

Билеты по Алгебре и теории чисел 19-...
3 семестр. МОиАИС.

Никита Якунцев, Андрей Сотников, Никита Хатеев, to be continued...

12 января 2014 г.

Содержание

1	Функции многих переменных	2
1.1	Билет 19	2
1.2	Билет 20	3
1.3	Билет 21	4
1.4	Билет 28	5

1 Функции многих переменных

1.1 Билет 19

Евклидово пространство. Простейшие свойства.

E - вещественное линейное пространство называется евклидовым, если задана функция $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, называемая скалярным произведением (обозн. $\forall x, y \exists (x, y) \in \mathbb{R}$) и выполнено 4 аксиомы:

1. $\forall x, y \in E (x, y) = (y, x)$
2. $\forall x_1, x_2, y \in E (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x, y \in E (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
4. $\forall x \in E (x, x) \geq 0, x = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0$

Свойства:

1. а) $(0, y) = 0 \forall y \in E$

б) $(x, 0) = 0 \forall x \in E$

Доказательство: а) $\stackrel{3 \text{ axiom}}{\Rightarrow}$ при $\alpha = 0 (0x, y) = 0(x, y) = (0, y) = 0, \forall y \in E$

2. а) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R} \forall x_1 \dots x_n, y \in E$

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, y \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i, y)$$

Доказательство:

б) $\forall m \in \mathbb{N}, \forall \beta_1 \dots \beta_m \in \mathbb{R}, \forall y_1 \dots y_m, x \in E$

$$\left(x, \sum_{i=1}^m \beta_i y_i \right) = \sum_{i=1}^m \beta_i (x, y_i)$$

Доказательство:

с) $\forall m, n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_1 \dots \alpha_n, \beta_1 \dots \beta_m \in \mathbb{R}, \forall x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m \in E$

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^m \beta_j y_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j (x_i, y_j)$$

Доказательство:

3. Пусть

а) $(x, y) = 0, \forall y \in E \Rightarrow x = 0$

а) $(x, y) = 0, \forall x \in E \Rightarrow y = 0$

Доказательство: а) $(x, y) = 0, \forall y$ пусть $y = x \Rightarrow (x, x) = 0 \stackrel{4 \text{ axiom}}{\Rightarrow} x = 0$

4. Тождество параллелограмма

$$((x + y), (x + y)) + ((x - y), (x - y)) = 2(x, x) + 2(y, y)$$

Доказательство:

$$(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2(x, x) + 2(y, y)$$

1.2 Билет 20

Неравенство Коши-Буняковского.

Теорема 1 $\forall x, y \in E$ - евклидово пространство; $|(x, y)|^2 \leq (x, x) * (y, y) \Leftrightarrow (x, y)^2 \leq (x, x) * (y, y)$

Доказательство

Зафиксируем произвольные $x, y \in E$. Введем отображение:

$$\varphi(\lambda) : R \rightarrow R; \forall \lambda \varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y)$$

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + \lambda(x, y) + \lambda(y, x) + (y, y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y)$$

$$\varphi(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow D \leq 0$$

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x) * (y, y) \leq 0$$

$$(x, y)^2 \leq (x, x) * (y, y)$$

Теорема 2 Неравенство Коши-Буняковского достигает нуля $\Leftrightarrow x$ и y линейно зависимы.

Доказательство

$$1. \Rightarrow x \text{ и } y - \text{линейно зависимы} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda x \end{cases}$$

$$(a) \ x = 0$$

$$(0, y) = 0; (0, 0) * (y, y) = 0 * (y, y) = 0 \Rightarrow (x, y)^2 = (x, x) * (y, y)$$

$$(b) \ y = \lambda x$$

$$(x, y)^2 = (x, \lambda x)^2 = \lambda^2(x, x)^2 = \lambda^2(x, x) * (x, x) = (x, x) * (\lambda x, \lambda x) = (x, x) * (y, y)$$

2. \Leftarrow Пусть в неравенстве Коши-Буняковского достигается знак равенства. Объявим функцию $\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y)$

$$(x, y)^2 = (x, x) * (y, y) \Rightarrow \frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x) * (y, y) = 0$$

$$\exists \lambda_0 : \varphi(\lambda_0) = (\lambda_0 x + y, \lambda_0 x + y) = 0 \Rightarrow \lambda_0 x + y = 0 \Rightarrow y = -\lambda_0 x - \text{линейно зависимы.}$$

1.3 Билет 21

Норма. Линейное нормированное пространство. Метрика. Метрическое пространство.

Пусть E - линейное пространство над полем R (или C).

Функция $f : E \rightarrow R : x \in E \rightarrow \|x\| \in R$ называется нормой, если:

1. (a) $\|x\| \geq 0$
(b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\forall x \in E \forall \alpha \in R \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. Неравенство треугольника: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

При этом, E - линейное нормированное пространство.

Примеры:

1. $E = R : \forall x \in R \|x\| = |x|$
2. $E = V^3 : \|x\| = \sqrt{(x, x)}$
3. $E = R^n : x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \dots \\ \xi_n \end{pmatrix} \|x\| = \max \xi_i$

1.4 Билет 28

Линейные и билинейные функции (формы)

Опр.1 E - лин. пр-во над полем P .

