

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра
Великого
Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика и информатика»

Отчёт по курсовой работе
Дисциплина: «Математическая статистика»

Выполнил студент гр. 3630102/70201
Преподаватель

Н. А. Счастливцев
А. Н. Баженов

Содержание

1	Постановка задачи	3
2	Теория	3
2.1	Представление движения	3
2.2	Представление данных	3
3	Идея решения	4
3.1	Задача I	4
3.1.1	Постановка	4
3.1.2	Идея решения, вращательное движение	4
3.1.3	Идея решения, центр вращения	5
3.2	Задача II	6
3.2.1	Постановка	6
3.2.2	Идея решения	7
4	Пример	8
5	Обсуждение	9
6	Литература	11

Список иллюстраций

1	Первые проекции примера задачи I	9
2	Последние проекции примера задачи I	10
3	Матрица M примера к задаче I	11

1 Постановка задачи

Пусть внутри цилиндрического детектора движется объект. Его движение в момент времени $t > 0$ описывается законом $Y(t)$. Каждый интервал времени $\delta t_k, k = 1, 2, \dots, N$ делается снимки проекций объекта на стенки детектора. Снимки представляют собой двумерные матрицы светимостей. Требуется по данным снимкам восстановить $Y(t)$.

2 Теория

2.1 Представление движения

Движение объекта в детекторе можно представить как композицию поступательного и вращательного движений. Будем рассматривать вращательное и поступательное движения отдельно.

Для того, чтобы задать вращательное движение, достаточно задать ось вращения и зависимость угла поворота от времени $\varphi(t)$. Для того, чтобы задать поступательное движение, достаточно задать поступательное движение точки, находящейся на оси вращения (чтобы эта точка была «свободной от вращения»), или вектор скорости поступательного движения, если нахождение точки на оси вращения затруднено.

Упростим рассматриваемую модель, сделав допущение о том, что в детекторе находится абсолютно твёрдое тело (то есть, деформации тела исключены).

2.2 Представление данных

Решение основано на том, что проекции, получаемые от детектора, представляют собой двумерную матрицу светимостей конечных размеров, с конечным числом ячеек. С помощью методов математической статистики можно приблизить параметры движения тела по проекциям.

Для удобства введём следующие обозначения. Номер снимка детектора будем обозначать буквой $k, k = 1, 2, \dots, N$. Характеристики, привязанные к k -му снимку, будем помечать верхним индексом k в скобках. Соответственно, момент времени, в который сделан k -ый снимок, обозначим $t^{(k)}$.

Индексы в снимке будем обозначать (x, y) , где x соответствует номеру столбца, а y соответствует номеру строки.

Светимость в точке (x, y) будем обозначать $J(x, y)$.

3 Идея решения

3.1 Задача I

3.1.1 Постановка

Ещё упростим задачу, сделав несколько допущений:

- Пусть ось вращения расположена так, что проектируется в точку на каждом из снимков. Чтобы охарактеризовать вращательное движение, достаточно будет задать зависимость угла поворота от времени $\varphi(t)$. Имеется в виду поворот против часовой стрелки относительно горизонтальной прямой.
- Пусть форма проекции тела достаточно отличается от круга или кольца, чтобы можно было заметить вращательное движение.
- Пусть светимости каждой ячейки все будут равняться 1, если объект присутствует, или 0, если объекта нет в ячейке (реальные светимости можно заменить характеристическими функциями).
- Пусть ось вращения тела не перемещается в пространстве.
- Пусть тело делает не менее, чем один полный оборот вокруг оси вращения.

Такую задачу будем называть задачей I.

Таким образом, чтобы решить эту задачу, можно получить табличную функцию $\varphi^{(k)} = \varphi(t^{(k)})$ и центр вращения (проекцию оси вращения) $C(x_c, y_c)$.

Когда табличная функция будет найдена, можно будет получить из неё непрерывное приближение реальной зависимости с помощью методов вычислительной математики (например, интерполяции).

