1 блок «Решение нелинейных уравнений и их систем»

1. Решить нелинейное уравнение по следующему плану:

- Построить график функции. Определить интервалы, в которых находится единственный корень..
- Проверить сходимость каждого метода.
- В каждом интервале найти корень с точностью до 0.001 пользуясь следующими методами: методом половинного деления $x_n = \frac{a+b}{2}$, методом хорд $x_n = x_{n-2} - \frac{f(x_{n-2})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$, методом Ньютона $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$, методом последовательных приближений $x_n = F(x_{n-1})$.
- Стоп по условию $|x_n - x_{n-1}| < \epsilon$ или $|f(x_n)| < \epsilon$
- Для каждого метода вывести количество итераций, вывести таблицу итераций (можно оформить с помощью PrettyTable или Pandas).
- Проверить найденные решения с помощью метода solve

Таблица 1 - Первое задание

№ варианта	**функция**	**a**	**b**
1	$2{,}74x^3 - 1{,}93x^2 - 15{,}28x - 3{,}72$	-3	4
2	$-1{,}38x^3 - 5{,}42x^2 + 2{,}57x + 10{,}95$	-5	3
3	$x^3 + 2{,}84x^2 - 5{,}606x - 14{,}766$	-4	3
4	$x^3 - 1{,}89x^2 - 2x + 1{,}76$	-3	4
5	$-2{,}7x^3 - 1{,}48x^2 + 19{,}23x + 6{,}35$	-4	4
6	$2x^3 + 3{,}41x^2 - 23{,}74x + 2{,}95$	-5	4
7	$x^3 + 2{,}28x^2 - 1{,}934x - 3{,}907$	-4	2
8	$3x^3 + 1{,}7x^2 - 15{,}42x + 6{,}89$	-4	3
9	$-1{,}8x^3 - 2{,}94x^2 + 10{,}37x + 5{,}38$	-5	4
10	$x^3 - 3{,}12x^2 - 3{,}5x + 2{,}458$	-3	5

2. Решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона с точностью до 0,001.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений второго порядка: $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$ Требуется построить последовательность (x_i, y_i) которая при определенных условиях сходится к решению системы. Пусть задано начальное приближение $(x_{0,} y_0)$ (его обычно определяют графическим методом). Тогда очередное приближение: $\begin{cases} x_i = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y \end{cases}$ и $\begin{cases} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=0 \\ g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)=0 \end{cases}$. Разложим функции f и g в окрестности точки $(x_{0,} y_0)$ в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = f(x_{0,} y_0) + \dfrac{\delta f(x_{0,} y_0)}{\delta x}\Delta x + \dfrac{\delta f(x_{0,} y_0)}{\delta y}\Delta y + R = 0 \\ g(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = g(x_{0,} y_0) + \dfrac{\delta g(x_{0,} y_0)}{\delta x}\Delta x + \dfrac{\delta g(x_{0,} y_0)}{\delta y}\Delta y + R = 0 \end{cases}.$$

Пренебрегая остаточным членом, получаем:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta f(x_{0,} y_0)}{\delta x}\Delta x + \dfrac{\delta f(x_{0,} y_0)}{\delta y}\Delta y = -f(x_{0,} y_0) \\ \dfrac{\delta g(x_{0,} y_0)}{\delta x}\Delta x + \dfrac{\delta g(x_{0,} y_0)}{\delta y}\Delta y = -g(x_{0,} y_0) \end{cases}$$

Введем матрицу Якоби: $J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\delta f(x,y)}{\delta x} & \dfrac{\delta f(x,y)}{\delta y} \\ \dfrac{\delta g(x,y)}{\delta x} & \dfrac{\delta g(x,y)}{\delta y} \end{vmatrix}$.

Тогда вместо системы нелинейных уравнений будем решать систему линейных уравнений относительно Δx , Δy : $\begin{vmatrix} \dfrac{\delta f(x,y)}{\delta x} & \dfrac{\delta f(x,y)}{\delta y} \\ \dfrac{\delta g(x,y)}{\delta x} & \dfrac{\delta g(x,y)}{\delta y} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$.

