Билеты по Алгебре и теории чисел 19-...
3 семестр. МОиАИС.

Никита Якунцев, Андрей Сотников, Никита Хатеев, to be continued...

12 января 2014 г.

Содержание

1 Функции многих переменных

1.1 Билет 19

Евклидово пространство. Простейшие свойства.

E - вещественное линейное пространство называется евклидовым, если задана функция $E \times E \to \mathbb{R}$, называемая скалярным произведением
(обозн. $\forall x, y\ \exists (x, y) \in \mathbb{R}$) и выполнено 4 аксиомы:

1. $\forall x, y \in E\ (x, y) = (y, x)$
2. $\forall x_1, x_2, y \in E\ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall x, y \in E\ (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
4. $\forall x \in E\ (x, x) \geq 0, x = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0$

Свойства:

1. **a)** $(0, y) = 0\ \forall y \in E$

   b) $(x, 0) = 0\ \forall x \in E$

   Доказательство: a) $\overset{3\ axiom}{\Rightarrow}$ при $\alpha = 0$ $(0x, y) = 0(x, y) = (0, y) = 0,\ \forall y \in E$

2. **a)** $\forall n \in \mathbb{N}\ , \forall \alpha_1..\alpha_n \in \mathbb{R}\ \forall x_1..x_n, y \in E$
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y)$$
   Доказательство:

   b) $\forall m \in \mathbb{N}\ ,\ \forall \beta_1..\beta_m \in \mathbb{R}\ ,\ \forall y_1..y_m, x \in E$
   $$\left(x, \sum_{i=1}^{n} \beta_i, y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (x, y_i)$$
   Доказательство:

   c) $\forall m, n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall \alpha_1..\alpha_n, \beta_1..\beta_m \in \mathbb{R}, \forall x_1..x_n, y_1..y_m \in E$
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j, y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i, \beta_j (x_i, y_i)$$
   Доказательство:

3. Пусть

   a) $(x, y) = 0, \forall y \in E\ \Rightarrow x = 0$

   a) $(x, y) = 0, \forall x \in E\ \Rightarrow y = 0$

   Доказательство: a) $(x, y) = 0,\ \forall y$ пусть $y = x \Rightarrow (x, x) = 0 \overset{4\ axiom}{\Rightarrow} x = 0$

4. Тождество параллелограма
   $((x + y), (x + y)) + ((x - y), (x - y)) = 2(x, x) + 2(y, y)$
   Доказательство:
   $(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2(x, x) + 2(y, y)$

1.2 Билет 20

Неравенство Коши-Буняковского.

Теорема 1 $\forall x, y \in E$ - евклидово пространство; $|(x,y)^2| \le (x,x)*(y,y) \Leftrightarrow (x,y)^2 \le (x,x)*(y,y)$

Доказательство

Зафиксируем произвольные $x, y \in E$. Введем отображение:

$$\varphi(\lambda) : R \to R; \forall\lambda\ \varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y)$$

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x,x) + \lambda(x,y) + \lambda(y,x) + (y,y) = \lambda^2(x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y)$$

$$\varphi(\lambda) \ge 0 \Leftrightarrow D \le 0$$

$$\frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)*(y,y) \le 0$$

$$(x,y)^2 \le (x,x)*(y,y)$$

Теорема 2 Неравенство Коши-Буняковского достигает нуля $\Leftrightarrow$ x и y линейно зависимы.

Доказательство

1. $\Rightarrow$ x и y - линейно зависимы $\Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 0 \\ &y = \lambda x \end{aligned}\right.$

   (a) $x = 0$
   $(0,y) = 0; (0,0)*(y,y) = 0*(y,y) = 0 \Rightarrow (x,y)^2 = (x,x)*(y,y)$

   (b) $y = \lambda x$
   $(x,y)^2 = (x,\lambda x)^2 = \lambda^2(x,x)^2 = \lambda^2(x,x)*(x,x) = (x,x)*(\lambda x, \lambda x) = (x,x)*(y,y)$

2. $\Leftarrow$ Пусть в неравенстве Коши-Буняковского достигается знак равенства. Объявим функцию $\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x,x) + 2\lambda(x,y) + (y,y)$

   $(x,y)^2 = (x,x)*(y,y) \Rightarrow \frac{D}{4} = (x,y)^2 - (x,x)*(y,y) = 0$

   $\exists\lambda_0 :\ \varphi(\lambda_0) = (\lambda_0 x + y, \lambda_0 x + y) = 0 \Rightarrow \lambda_0 x + y = 0 \Rightarrow y = -\lambda_0 x$ - линейно зависимы.

1.3 Билет 21

Норма. Линейное нормированное пространство. Метрика. Метрическое пространство.

Пусть E - линейное пространство над полем R (или C).

Функция $f : E \to R : x \in E \to \|x\| \in R$ называется нормой, если:

1. (a) $\|x\| \geq 0$

   (b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2. $\forall x \in E \ \forall \alpha \in R \ \|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

3. Неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

При этом, E - линейное нормированное пространство.

