Билеты по Алгебре и теории чисел 19-...
3 семестр. МОиАИС.

Никита Якунцев, Андрей Сотников, Никита Хатеев, to be continued...

12 января 2014 г.

Содержание

1 Функции многих переменных

1.1 Билет 19

Евклидово пространство. Простейшие свойства.

E - вещественное линейное пространство называется евклидовым, если задана функция $E \times E \to \mathbb{R}$, называемая скалярным произведением
(обозн. $\forall x, y \; \exists (x, y) \in \mathbb{R}$) и выполнено 4 аксиомы:

1. $\forall x, y \in E \; (x, y) = (y, x)$
2. $\forall x_1, x_2, y \in E \; (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \; \forall x, y \in E \; (\alpha x, y) = \alpha (x, y)$
4. $\forall x \in E \; (x, x) \geq 0, x = 0 \Leftrightarrow (x, x) = 0$

Свойства:

1. **a)** $(0, y) = 0 \; \forall y \in E$

   b) $(x, 0) = 0 \; \forall x \in E$

   Доказательство: a) $\overset{3 \; axiom}{\Rightarrow}$ при $\alpha = 0$ $(0x, y) = 0(x, y) = (0, y) = 0, \; \forall y \in E$

2. **a)** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha_1..\alpha_n \in \mathbb{R} \; \forall x_1..x_n, y \in E$
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, y\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(x_i, y\right)$$
   Доказательство:

   b) $\forall m \in \mathbb{N}, \; \forall \beta_1..\beta_m \in \mathbb{R}, \; \forall y_1..y_m, x \in E$
   $$\left(x, \sum_{i=1}^{n} \beta_i, y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \left(x, y_i\right)$$
   Доказательство:

   c) $\forall m, n \in \mathbb{N}, \; \forall \alpha_1..\alpha_n, \beta_1..\beta_m \in \mathbb{R}, \forall x_1..x_n, y_1..y_m \in E$
   $$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, x_i, \sum_{j=1}^{m} \beta_j, y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i, \beta_j \left(x_i, y_i\right)$$
   Доказательство:

3. Пусть

   a) $(x, y) = 0, \forall y \in E \; \Rightarrow x = 0$

   a) $(x, y) = 0, \forall x \in E \; \Rightarrow y = 0$

   Доказательство: a) $(x, y) = 0, \; \forall y$ пусть $y = x \Rightarrow (x, x) = 0 \overset{4 \; axiom}{\Rightarrow} x = 0$

4. Тождество параллелограма
   $((x + y), (x + y)) + ((x - y), (x - y)) = 2(x, x) + 2(y, y)$
   Доказательство:
   $(x + y, x + y) + (x - y, x - y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) + (x, x) - (x, y) - (y, x) + (y, y) = 2(x, x) + 2(y, y)$

1.2 Билет 20

Неравенство Коши-Буняковского.

Теорема 1 $\forall x, y \in E$ - евкл. пр-во; $|(x,y)^2| \leq (x,x) * (y,y) \Leftrightarrow (x,y)^2 \leq (x,x) * (y,y)$

Доказательство

1.3 Билет 22

Ортогональность. Ортогональные системы векторов. Ортогонализация.

Def1: Пусть E - евклидово пространство

a) Векторы $x, y \in E$ - называются ортогональными $x \perp y$, если $(x, y) = 0$

b) $x \in E$, $M \subset E$
Вектор x ортогонален множеству M, если $\forall y \in M$, $x \perp y \Leftrightarrow \forall y \in M \ (x, y) = 0$
Обозначение: $x \perp M$

c) $M, P \subset E$
Множества M, P - ортогональны $(M \perp P)$, если $\forall x \in M$, $y \in P \ (x, y) = 0$
$x \perp E \Leftrightarrow x = 0$

Теорема 1
Пусть $x \perp M \Leftrightarrow$ для любого базиса (e_1, e_k) в $M, x \perp e_i, i = 1..k, \Leftrightarrow (x, e_i) = 0, i = 1..k$
Доказательство:

$\Rightarrow$: $x \perp M \Leftrightarrow \forall y \in M \ x \perp y, \Leftrightarrow (x, y) = 0 \Rightarrow$ верно и для базисных $(e_1..e_k),\ y = e_i,\ i = 1..k$

$\Leftarrow$: $x \perp e_i,\ i = 1..k,\ \forall y \in M$ разложим по базису $y = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i e_i$

$x \perp e_i \Rightarrow (x, e_i) = 0,\ \forall i = 1..k$

$(x, y) = (x, \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i, e_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i (x, e_i) = 0,\ \forall y \in M \ (x, y) = 0 \Rightarrow x \perp M$

Замечание: Если $M = L(e_1..e_k), x \perp e_i \ i = 1..k \Rightarrow x \perp M$
Def2:

1. Система векторов $\{x_\alpha\}$ из евклидового пространства называется ортогональной, если $x_\beta \perp x_\alpha \ forall \beta \neq \alpha$

2. Система векторов $\{x_\alpha\}$ из евклидового пространства называется нормированной, если $(x_\alpha, x_\alpha = 1,\ \forall \alpha)$

3. Система векторов $\{x_\alpha\}$ из евклидового пространства называется ортонормированной, если 1) $\cap$ 2)

Теорема 2
Ортогональная система из ненулевых векторов линейно независимая
Доказательство:
$\{x_\alpha\}$ - ортогональная система. Докажем, что и конечная подсистема $x_{\alpha_1}..x_{\alpha_k}$ - ЛНЗ
Рассмотрим линейную комбинацию $\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i x_{\alpha_i} = 0;\ \beta_i = 0 -?\ i = 1..k$

Скалярно умножим $\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i x_{\alpha_i} = 0$ на вектор $x_{\alpha_j}\ \forall j = 1..k$

