Индивидуальное ДЗ по курсу «Методы оптимизации»

Выполнил студент группы М8О-310Б Гневский С.А.

Вариант № 3 3(18)

Задание:

Этап Б3. Методы решения ЗЛП

$f(x) = -x_1 + 6x_2 \to extr$

1) $3x_1 + 2x_2 \le 9$

$-x_1 + 4x_2 \le 4$

$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0$

2) $f(x) = -x_1 + 3x_2 \to extr$

$x_1 + x_2 \ge 6$

$-x_1 + 2x_2 \le 4$

$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0$

а) Найти максимум и минимум в задачах 1, 2 графически

б) Найти симплекс-методом максимум в задаче 1 и минимум в задаче 2.

Задание а) Пример 1

Дано: $f(x) = -x_1 + 6x_2 \to extr$

$3x_1 + 2x_2 \le 9$ (1)

$-x_1 + 4x_2 \le 4$ (2)

$x_1 \ge 0, \ x_2 \ge 0$ (3)

Найти решение задачи графически

1. Для графического решения построим МДР, задаваемое ограничениями (1)-(3)

Ограничение (1) - прямая $-x_1 + x_2 = 1$, проходящая через точки

x_1	x_2
3	0
1	3

Ограничение (2) - прямая $-x_1 + 4x_2 = 4$, проходящая через точки

x_1	x_2
0	1
2	1,5

МДР в задаче ограничено этими прямыми и содержит точку (0,0) т.к при подстановке к.т точки в ограничения (1) и (2) получается верное неравенство: $3\cdot0 + 0\cdot2 \le 9$; $-0 + 4\cdot0 \le 4$

