Zadania – grupy, pierścienie, ciała.

1) Niech Z – zbiór niepusty, $X = \{ f: Z \longrightarrow Z,$ f – bijekcja $\}$, $\circ$ – składanie funkcji.
Zbadać, czy algebra $(X, \circ)$ jest grupą.

2) Niech $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Działanie $\circ$ określamy następująco:
$(x_1, y_1) \circ (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 \cdot y_2)$.
Zbadać, czy algebra $(X, \circ)$ jest grupą.

3) W zbiorze $\mathbb{N} \cup \{0\}$ określamy działania $(n+m) \bmod p$, ~~m~~ $(n \cdot m) \bmod p$, $p > 0$ (dodawanie i mnożenie modulo p) jako resztę z dzielenia sumy $n+m$, iloczynu $n \cdot m$ przez liczbę p.

a) Wykazać, że zbiór $X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ tworzy ciało z dodawaniem i mnożeniem modulo 5.

b) Wykazać, że zbiór $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ tworzy pierścień z dodawaniem i mnożeniem modulo 6.

c) Wykazać, że zbiór $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ nie tworzy ciała z dodawaniem i mnożeniem modulo 6.