1.4 Билет 28

Линейные и билинейные функции (формы)

Опр.1 E - лин. пр-во над полем P.
Линейное отображение $H : E \to P$ называется линейной формой $\Leftrightarrow \forall x, y \in E \ \forall \alpha \in P$

1. $h(x+y) = h(x) + h(y)$
2. $h(\alpha x) = \alpha h(x)$

Пусть $\dim E = n, 0 < n < \infty$; В E выбран любой базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n) = e$; В P выберем любой базис $f = (f_1 \neq 0), f_1 \in P$ $(f_1 = 1)$

Опр.2 Матрицей линейной формы h в базисах e, f - это матрица-строка $[h]_{e,f} = \begin{pmatrix} [h(e_1)]_f & \cdots & [h(e_n)]_f \end{pmatrix}$
При $f_1 = 1$ $[h]_e = \begin{pmatrix} h(e_1) & \cdots & h(e_n) \end{pmatrix}$

Теорема 1 Пусть $E - n$-мерное линейное пространство. $(0 < n < \infty)$ с любым базисом $e = (e_1, \ldots, e_n)$
Тогда $\forall h$ - лин. форма на E справедлива формула

$$\forall x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \quad h(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (1)$$

где $\varphi_i = h(e_i), i = \overline{1, n}$;

$$(1) \Leftrightarrow (1') \quad h(x) = [h]_e [x]_e, \ [x]_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Доказательство: $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ применим h :

$$h(x) = h\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{h(e_i)}_{:=\varphi_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Теорема 2 $E - n-$мерное линейное пространство над полем $P; (0 < n < \infty); e = (e_1, \ldots, e_n)$ - произв. базис E

Тогда ф-ция, опр-ная $\forall x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ ф-лой $h(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \Phi * [x]_e$, где $\begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \end{pmatrix}$ - любая матрица из $M_{1,n}(P)$, - <u>линейна</u>, и ее матрица в базисе e - это матрица $\begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \end{pmatrix}$

Доказательство: $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \end{pmatrix}; [x]_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \ \forall x = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

1. $\forall x, y \in E$ $[x+y]_e = [x]_e + [y]_e$; $h(x+y) = \Phi[x+y]_e = \Phi([x]_e + [y]_e) = \Phi[x]_e + \Phi[y]_e = = h(x) + h(y)$
2. $\forall \alpha \in P$ $\forall x \in E$ $[\alpha x]_e = \alpha [x]_e$
   $h(\alpha x) = \Phi[\alpha x]_e = \Phi(\alpha [x]_e) = \alpha \Phi[x]_e = \alpha h(x)$

   $$h(e_1) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_1$$

   $\ldots$

$$h(e_i) = \begin{pmatrix}\varphi_1 & \cdots & \varphi_n\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\ \cdots \\ 1 \\ \cdots \\ 0\end{pmatrix} i = \varphi_i$$

$$[h]_e = \begin{pmatrix}h(e_1) & \cdots & h(e_i) & \cdots & h(e_n)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_1 & \cdots & \varphi_n\end{pmatrix} = \Phi$$

Опр. 3 Пусть E - лин. пр-во над полем P. Суммой двух лин. форм $h_i : E \to P,\ i = \overline{1,2}$, называется ф-ция, опр. ф-лой $\forall x \in E\ h_1(x) + h_2(x)$

Произведением лин. формы $h : E \to P$ на число $\alpha \in P$ наз-ся ф-ция, опр. ф-лой $\forall x \in E\ \alpha h(x)$

Замечание: в силу Т. для лин. операторов сумма и произведение являются линейной формой

Доказательство:

Теорема 3

1. Мн-во E^* лин. форм на лин. пр-ве E над полем P является лин. пр-вом над P
2. Если $\dim E = n\ (0 < n < \infty), \dim E^* = n$

Доказательство:

1.
2. $\forall h \in E^*$ - лин. пр. $\overset{A}{\leftrightarrow}$ $[h]_e$ - взаимно-однозначно в фикс. базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$

   $h_1 \to [h_1]_e,\ h_2 \to [h_2]_e$ и $[h_1]_e = [h_2]_e \Rightarrow h_1 = h_2$

   $\forall h_1, h_2 \in E^*\ [h_1 + h_2]_e = [h_1]_e + [h_2]_e; \quad \forall \alpha \in P\ \forall h \in E^*\ [\alpha h]_e = \alpha [h]_e$

   $A(h) = [h]_e$; A-линейное и вз. однозн. $\Leftrightarrow$ биект. $\Rightarrow A$ - обр-мое $\Rightarrow A$ - изоморфизм E^* и $M_{1,n}(P)$

   Базисом $M_{1,n}(P)$ явл-ся $q_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ q_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots,\ q_n = (0, 0, \ldots, 1) \Rightarrow \dim M_{1,n}(P) = n \Rightarrow \dim E^* = n$

Теорема 4 Если $E - n$-мерное лин. пр-во над полем P, то $(E^*)^*$ изоморфно E