Лабораторная работа № 1.2.3: Определение момента инерции твердых тел с помощью трифилярного подвеса

Никита Москвитин

12 января 2023 г.

1 Анотация

В данной работе мы будем исследовать моменты инерции твердых тел в зависимости от их массы, геометрической формы и размеров. Также мы исследуем аддитивность моментов инерции. Проверим выполняется ли на практике теорема Гюйгенса-Штейнера.

Цель работы: измерить моменты инерции предложенны тел с помощью трифилярного подвеса и сравнить их с теоретическими, проверить аддитивность момента инерции и справедливость теоремы Гюйгенса-Штейнера.

Оборудование: трифилярный подвес, исследуемые тела, счетчик числа колебаний и времени.

2 Теоретическое введение

Момент инерции тела определяется по формуле:

$$I = \int_0^m r^2 dm \quad (1)$$

Рис. 1

Если тело простой геометричесокй формы, то его момент инерции нетрудно посчитать теоретически. Но при сложной форме это бывает сделать достаточно трудно, тогда его измеряют практически. Очень часто используют установку представленную на рис. 1. Мы тоже ею воспользуемся – мы будем создавать в ситеме крутильные колебания. Уравнение энергии для такой установки:

$$E = \frac{I\varphi^2}{2} + mg(z_0 - z) \quad (2)$$

Здесь I – момент инерции тела с платформой, m – масса тела с платформой, φ – угол поворота, z_0 – координата цента платформы по вертикали при равновесии, z – координата платформы при некотором угле поворота φ, E – полная механическая энергия системы.

Как мы видим из сотношения (2), возвращающая сила возникает благодарая силе тяжести.

Воспользуемся системой координат x, y, z, связанной с верхней платформой, как показано на рис. 1. Так как нить не растяжима, то для люого момента времени мы можем записать ее длину через координаты:

$$L^2 = z^2 + R^2 sin\varphi + (Rcos\varphi - r)^2 \quad (3)$$

Учитывая, что при малых углах поворота:

$$cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2} \quad (4)$$

получаем:

$$z^2 \approx z_0^2 - Rr\varphi^2 \quad (5)$$

Тогда учитывая малость угла получаем:

$$z \approx z_0 - \frac{Rrcos\varphi^2}{2z_0} \tag{6}$$

Подставив (6) в уравнение (2) и продифференцировав получаем уравнение колебаний:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgRr\varphi}{Iz_0} = 0 \tag{7}$$

где T:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{Iz_0}{mgRr}} \tag{8}$$

из (8) находим формулу для определния момента инерции:

$$I = \frac{mgRrT^2}{4\pi^2 z_0} \tag{9}$$

учитывая, что $R, r, z_0 = const$:

$$I = kmT^2 \tag{10}$$

где:

$$k = \frac{gRr}{4\pi^2 z_0} \tag{11}$$

Используя полученные уравнения мы сможем получить момент инерции тел, измерив период колебаний и параметры установки.

3 Измерения

Определим количесвто колебаний при котором можно считать, что колебания не затухают, для этого измерим период колебаний при разных количествах колебаний – N, и выберем такое N при котором в пределах погрешности секундомера значение не отличается от меньших N

Таблица 1: Данные для определения оптимального количества колебаий

N	t, с	T,с
10	45,34	4,53
20	90,57	4,53
30	135,67	4,52
50	225,46	4,51

Из таблицы хорошо видно что оптимальное $N = 20$.

Определим теперь момент инерции платформы для этого возьмем 10 измерений по 20 колебаний:

Таблица 2: Времена для определения моментов инерции

Т	t_1,с	t_2,с	t_3,с	t_4,с	t_5,с	t_6,с	t_7,с	t_8,с	t_9,с	t_{10},с	$\bar{t}$,с	T,с
П	89,12	90,17	90,57	89,32	89,45	89,71	89,34	89,58	91,01	90,98	89,93	4,50
Б	73,27	72,58	72,38	73,21	72,98	73,27	73,41	73,56	74,32	72,82	73,18	3,66
К	81,07	81,71	81,99	82,47	82,37	82,49	81,76	82,46	82,89	83,8	82,30	4,12
БК	71,17	71,91	71,80	71,16	70,66	71,72	73,01	72,75	72,56	71,00	71,77	3,59