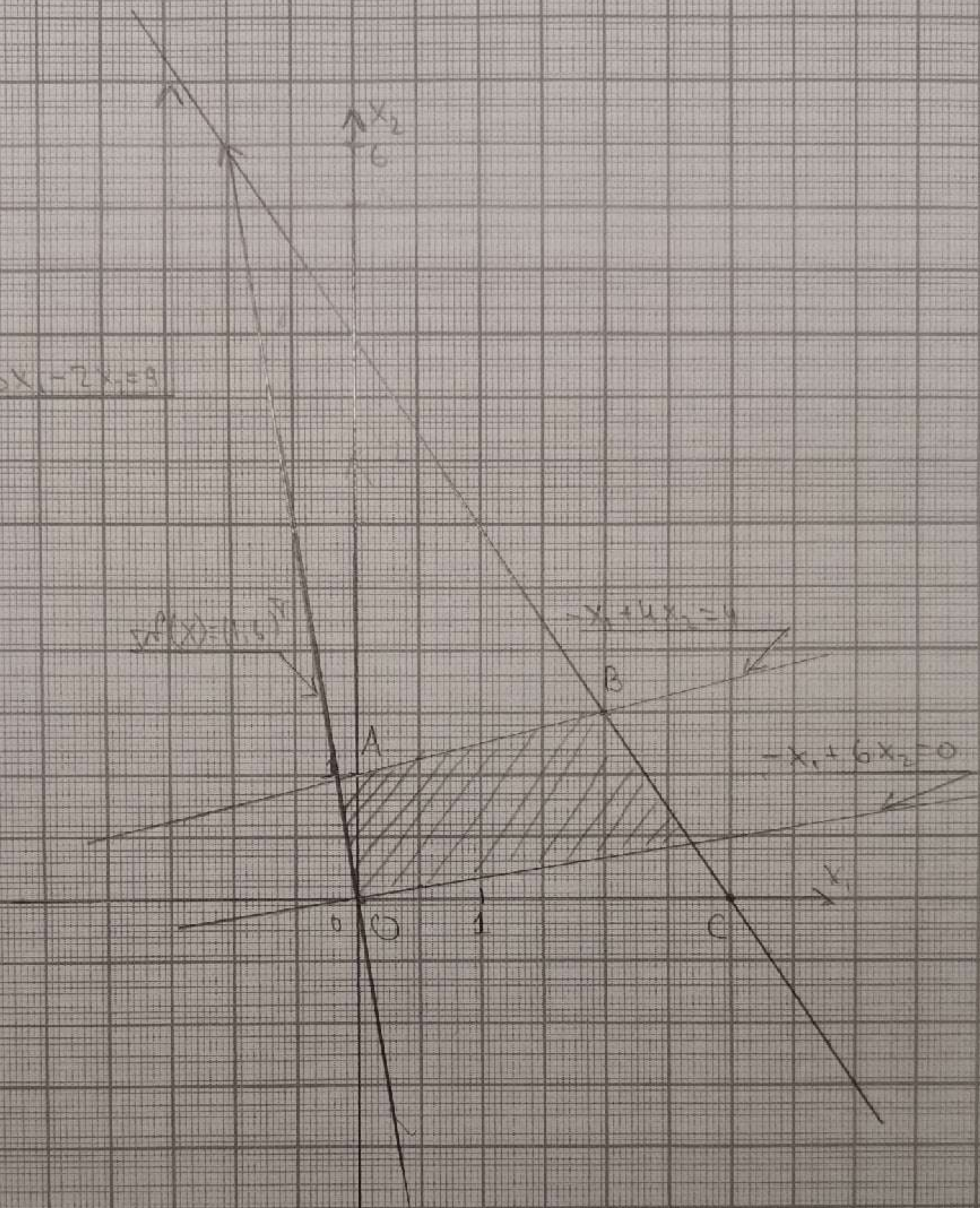
Ограничения (3) задают 1-ю четверть координатной плоскости.
МДР включает все точки, в которых ограничения выполняются одновременно. Отметим крайние точки мн-ва: O, A, B, C
г) Построим градиент ф-ции $\nabla f(X) = (-1; 6)^T$ в точке $(0,0)$
з) Построим линию уровня $f(x) = C$, проходящую через точку $(0;0)$. Для этого найдем C, подставив $(0;0)$ в целевую ф-цию
$C = -0+6\cdot 0 = 0$ и затем построим прямую $-x_1+6x_2=0$
Заметим, что она перпендикулярна градиенту.
Построенная линия уровня пересекает МДР и отметим ее ⊕.
и Будем искать точку максимума как последнюю точку касания линии уровня и МДР при параллельном переносе ⊕ в направление градиента. Как видно из чертежа - это точка $B=(2;1,5)$
Т.о. получено решение задачи поиска максимума ф-ции:

$x_1^* = 2$
$x_2^* = 1,5$
$f(B) = f(X^*_{max}) = -2+6\cdot 1,5 = 7$

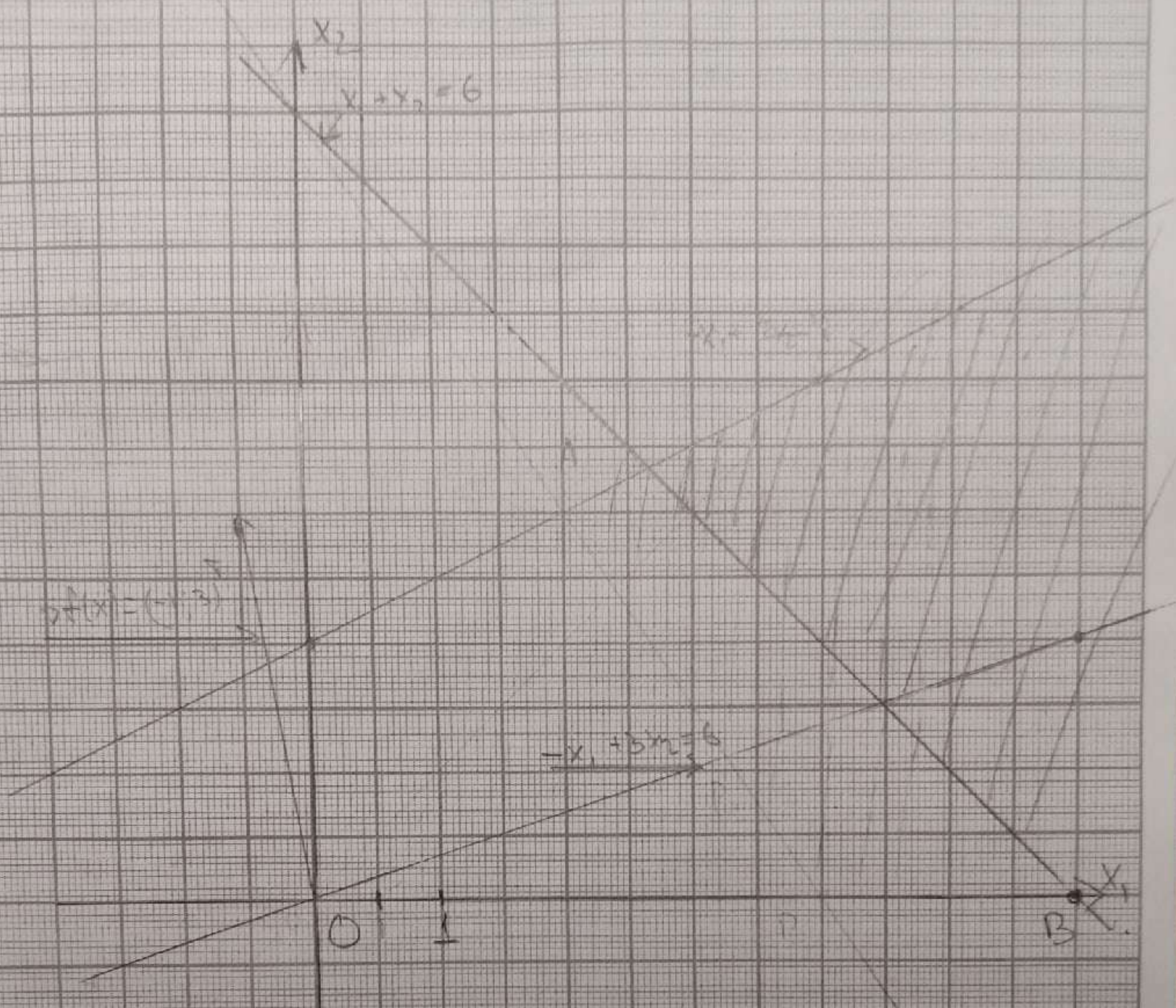
Будем искать точку минимума как последнюю точку касания линии уровня и МДР при параллельном переносе ⊕ в направлении, противоположном градиенту. Как видно из чертежа - это точка $C=(3;0)$ Т.о. получено решение задачи поиска минимума ф-ции.

$x_1^* = 3$
$x_2^* = 0$
$f(C) = f(X^*_{max}) = -3+0\cdot 6 = -3$

Задание а) Пример 2.
Дано:
$f(x) = -x_1+3x_2 \to extr$
$x_1+x_2 \geq 6$
$-x_1+2x_2 \leq 4$
$x \geq 0,\ x_2 \geq 0$
Найти решение задачи графически
Решение:



x_2
6
$3x_1 - 2x_2 = 8$
$\nabla f(x) = (1, 6)^T$
$-x_1 + 4x_2 = 4$
B
A
$-x_1 + 6x_2 = 0$
x_1
0
O
1
C



x_2
$x_1 + x_2 = 6$
$\nabla f(x) = (-1; 3)$
$-x_1 + 3x_2 = 6$
O
1
B
x_1

1) Для графического решения задачи построим МДР, задаваемое ограничениями (1)-(3).

Ограничение (1) в задаче определяется прямой $x_1+x_2 \geq 6$, проходящей через точки:

x_1	x_2
6	0
0	6

МДР будет ограничено этой прямой и не будет содержать точку (0;0) т.к при подстановке к-т точки в ограничение 1 получается неверное неравенство: $0+0 \geq 6$.