3.1.2 Идея решения, вращательное движение

Пусть $\varphi^{(k)}$ — истинное значение искомой табличной функции в момент времени $t^{(k)}$.

Пусть есть некоторая прямая, которая задаётся уравнением:

$$y = ax + b. \quad (1)$$

Из геометрии известно, что коэффициент a отвечает за угол поворота этой прямой, а именно, $a = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона прямой (1).

Применительно к нашей задаче, удобно будет провести прямую через проекцию тела единственным образом для каждого момента k и найти угол наклона этой прямой. Таким образом, будет получена оценка значения $\varphi^{(k)}$ для каждого элемента сетки.

Из допущения, на котором построена задача I, относительно формы тела в детекторе можно выбрать способ построения нужной прямой. Найдём такую прямую, решив задачу простой линейной регрессии.

Составим выборки $(x_j, y_j)^{(k)}$ для каждой проекции k , где

$$j = \{i \in \mathbb{N} | J(x_i, y_i) \neq 0\}, \quad (2)$$

то есть, выберем все ячейки с ненулевой светимостью. Поставим задачу простой линейной регрессии, найдём зависимость y от x для каждой проекции k , где y и x принадлежат построенным выборкам:

$$y = \beta_0^{(k)} + \beta_1^{(k)} x \quad (3)$$

Получим уравнение прямой вида (1). Нас интересует коэффициент $\beta_1^{(k)}$, который является тангенсом угла наклона прямой (3).

С помощью метода наименьших квадратов можно найти приближённое значение $\tilde{\beta}_1^{(k)}$ коэффициента $\beta_1^{(k)}$ [1]:

$$\tilde{\beta}_1^{(k)} = \frac{\overline{xy}^{(k)} - \overline{x}^{(k)}\overline{y}^{(k)}}{\overline{x^2}^{(k)} - (\overline{x}^{(k)})^2}. \quad (4)$$

Отсюда получаем:

$$\varphi^{(k)} \approx \tilde{\varphi}^{(k)} = \arctg\left(\tilde{\beta}_1^{(k)}\right) = \arctg\left(\frac{\overline{xy}^{(k)} - \overline{x}^{(k)}\overline{y}^{(k)}}{\overline{x^2}^{(k)} - (\overline{x}^{(k)})^2}\right), k = 1, 2, \dots, N. \quad (5)$$

Таким образом, с помощью формулы (5) можно найти приближённое значение сеточной функции, то есть решить задачу нахождения $\varphi^{(k)}$.

3.1.3 Идея решения, центр вращения

Найдём точку $C(x_c, y_c)$, куда проектируется ось вращения. Сложим все матрицы светимостей. Получим матрицу M , в каждой ячейке которой суммарная светимость этой ячейки за всё время съёмки объекта в детекторе. По условию ось вращения неподвижна. Рассмотрим 2 случая:

- Ось вращения проходит через тело. Тогда у ячейки, соответствующей оси вращения, будет постоянная светимость на каждой из

проекций (ось вращения неподвижна). На матрице M светимость в центре вращения накопится и будет высока. Удалённые от центра ячейки будут иметь меньшую суммарную светимость, так как в них «сигнал» будет лишь на некоторых проекциях. Точки, близкие к центру вращения, будут замещать друг друга на соседних проекциях, из-за чего на матрице M получится некоторое подобие круга вокруг искомого центра вращения, светимость этого круга будет близка суммарной светимости центра вращения.

- Ось вращения не проходит через тело. Тогда данные матрицы M будут представлять собой подобие кольца, центр вращения будет в центре кольца.

Рассмотрев эти случаи, заключаем, что ячейка, соответствующая центру вращения, будет соответствовать «центру» выборки наиболее ярких ячеек матрицы M .