Снимем зависимость $T(h)$ для проверки аддитивности момента инерции:

Таблица 3: Зависимость $T(h)$

t_1,с	t_2,с	t_3,с	t_4,с	t_5,с	$\bar{t}$,с	T,с	h,см
63,94	63,9	64,1	64,03	64,09	64,01	3,20	1
66,80	64,61	65,68	65,81	65,44	65,67	3,28	2
67,16	67,52	68,26	66,63	67,02	67,32	3,37	3
70,00	70,73	70,75	70,63	71,10	70,64	3,53	4
36,99	37,03	37,56	37,7	37,41	37,34	3,73	5
38,83	39,44	39,84	39,86	40,08	39,61	3,96	6
41,72	41,83	42,11	42,39	42,95	42,20	4,22	7

Измерим параметры тел:

брусок (a – ширина, b – высота, c – длина, mb – масса):

$$a = (2,700 \pm 0,005)cm$$

$$b = (2,700 \pm 0,005)cm$$

$$c = (17,01 \pm 0,01)cm$$

$$mb = (1039,4 \pm 0,3)g$$

крышка (hk – толщина, rk – диаметр ручки, Rk – диаметр диска mk – масса):

$$hk = (0,335 \pm 0,005)cm$$

$$rk = (1,020 \pm 0,005)cm$$

$$Rk = (17,03 \pm 0,01)cm$$

$$mk = (584,2 \pm 0,3)g$$

кружочка (D – диаметр кружочка, h – высота кружочка, mp – масса половинки):

$$D = (9,000 \pm 0,005)cm$$

$$h = (12,700 \pm 0,005)cm$$

$$mp = (721,1 \pm 0,3)g$$

платформа (R – радиус нижнего диска, r – радиус верхнего диска, m – масса платформы, h – высота платформы):

$$H = (2,162 \pm 0,003)m$$

$$r = (30,2 \pm 0,3)mm$$

$$R = (115,5 \pm 0,5)mm$$

$$m = (1026,4 \pm 0,5)g$$

4 Обработка результатов

Используя формулы полученные в пункте 2, расчитаем моменты инерции тел:

Таблица 4: Моменты инерции тел

Т	$I, kg * m^2$	$I_{teor}, kg * m^2$
П	$0,00832 \pm 0,00013$	-
Б	$0,00277 \pm 0,00007$	0,00257
К	$0,00262 \pm 0,00007$	-
БКА	$0,00539 \pm 0,00020$	-
БК	$0,00536 \pm 0,00013$	-

Для оценки погрешности использовали формулы:

$$\sigma_{random} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{medium})^2} \tag{12}$$

$$\sigma_{all} = \sqrt{\sigma_{random}^2 + \sigma_{instrumentation}^2} \tag{13}$$

Построим график $T^2(h^2)$:

Коэфицент наклона этого графика равен:

$$\alpha = \frac{1}{k} = 1575\frac{c^2}{m^2}$$

Причем из теории следует, что

$$\alpha = 2000\frac{c^2}{m^2}$$

5 Вывод

Мы научились измерять моменты инреции различных тел, причем значение близки к теоретическим, поэтому можно использовать эту установку для измерения момента инерции более сложных тел (результаты представлены в таблице 4). Также проверили аддитивность момента инерции, опять же все выполняется и результаты имеются в таблице 4. Была проверена теорема Гюйгенса-Штейнера, отображение видно на рис.2. Точки хорошо ложатся на прямую, коэфицент наклона отличается от теоретического на 25% , но это допустимо в нашем случае, так как при измерении была замечена огромная проблема установки – при запуске колебаний грузы смещаются. Можно было бы добится лучших результатов при измерениях, если на платформу положить резиновый коврик и закрепить ось вращения платформы, чтобы колебаний происходили строго в одной плоскости.