Ограничение (2) определяется прямой $-x+2x=4$, проходящей через точки:

x_1	x_2
0	2
4	4

МДР будет ограничено этой прямой и будет содержать точку (0,0) т.к при подстановке к-т в ограничение (2) получается верное неравенство: $-0+2 \cdot 0 \leq 4$

Ограничения (3) задают 1-ю четверть координатной плоскости

МДР включает все точки, в которых ограничения выполняются одновременно. Отметим крайние точки A и B

2) Построим градиент ф-ции $\nabla f(X) = (-1; 3)^T$ в точке (0;0)

3) Построим линию уровня $f(X)=C$; проходящую через точку (0,0). Для этого найдем значение C, подставив (0; 0) в целевую ф-цию $C=-0+6 \cdot 0=0$, и затем построим прямую $-x_1+6x_2=0$. Заметим, что прямая перпендикулярна градиенту.

Полученная линия уровня пересекает МДР, отметим ее ⊕

4. Попытаемся найти максимум следуя предыдущему заданию. Как видно из чертежа, такой точки не существует, т.к МДР в направлении градиента неограниченно, сл-но максимума нет

Будем искать точку минимума аналогично предыдущему примеру. Из графика видно, что это такой точки не существует, т.к МДР в направлении, противоположном градиенту, неограниченно, сл-но, минимума нет

Задание 6, Пример 1

Дано:

$f(x) = -x_1 + 6x_2 \to \max$

$3x_1 + 2x_2 \leq 9$

$-x_1 + 4x_2 \leq 4$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

Найти максимум симплекс-методом

Решение:

Подготовим задачу к решению симплекс методом

1.-2. В задаче требуется найти максимум, правые части ограничений неотрицательные

3. Приведем задачу к каноническому виду. Так как ограничения (1) и (2) - неравенства типа "≤", введем в них дополнительные переменные с коэффициентом 1, а в целевую ф-цию с коэффициентом 0.

$$f(X) = -x_1 + 6x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \to \max$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 \leq 9$$

$$-x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 \leq 4$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0$$

4) Выпишем столбцы при переменных в ограничениях

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ & & \text{базисный столбец} & \text{базисный столбец} \end{array}$$

Базис в задаче есть.

6. Окончательно получаем задачу, подготовленную к решению симплекс-методом:

$$f(X) = -x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 \to \max$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 9 \quad (1)$$

$$-x_1 + 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 4 \quad (2)$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

Базисные переменные x_3 в (1), x_4 в (2), x_1, x_2 - свободные

Начальное базисное решение: $x_3 = 9 \quad x_4 = 4$

$x_1 = 0 \quad x_2 = 0$

В исходных переменных это решение соотв точке O(0;0)
Проведем вычисления с помощью симплекс-таблиц
Таблица №1

$C_{iБ}$	$Б_П$	$Б_Р$	X_1 (−1)	X_2 (6)	X_3 (0)	X_4 (0)	r_i (C_j)
0	x_3	9	3	2	1	0	4,5
0	x_4	4	−1	4	0	1	1 ⊕
		Δ	−1	6 ⊕	0	0	

$$\Delta_1 = -1 - \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right) = -1$$

$$\Delta_2 = 6 - \left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right) = 6$$

Т.к $\Delta_2 = \max(\Delta_1, \Delta_2)$ и $\Delta_2 > 0$, то x_2 вводится как базисная,
⊕ - соотв. столбец.
Вычислим r_i
$r_1 = \frac{9}{2} = 4,5$, $r_2 = \frac{4}{4} = 1$
Из базиса выводится переменная x_4 т.к $r_2 = \min(r_1, r_2)$ $r_2 > 0$,
⊕ - соотв строка
Разрешающий эл-т $R = 4$.
Осуществим пересчет таблицы:
* Запишем коэффициенты ф-ции в верхнюю строку табл 2
* Запишем в новую табл. №2 базисные переменные x_2 и x_3
* Запишем коэффициенты ф-ции при базисных переменных в первый столбец табл№2;
* Пересчитаем ⊕ строку: разделим ⊕ строку на разрешающий эл-т

$$\begin{array}{ll} \text{⊕ строка} & (4 \quad -1 \quad 4 \quad 0 \quad 1) / R=4 \\ \hline \text{Результат} & 1 \quad -0,25 \quad 1 \quad 0 \quad 0,25 \end{array}$$

