

# Закон Ципфа–Парето и процесс Юла

Плетнев Никита Вячеславович

Московский физико-технический институт  
Факультет управления и прикладной математики

23 декабря 2020 г.

## Исследуемая система

- Неограниченно много жителей, которые собирают монеты. Обозначение:  $\vec{n} = (n_1, n_2, \dots)^T$ , где  $n_s$  — это количество жителей, имеющих по  $s$  монет.
- $c_s$  — это доля жителей, имеющих ровно  $s$  монет (среди имеющих монеты, поскольку  $n_0$  по условию не ограничено).
- На первом шаге ( $t = 1$ ) монету получает один житель:  $n_1(1) = 1$ .
- На каждом следующем шаге одну монетку получает новый житель, а другую — один из старых. С каждым элементом вектора  $\vec{n}$  в момент времени  $t$  сопоставим случайную величину:

$$\xi_{s,t} = \begin{cases} 1, & \text{если монету получил тот, у кого было } s, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

## Исследуемая система

- Тогда можно выписать формулы перехода:

$$\begin{cases} n_1(t+1) = n_1(t) + 1 - \xi_{1,t}, \\ n_s(t+1) = n_s(t) + \xi_{s-1,t} - \xi_{s,t}, \quad s \geq 2 \end{cases}$$

- Из условия следует, что  $\sum_{k \geq 1} n_k(t) = t$ ,  $\sum_{k \geq 1} kn_k(t) = 2t - 1$ .
- Очевидно, в момент времени  $t$  происходит ровно одно из событий " $\xi_{s,t} = 1$ ".
- Вероятности событий:

$$P(\text{uniform}) = \alpha, \quad P(\text{preferential}) = 1 - \alpha;$$

$$P(\xi_{s,t} = 1 | \text{uniform}) = \frac{n_s(t)}{t}; \quad P(\xi_{s,t} = 1 | \text{preferential}) = \frac{sn_s(t)}{2t-1};$$

$$P(\xi_{s,t} = 1) = \alpha \frac{n_s(t)}{t} + (1 - \alpha) \frac{sn_s(t)}{2t-1}.$$

# Постановка задачи

## Цели исследования

- Найти предельную форму  $\vec{c}$ ;
- Установить скорость сходимости распределения к пределу.

## Используемые методы

- Прямое вычисление в предположении «среднего поля»:  
 $\vec{n}(t) = \mathbb{E} \vec{n}(t)$
- Проведение серии экспериментов с усреднением.

## Приближение «среднего поля»

Случайные величины заменяются на свои мат.ожидания.

$$\mathbb{E} \xi_{s,t} = P(\xi_{s,t} = 1) = \alpha \frac{n_s(t)}{t} + (1 - \alpha) \frac{sn_s(t)}{2t - 1}.$$

## Формулы перехода в приближении «среднего поля»

$$\begin{cases} n_1(t+1) = n_1(t) + 1 - \frac{\alpha n_1(t)}{t} - \frac{(1-\alpha)n_1(t)}{2t-1}; \\ \dots; \\ n_s(t+1) = n_s(t) + \frac{\alpha n_{s-1}(t)}{t} + \frac{(1-\alpha)(s-1)n_{s-1}(t)}{2t-1} - \frac{\alpha n_s(t)}{t} - \frac{(1-\alpha)s n_s(t)}{2t-1}. \end{cases}$$

Обозначения для сокращения записи:  $\beta_t := \frac{\alpha}{t}$ ,  $\gamma_t := \frac{1-\alpha}{2t-1}$

## Краткая запись формул перехода

$$\begin{cases} n_1(t+1) = 1 + (1 - \beta_t - \gamma_t)n_1(t); \\ \dots; \\ n_s(t+1) = (\beta_t + (s-1)\gamma_t)n_{s-1}(t) + (1 - \beta_t - s\gamma_t)n_s(t). \end{cases}$$