А далее вычислять на каждой итерации: $\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \Delta x_i \\ y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \end{cases}$, где x_i - текущее приближение к корню, x_{i+1} - последующее приближение. Процесс заканчивается, когда $\| x_{i+1} - x_i \| < \epsilon$.

Пример.

$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=3x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-4=0 \\ -3x^2+y=0 \end{cases}$. Построим матрицу Якоби: $\begin{pmatrix} \frac{\delta f}{\delta x}=2x & \frac{\delta f}{\delta y}=2y \\ \frac{\delta g}{\delta x}=-6x & \frac{\delta g}{\delta y}=1 \end{pmatrix}$. Задачу свели к решению системы линейных уравнений (относительно Δx и Δy): $\begin{cases} 2x\Delta x+2y\Delta y=4-x^2-y^2 \\ -6x\Delta x+\Delta y=3x^2-y \end{cases}$.

Определим начальные приближения (по графику): $x_0=1$, $y_0=2$. Подставим эти значения в систему уравнений относительно Δx и Δy : $\begin{cases} 2\Delta x+4\Delta y=-1 \\ -6\Delta x+\Delta y=1 \end{cases}$. Решить эту систему можно любым способом. Получаем $\Delta x=0{,}192$ и $\Delta y=-0{,}154$. Тогда $\begin{cases} x_1=x_0+\Delta x=1-0{,}192=0{,}808 \\ y_1=y_0+\Delta y=2-0{,}154=1{,}846 \end{cases}$. Полученные приближения вновь подставим в систему, найдем новые Δx и Δy , а затем значения $\begin{cases} x_2=x_1+\Delta x \\ y_2=y_1+\Delta y \end{cases}$ и так до тех пор, пока $\sqrt{(x_i-x_{i+1})^2+(y_i-y_{i+1})^2}\geq\epsilon$.

Решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона с точностью до 0,001, придерживаясь следующего плана:

- Построить графики функций. (можно использовать Plt.counter для построения функций, заданных неявно).
- Определите начальное приближение исходя из графиков.Вычислить производные, составить матрицу Якоби. (Вывести на экран).
- Составить систему линейных уравнений относительно приращений x и y. (вывести на экран).
- Решить линейную систему методом Крамера. (вывести на экран решение). Составить итерационную систему. (вывести на экран).
- Стоп по условию . $\sqrt{(x_i-x_{i+1})^2+(y_i-y_{i+1})^2}<\epsilon$ Вывести количество итераций.
- Проверить полученные решения подстановкой и сравнить с решениями функцией Питон (например, sympy.nsole)

Таблица 2-Второе задание

№ варианта	система уравнений
1.	$\begin{cases} \sin(x+1)-y=1.2 \\ 2x+\cos y=2 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} \sin(x)+2y=2 \\ 2x+\cos(y-1)=0.7 \end{cases}$
3	$\begin{cases} \sin(x+0.5)-y=1 \\ x+\cos(y-2)=0 \end{cases}$
4	$\begin{cases} \cos(x+0.5)-y=2 \\ \sin y-2x=1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} \sin(x+1.5)-y+2.9=0 \\ \cos(y-2)+x=0 \end{cases}$
6	$\begin{cases} \sin y-2x=1.6 \\ \cos(x+0.5)+y=0.8 \end{cases}$
7	$\begin{cases} \sin(x-1)+y=0.1 \\ x-\sin(y+1)=0.8 \end{cases}$
8	$\begin{cases} \cos(x+y)+2y=0 \\ x+\sin y=0.6 \end{cases}$
9	$\begin{cases} \cos(x+0.5)-y=2 \\ \sin y-2x=1 \end{cases}$
10.	$\begin{cases} \sin(0.5x+y)-1.2y=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

2 блок «Численное интегрирование»

Задание.