Рассмотрев эти случаи, заключаем, что ось вращения находится как «центр» данных матрицы M . То есть, можно посчитать характеристики положения по x и по y из выборки, составленной из ячеек, светимость которых велика (в результате суммирования). Для определённости будем приближать центр вращения точкой $\tilde{C}(\text{med } x, \text{med } y)$.

Таким образом, предоставлен метод, которым можно приближённо найти ось вращения и табличную функцию угла поворота от времени, поэтому задачу I можно считать решённой.

3.2 Задача II

3.2.1 Постановка

Ослабим слишком сильное допущение задачи I касательно светимостей. Получим задачу II со следующими ограничениями:

- Пусть ось вращения расположена так, что проектируется в точку на каждом из снимков.
- Пусть форма проекции тела достаточно отличается от круга или кольца, чтобы можно было заметить вращательное движение.
- Пусть ось вращения тела не перемещается в пространстве.
- Пусть тело делает не менее, чем один полный оборот вокруг оси вращения.

Такую задачу будем называть задачей II.

Таким образом, чтобы решить эту задачу, можно получить табличную функцию $\varphi^{(k)} = \varphi(t^{(k)})$ и центр вращения (проекцию оси вращения) $C(x_c, y_c)$.

3.2.2 Идея решения

Предлагаемое решение основано на сведении задачи II к задаче I.

Найдём область значений светимостей всех ячеек всех проекций: $E = [0; a]$, $a = \max_k J(x^{(k)}, y^{(k)})$. Выберем натуральное число s — количество уровней светимостей, разобьём интервал $[0; a]$ на s промежутков $\{\Delta_i\}_{i=1}^s$.

Из каждой проекции сгенерируем s новых проекций: $\{M_i^{(k)}\}_{i=1}^s$ таких, что для каждого i из s : $J_i^{(k)}(x, y) = 1$, если $J^{(k)} \in \Delta_i$, и $J_i^{(k)}(x, y) = 0$, если $J^{(k)} \notin \Delta_i$ для всех ячеек (x, y) . Другими словами, для каждого уровня i из s выберем все ячейки k -ой проекции, светимости которых попадают в промежуток Δ_i , и отметим на эти выбранные ячейки на матрице $M_i^{(k)}$ единицами.

Таким образом, мы получили s наборов проекций. Каждый из наборов представляет собой входные данные к задаче I. Решим задачу I для каждого из s наборов, получим:

$$\varphi_{(i)}, C_{(i)}, i \in [1, s], \quad (6)$$

где $\varphi_{(i)}$ — табличная функция, соответствующая углам поворота для уровня i , $C_{(i)}$ — центр вращения, соответствующий уровню i . Эмпирически можно подобрать веса полученным результатам для каждого уровня i , обозначим эти веса $w_i, i \in [1, s]$, $\sum_{i=1}^s w_i = 1, w_i \geq 0$. Составим взвешенную сумму табличных функций углов поворота с выбранными весами:

$$\sum_{i=1}^s w_i \cdot \varphi_{(i)}(t^{(k)}) = \psi(t^{(k)}), \quad (7)$$

где $\psi(t^{(k)})$ — новая табличная функция, соответствующая углам поворота. Проделаем то же самое для центров вращения (составим их выпуклую комбинацию):

$$\sum_{i=1}^s w_i \cdot (x, y)^T = \bar{C}, \quad (8)$$

где \bar{C} — вектор, соответствующий точке на плоскости.

Полученные результаты ψ и \bar{C} будут приближениями реальных параметров вращения — угла поворота и центра вращения.

Суть решения состоит в том, что для каждой проекции мы разделили ячейки по группам светимости: самые яркие, средние по яркости и фон. Для каждой группы ячеек решили задачу I. Далее сделали предположение, что наиболее яркие пиксели характеризуют описываемое движение, поэтому их «показания» взяли с большим весом. Средние по яркости пиксели по предположению составляли границы объекта, поэтому их «показания» взяли как поправку — с чуть меньшим весом. Показания пикселей, отнесённых к фону, взяли с нулевыми весами, так как предположили, что они не содержат признаков движения объекта в детекторе. Таким образом, результат взвешенной суммы полученных значений содержит оценку искомых параметров.

