

Лабораторна робота №1

Студента 3 курсу спеціальності
122 комп'ютерні науки
Факультету комп'ютерних наук та кібернетики
Групи ТТП-31
Масича Нікіти Дмитровича

Варіант 8

Завдання 1

42. Наближено обчислити інтеграл $I = \int_2^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,005$. Використати метод Сімпсона, правило Рунге.

Маємо невластний інтеграл 1 роду - не обмежена верхня границя.
Завдання розв'язано за допомогою програми, написаної мовою Go.

Використаємо правило Рунге для оцінки точності відповідно до формули:

$$\frac{\left| I_{\frac{h}{2}} - I_h \right|}{2^p - 1}.$$

```
func rungesRule(I, I2, order float64) float64 { 1 usage
    return math.Abs(I-I2) / (math.Pow(x: 2, order) - 1)
}
```

І зробимо перевірку відповідно до епсілон:

```
deviation := rungesRule(I, I2, order)

fmt.Printf("Approximation using #{n} intervals: #{I2}, Error: #{deviation}\n")

I = I2

if deviation < epsilon {
    break
}
```

Самі інтеграли обраховуються з використання методу Сімпсона за формулою з цілою нумерацією вузлів:

$$I \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + 4 \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(x_n) \right)$$

```
func simpsonsRule(a, b float64, n int) float64 {
    h := (b - a) / float64(n)
    sum := f(a) + f(b)

    for i := 1; i < n; i += 2 {
        sum += 4 * f(a+float64(i)*h)
    }

    for i := 2; i < n-1; i += 2 {
        sum += 2 * f(a+float64(i)*h)
    }

    return h / 3 * sum
}
```

Сама функція, як і інші параметри, задаються відповідним образом в коді:

```
const (
    epsilon = 5.0E-4 = 0.0005 1 usage
    a = 2 = 2.0 2 usages
    b = 10 = 10.0 2 usages
    order = 4 // 4 is the order of Si
)

func f(x float64) float64 { 4 usages
    return 1 / (1 + math.Pow(x, y: 3))
}
```

Отже, в головній функції програми маємо логіку обрахування і перевірки за методом Рунге:

```
func main() {  
    n := 2  
  
    // Initial approximation  
    I := simpsonsRule(a, b, n)  
    fmt.Printf("Initial approximation using #{n}  
  
    // Refinement loop using Runge's rule  
    for {  
        n *= 2  
        I2 := simpsonsRule(a, b, n)  
        deviation := rungesRule(I, I2, order)  
  
        fmt.Printf("Approximation using #{n} inte  
  
        I = I2  
  
        if deviation < epsilon {  
            break  
        }  
    }  
  
    fmt.Printf("Final approximation: #{I}\n")  
}
```

В результаті отримали:

```
Initial approximation using 2 intervals: 0.174058
Approximation using 4 intervals: 0.127108, Error: 0.003130
Approximation using 8 intervals: 0.115902, Error: 0.000747
Approximation using 16 intervals: 0.114345, Error: 0.000104
Final approximation: 0.114345
```

Для порівняння, на відомому сервісі Wolfram Alpha, результат наступний:

Definite integral

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{1+x^3} dx = \frac{1}{18} (\sqrt{3} \pi - 3 \log(3)) \approx 0.11920$$

Похибка ~ 0.004855

Посилання на код програми: <https://github.com/NikitaMasych/km-lab1>

Завдання 2

30. Наближено обчислити інтеграл $I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$ методом Канторовича. Використати квадратурну формулу Сімпсона.

Нижче присутній ручний розв'язок.

Лабораторна робота №1
Завдання 2 (30)

$$\bar{I} = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx$$

Маємо невісний інтеграл II роду:

$$f(0) = +\infty$$

$$\bar{I} = \int_0^1 \frac{e^x}{(x-0)^{\frac{1}{2}}} dx \quad \alpha = 0.5 \quad \varphi(x) = e^x$$

Розкладемо $\varphi(x)$ в ряд Тейлора до x^4 :

$$\varphi(x) = e^x = P_4(x) + \Psi(x)$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

$$\Psi(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}$$

$$\bar{I} = \int_0^1 \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}} dx + \int_0^1 \frac{\Psi(x)}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}}{\sqrt{x}} dx + \int_0^1 \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}}{\sqrt{x}} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{24} x^{\frac{7}{2}} \right) dx +$$

$$+ \int_0^1 \left(\frac{e^x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{24} x^{\frac{7}{2}} \right) dx =$$

$$= \bar{I}_1 + \bar{I}_2$$

Інтеграл \bar{I}_1 проінтегруємо аналітично, \bar{I}_2 наближено обчислимо методом Сімпсона з кроком $h=0,2$. Врахуємо, що

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} - x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6} x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{24} x^{\frac{7}{2}} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &\approx 2,92354 \\
 I_2 &= \frac{0,2}{3} (f(0) + 4f(0,2) + 2f(0,4) + 4f(0,6) + 2f(0,8) + f(1)) \approx \\
 &\approx \frac{0,2}{3} (0 + 4 \cdot 2,73114 + 2 \cdot 2,35878 + 4 \cdot 2,35235 + 2 \cdot 2,48823 + 1,11828) \approx \\
 &\approx 2,183089 \\
 \text{Отже } \bar{I} &\approx 5,106624 \\
 &\approx \frac{0,2}{3} (0 + 4 \cdot 6,16743 \cdot 10^{-6} + 2 \cdot 0,00014446 + 4 \cdot 0,000927967 + 2 \cdot \\
 &0,00351166 + 0,009485) \approx 0,0013689 \\
 \text{Отже } \underline{I} &\approx 2,9249
 \end{aligned}$$

Результат порівняно з Wolfram Alpha:

Definite integral

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}} dx = 2e F(1) \approx 2.9253$$

Похибка ~ 0.0004