Лабораторная работа № 2.1.5
Исследование термических эффектов при упругих деформациях.

Никита Москвитин, Б04-204

2023

1 Аннотация

В данной работе исследовалоась резина и ее свойства. Эксперементально была получена зависмость растяжения резины от приложенной силы при постоянной температуре, и посчитано значение модуля Юнга для исследуемого образца. А также был измерен термический эффект резины при адиабатическом растяжении. Была экспериментально полученна теплоемкость образца, а так же удельная теплоемкость резины.

2 Введение

Уравнения состояния большинства тел — твердых, жидких или газообразных — таковы, что они стремятся увеличить свой объём при изобарном повышении температуры. Согласно принципу Ле-Шателье–Брауна, их адиабатическое расширение должно сопровождаться «компенсирующим» процессом, то есть понижением температуры. Однако существуют материалы, такие как резина и другие эластичные полимеры (а также, например, вода при температуре от 0℃ до 4℃), для которых упомянутые эффекты имеют обратный знак: при нагреве под постоянной нагрузкой они сжимаются, а при адиабатическом расширении — нагреваются.

Резина — эластичный полимерный материал, обладающий способностью упруго растягиваться без разрушения в несколько раз (до 1000% для некоторых сортов). Характерные значения модуля упругости при малых растяжениях резины составляют в зависимости от сорта $E \sim 1 \div 30$МПа (в работе используется мягкая резина с $E \sim 1$МПа). Коэффициент Пуассона резины близок к $\mu \sim 1/2$, то есть при растяжении вдоль некоторой оси объём образца практически не меняется: $V \approx const$. Принципиальное отличие резины от обычных твёрдых тел заключается в том, что её растяжение происходит не за счёт изменения расстояний между атомами, а за счёт переориентации и перемещения звеньев полимерных цепочек. Эта особенность и обуславливает специфические термические и механические свойства резины.

Для начала рассмотрим растяжение резиновой тонкой полосы длиной l под действием внешней силы f. Работа, совершаемая образцом, складывается из работы по растяжению и работы против внешнего давления:

$$\delta A = -fdl + PdV \quad (1)$$

где P — атмосферное давление. Так как выше мы сказали, что объем резины почти не изменяеться, то вторым слагаемым можно принебречь. Запишем первое начало термодинамики, расписав теплоту, через температуру и измнение энтропии.

$$dU \approx TdS + fdl \quad (2)$$

Но при измерениях проводимх в контакте с окружающей средой, удобнее писать через свободную энергию, которая определяется так:

$$F = U - TS \quad (3)$$

Тогда изменение свободной энергии работе внешних сил, при изотермическом процессе:

$$\Delta F|_T = \Delta U - T\Delta S = A_{\text{внеш}} \quad (4)$$

Продиффиринцируем (3) и получим:

$$dF = fdl - Sdt \quad (5)$$

Тогда выделим:

$$f = \left(\frac{\partial F}{\partial l}\right)_T, \qquad\qquad S = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_l \tag{6}$$

Первое соотношение даёт связывает свободную энергию как функцию температуры и удлинения $F(T, l)$ с термическим уравнением состояния $f(T, l)$ системы. Второе позволяет вычислить энтропию, задав таким образом калорические свойства системы. В частности, внутренняя энергия может быть отсюда выражена как функция температуры и удлинения:

$$U(T, l) = F(T, l) - T(\frac{\partial F}{\partial T})_l \tag{7}$$

это называется соотношение Гиббса—Гельмгольца
Далее, дифференцируя первое уравнение (5) по T, а второе по l, получим одно из соотношений Максвелла:

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_l \tag{8}$$

Это соотношение связывает тепловой эффект при изотермическом процессе с уравнением состояния вещества:

$$\delta Q|_T = TdS|_T = -T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_l dl|_T \tag{9}$$