* Пересчитаем ост. строку

$$\begin{array}{ll} \text{стр №1 табл №1} & 9 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \\ \hline \text{стр №·(КП=2)} & 2 \quad -0,5 \quad 2 \quad 0 \quad 0,5 \\ \hline \text{Результат} & 7 \quad 3,5 \quad 0 \quad 1 \quad -0,5 \end{array}$$

Таблица №2

			-1	6	0	0	c_j	
$C_Б$	$Б_п$	$Б_р$	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i	
6	x_2	1	$-0,25$	1	0	$0,25$	-4	
0	x_3	7	$3,5$	0	1	$-0,5$	2	⊕
		Δ	$0,5$	0	0	$-1,5$		
			⊕					

Базисное решение табл №2

$x_1=0$ $x_2=1$ это решение соотв т. $A=(0,1)$

$x_3=7$ $x_4=0$

$$\Delta_1=-1-\left(\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-0,25\\3,5\end{pmatrix}\right)=0,5$$

$$\Delta_4=0-\left(\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0,25\\-0,25\end{pmatrix}\right)=-1,5$$

Т.к $\Delta_1=\max(\Delta_1,\Delta_4)$, $\Delta_1>0$, X_1 вводится в состав базисных, соотв. столбец ⊕

Вычислим r_i:

$r_1=\frac{1}{-0,25}=-4$ $r_2=\frac{7}{3,5}=2$

Из базиса выводится x_3 т.к r_2 - наименьшая неотр. величина

Разрешающий эл-т $R=3,5$

Осуществим пересчёт таблицы:

* Запишем коэф. ф-ции в верхнюю стр. табл 3
* Запишем в табл №3 базисные переменные x_1 и x_2
* Запишем коэф ф-ции при базисных переменных в первый столбец табл №3.
* Пересчитаем ⊕ строку:

⊕ строка $(7 \quad 3,5 \quad 0 \quad 1 \quad -0,5)/R=3,5$

Результат $2 \quad 1 \quad 0 \quad \frac{2}{7} \quad -\frac{1}{7}$

* Пересчитаем ост. строку:

стр 1 табл 2 $-$ $1 \quad -0,25 \quad 1 \quad 0 \quad 0,25$

стр N (КП$=-0,25$) $-0,5 \quad -0,25 \quad 0 \quad -\frac{1}{14} \quad \frac{1}{28}$

Результат $1,5 \quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{14} \quad \frac{6}{28}$

Таблица №3

$C_{iб}$	Бп	Бр	x_1	x_2	x_3	x_4	r_i
			-1	6	0	0	C_j
6	x_2	1,5	0	1	$\frac{1}{14}$	$\frac{6}{28}$	
-1	x_1	2	1	0	$\frac{2}{7}$	$-\frac{1}{7}$	
		Δ	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{10}{7}$	

Базисное решение табл 3:

$\frac{x_2=1{,}5,\quad x_1=2}{x_3=0,\quad x_4=0}$ это решение соотв. т. $B=(2;1{,}5)$

$\Delta_3 = 0-\left(\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{1}{14}\\ \frac{2}{7}\end{pmatrix}\right) = -\frac{1}{7}$

$\Delta_4 = 0-\left(\begin{pmatrix}6\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{6}{28}\\ -\frac{1}{7}\end{pmatrix}\right) = -\frac{10}{7}$

$\Delta_3, \Delta_4 < 0 \Rightarrow$ вычисление закончено

Получено единственное решение (т.к строка симплекс-разностей табл №3 содержит два нулевых значения)