4 Пример

Составим и решим задачу I для наглядности.

Пусть объектом в детекторе будет стержень (ширины 1 и длины 7 ячеек) с закреплённым концом в ячейке (5, 5). Зададим угол поворота $\varphi^{(k)}$ в каждый из моментов времени k , получим

$$\{\varphi^{(k)}\}_{k=1}^N = \{0.0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0, 2.4, 2.8, 3.2, 3.6\}. \quad (9)$$

Рассмотрим первые три проекции и последние три проекции. Они показаны на рисунках 1 и 2, соответственно.

С помощью метода, изложенного выше, можно вычислить приближения $\varphi^{(k)}$, это приближения с точностью до константы. В ходе решения можем получать отрицательные углы поворота, к ним можно прибавить 2π , чтобы данные имели один знак, так будет удобнее сравнивать.

Таким образом, получим оценки (возьмём те оценки, которые соответствуют предоставленным рисункам):

$$\tilde{\varphi}^{(k)} = \{0.0, 0.37, 0.75, \dots, 2.80, 0.0, 0.42\} \quad (10)$$

Проанализируем полученные значения. $\varphi^{(0)}$ оценено достаточно точно, это связано с видом начальной проекции (линейная зависимость слишком сильно выражена). Далее идут оценки, которые отклоняются от истинных лишь на несколько процентов. Значение $\tilde{\varphi}^{(k)} \approx 2.8 = \varphi^{(k)}$ очень близко к истине, а после него идут оценки, отклоняющиеся на π от истины (это связано с тем, что один полный оборот был сделан). Если к

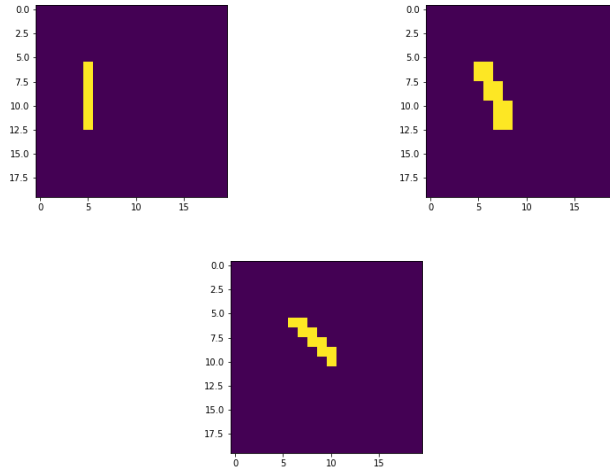


Рис. 1: Первые проекции примера задачи I

последним значениям прибавить π , получим достаточно точные приближения зависимостей.

Оценим теперь положения центра вращения. Как было сказано выше, это ячейка $(5, 5)$. Составим суммарную матрицу светимостей M (изображена на рис. 3).

Из матрицы M находим центр как самую яркую ячейку — $(6, 5)$. Полученная оценка достаточно близка к истинному значению.

5 Обсуждение

Предоставлен метод приближения параметров движения тела в детекторе по проекциям. Стоит заметить, что решение предполагает серьёзные допущения как о характере самого тела, так и о характере движения. Тем не менее, эти допущения обоснованы. К примеру, если форма тела очень близка к шару или кольцу, то из-за симметрии точно оценить вращение не удаётся. Поэтому при несоблюдении каких-то условий применимости метода требуется модифицировать метод или саму задачу.