Наконец, получим в общем виде связь между термическим $f(T, l)$ и калорическим $U(T, l)$ уравнениями состояния тела:

$$f = \left(\frac{\partial U}{\partial l}\right)_T - T\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T \tag{10}$$

Эта формула показывает, что упругие свойства вещества определяются не только зависимостью его внутренней энергии от деформации, но и изменением его энтропии. В большинстве твёрдых тел доминирующим является первое слагаемое (10), тогда как в резине (а также в газах) преобладает второе.
Все полученные выше соотношения справедливы в равной степени для растяжения любых материалов. Теперь перейдём к рассмотрению растяжения резиновой полосы. Рассмотрим упрощённую модель: предположим, что внутренняя энергия резиновой полосы не зависит от её длины и определяется только температурой:

$$U = U(T) \tag{11}$$

Хотя с первого взгляда такая модель может показаться надуманной (ведь резина — не идеальный газ!), однако оказывается, что она весьма неплохо подтверждается на опыте. Объяснить это можно следующим образом: внутренняя энергия есть сумма кинетической и потенциальной энергий молекул $U = K + \Pi$, где кинетическая энергия определяется температурой, а потенциальная зависит, главным образом, от среднего расстояния между молекулами. Последнее же при растяжении меняется мало, поскольку объём резиновой полосы остаётся практически неизменным. Условие (11) иногда называют моделью «идеальной резины».
Рассмотрим изотермическое растяжение такой резины($dU = 0$): $Q = -A_{\text{внеш}}$. Видно, что при изотермическом растяжении резина, растянутая внешней силой $f > 0$, выделяет тепло: $Q < 0$. При этом работа, совершаемая внешними силами, идёт не на приращение внутренней энергии, а целиком передаётся окружающей среде в виде тепла. При изотермическом растяжении в (10) 1 член равен 0, получается:

$$f = -T\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)_T \tag{12}$$

Используя соотношение Максвелла (8) получим:

$$f = T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_l \tag{13}$$

Это может быть выполнено, только если сила прямо пропорциональна температуре, то есть уравнение состояния имеет вид:

$$f(T,l) = \frac{T}{T_0}\tilde{f}(\frac{l}{l_0}) \tag{14}$$

где $\tilde{f}(\frac{l}{l_0})$ — некоторая функция, зависящая только от растяжения образца.
Теперь рассмотрим адиабатическое растяжение резины. Квазистатический (обратимый) процесс является изэнтропическим: $dS = 0$. Тогда из первого начала термодинамики имеем: $dU = fdl$, но если учтем, модель идеально резины (11) получим $dU = C_l dT$, где C_l теплоемкость резины при постоянном удлинении. Считаю изменение температуры малым, по сравнению с самой температурой получим:

$$\triangle T = \frac{1}{C_l}\int\limits_{l_0}^{l} f dl = \frac{A_{\text{внеш}}}{C_l} \tag{15}$$

Таким образом, при адиабатическом растяжении резина нагревается пропорционально работе внешних сил.
Теперь рассмотрим закон расстяжения резины, он выведен изходя из модели идеальной полимерной сетки и выглядит вот так:

$$f(T,\lambda) = s_0 E \cdot \frac{1}{3}\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{16}$$

Здесь s_0 — площадь поперечного сечения недеформированного образца, $E = E_o\frac{T}{T_0}$— модуль Юнга резины, зависящий от температуры.

3 Экспериментальная установка и методика измерений

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 1. Исследуемый образец 1 (плоская резиновая полоса) расположен внутри закрытого кожуха 2 и закреплён в зажимах 3. Верхний зажим неподвижен, а нижний может свободно перемещаться вдоль вертикальных направляющих 4. Положение нижнего зажима измеряется линейкой 5. К нижнему зажиму подвешена платформа 6, на которой могут размещаться грузы. Растяжение образца может быть ограничено положением упора 7, фиксируемого винтами на стойке 8. Внутри резиновой полосы (в её центре) вшит один из спаев термопары 9 (рабочий спай). Второй (компенсирующий) спай 10 находится внутри кожуха вблизи стенки. Выводы термопар подключаются через усилитель к цифровому осциллографу.

