

4. Сравнение оценок. Эффективные оценки

1. (К теоретической задаче 1) Сгенерируйте $M = 100$ выборок X_1, \dots, X_{1000} из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$ (возьмите три произвольных положительных значения θ). Для каждой выборки X_1, \dots, X_n для всех $n \leq 1000$ посчитайте оценки параметра θ из теоретической задачи: $2\bar{X}, (n+1)X_{(1)}, X_{(1)} + X_{(n)}, \frac{n+1}{n}X_{(n)}$. Посчитайте для всех полученных оценок $\hat{\theta}$ квадратичную функцию потерь $(\hat{\theta} - \theta)^2$ и для каждого фиксированного n усредните по выборкам. Для каждого из трех значений θ постройте графики усредненных функций потерь в зависимости от n .
2. (К теоретическим задачам 3, 4, 5) В задаче требуется экспериментально проверить утверждение, что для любой несмещенной оценки $\hat{\theta}(X)$ параметра θ выполнено неравенство Рао-Крамера

$$D_{\theta}\hat{\theta}(X) \geq \frac{1}{I_X(\theta)}.$$

Сгенерируйте выборку X_1, \dots, X_N , $N = 1000$, из распределений в теоретических задачах (распределение Бернулли, экспоненциальное распределение и нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием). В случае биномиального распределения $m = 50$, в случае нормального распределения с неизвестным математическим ожиданием $\sigma^2 = 2.1$. Второй параметр (единственный в случае экспоненциального распределения) выберите случайно из распределения, предложенного в файле. Для всех $n \leq N$ посчитайте значение эффективной оценки и бутстрепную оценку дисперсии для эффективной оценки (параметрический бутстреп, количество бутстрепных выборок равно 500, размер каждой равен n). Сделайте то же самое с другой несмещенной оценкой — в задаче 3 возьмите X_1/m , в задаче 4 возьмите $\frac{n-1}{n\bar{X}}$ (неверно!), в задаче 5 возьмите выборочную медиану. Постройте графики зависимости бутстрепных оценок дисперсий от размера выборки n . Для каждой бутстрепной оценки постройте на том же графике кривую зависимости $\frac{1}{I_X(\theta)}$ от n .

3. Рассмотрим $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bern}(\theta)$. По сетке значений $\theta \in [0, 1]$ с шагом 0.01 постройте график зависимости нижней оценки дисперсии произвольной несмещенной оценки из неравенства Рао-Крамера от θ . Какой можно сделать вывод (напишите в комментариях)? Для каждого значения θ (для той же сетки) сгенерируйте выборку размера $n = 1000$ для параметра θ , посчитайте эффективную оценку θ и бутстрепную оценку дисперсии (параметрический бутстреп, количество бутстрепных выборок равно 500) этой эффективной оценки θ . Нарисуйте график зависимости полученных бутстрепных оценок от θ .