- Найдите шаг интегрирования h для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ по формуле трапеций с точностью $\epsilon=0.001$. Для вычисления шага воспользуйтесь формулой $M\frac{|b-a|h^2}{12}<\epsilon$, $M=max|f''(x)|$, $x\in[a,b]$.*Указание.* Шаг h следует выбирать с учетом дополнительного условия: отрезок интегрирования должен разбиваться на число частей, кратное 4. Вычисления шага h должны присутствовать в лабораторной работе, в текстовом блоке. Текстовый блок поддерживает Latex-формулы.

- Вычислите интеграл по формуле трапеций с шагами 2h и h: $\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\ldots+\frac{y_n}{2}\right)$, $y_i=f(x_i)$. Дайте уточненную оценку погрешности по правилу Рунге $\Delta \approx \frac{1}{3}|I_n - I_{2n}|$.

- Вычислите интеграл по формуле Симпсона с шагами 2h и h: $\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0+y_{2m}+4(y_1+y_3+\ldots+y_{2m-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{2m-2})\right)$, $y_i=f(x_i)$. Дайте уточненную оценку погрешности по правилу Рунге для формулы Симпсона: $\Delta \approx \frac{1}{15}|I_n - I_{2n}|$.

- Найдите значение интеграла с помощью функций Python.

- Вычислите определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница. (вычисления должны присутствовать в текстовом блоке). Сравните приближенные значения интеграла с точным. Какая формула численного интегрирования дала более точный результат?

Таблица 3 - Вычислите интеграл от заданной функции

№ варианта	**функция**	**a**	**b**
1	$f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}$	-0.5	0.5
2	$f(x)=e^{-x}\cos x$	0	2
3	$f(x)=x\,arctg\,x$	0	1
4	$f(x)=x\arccos x$	-0.5	0.5
5	$f(x)=x^2\ln(x)$	1	2
6	$f(x)=\sqrt{x}\ln(x)$	1	4
7	$f(x)=x^2e^{-x}$	0	1
8	$f(x)=x\arcsin x$	0	0.9
9	$f(x)=x^2\cos x$	0	1
10	$f(x)=x^2\sin x$	0	1

3 блок «Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений»

Задание.

Решается задача Коши: $y'=f(x,y)$, $y(a)=y_0$ на отрезке $[a,b]$.

- Найдите шаг интегрирования h для решения задачи Коши методом Рунге-Кутта (IV) с точностью 10^{-4} .

- Найти решение задачи Коши на отрезке [a,b] методом Рунге-Кутта (IV) с точностью до 10^{-4} . Построить приближенную интегральную кривую.
  $$y_{k+1}=y_k+\frac{h}{6}(F_1+2F_2+2F_3+F_4)$$
  $$F_1=f(x_k,y_k)$$
  $$F_2=f(x_k+\frac{h}{2}, y_k+\frac{h}{2}F_1)$$
  $$F_3=f(x_k+\frac{h}{2}, y_k+\frac{h}{2}F_2)$$
  $$F_4=f(x_{k+1}, y_k+hF_3)$$

- Найти решение задачи Коши на отрезке [a,b] методом Эйлера $y_{k+1}=y_k+hf(x_k,y_k)$. Построить приближенную интегральную кривую на одном графике с предыдущим пунктом.

- Найти решение задачи Коши с помощью функций Python.

- Найти точное решение задачи Коши. Сравнить точное решение с приближенным. Найти максимум модуля отклонений в узловых точках приближенного решения от точного.

- Все расчеты должны быть представлены в виде сводных таблиц (например, Pretty Table или Pandas).