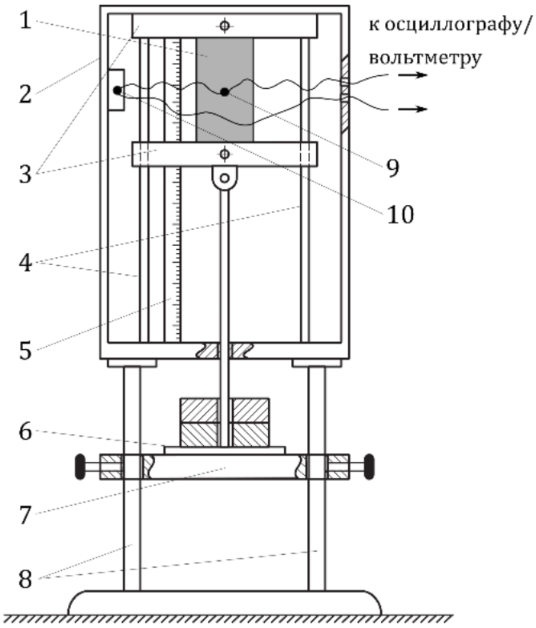


рис. 1

Для начала, просто подвешивались грузы к резинке, чтобы измерить модуль Юнга при комнатной температуре. Далее, для измерения термического эффекта резины использовалось 2 метода. Первый заключался в быстром растяжении резинки и измерении скачка температур. Второй в мендленном растяжении резинки, и экстропаляции полученной зависимости к начальному моменту времени.

4 Измерения

Параметры установки: $m_r = (287,8 \pm 1,0)$г - масса рамки с платформой, $l_0 = (11,0 \pm 0,1)$см, $d_0 = (12,0 \pm 0,5)$мм, $h_0 = (1,75 \pm 0,05)$мм, $\rho = 1,2$г/см^3
Сделаем измерения для вычисления подуля Юнга:

Таблица 1: Данные для нахождения модуля Юнга

m, г	$\triangle m$, г	l, см	λ	$\triangle\lambda$	$\lambda - \frac{1}{\lambda^2}$	$\triangle\left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2}\right)$
389,7	1,5	14,3	1,300	0,013	0,708	0,009
592,9	1,5	15,5	1,409	0,013	0,905	0,009
490,7	1,5	14,8	1,345	0,013	0,793	0,009
542,3	1,5	15,1	1,373	0,013	0,842	0,009
693,9	1,5	16,0	1,455	0,013	0,983	0,009
744,0	1,5	16,3	1,482	0,013	1,026	0,009
795,7	1,5	16,9	1,536	0,013	1,113	0,009
973,9	1,5	18,7	1,700	0,013	1,354	0,009
1148,7	1,5	21,0	1,909	0,013	1,635	0,009
1325,4	1,5	23,0	2,091	0,013	1,862	0,009
1255,7	1,5	22,7	2,064	0,013	1,829	0,009
849,7	1,5	18,0	1,636	0,013	1,263	0,009
1052,9	1,5	20,0	1,818	0,013	1,516	0,009
1095,6	1,5	20,9	1,900	0,013	1,623	0,009
640,9	1,5	15,7	1,427	0,013	0,936	0,009

Подсчитаем работу при адиабатическом растяжении по такой формуле, где где $k = \frac{s_0 E}{3}$:

$$A = k\left(\frac{l^2}{2l_0} + \frac{l_0^2}{l} + \frac{3l_0}{2}\right) \tag{17}$$

Посторим таблицу с измерениями для следующего пункта(1 способ):