К примеру, пусть тело в детекторе движется поступательно. Тогда можно сделать модификацию метода, введя предположение, что ось вращения сдвигается достаточно медленно. То есть, найдётся такое натуральное число m , что весь набор проекций разбивается на группы по m соседних снимков, где внутри каждой группы поступательного движения нет (тогда имеет место задача II). Тогда можно решить задачу II для каждой группы, затем отследить, как движется центр вращения

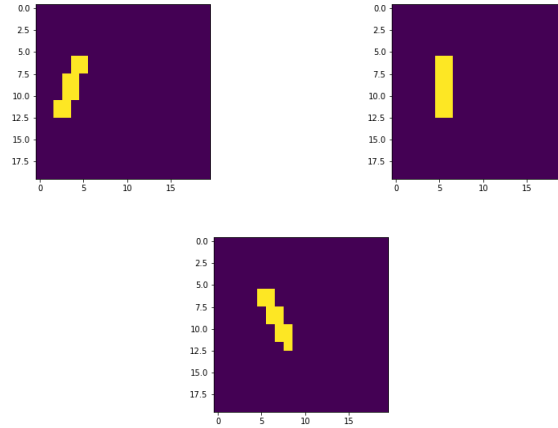


Рис. 2: Последние проекции примера задачи I

от одной группы к другой (на основе этого можно составить табличную функцию вектора скорости поступательного движения).

В решении использованы методы математической статистики, основанные на достаточном размере проекций и достаточном количестве ячеек с ненулевыми светимостями. В связи с этим, предполагается, что при увеличении размера проекций, тела и уменьшении временного шага δt точность метода увеличится.

Метод основан на том, что можно получить из графического представления данных — некоторую «ориентацию» «пятна» (под пятном понимается изображение объекта) на каждом снимке. Для описания ориентации проводится прямая «через» яркие ячейки (методом наименьших квадратов), что позволяет говорить об угле поворота пятна. Положение центра вращения пятна находится с помощью статистики по всем ячейкам и всем снимкам.

Стоит отметить, что в зависимости от конкретной задачи следует по-своему подбирать параметры метода: число уровней светимости s , их веса w_i , метод оценки углового коэффициента (к примеру, можно взять не метод наименьших квадратов в линейной регрессии, а метод наименьших модулей), оценку центра вращения. Отсюда следует вывод, что предварительно необходим анализ входных данных, возможно, с отбраковкой (удаление «выбросов» или выбор параметров метода более устойчивых к выбросам, если выбросы слишком часто имеют место).

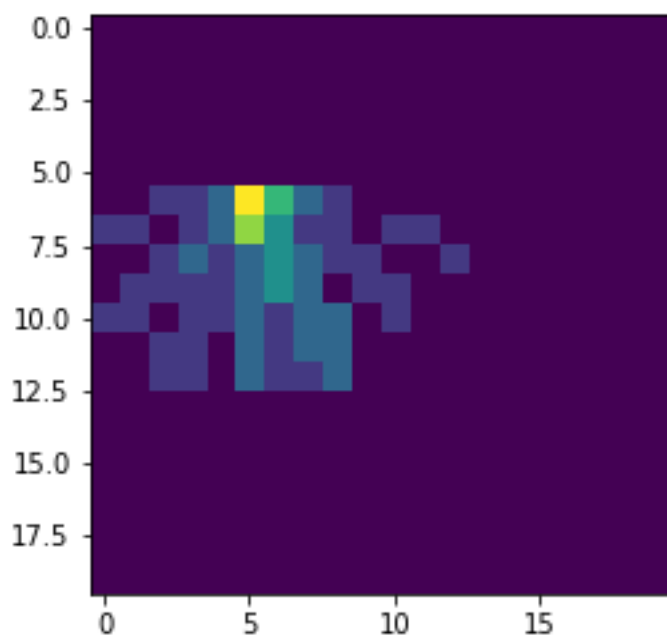


Рис. 3: Матрица M примера к задаче I

6 Литература

Список литературы

- [1] Ю. Д. Максимов. “Математическая статистика”. в: *СПб.: СПбГПУ* (2004).