## Формулы перехода в матричной форме

$$\vec{n}(t+1) = \vec{e}_1 + A_t \vec{n}(t),$$

где  $\vec{e}_1 = (1, 0, \dots, 0, \dots)^T$ ,

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 - \beta_t - \gamma_t & 0 & 0 & \dots \\ \beta_t + \gamma_t & 1 - \beta_t - 2\gamma_t & 0 & \dots \\ 0 & \beta_t + 2\gamma_t & 1 - \beta_t - 3\gamma_t & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

## Те же формулы для долей

$$\vec{c}(t+1) = \frac{1}{t+1} \vec{e}_1 + \frac{t}{t+1} A_t \vec{c}(t);$$

$$\vec{c}(t+1) = \frac{1}{t+1} (E + A_t + A_t A_{t-1} + \dots + A_t A_{t-1} \dots A_1) \vec{e}_1.$$

Вопрос о существовании предела при  $t \rightarrow \infty$ .

## Существование предела

$$\vec{c}(t+1) = \frac{1}{t+1} (E + A_t + A_t A_{t-1} + \dots + A_t A_{t-1} \dots A_1) \vec{e}_1.$$

Наибольшее собственное значение матрицы  $A_t$  — это  $1 - \beta_t - \gamma_t$ , монотонно возрастает и стремится к 1. Поэтому операторные нормы всех слагаемых не превосходят 1, и это выражение — ограниченное.

Более того, на каждом шаге  $t$  оператор  $\frac{t}{t+1} A_t$  имеет норму меньше 1.

Если есть стационарная точка, то она и является пределом данной последовательности.

Поэтому просто найдём такую точку.

## Поиск стационарной точки

Если доли людей с каждым числом монет не меняются, то  $n_s(t) = c_s t$ . Подставим в формулу перехода:

$$c_s = \alpha(c_{s-1} - c_s) + (1 - \alpha) \frac{t}{2t-1} ((s-1)c_{s-1} - sc_s).$$

При устремлении  $t$  к бесконечности дробь превращается в  $\frac{1}{2}$ .

$$c_s(1 + \alpha + \frac{1-\alpha}{2}s) = c_{s-1}(\alpha + \frac{1-\alpha}{2}(s-1));$$

$$\frac{c_s}{c_{s-1}} = \frac{s + \frac{3\alpha-1}{1-\alpha}}{s + \frac{2\alpha+2}{1-\alpha}} = 1 - \frac{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}}{s + \frac{2\alpha+2}{1-\alpha}}.$$

## Результат

$$c_s = c_1 \prod_{i=2}^s \left( 1 - \frac{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}}{s + \frac{2\alpha+2}{1-\alpha}} \right),$$

$c_1$  определяется из условия нормировки  $\sum_{s=1}^{\infty} = 1$ .



## Приближённое решение

Точное вычисление данного произведения не представляется возможным, но для некоторого достаточно большого  $s_0$  можно выписать:

$$\ln c_s = \ln C + \sum_{i=s_0}^s \ln \left( 1 - \frac{\frac{3-\alpha}{1-\alpha}}{i + \frac{2\alpha+2}{1-\alpha}} \right) = \ln B + o(1) - k \sum_{i=s_0}^s \frac{1}{i+c},$$

где  $c = \frac{2\alpha+2}{1-\alpha}$ ,  $k = \frac{3-\alpha}{1-\alpha}$ .

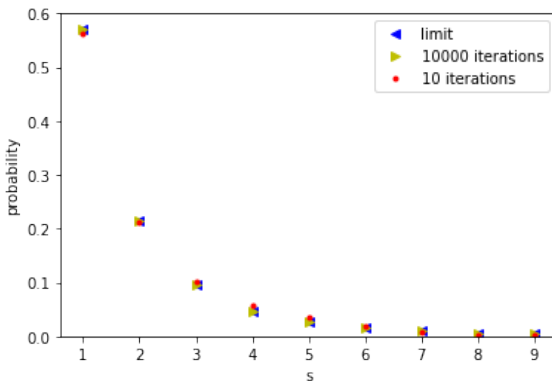
При больших  $s$  сумма приближается интегралом, поэтому  $\ln c_s = \ln A - k \ln(s+c) + o(1)$ , то есть  $c_s \sim A(s+c)^{-k}$ .

