

## 6. Байесовские оценки.

1. Сгенерируйте выборку  $X_1, \dots, X_{100}$  из распределения  $N(0, 1)$ . Для каждого  $n \leq 100$  в модели  $N(0, \theta)$  найдите оценку максимального правдоподобия по выборке  $X_1, \dots, X_n$  и байесовскую оценку, для которой в качестве априорного распределения возьмите сопряженное. Возьмите несколько ( $m \geq 5$ ) значений параметров сдвига и масштаба для априорного распределения. Постройте графики абсолютной величины отклонения оценки от истинного значения параметра в зависимости от  $n$  для этих оценок, которым соответствуют разные значения параметров априорного распределения ( $m$  кривых на одном графике). Сделайте выводы.
2. Рассмотрите схему испытаний Бернулли (т.е. броски монет) с вероятностью успеха  $p$ . Постройте несколько графиков сопряженного априорного распределения для разных параметров и объясните, как значения параметров априорного распределения соотносятся с априорными знаниями о монете. Это могут быть, например, знания вида “монета, скорее, честна” (при таком априорном распределении наиболее вероятны значения  $p$  в окрестности 0.5), “монета нечестная” (наименее вероятны значения  $p$  в окрестности 0.5), “монета, скорее всего, нечестная, перевес в сторону герба” (наиболее вероятны значения  $p$  в окрестности 1). Проведите по 20 “бросков” для разных монет и найдите байесовские оценки  $p$  при различных параметрах априорного распределения, при которых получаются разные интерпретации априорных знаний (достаточно трех пар). Сравните с оценками максимального правдоподобия. Постройте графики абсолютных величин отклонений оценок, построенных по выборке  $X_1, \dots, X_n$  ( $n \leq 20$ ), от истинных значений параметра в зависимости от  $p$  (для разных  $p$  разные графики). Сделайте выводы.
3. Предположим, что  $X_1, \dots, X_N$  – выборка из распределения  $N(\theta, 1)$ . Известно, что  $\theta$  близко к нулю: с вероятностью не менее 0.95 выполнено неравенство  $|\theta| < 0.5$ . Сгенерируйте выборку размера 100 из стандартного распределения Коши. При  $N = 100$  используйте эту выборку в качестве  $X_1, \dots, X_N$  для описанной выше модели. Посчитайте байесовские оценки (для одного априорного распределения, учитывающего описанное выше свойство распределения параметра  $\theta$ ) и оценки максимального правдоподобия для всех  $N \leq 100$ . Постройте графики абсолютной величины отклонения этих оценок от истинного значения параметра  $\theta_0 = 0$  в зависимости от  $n$ . Сделайте выводы.
4. Адаптировать задачу из раздела УМО к случаю, когда параметр  $\lambda$  неизвестен и его нужно оценивать (даже вначале, при отсутствии информации) по мере поступления новой информации (с помощью байесовской оценки). В качестве априорного распределения  $\lambda$  возьмите сопряженное к экспоненциальному распределению. Выберите параметры сопряженного распределения и объясните свой выбор. Сделайте выводы. Данные те же, что и в задаче из предыдущего раздела. Обратите внимание на изменение формата вывода программы.