Линейное отображение $H : E \rightarrow P$ называется линейной формой $\Leftrightarrow \forall x, y \in E \forall \alpha \in P$

$$1. h(x + y) = h(x) + h(y)$$

$$2. h(\alpha x) = \alpha h(x)$$

Пусть $\dim E = n, 0 < n < \infty$; В E выбран любой базис $(e_1, e_2, \dots, e_n) = e$; В P выберем любой базис $f = (f_1 \neq 0), f_1 \in P (f_1 = 1)$

Опр.2 Матрицей линейной формы h в базисах e, f - это матрица-строка $[h]_{e,f} = ([h(e_1)]_f \ \dots \ [h(e_n)]_f)$
 При $f_1 = 1 [h]_e = (h(e_1) \ \dots \ h(e_n))$

Теорема 1 Пусть E - n -мерное линейное пространство. $(0 < n < \infty)$ с любым базисом $e = (e_1, \dots, e_n)$

Тогда $\forall h$ - лин. форма на E справедлива формула

$$\forall x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i \quad h(x) = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

где $\varphi_i = h(e_i), i = \overline{1, n}$;

$$(1) \Leftrightarrow (1') \quad h(x) = [h]_e [x]_e, \quad [x]_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Доказательство: $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ применим h :

$$h(x) = h\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i h(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = (\varphi_1 \ \dots \ \varphi_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Теорема 2 E - n -мерное линейное пространство над полем $P; (0 < n < \infty); e = (e_1, \dots, e_n)$ - произв. базис E

Тогда ф-ция, опр-ная $\forall x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ ф-лой $h(x) = (\varphi_1 \ \dots \ \varphi_n) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \Phi * [x]_e$, где

$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}$ - любая матрица из $M_{1,n}(P)$, - линейна, и ее матрица в базисе e - это матрица $\begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}$

Доказательство: $\Phi = (\varphi_1 \ \dots \ \varphi_n); [x]_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \forall x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$

$$1. \forall x, y \in E \quad [x + y]_e = [x]_e + [y]_e; \quad h(x + y) = \Phi[x + y]_e = \Phi([x]_e + [y]_e) = \Phi[x]_e + \Phi[y]_e = h(x) + h(y)$$

$$2. \forall \alpha \in P \quad \forall x \in E \quad [\alpha x]_e = \alpha[x]_e \\ h(\alpha x) = \Phi[\alpha x]_e = \Phi(\alpha[x]_e) = \alpha\Phi[x]_e = \alpha h(x)$$

$$h(e_1) = (\varphi_1 \ \dots \ \varphi_n) \begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi_1 \\ \dots$$

$$h(e_i) = (\varphi_1 \quad \cdots \quad \varphi_n) \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} i = \varphi_i$$

$$[h]_e = (h(e_1) \quad \cdots \quad h(e_i) \quad \cdots \quad h(e_n)) = (\varphi_1 \quad \cdots \quad \varphi_n) = \Phi$$

Опр. 3 Пусть E - лин. пр-во над полем P . Суммой двух лин. форм $h_i : E \rightarrow P$, $i = \overline{1, 2}$, называется ф-ция, опр. ф-лой $\forall x \in E \quad h_1(x) + h_2(x)$

Произведением лин. формы $h : E \rightarrow P$ на число $\alpha \in P$ наз-ся ф-ция, опр. ф-лой $\forall x \in E \quad \alpha h(x)$

Замечание: в силу Т. для лин. операторов сумма и произведение являются линейной формой

Доказательство:

Теорема 3

1. Мн-во E^* лин. форм на лин. пр-ве E над полем P является лин. пр-вом над P
2. Если $\dim E = n$ ($0 < n < \infty$), $\dim E^* = n$

Доказательство:

- 1.
2. $\forall h \in E^*$ - лин. пр. $\overset{A}{\leftrightarrow} [h]_e$ - взаимно-однозначно в фикс. базисе $e = (e_1, \dots, e_n)$
 $h_1 \rightarrow [h_1]_e, h_2 \rightarrow [h_2]_e$ и $[h_1]_e = [h_2]_e \Rightarrow h_1 = h_2$
 $\forall h_1, h_2 \in E^* \quad [h_1 + h_2]_e = [h_1]_e + [h_2]_e; \quad \forall \alpha \in P \quad \forall h \in E^* \quad [\alpha h]_e = \alpha [h]_e$
 $A(h) = [h]_e$; A -линейное и вз. однозн. \Leftrightarrow биект. $\Rightarrow A$ - обр-мое $\Rightarrow A$ - изоморфизм E^* и $M_{1,n}(P)$
Базисом $M_{1,n}(P)$ явл-ся $q_1 = (1, 0, \dots, 0), q_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, q_n = (0, 0, \dots, 1) \Rightarrow$
 $\dim M_{1,n}(P) = n \Rightarrow \dim E^* = n$

Теорема 4 Если E - n -мерное лин. пр-во над полем P , то $(E^*)^*$ изоморфно E