## Результат

При достаточно больших  $s$  предельное распределение приблизительно равно  $c_s^* \sim s^{-\frac{3-\alpha}{1-\alpha}}$ .

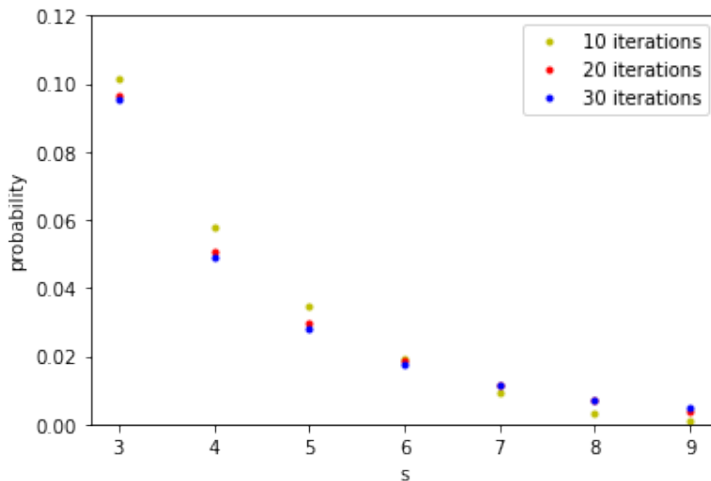
## Вид предельного графика

Эксперименты показывают, что форма графика похожа на предельную уже после нескольких десятков шагов решения системы для «среднего поля». Близость графиков определяется  $s$ -нормой. Здесь — всего 0.01.



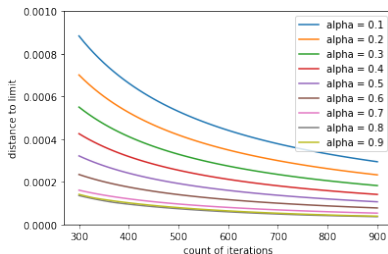
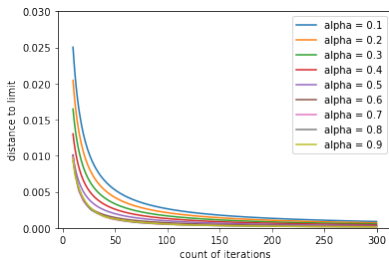
## Несколько графиков

Видно, что происходит перераспределение между разными  $s$ .



## Проверка точного теоретического решения

Степенное приближение при малых  $s$  некорректно, а при больших  $s$  возникают проблемы с точностью вычислений.

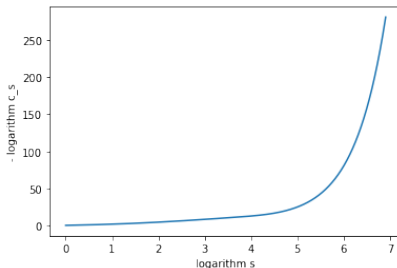


## Вывод

Теоретическое решение в приближении «среднего поля» найдено верно: распределение сходится к нему достаточно быстро, причём чем больше  $\alpha$ , тем быстрее сходимость.

## Проверка приближённого теоретического решения

Построим график зависимости доли людей от количества монет в логарифмическом масштабе.

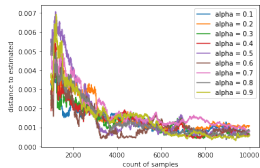
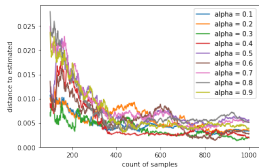
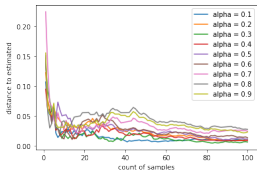


## Вывод

Данный график не имеет линейного вида ни на каком участке. Вероятно, это объясняется тем, что при тех  $s$ , для которых степенное приближение имеет смысл,  $c_s$  слишком малы, и их представление в языке Python не обеспечивает приемлемую точность вычислений.