Таблица 2: Данные для измерение теплоемкости 1 способ

l, см	ε_1, мВ	ε_2, мВ	ε_3, мВ	$\varepsilon_{ср}$, мВ	$\triangle\varepsilon$,мВ	A/k, м	$\triangle A/k$, м
16,8	39,6	38,4	40	39	4	49,4	0,5
17,4	56	60,8	63,2	60	6	51,0	0,5
18	71,2	73,6	73	73	4	52,7	0,5
18,6	84,8	85,6	81,6	84	7	54,5	0,5
19,1	116	118	90,4	108	20	56,0	0,5
19,6	112	87,2	104	101	15	57,6	0,5
20,1	112	112	119	114	7	59,2	0,5
15,4	13,6	6,8	13,2	11	3	45,9	0,5

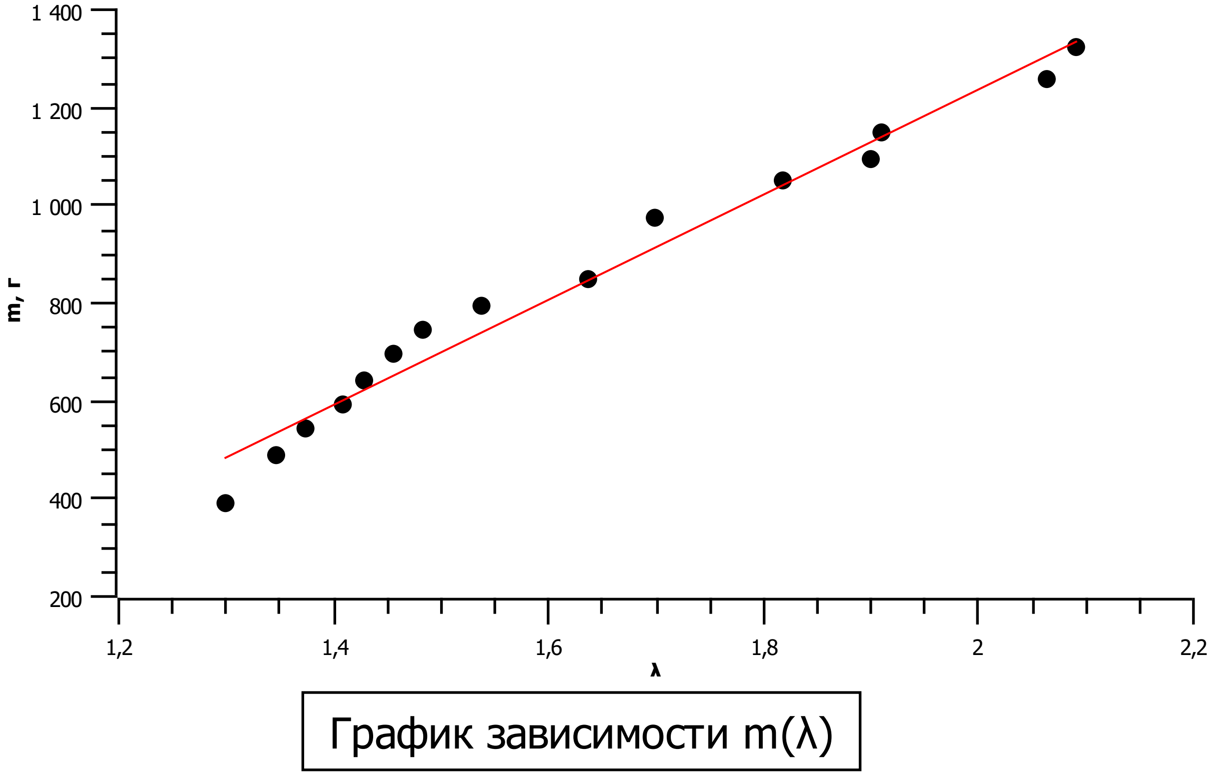
Посторим таблицу с измерениями для следующего пункта(2 способ):

