Билеты по Алгебре и теории чисел 19-...
3 семестр. МОиАИС.

Никита Якунцев, Андрей Сотников, Никита Хатеев, to be continued...

12 января 2014 г.

Содержание

1 Функции многих переменных

1.1 Билет 19

Евклидово пространство. Простейшие свойства.

E - вещественное линейное пространство называется евклидовым, если задана функция $E \times E \to \mathbb{R}$, называемая скалярным произведением
(обозн. $\forall x, y\ \exists (x, y) \in \mathbb{R}$) и выполнено 4 аксиомы:

1. $\forall x, y \in E\ (x, y) = (y, x)$
2. $\forall x_1, x_2, y \in E\ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in E\ (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
4. $\forall x \in E\ (x, x) \geq 0, x = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0$

Свойства:

1. **a)** $(0, y) = 0\ \forall y \in E$

   b) $(x, 0) = 0\ \forall x \in E$

   Доказательство: а) $\overset{3\ axiom}{\Rightarrow}$ при $\alpha = 0$ $(0x, y) = 0(x, y) = (0, y) = 0,\ \forall y \in E$

2. **a)** $\forall n \in \mathbb{N}\ , \forall \alpha_1 .. \alpha_n \in \mathbb{R}\ \forall x_1 .. x_n, y \in E$
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(x_i, y\right)$$
   Доказательство:

   b) $\forall m \in \mathbb{N}\ ,\ \forall \beta_1 .. \beta_m \in \mathbb{R}\ ,\ \forall y_1 .. y_m, x \in E$
   $$\left(x, \sum_{i=1}^{n} \beta_i, y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(x, y_i\right)$$
   Доказательство:

   c) $\forall m, n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall \alpha_1 .. \alpha_n, \beta_1 .. \beta_m \in \mathbb{R}, \forall x_1 .. x_n, y_1 .. y_m \in E$
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j, y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i, \beta_j \left(x_i, y_i\right)$$
   Доказательство:

3. Пусть

   a) $(x, y) = 0, \forall y \in E\ \Rightarrow x = 0$

   a) $(x, y) = 0, \forall x \in E\ \Rightarrow y = 0$

   Доказательство: а) $(x, y) = 0,\ \forall y$ пусть $y = x \Rightarrow (x, x) = 0 \overset{4\ axiom}{\Rightarrow} x = 0$

4. Тождество параллелограма
   $((x + y), (x + y)) + ((x - y), (x - y)) = 2(x, x) + 2(y, y)$
   Доказательство:
   $(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2(x, x) + 2(y, y)$

1.2 Билет 20

Неравенство Коши-Буняковского.

Теорема 1 $\forall x, y \in E$ - евклидово пространство; $|(x,y)^2| \le (x,x)*(y,y) \Leftrightarrow (x,y)^2 \le (x,x)*(y,y)$

Доказательство

Зафиксируем произвольные $x, y \in E$. Введем отображение:

$$\varphi(\lambda) : R \to R; \forall\lambda\ \varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y)$$

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x,x) + \lambda(x,y) + \lambda(y,x) + (y,y) = \lambda^2(x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y)$$

$$\varphi(\lambda) \ge 0 \Leftrightarrow D \le 0$$

$$\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)*(y,y) \le 0$$

$$(x,y)^2 \le (x,x)*(y,y)$$

Теорема 2 Неравенство Коши-Буняковского достигает нуля $\Leftrightarrow$ x и y линейно зависимы.

Доказательство

1. $\Rightarrow$ x и y - линейно зависимы $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda x \end{array}\right.$

   (a) $x = 0$
   $(0,y) = 0; (0,0)*(y,y) = 0*(y,y) = 0 \Rightarrow (x,y)^2 = (x,x)*(y,y)$

   (b) $y = \lambda x$
   $(x,y)^2 = (x,\lambda x)^2 = \lambda^2(x,x)^2 = \lambda^2(x,x)*(x,x) = (x,x)*(\lambda x, \lambda x) = (x,x)*(y,y)$

2. $\Leftarrow$ Пусть в неравенстве Коши-Буняковского достигается знак равенства. Объявим функцию $\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y)$
   $(x,y)^2 = (x,x)*(y,y) \Rightarrow \frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)*(y,y) = 0$
   $\exists\lambda_0 :\ \varphi(\lambda_0) = (\lambda_0 x + y, \lambda_0 x + y) = 0 \Rightarrow \lambda_0 x + y = 0 \Rightarrow y = -\lambda_0 x$ - линейно зависимы.

1.3 Билет 21

Норма. Линейное нормированное пространство. Метрика. Метрическое пространство.

Пусть E - линейное пространство над полем R (или C).

Функция $f : E \to R : x \in E \to \|x\| \in R$ называется нормой, если:

1. (a) $\|x\| \geq 0$

   (b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\forall x \in E \; \forall \alpha \in R \; \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

3. Неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

1.4 Билет 28

Линейные и билинейные функции (формы)

О.1 E - лин. пр-во над полем P.