## Проверка приближения «среднего поля»

Сначала проверим, как среднее арифметическое реализаций распределения сходится к приближению «среднего поля» после 10 итераций.

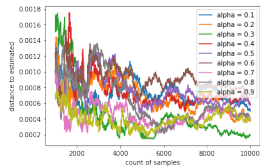
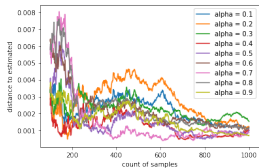
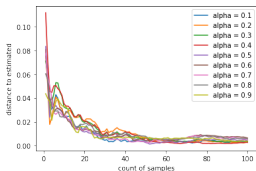


## Результат

С ростом количества образцов среднее арифметическое распределений действительно сходится к распределению, полученному в приближении «среднего поля».

## Проверка приближения «среднего поля»

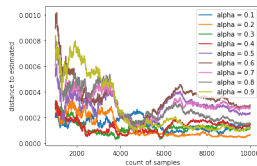
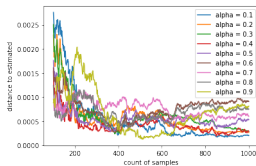
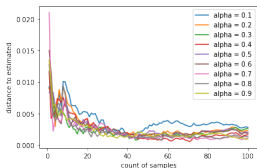
Та же самая проверка для 100 итераций.



## Результат

Очень похожая картина сходимости. Даже немного быстрее.

И последняя проверка — для 1000 итераций.



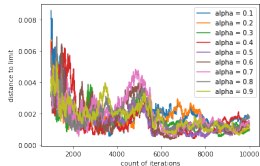
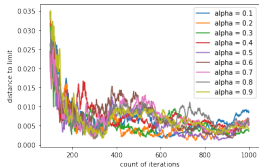
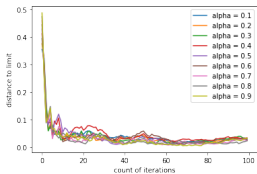
## Выводы

- Среднее арифметическое реализаций стремится к результату «среднего поля» при любом числе итераций.
- Для «среднего поля» результат стремится к предельному с ростом числа итераций.
- Из неравенства треугольника можно заключить, что среднее распределение сходится к предельному с ростом числа итераций и усредняемых результатов.



## Количественные характеристики сходимости

Исследование сходимости среднего арифметического реализаций к предельному распределению для 10 реализаций.

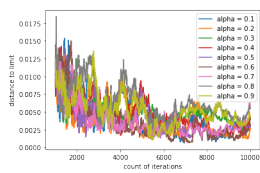
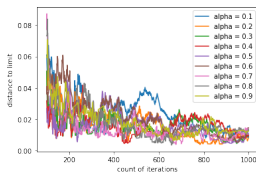
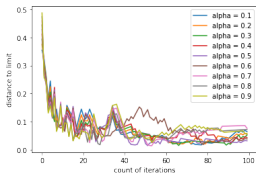


## Результаты

Даже для среднего из 10 реализаций наблюдается сходимость, причём отклонение в 0.01 достигается примерно за 600 итераций, а 0.002 — за 6000. Это значительно медленнее, чем для приближения «среднего поля».

## Количественные характеристики сходимости

### Эксперимент для единственной системы.



## Результаты

Наблюдается сходимость, причём отклонение в 0.01 достигается примерно за 2000 итераций, а 0.005 — за 10000. Это ещё медленнее, чем для среднего из 10 итераций.

- Найдено теоретически и проверено экспериментально предельное распределение. Выяснено, что степенное приближение на практике не является применимым.
- Изучен характер сходимости распределения к предельному. Для измерения погрешности использована с-норма, то есть максимальное отклонение.
- В приближении «среднего поля» сходимость быстрая: 0.005 за 50 итераций, 0.0005 за 600.
- Для единственной системы сходимость медленная: 0.01 за 2000 итераций, 0.005 за 10000.
- При усреднении по 10 независимым системам сходимость быстрее: 0.01 за 600 итераций, 0.002 за 6000.
- С ростом количества усредняемых распределений сходимость ускоряется.