Пример. Решим задачу Коши $xy'-y=-y^2(2\ln(x)+\ln^2 x)$, $y(1)=2$, $a=1$, $b=2$. Найдем шаг интегрирования для решения задачи Коши методом Рунге-Кутта (IV) с точностью 10^{-4} . Преобразуем уравнение к виду: $y'=\frac{y}{x}-\frac{y^2}{x}(2\ln(x)+\ln^2 x)$. Найдем начальный шаг интегрирования. Поскольку метод Рунге- Кутта IV имеет точность четвертого порядка относительно шага h, должно выполняться условие $h^4=\epsilon$. Кроме того, чтобы была возможность перерасчета с удвоенным шагом, разобьем отрезок $[a,b]$ на четное число частей. Поэтому начальный шаг h_0 должен быть определен из двух условий: $h_0^4=\epsilon$, $\frac{b-a}{h_0}$ четно. Согласно первому условию $h_0=\sqrt[4]{0.0001}=0.1$. Для уточнения шага поступают следующим образом. Находим решение задачи Коши в точке x_0+2h_0 по формулам Рунге-Кутта с шагами h_0 и $2h_0$, получаем два значения y_2 и $\tilde{y}_2$. Путем увеличения или уменьшения шага в два раза (не обязательно однократного) подберем наибольшее значение h_0 , при котором будет выполнено неравенство $\frac{|y_2-\tilde{y}_2|}{15}<\epsilon$. Итак. начнем вычисления с $h_0=0.1$. По условию, $x_0=a=1$, $y_0=2$. Найдем решение данной задачи методом Рунге- Кутта сначала в точке x_0+h_0 , затем в точке x_0+2h_0 , получим соответственно $y_1\approx2.1569$ и $y_2\approx2.2227$. Далее найдем решение задачи Коши в точке x_0+2h_0 и шагом $2h_0$, получим $\tilde{y}_2\approx2.2226$. Найдем $\frac{|y_2-\tilde{y}_2|}{15}=5.6\cdot10^{-6}<\epsilon$. Значит, шаг можно увеличить в два раза (если оказалось, что $\Delta=\frac{|y_2-\tilde{y}_2|}{15}>\epsilon$, то шаг следует в два раза уменьшать).

Повторяем вычисления с шагом $h_1=0.2$. Получаем $y_1\approx2.2226$, $y_2\approx2.1258$ и $\tilde{y}_2\approx2.1208$. Тогда $\Delta=\frac{|y_2-\tilde{y}_2|}{15}\approx0.0003>\epsilon$. Останавливаемся на шаге $h_1=0.2$. Определим $n=\frac{b-a}{h_1}=\frac{2-1}{0.2}=5$. Так как *n* должно быть четным, то выбираем $n=6$. Тогда $h_2=\frac{b-a}{n}=\frac{2-1}{6}\approx0.167$. Снова вычислим погрешности с шагом $h_2=0.167$ и $2\cdot h_2=0.333$: $y_1\approx2.2109$, $y_2\approx2.18396$, $\tilde{y}_2\approx2.18227$, $\Delta=\frac{|y_2-\tilde{y}_2|}{15}\approx0.0001$, что укладывается в заданную точность.

Найдем решение задачи Коши методом Рунге-Кутта с шагами $h_0=0.167$ и $2\cdot h_0=0.333$, результаты вычислений запишем в таблицу, приведенную ниже. Результаты вычислений оформлены с помощью модуля PrettyTable. Наборы x, y_run, y_tilda и delta – это списки, где x содержит набор аргументов, y_run — результат работы метода Рунге-Кутта с $h_0=0.167$, y_tilda – результат работы метода Рунге-Кутта с шагом $2\cdot h_0=0.333$ и delta $\Delta=\frac{|y_2-\tilde{y}_2|}{15}$.

```python
from prettytable import PrettyTable
mytable = PrettyTable()

mytable.add_column('x', x)
mytable.add_column('y', y_run)
mytable.add_column('y_tilda', y_tilda)
mytable.add_column('delta', delta)
```

```python
print(mytable)
```

```
+-------+--------+---------+--------+
|   x   |   y    | y_tilda | delta  |
+-------+--------+---------+--------+
|   1   |   2    |    2    |  0.0   |
| 1.167 | 2.2109 |         |        |
| 1.334 | 2.184  |  2.183  | 0.0001 |
| 1.501 | 2.0077 |         |        |
| 1.668 | 1.7808 |  1.7803 |  0.0   |
| 1.835 |  1.56  |         |        |
| 2.002 | 1.3669 |  1.3679 | 0.0001 |
+-------+--------+---------+--------+
```

Рисунок 1. Метод Рунге-Кутта (IV)

Построим график средствами mathplotlib:

