Министерство образования Республики Беларусь

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

Лабораторная работа 2

"Метод сеток решения краевой задачи для ОДУ"

Подготовил:
студент 3 курса 3 группы
Тев Никита Михайлович

Преподаватель:
Горбачёва Юлия
Николаевна

Минск, 2019 г.

1. Постановка задачи

   Дана линейная краевая задача. Необходимо построить для краевой задачи разностную схему второго порядка аппроксимации на минимальном шаблоне и с помощью метода прогонки при $h = 0.05$ найти её численное решение. Оценить погрешность полученного численного решения с помощью правила Рунге. Обосновать применимость метода прогонки для решения разностной задачи. Построить график численного решения задачи.

2. Условие задачи:

   $$\begin{cases} u''(x) + (\frac{1}{3} - x)u'(x) - (x^2 - 1)u(x) = sinx, \; 0 < x < 1 \\ u'(0) - u(0) = 1 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

3. Построение разностной схемы

   Примем следующие обозначения:

   $$\begin{cases} p(x) = (\frac{1}{3} - x) \\ q(x) = (x^2 - 1) \\ f(x) = sinx \end{cases}$$

   Тогда исходная задача примет вид:

   $$\begin{cases} u''(x) + p(x)u'(x) - q(x)u(x) = f(x), \; 0 < x < 1 \\ u'(0) - u(0) = 1 \\ u(1) = 1 \end{cases}$$

   Построим разностную схему:

   $$\begin{cases} y_{\overline{x}x}(x) + p(x)y_{\overset{\circ}{x}}(x) - q(x)y(x) = f(x), \; 0 < x < 1 \\ y_x(0) + ay(0) = b \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

   Чтобы получить метод второго порядка точности, необходимо подобрать соответствующие коэффициенты a и b.

   $$\psi_h(0) = u_x(0) + au(0) - b = u'(0) + \frac{h}{2}u''(0) + au(0) - b + O(h^2) =$$
   $$= [u(0)+1] + \frac{h}{2}[-p(0)u'(0) + q(0)u(0) + f(0)] + au(0) - b + O(h^2) =$$
   $$= \underbrace{u(0)\cdot(a+1)} - (b-1) + O(h^2) + \underbrace{\frac{h}{2}(-p(0))(u(0)}+1) + \underbrace{\frac{h}{2}q(0)u(0)} + \frac{h}{2}f(0) =$$
   $$= [a+1 - \frac{h}{2}p(0) + \frac{h}{2}q(0)]u(0) + [1 - b - \frac{h}{2}p(0) + \frac{h}{2}f(0)] + O(h^2)$$
   $$\begin{cases} a = \frac{h}{2}(p(0) - q(0)) - 1 \\ b = 1 + \frac{h}{2}(f(0) - p(0)) \end{cases}$$

   $$\begin{cases} a = \frac{h}{2}(p(0) - q(0)) - 1 \\ b = \frac{h}{2}(f(0) - p(0)) + 1 \end{cases}$$

   Перейдем к индесной форме и найдем коэффициенты прогонки.

Индексная форма: $\omega_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{0,N}\},\ h = \frac{1}{N}$

$$\frac{1}{h^2}(y_{j+1} - 2y_j + y_{j-1}) + p_j \cdot \frac{1}{2h}(y_{j+1} - y_{j-1}) - q_j y_j = f_j \quad, j = \overline{1,N-1}$$

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{h^2} + \frac{p_j}{2h}\right] y_{j+1} + \left[-\frac{2}{h^2} - q_j\right] y_j - \left[\frac{p_j}{2h} - \frac{1}{h^2}\right] y_{j-1} = f_j \quad, j = \overline{1,N-1} \\ \left[\frac{h}{2}p_0 - \frac{h}{2}q_0 - 1 - \frac{1}{h}\right] y_0 + \frac{1}{h} y_1 = \frac{h}{2}(f_0 - p_0) + 1 \\ y_N = 1 \end{cases}$$

К-ты прогонки:

$c_0 = \frac{h}{2}p_0 - \frac{h}{2}q_0 - 1 - \frac{1}{h}$; $b_0 = -\frac{1}{h}$; $F_0 = \frac{h}{2}(f_0 - p_0) + 1$

$c_N = 1,\ a_N = 0,\ F_N = 1$

$a_j = \frac{p_j}{2h} - \frac{1}{h^2}$; $c_j = -\frac{2}{h^2} - q_j$; $b_j = -\frac{p_j}{2h} - \frac{1}{h^2}$; $F_j = f_j$, $j = \overline{1,N-1}$

Докажем корректность и утсойчивость метода прогонки. Для найденных коэффициентов выполняются неравенства:

$|c_0| \geq |a_0|$

$|c_i| \geq |a_i|, 1 < i < N-1$

$|c_N| > |a_N|$

Значит, можно применять метод прогонки.

4. Листинг программы

5. Результаты работы

```
Runge error: 0.0171
```