Таблица 3: Значения для измерения теплоемкости 2 способ

ε, мВ	$\triangle T$, °C	$\triangle\varepsilon$, мВ	$ln(\frac{\triangle T}{T_0})(t)$	$\triangle ln(\frac{\triangle T}{T_0})(t)$	ν, МГц т	$\triangle\nu$, МГц	$t * 10^9$, с	$\triangle t * 10^9$, с
28	0,14	3	-7,6	0,9	57,8	0,5	17,3	0,2
29	0,15	3	-7,6	0,8	45,3	0,5	22,1	0,3
27	0,14	3	-7,7	0,9	40,5	0,5	24,7	0,4
66	0,34	3	-6,8	0,46	392,2	0,5	2,550	0,004
60	0,31	3	-6,9	0,4	289,9	0,5	3,450	0,006
53	0,27	3	-7,0	0,4	235,3	0,5	4,25	0,01
47	0,24	3	-7,2	0,5	177,8	0,5	5,63	0,02
43	0,22	3	-7,2	0,6	150,0	0,5	6,67	0,03
43	0,22	3	-7,2	0,6	138,9	0,5	7,20	0,03
41	0,21	3	-7,2	0,6	125,8	0,5	7,95	0,04
39	0,20	3	-7,3	0,6	106,4	0,5	9,40	0,05
35	0,18	3	-7,4	0,7	76,1	0,5	13,14	0,09
31	0,16	3	-7,5	0,8	58,82	0,5	17,0	0,2