$\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j}\right) = (0, x_{\alpha_j}) = 0$

$\sum\limits_{i=1}^{k} \beta_i (x_{\alpha_i}), x_{\alpha_j}) = 0 \Rightarrow \beta_j (x_{\alpha_j}) = 0$

$x_{\alpha_j} = \begin{cases} 0,\ i \neq j \\ (x_{\alpha_j}, x_{\alpha_j}),\ i = j \end{cases} (x_{\alpha_j}, x_{\alpha_j}) \neq 0 \Rightarrow \beta_j = 0 \Rightarrow$ все $\beta_j = 0,\ j = 1..k \Rightarrow$ система ЛНЗ

Теорема 3(Метод Фурье)
Пусть $e_1..e_n$ ортогональная система из ненулевых векторов и $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i (*)$
Тогда $\alpha_i=\frac{(x,e_i)}{e_i,e_i},\ i=1..n$
α_i- коээфициенты Фурье (*)- формула Фурье
Доказательство:
Умножим (*) скалярно на e_j
$(x,e_j)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i, e_j\right),\ (x,e_j)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(e_i,e_j)$
$(e_i,e_j)=\begin{cases}0,\ i\neq j\\(e_j,e_j),\ i=j\end{cases}\ (x,e_j)=\alpha_j(e_j,e_j),\ \Big|:(e_j,e_j)\neq 0$
$\alpha_j=\frac{(x,e_j)}{e_i,e_j}$
Следствия

1. $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{(x,e_i)}{e_i,e_i}e_i$

2. Пусть $(e_1..e_n)$ - ортонормированная система $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i e_i\Rightarrow\alpha_i=(x,e_i)\ i=1..n$

   $x=\sum\limits_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i$

Доказательство следствия 2:
$(e_i,e_j)=\begin{cases}0,\ i\neq j\\1,\ i=j\end{cases}\Rightarrow(e_i,e_i)=1\Rightarrow e_i\neq 0$
$\alpha_i=\frac{(x,e_i)}{(e_i,e_i)}=(x,e_i)$
Теорема 3(Грама-Шмидта)
Пусть $e_1..e_n$ ЛНЗ система в евклидовом пр-ве E. Тогда существует ортогональная система $(f_1..f_n)$ для которых $L(e_1..e_k)=L(f_1..f_k),\forall k=1..n$
Доказательство:
1) $f_1=\frac{e_1}{||e_1||}$ - вектор единичной длины
$(f_1,f_1)=\left(\frac{e_1}{||e_1||},\frac{e_1}{||e_1||}\right)=1\frac{1}{||e_1||^2}(e_1,e_1)=\frac{||e_1||^2}{||e_1||^2}=1$
$L(e_1)=L(f_1),\ f_1=\alpha e_1,\ \alpha=\frac{1}{||e_1||}$
2)Ищем $e_2'=\alpha_1 f_1+e_2(\alpha_1\text{-неизв})$, так чтобы $e_2'\perp f_1,\ (e_2',f_1)=0$
$(\alpha_1 f_1+e_2,f_1)=0,\ \alpha_1(f_1,f_1)+(e_2,f_1)=0$, т.к. $(f_1,f_1)=1\Rightarrow\alpha_1=-(e_2,f_1)\Rightarrow e_2'=-(e_2,f_1)f_1+e_2$
$f_2=\frac{f_2'}{||e_2'||},\ e_2'\neq 0?$
<u>Предположим противное</u> $e_2'=0,\ \alpha_1 f_1+e_2 0,\ f_1=\frac{e_1}{||e_1||}$, но e_1,e_2-ЛНЗ
3)Пусть для m векторов gjcnhjtys $f_1,,f_m$ - удовл условию Т3
4)При m<n ищем вектор $f_{m+1},\ e_{m+1}'=\alpha_1 e_1+..+\alpha_m f_m+e_{m+1}$, так чтобы e_{m+1}' был ортогонален $f_i,\ i=1..m,\ e_{m+1}'\perp f_i\Leftrightarrow(e_{m+1}',f_i)=0$
$(e_{m+1}',f_i)=0\Leftrightarrow\alpha_1\underbrace{(f_1,f_1)}_{=1}+\alpha_2\underbrace{(f_2,f_1)}_{=0}+..+\alpha_2\underbrace{(f_m,f_1)}_{=0}+\alpha_m\underbrace{(e_{m+1},f_1)}_{=0}$
....
$(e_{m+1}',f_m)=0\Leftrightarrow\alpha_1\underbrace{(f_1,f_m)}_{=0}+\alpha_2\underbrace{(f_2,f_m)}_{=0}+..+\alpha_m\underbrace{(f_m,f_m)}_{=1}+\alpha_2\underbrace{(e_{m+1},f_m)}_{=0}$
$(f_i,f_j)=\begin{cases}0,\ i\neq j\\1,\ i=j\end{cases}$
$\alpha_1=-(e_{m+1},f_1)$
....

$\alpha_m = -(e_{m+1}, f_m)$
(*) $e'_{m+1} = \alpha_1 f_1 + .. + \alpha m f_m + e_{m+1},\ \alpha_i = -(e_{m+1}, f_i),\ i = 1..m$
$e'_{m+1} \neq 0$ Предположим противное $e'_{m+1} = 0 \Rightarrow f_1..f_m$-выражаются через $(e_1..e_m)$ получается нетривиальная линейная комбинация $(e_1..e_{n+1})$
$f_{m+1} = \frac{e'_{m+1}}{||e'_{m+1}||} \Rightarrow ||f_{m+1}|| = 1$
Построим ортогональную систему $(*) \Rightarrow f_{m+1}$ - линейно выражается через $(e_1..e_{m+1})$