Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1
З курсу “Комп’ютерне моделювання”

Виконав:
Студент 3 курсу, групи ТТП-31
Спеціальності “Комп’ютерні науки”
Масич Нікіта Дмитрович

Київ - 2023

Завдання 1

42. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_2^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^3} dx$ за допомогою методу обрізання границь з точністю $\varepsilon = 0,005$. Використати метод Сімпсона, правило Рунге.

Маємо невласний інтеграл 1 роду - не обмежена верхня границя.
Завдання розв’язано за допомогою програми, написаної мовою Go.

Використаємо правило Рунге для оцінки точності відповідно до формули:

$$\frac{\left|I_{\frac{h}{2}} - I_h\right|}{2^p - 1}.$$

```go
func rungesRule(I, I2, order float64) float64 {  1 usage
    return math.Abs(I-I2) / (math.Pow( x: 2, order) - 1)
}
```

І зробимо перевірку відповідно до епсілон:

```go
deviation := rungesRule(I, I2, order)

fmt.Printf("Approximation using #{n} intervals: #{I2}, Error: #{deviation}\n")

I = I2

if deviation < epsilon {
    break
}
```

Самі інтеграли обраховуються з використання методу Сімпсона за формулою з цілою нумерацією вузлів:

$$I \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) + f(x_n)\right)$$

```go
func simpsonsRule(a, b float64, n int) float64 {
    h := (b - a) / float64(n)
    sum := f(a) + f(b)

    for i := 1; i < n; i += 2 {
        sum += 4 * f(a+float64(i)*h)
    }

    for i := 2; i < n-1; i += 2 {
        sum += 2 * f(a+float64(i)*h)
    }

    return h / 3 * sum
}
```

Сама функція, як і інші параметри, задаються відповідним образом в коді:

```go
const (
    epsilon = 5.0E-4  = 0.0005  1 usage
    a = 2         = 2.0  2 usages
    b = 10         = 10.0  2 usages
    order    = 4 // 4 is the order of Si
)

func f(x float64) float64 {  4 usages
    return 1 / (1 + math.Pow(x,  y: 3))
}
```

Отже, в головній функції програми маємо логіку обрахування і перевірки за методом Рунге:

```go
func main() {
    n := 2

    // Initial approximation
    I := simpsonsRule(a, b, n)
    fmt.Printf("Initial approximation using #{n}

    // Refinement loop using Runge's rule
    for {
        n *= 2
        I2 := simpsonsRule(a, b, n)
        deviation := rungesRule(I, I2, order)

        fmt.Printf("Approximation using #{n} inte

        I = I2

        if deviation < epsilon {
            break
        }
    }

    fmt.Printf("Final approximation: #{I}\n")
}
```

В результаті отримали:

```
Initial approximation using 2 intervals: 0.174058
Approximation using 4 intervals: 0.127108, Error: 0.003130
Approximation using 8 intervals: 0.115902, Error: 0.000747
Approximation using 16 intervals: 0.114345, Error: 0.000104
Final approximation: 0.114345
```

Для порівняння, на відомому сервісі Wolfram Alpha, результат наступний:

Definite integral

$$\int_2^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx = \frac{1}{18}\left(\sqrt{3}\,\pi - 3\log(3)\right) \approx 0.11920$$

Похибка ~ 0.004855

Посилання на код програми: https://github.com/NikitaMasych/km-lab1

<u>Завдання 2</u>

30. Наближено обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}dx$ методом Канторовича. Використати квадратурну формулу Сімпсона.

Нижче присутній ручний розв'язок.

Лабораторна робота №1

Завдання 2 (30)

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$$

Маємо невласний інтеграл II роду:

$$f(0) = +\infty$$

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{(x-0)^{\frac{1}{2}}}\,dx \qquad \alpha = 0{,}5 \qquad \varphi(x) = e^x$$

Розкладемо $\varphi(x)$ в ряд Тейлора до x^4:

$$\varphi(x) = e^x = P_4(x) + \Psi(x)$$

$$P_4(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \cancel{\frac{x^5}{120}}$$

$$\Psi(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}$$

$$I = \int_0^1 \frac{P_4(x)}{\sqrt{x}}\,dx + \int_0^1 \frac{\Psi(x)}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24}}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{24}x^{\frac{7}{2}} \right) dx +$$

$$+ \int_0^1 \left(\frac{e^x}{\sqrt{x}} - x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{24}x^{\frac{7}{2}} \right) dx =$$

$$= I_1 + I_2$$

Інтеграл I_1 проінтегруємо аналітично, I_2 наближено обчислимо методом Сімпсона з кроком $h = 0{,}2$. Врахуємо, що

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x}{\sqrt{x}} - x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{6}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{24}x^{\frac{7}{2}} \right) = 0$$

$I_1 \approx 2,92354$

$I_2 = \frac{0,2}{3}\left(f(0) + 4f(0,2) + 2f(0,4) + 4f(0,6) + 2f(0,8) + f(1)\right) \approx$

~~$\approx \frac{0,2}{3}\left(0 + 4\cdot 2,73114 + 2\cdot 2,35878 + 4\cdot 2,35235 + 2\cdot 2,48823 + 2,71828\right) \approx$~~

~~$\approx 2,183084$~~

~~Отже $\bar{I} \approx 5,106624$~~

$\approx \frac{0,2}{3}\left(0 + 4\cdot 6,16743\cdot 10^{-6} + 2\cdot 0,00014446 + 4\cdot 0,000927967 + 2\cdot 0,00351166 + 0,009485\right) \approx 0,0013689$

Отже $\bar{I} \approx 2,9249$

Результат порівняно з Wolfram Alpha:

Definite integral

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\,e\,F(1) \approx 2.9253$$

Похибка ~0.0004