

Билеты по Алгебре и теории чисел 19-...
3 семестр. МОиАИС.

Никита Якунцев, Андрей Сотников, Никита Хатеев, to be continued...

12 января 2014 г.

Содержание

1	Функции многих переменных	2
1.1	Билет 19	2
1.2	Билет 20	3

1 Функции многих переменных

1.1 Билет 19

Евклидово пространство. Простейшие свойства.

E - вещественное линейное пространство называется евклидовым, если задана функция $E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, называемая скалярным произведением (обозн. $\forall x, y \exists (x, y) \in \mathbb{R}$) и выполнено 4 аксиомы:

1. $\forall x, y \in E (x, y) = (y, x)$
2. $\forall x_1, x_2, y \in E (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \forall x, y \in E (\alpha x, y) = \alpha(x, y)$
4. $\forall x \in E (x, x) \geq 0, x = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0$

Свойства:

1. **a)** $(0, y) = 0 \forall y \in E$
- b)** $(x, 0) = 0 \forall x \in E$

Доказательство: а) $\stackrel{3 \text{ axiom}}{\Rightarrow}$ при $\alpha = 0$ $(0x, y) = 0(x, y) = (0, y) = 0, \forall y \in E$

2. **a)** $\forall n \in \mathbb{N} \forall \alpha_1 \dots \alpha_n \in \mathbb{R} \forall x_1 \dots x_n, y \in E$

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, y \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i, y)$$

Доказательство:

b)

1.2 Билет 20

Неравенство Коши-Буняковского.

Теорема 1 $\forall x, y \in E$ - евклидово пространство; $|(x, y)|^2 \leq (x, x) * (y, y) \Leftrightarrow (x, y)^2 \leq (x, x) * (y, y)$

Доказательство

Зафиксируем произвольные $x, y \in E$. Введем отображение:

$$\varphi(\lambda) : R \rightarrow R; \forall \lambda \varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y)$$

$$\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + \lambda(x, y) + \lambda(y, x) + (y, y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y)$$

$$\varphi(\lambda) \geq 0 \Leftrightarrow D \leq 0$$

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x) * (y, y) \leq 0$$

$$(x, y)^2 \leq (x, x) * (y, y)$$

Теорема 2 Неравенство Коши-Буняковского достигает нуля $\Leftrightarrow x$ и y линейно зависимы.

Доказательство

$$1. \Rightarrow x \text{ и } y - \text{линейно зависимы} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda x \end{cases}$$

$$(a) \ x = 0$$

$$(0, y) = 0; (0, 0) * (y, y) = 0 * (y, y) = 0 \Rightarrow (x, y)^2 = (x, x) * (y, y)$$

$$(b) \ y = \lambda x$$

$$(x, y)^2 = (x, \lambda x)^2 = \lambda^2(x, x)^2 = \lambda^2(x, x) * (x, x) = (x, x) * (\lambda x, \lambda x) = (x, x) * (y, y)$$

2. \Leftarrow Пусть в неравенстве Коши-Буняковского достигается знак равенства. Объявим функцию $\varphi(\lambda) = (\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2(x, x) + 2\lambda(x, y) + (y, y)$

$$(x, y)^2 = (x, x) * (y, y) \Rightarrow \frac{D}{4} = (x, y)^2 - (x, x) * (y, y) = 0$$

$$\exists \lambda_0 : \varphi(\lambda_0) = (\lambda_0 x + y, \lambda_0 x + y) = 0 \Rightarrow \lambda_0 x + y = 0 \Rightarrow y = -\lambda_0 x - \text{линейно зависимы.}$$