и аналогично

$$\int_M^P (H\,d\eta - K\,d\xi) = -(uv)_M + (uv)_P + \int_P^M \left(2\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{\sqrt{2}}v\right) u\,ds.$$

Отсюда и из формулы (6) следует:

$$(uv)_M = \frac{(uv)_P + (uv)_Q}{2} + \int_P^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v\right) u\,ds + \int_Q^M \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{a+b}{2\sqrt{2}}v\right) u\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int_P^O (H\,d\eta - K\,d\xi) - \frac{1}{2}\int\limits_{MPQ}\int (v\mathcal{L}[u] - u\mathcal{M}[v])\,d\xi\,d\eta. \qquad (8)$$

Эта формула является тождеством, верным для любых достаточно гладких функций u и v.

Пусть u – решение поставленной выше задачи с начальными условиями, а функция v зависит от точки M как от параметра и удовлетворяет следующим требованиям:

$$\mathcal{M}[v] = v_{\xi\xi} - v_{\eta\eta} - (av)_\xi - (bv)_\eta + cv = 0 \text{ внутри } \triangle MPQ \qquad (9)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b-a}{2\sqrt{2}}v \quad \text{на характеристике } MP, \\ \frac{\partial v}{\partial s} &= \frac{b+a}{2\sqrt{2}}v \quad \text{на характеристике } MQ, \end{aligned}\right\} \qquad (9a)$$

$$v(M) = 1.$$

Из условий на характеристиках и последнего условия находим:

$$v = e^{\int_{s_0}^s \frac{b-a}{2\sqrt{2}}ds} \quad \text{на } MP,$$

$$v = e^{\int_{s_n}^s \frac{b+a}{2\sqrt{2}}ds} \quad \text{на } MQ,$$

где s_0 — значение s в точке M. Как мы видели в § 4, уравнение (9) и значения функции v на характеристиках MP и MQ полностью определяют ее в области MPQ. Функцию v часто называют функцией Римана.

Таким образом, формула (8) для функции u, удовлетворяющей уравнению (7), принимает следующий окончательный вид:

$$u(M) = \frac{(uv)_p + (uv)_Q}{2} + \frac{1}{2}\int_P^Q [u(v_\xi d\eta + u_\eta d\xi) - u(v_\xi d\eta + v_\eta d\xi) + \\ + uv(a\, d\eta - b\, d\xi)] + \frac{1}{2}\iint_{MPQ} v(M, M') f(M')\, d\sigma_{M'} (d\sigma_{M'} = d\xi\, d\eta). \tag{10}$$

Эта формула решает поставленную задачу, так как выражения, стоящие под знаком интеграла вдоль PQ, содержат функции, известные на дуге C. В самом деле, функция v была определена выше, а функции

$$u|_C = \varphi(x),$$
$$u_x|_C = u_s \cos(x,s) + u_n \cos(x,n) = \frac{\varphi'(x) - \psi(x) f'(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}},$$
$$u_y|_C = u_s \cos(y,s) + u_n \cos(y,n) = \frac{\varphi'(x) f'(x) + \psi(x)}{\sqrt{1 + (f'(x))^2}},$$

вычисляются при помощи начальных данных.

Формула (10) показывает, что если начальные данные известны на дуге PQ, то они полностью определяют функцию в характеристическом $\triangle PMQ$, если функция $f(x, y)$ известна в этой области[1].

Формула (10), полученная в предположении существования решения, определяет его через начальные данные и правую часть уравнения (7) и тем самым по существу доказывает единственность решения (ср. с формулой Даламбера, гл. II, § 2, стр. 51).

Можно показать, что функция u, определяемая формулой (10), удовлетворяет условиям задачи (7)—(7'). Однако мы на этом доказательстве не останавливаемся.

3. Физическая интерпретация функции Римана. Выясним физический смысл функции $v(M, M')$. Для этого найдем решение неоднородного уравнения

$$\mathcal{L}[u] = -2f_1 \quad (f = 2f_1)$$

с нулевыми начальными условиями на кривой C. Обращаясь к формуле (10), видим, что искомое решение имеет вид

$$u(M) = \int\limits_{MPQ}\int v(M, M') f_1(M')\, d\sigma_{M'}. \tag{11}$$

---

[1] 1