Билеты по Алгебре и теории чисел 19-...
3 семестр. МОиАИС.

Никита Якунцев, Андрей Сотников, Никита Хатеев, to be continued...

12 января 2014 г.

Содержание

1 Функции многих переменных

1.1 Билет 19

Евклидово пространство. Простейшие свойства.

E - вещественное линейное пространство называется евклидовым, если задана функция $E \times E \to \mathbb{R}$, называемая скалярным произведением
(обозн. $\forall x, y \ \exists (x, y) \in \mathbb{R}$) и выполнено 4 аксиомы:

1. $\forall x, y \in E \ (x, y) = (y, x)$
2. $\forall x_1, x_2, y \in E \ (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \forall x, y \in E \ (\alpha x, y) = \alpha (x, y)$
4. $\forall x \in E \ (x, x) \geq 0, x = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0$

Свойства:

1. **a)** $(0, y) = 0 \ \forall y \in E$

   b) $(x, 0) = 0 \ \forall x \in E$

   Доказательство: a) $\overset{3 \ axiom}{\Rightarrow}$ при $\alpha = 0$ $(0x, y) = 0(x, y) = (0, y) = 0, \ \forall y \in E$

2. **a)** $\forall n \in \mathbb{N}$ $, \forall \alpha_1 .. \alpha_n \in \mathbb{R} \ \forall x_1 .. x_n, y \in E$
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, y)$$
   Доказательство:

   b) $\forall m \in \mathbb{N}$, $\forall \beta_1 .. \beta_m \in \mathbb{R}$, $\forall y_1 .. y_m, x \in E$
   $$\left(x, \sum_{i=1}^{n} \beta_i, y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i (x, y_i)$$
   Доказательство:

   c) $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $\forall \alpha_1 .. \alpha_n, \beta_1 .. \beta_m \in \mathbb{R}, \forall x_1 .. x_n, y_1 .. y_m \in E$
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j, y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i, \beta_j (x_i, y_i)$$
   Доказательство:

3. Пусть

   a) $(x, y) = 0, \forall y \in E \ \Rightarrow x = 0$

   a) $(x, y) = 0, \forall x \in E \ \Rightarrow y = 0$

   Доказательство: a) $(x, y) = 0, \ \forall y$ пусть $y = x \Rightarrow (x, x) = 0 \overset{4 \ axiom}{\Rightarrow} x = 0$

4. Тождество параллелограма
   $((x + y), (x + y)) + ((x - y), (x - y)) = 2 (x, x) + 2 (y, y)$
   Доказательство:
   $(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2 (x, x) + 2 (y, y)$

1.2 Билет 20

Неравенство Коши-Буняковского.

Теорема 1 $\forall x, y \in E$ - евкл. пр-во; $|(x,y)^2| \leq (x,x) * (y,y) \Leftrightarrow (x,y)^2 \leq (x,x) * (y,y)$

Доказательство