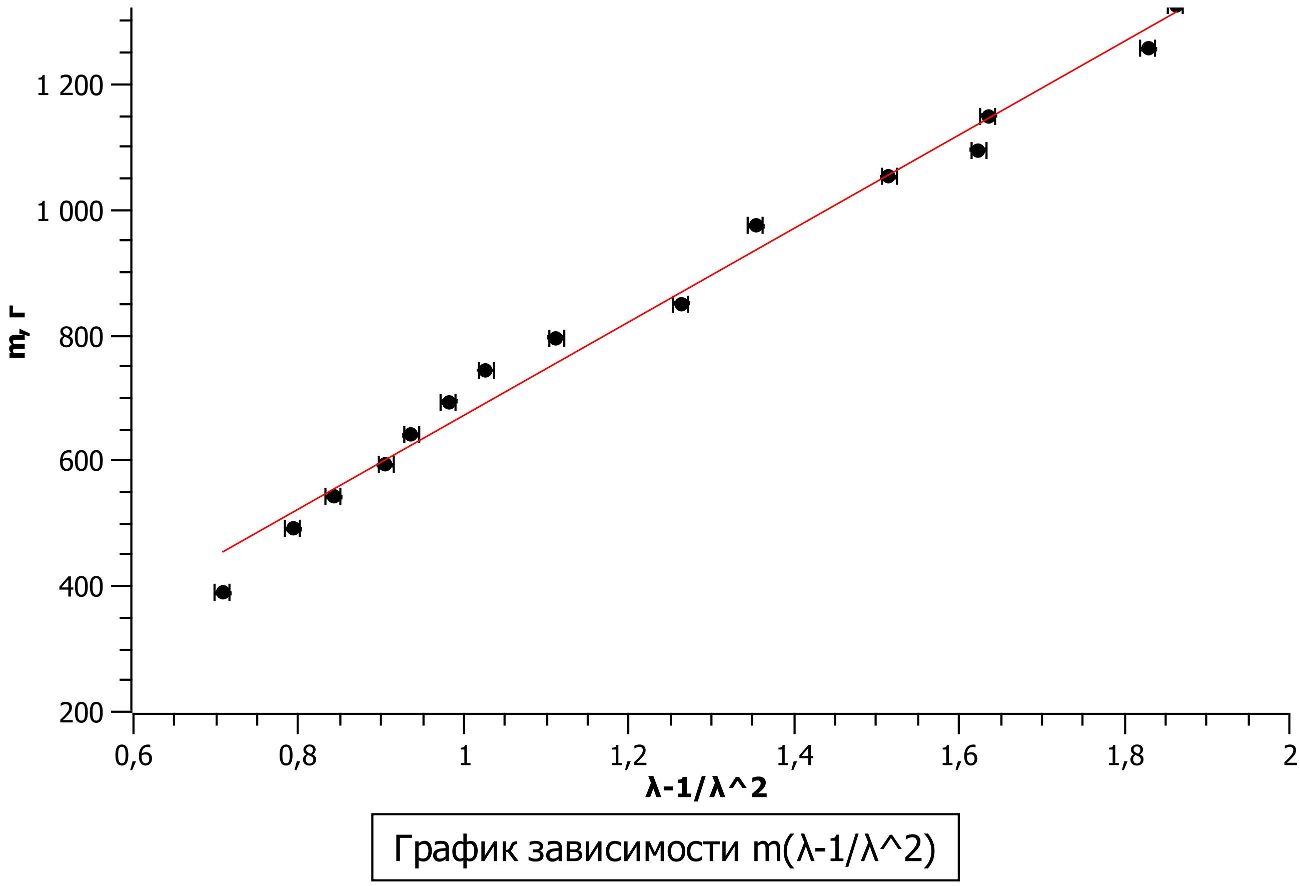
5 Обработка результатов

Посторим графики $m(\lambda)$ - рис.2 и $m(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})$ - рис.3, $\varepsilon(A/k)$ (1 способ) - рис.4 и $ln(\frac{\triangle T}{T_0})(t)$ (2 способ) - рис.5:



1 400
1 200
1 000
800
600
400
200
m, г
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,2
λ
График зависимости m(λ)

рис. 2



1 200
1 000
800
600
400
200
m, г
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
λ-1/λ^2
График зависимости m(λ-1/λ^2)