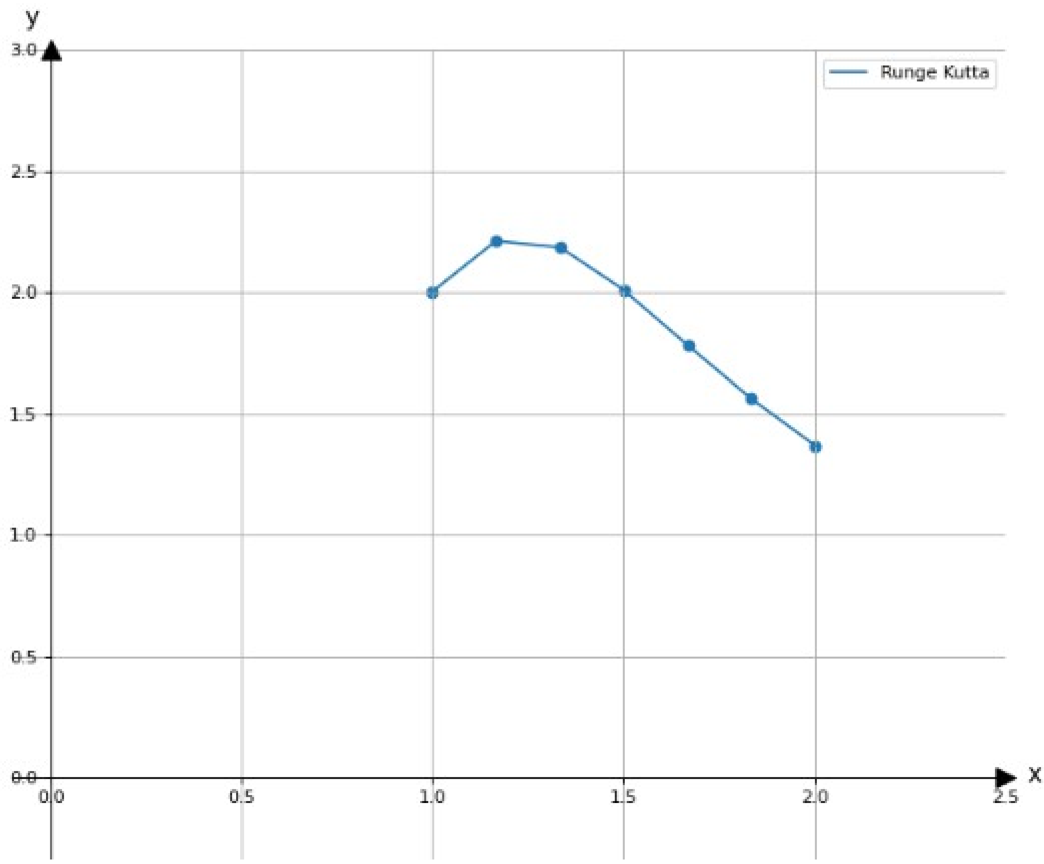

Рисунок 2.Интегральная кривая, полученная методом Рунге-Кутта

Найдем решение задачи Коши на отрезке $[1,2]$ методом Эйлера с шагом $h_0 = 0.167$ и $2 \cdot h_0 = 0.333$. Наборы x, y_eu, ytilda_eu и delta – это списки, где x содержит набор аргументов, y_eu — результат работы метода Эйлера с $h_0 = 0.167$, ytilda_eu – результат работы метода Эйлера с шагом $2 \cdot h_0 = 0.333$ и delta $\Delta = |y_2 - \tilde{y}_2|$.

```python
from prettytable import PrettyTable
mytable = PrettyTable()

mytable.add_column('x', x)
mytable.add_column('y_eu', y_eu)
mytable.add_column('ytilda_eu', ytilda_eu)
mytable.add_column('delta', delta)
```

```python
print(mytable)
```

```
+-------+--------+-----------+--------+
|   x   |  y_eu  | ytilda_eu | delta  |
+-------+--------+-----------+--------+
|   1   |   2    |     2     |   0    |
| 1.167 | 2.334  |           |        |
| 1.334 | 2.4086 |   1.9995  | 0.4091 |
| 1.501 | 2.2312 |           |        |
| 1.668 | 1.9382 |   0.546   | 1.3922 |
| 1.835 | 1.649  |           |        |
| 2.002 | 1.4074 |   0.413   | 0.9944 |
+-------+--------+-----------+--------+
```