$x_1^* = 2$

$x_2^* = 1{,}5$

Ответ: функция имеет максимум в т. $B=(2;1{,}5)$, $f(B)=7$

Задание б) Пример 2

Дано:

$f(X) = -x_1+3x_2 \to extr$

$x_1+x_2 \geq 6$

$-x_1+4x_2 \leq 4$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$

Найти минимум в задаче симплекс-методом

Решение:

Подготовим задачу к решению симплекс-методом

Перейдем к задаче поиска максимума, умножив ф-цию на (-1)

1) Перейдем к задаче

$f(X) = x_1 - 3x_2 \to max$

2) Правые части ограничений неотрицательны

3) Приведем задачу к каноническому виду, т.к. (1)-неравенство типа "≥" введем переменную с коэф -1, а в огр. 2-типа "≤" перем-

нную с коэф 1:

$f(X) = x_1 - 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 \Rightarrow max$

$x_1 + x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 = 6$

$-x_1 + 2x_2 + 0x_3 + x_4 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

4) Выпишем столбцы при переменных.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Базис отсутствует, т.к нет достаточного кол-ва базисных столбцов

5) Переходим к М-задаче. Введем в (1) искусственную перем. $x_5 \geq 0$

$x_1 + x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 = 6$

$-x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Выпишем столбцы при перем.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & & & \text{базис} & \text{базис} \end{array}$$

Базис найден

Введем x_5 в $f(x)$ с коэф $(-M)$:

$f(x) = x_1 - 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + (-M)x_5 \to max$

6) Окончательно получаем подготовленную задачу

$f(X) = x_1 - 3x_2 + 0 \cdot x_3 + 0x_4 - Mx_5 \to max$

$x_1 + x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 + x_5 = 6$

$-x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Базисные перем. x_4, x_5

Свободные x_1, x_2, x_3

начальное базисное решение

$$\frac{x_1 = 0 \quad x_2 = 0}{x_3 = 0 \quad x_4 = 4 \quad x_5 = 6} \Rightarrow \text{соотв точке } O = (0, 0)$$

Проведем вычисления с помощью симплекс-таблиц.

Табл №1

			1	-3	0	0	-M	c_j
$C_б$	$Б_п$	$Б_р$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	v_i
0	x_4	4	$\boxed{-1}$	2	0	1	0	-4
-M	x_5	6	1	1	-1	0	1	6
		Δ	M+1	M-3	M	0	0	

$\Delta_1 = 1 - \left(\begin{pmatrix}0\\-M\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = 1+M$

$\Delta_2 = -3 - \left(\begin{pmatrix}0\\-M\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right) = -3+M$

$\Delta_3 = 0 - \left(\begin{pmatrix}0\\-M\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right) = M$

В состав БП вводится x_1, выводится x_5

Вычислим v_i

$v_1 = \frac{4}{-1} = -4$ $\quad v_2 = \frac{6}{1} = 6$

Таблица 2

			1	-3	0	0	-M	C_j
$C_б$	$Б_п$	$Б_р$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	v_i
0	x_4	10	0	3	$\boxed{-1}$	1	1	-10
1	x_1	6	1	1	$\boxed{-1}$	0	1	-6
		Δ	0	-4	1	0	-M-1	

Базисное решение $\dfrac{x_1=6 \quad x_2=0}{x_3=0 \quad x_4=10 \quad x_5=0} \Rightarrow$ соотв. точке $B=(6;0)$

$\Delta_2 = -3 - \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) = -4$

$\Delta_3 = 0 - \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right) = 1$

$\Delta_5 = -M - \left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = -M-1$

В состав БП вводится x_3

Вычислим v_i $\quad v_1 = \frac{10}{-1} = -10$, $\quad v_2 = \frac{6}{-1} = 6$

В ходе решения выяснилось, что среди эл-тов (+) столбца нет положительных, зн. задача решения не имеет из-за неограниченности МДР.