9/2}} + \frac{1-\chi}{x_n^{9/2}}\right], \tag{13}$$

а уравнение (10) так:

$$M q_{n+1} = m_2\Big(a_0 x_{n+1} f(q_{n+1})\Big). \tag{14}$$

Здесь нижний индекс обозначает момент времени. Параметр χ определяет тип схемы: $\chi = 0$ — явная, $\chi = 1$ — полностью неявная, $\chi = 1/2$ – центрированная. По соображениям устойчивости используется *почти* центрированную схему: $\chi \approx 1/2$, $\chi > 1/2$, например $\chi = 0.55$. Такая схема абсолютно устойчива и обеспечивает *почти* второй порядок аппроксимации.

Что на выходе?

Расчёт ведется до тех пор, пока не нарушено условие устойчивости перетекания (11). В результате мы получаем зависимости $x(\tau)$ и $q(\tau)$. Также отдельным файлом выводятся:

1) Светимость GW-излучения. Учитывая, что полная энергия системы есть $E = -\frac{Gm_1m_2}{2a}$, получим

$$L_{\mathrm{G}} = -\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{E_0}{t_0}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{q(1-q)}{x}\right). \tag{15}$$

2) Другой важный параметр — светимость излучения (в фотонах и нейтрино, см. Кларка и Эрдли) от аккреции вещества на массивный компаньон. Скорее всего, достаточно ограничиться простой оценкой:

$$L_\nu = -\frac{Gm_1}{R_1}\frac{dm_2}{dt} = -\frac{E_0}{t_0}\frac{a_0}{R_1}(1-q)\frac{dq}{d\tau}, \tag{16}$$

где $R_1 \approx 10$ км. Но в принципе, можно сделать более "точную" оценку, в которой энерговыделение будет равно $(\Phi(R_1) - \Phi(L_1))\dot{m}_2$, где $\Phi(L_1)$ — значение потенциала Роша во внутренней точке Лагранжа, а $\Phi(R_1)$ — на поверхности m_1. Учитывая все неопределённости (реальное поведение вещества при аккреции, реальный радиус R_1 нейтронной звезды и т.п.) не очень ясно, стоит ли этим заниматься.