Рисунок 3.Метод Эйлера

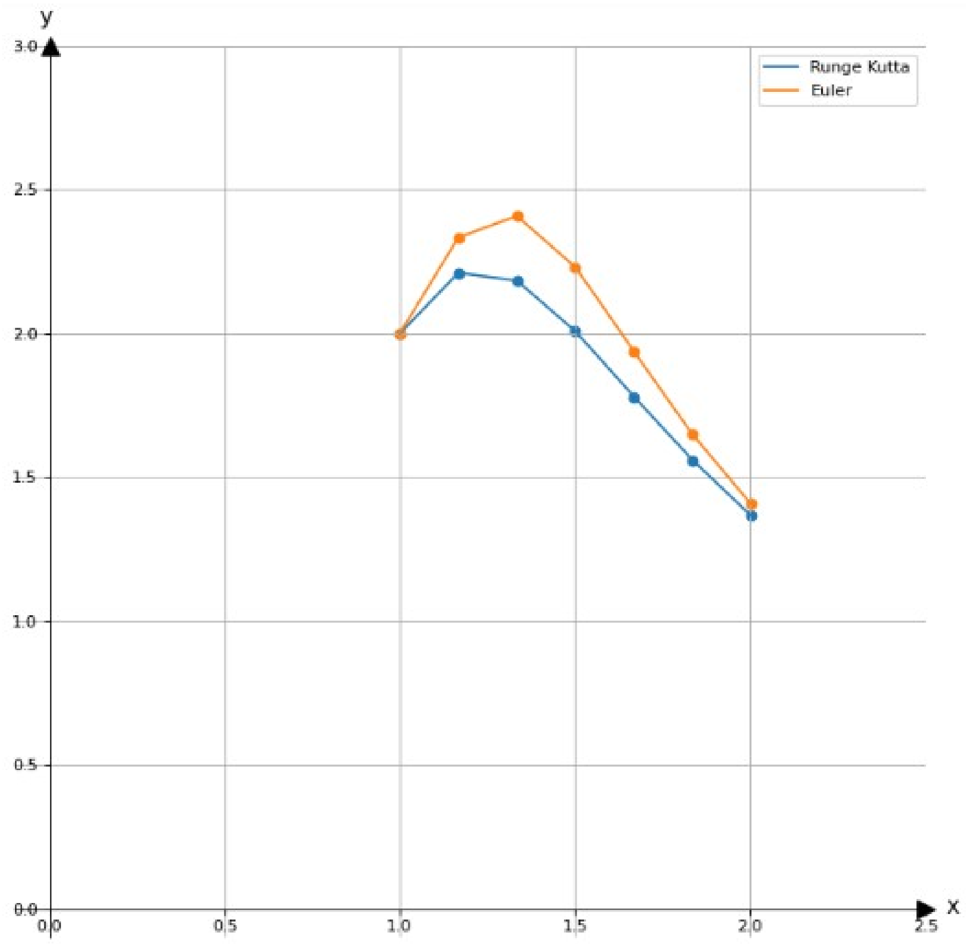

Рисунок 4.Интегральные кривые

Сравним полученные решения с решением, полученным встроенным методом Python. Используем функцию odeint из модуля SciPy.

```python
def dydx(y, x):
    return y / x - y ** 2 / x  * math.log(x)* (2  + math.log (x))
```

```python
from scipy.integrate import odeint
y0 = 2 # start value
#здесь dydx  = y' исходная наша функция f(y,x)
y = odeint(dydx, y0, x)
```