рис. 3

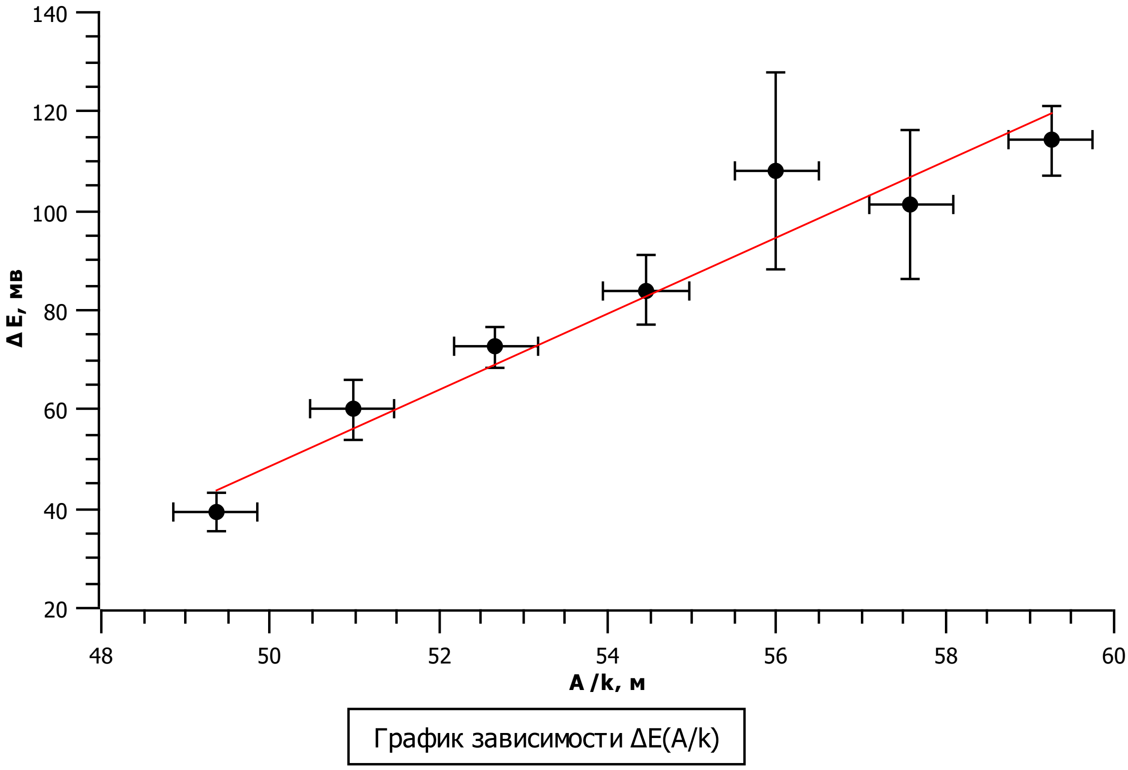

140
120
100
80
60
40
20
ΔE, мв
48
50
52
54
56
58
60
A /k, м
График зависимости ΔE(A/k)

рис. 4

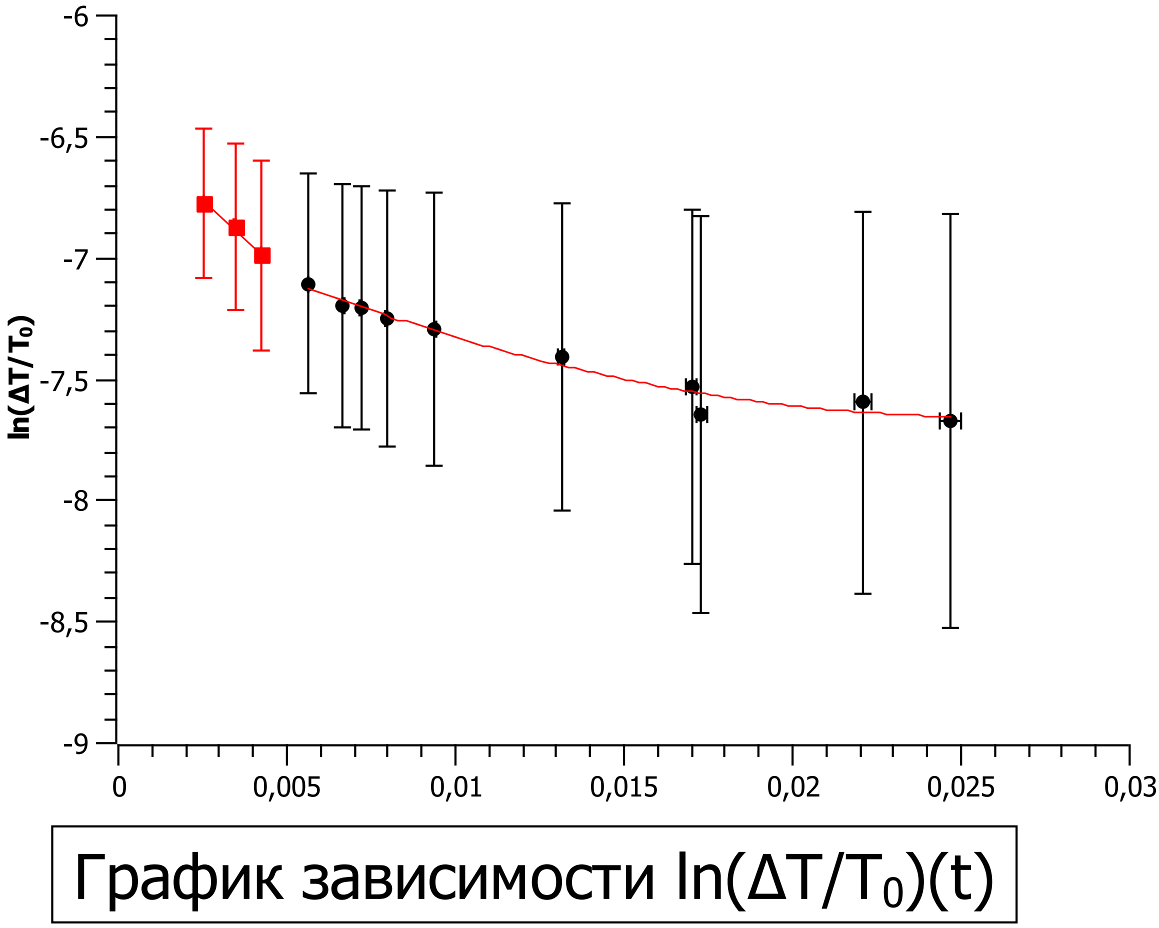

-6
-6,5
-7
-7,5
-8
-8,5
-9
ln(ΔT/T0)
0
0,005
0,01
0,015
0,02
0,025
0,03
График зависимости ln(ΔT/T0)(t)

рис. 5

Как мы видим зависимость $m(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})$ лучше ложится на прямую, чем $m(\lambda)$. Также это подтверждают квадраты коэффиицента кореляции - для 1 зависимости $R^2 = 0,9976$, для 2 зависимости $R^2 = 0,9867$. Посчитаем модуль Юнга при комнатной температуре $T_0 = 22$ °C по формлуе, где $k_1 = (745,0 \pm 1,1)$г - коэффицент наклона графика $m(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})$:

$$E_0 = \frac{3gk_1}{s_0} \tag{18}$$

Тогда $E_0 \approx 1,04 \pm 0,06$МПа, что полностью соответсвует значению резины указанному в начале работы $E \sim 1$МПа.
Теперь определим теплоемкость 1 способом: $C_1 = \frac{ek}{k_2} = (1,85 \pm 0,19)\frac{\text{Дж}}{\text{К}} \approx 0,44\frac{\text{кал}}{\text{К}}$, где e - чувствиетельность, а $k_2 = (7,7 \pm 0,8)\frac{\text{мВ}}{\text{м}}$ - коэфицент наклона графика зависимости $\varepsilon(A/k)$, тогда удельная теплоемкость $c_1 = (670 \pm 70)\frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}$.
Теперь определим теплоемкость 2 способом. Точка пересечения с осью ординат при экстраполяции имеет координату $B = (-6,4 \pm 1,0)$, из чего получается термический эффект равен $\triangle T = 0,47$°C при $l = 20,1$ см. Тогда получается что $C_2 = 4,1 \pm 0,7\frac{\text{Дж}}{\text{К}}$, из чего следует, что удельная теплоемкость равна $c_2 = (1470 \pm 230)$.
Оценим коэффицент теплового расширения резины. $\alpha = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial l}{\partial T}\right)_f = 0,78$. Для этого рассмотрели 2 способ, так как получили максимально точно термический эффект.

6 Вывод

По результатам данной работы было выясненно, что при больших растяжениях резина подчиняется закону представленному в формуле (16), это подтверждает квадрат коэффицента кореляции $R^2 = 0,9976$, из этих соображений был получен модуль Юнга мягкой резины при комнатной температуре $T_0 = 22$ °C $E_0 \approx 1,04 \pm 0,06$МПа, что соответствует табличным данным для нашего образца. Был измерен термический эффект (данные представлены в Таблице 3 для 1 способа и для 2 - $\triangle T = 0,47$°C). А также было полученно значение обычной и удельной теплоемкости резины 2 способами. С помощью 1 го способа получили - $c_1 = (670 \pm 70)\frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}$, с помощью 2 способа - $c_2 = (1470 \pm 230)$, а табличное значение $c = 1420\frac{\text{Дж}}{\text{кг К}}$ (источник: https://www.center-pss.ru/math/teploemkost/rezina.htm). Как мы видим значение полученное 2 способом гораздо ближе к табличному, это связанно с тем, что не смотря на большее колличество измерений в 1 способе, во 2 значение термического эффекта было измерено гораздо точнее.