Рисунок 5. Решение функцией odeint

```python
from prettytable import PrettyTable
mytable = PrettyTable()

mytable.add_column('x', x)
mytable.add_column('Эйлер', y_eu)
mytable.add_column('Рунге-Кутт', y_run)
mytable.add_column('Питон', y)
```

```python
print(mytable)
```

x	Эйлер	Рунге-Кутт	Питон
1	2	2	2.0
1.167	2.334	2.2109	2.2109
1.334	2.4086	2.184	2.1841
1.501	2.2312	2.0077	2.0078
1.668	1.9382	1.7808	1.7809
1.835	1.649	1.56	1.5601
2.002	1.4074	1.3669	1.3669

Рисунок 6. Сравнение решений разными методами

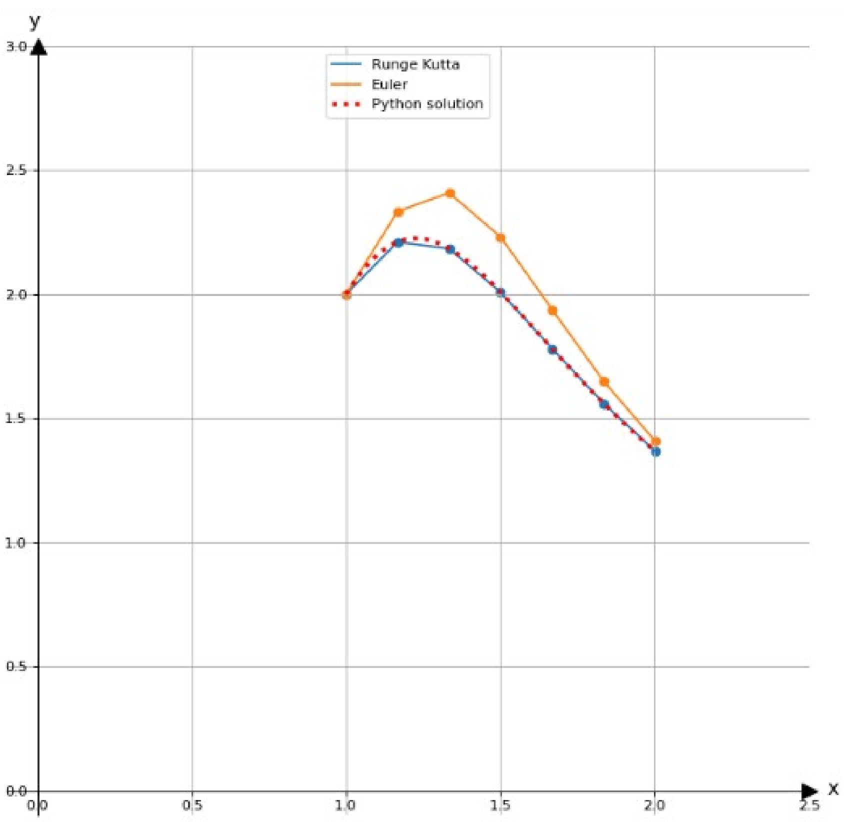

Рисунок 7. Интегральные кривые

Кроме этого, в лабораторной работе предлагается найти точное решение ОДУ.

Таблица 4 - Решить задачу Коши

№ варианта	**задача Коши**	**a**	**b**
1	$y' + xy = 0.5(x-1)e^x y^2 \quad , \quad y(0)=2$	0	2
2	$y' + y^2 = x \quad , \quad y(0)=1$	0	2
3	$xy' + y = y^3 e^{-x} \quad , \quad y(1)=1$	1	2
4	$y' + xy = 0.5(x+1)e^x y^2 \quad , \quad y(0)=1$	0	2
5	$y' + 2\mathrm{xy} = 2\mathrm{x}^3 y^3 \quad , \quad y(0)=1$	0	1
6	$y' + y = 0.5\mathrm{xy}^2 \quad , \quad y(0)=2$	0	2
7	$y' + xy = (x-1)e^x y^2 \quad , \quad y(0)=1$	0	2
8	$xy' + y = y^2 \ln x \quad , \quad y(1)=1$	1	2.6
9	$y' - y = 2\mathrm{xy}^2 \quad , \quad y(-1)=0.2$	-1	0.6
10	$xy' + y = 2\mathrm{y}^2 \ln x \quad , \quad y(1)=0.5$	1	5