Домашнее задание 1

Юрасов Никита Андреевич

Обновлено 2 октября 2019 г.

Содержание

Все графики, которые в дальнейшем будут вставлены в эту работы, были сконструированы с помощью библиотеки matplotlib в Jupyter Notebook, который будет приложен вместе с работой (ДЗ1.ipynb).

Все формулировки определений были взяты из книги А. В. Иванова «Теория Вероятностей (Краткий курс)»

Выберем выполнения работы были выбраны два распределения:

1. Дискретное распределение: распределение Пуассона
2. Непрерывное распределение: распределение Эраланга

1 Описание основных характеристик

1.1 Распределение Пуассона

Пусть случайная величина задается законом распределением:

$$f(x) = \frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}, \quad \mu > 0, x \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Функция распределения:

$$F_\xi(x) = P(\xi < x) = \sum_{k=0}^{x-1} \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}, \quad \mu > 0,\ x \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Математическое ожидание

Определение 1.1. *Математическое ожидание неотрицательной дискретной случайной величины называется:*

$$E\xi = \sum_i a_i p_i = \sum_i a_i P(\xi = a_i)$$

Тогда, из этого определения можно вывести напрямую математическое ожидание 1:

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^k}{(k-1)!} = \mu e^{-\mu}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu^{k-1}}{(k-1)!} = \mu e^{-\mu}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu^m}{m!} = \mu e^{-\mu}e^{\mu} = \mu$$

Дисперсия

Определение 1.2. *Дисперсия – это такое число, которое выражается вторым центральным моментом*

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 \tag{3}$$

Чтобы посчитать дисперсию случайно величины ξ проще всего воспользоваться выводом факториальных моментов.

Определение 1.3. *Факториальный момент - это число* $E\xi^{[m]} = E\xi(\xi-1)\ldots(\xi - -m+1)$

Тогда:

$$E\xi(\xi-1) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu} = \mu^2 e^{-\mu}\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu^{k-2}}{(k-2)!} = \mu^2 e^{-\mu}e^{\mu} = \mu^2$$

Если $E\xi^2 = E\xi(\xi-1) + E\xi = \mu^2 + \mu$, а $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2$, то $D\xi = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu$

В итоге мы получили для распределения Пуассона $\boxed{E\xi = \mu,\ D\xi = \mu}$

Производящая и характеристическая функции

Определение 1.4. *Производящей функцией случайной величины ξ называется функция*

$$\varphi_\xi(z) = Ez^\xi = \sum_{k=0}^{\infty} z^k p_k,\ z \in \mathbb{C},\ |z| \leq 1$$

Определение 1.5. *Характеристической функцией произвольной случайно величины ξ называется функция действительного аргумента при дискретном распределении:*

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} P(\xi = k)$$

Производящая функция для распределения Пуассона:

$$\varphi_\xi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} z^k = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu z)^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu z} = e^{\mu(z-1)}$$

Характеристическая функция:

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu e^{it})^k}{k!} = e^{-\mu} e^{\mu e^{it}} = e^{\mu(e^{it}-1)}$$

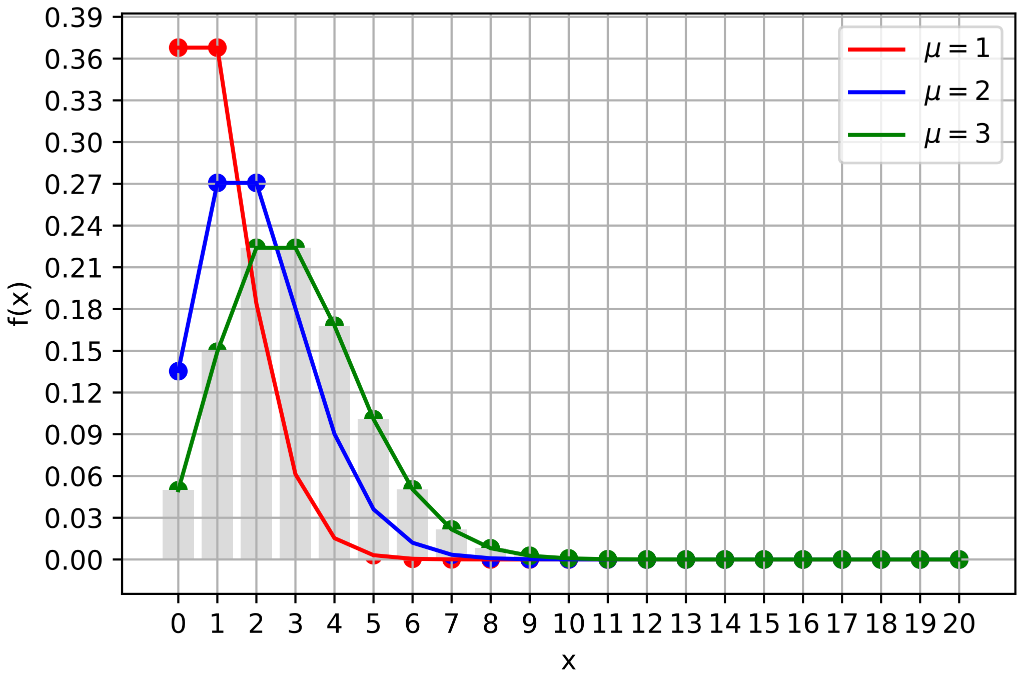


Рис. 1: Распределение Пуассона

1.2 Распределение Эрланга

Пусть случайная величина задается распределением:

$$f(x) = \frac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\lambda x}, \quad x, \lambda \in \mathbb{R}, \quad x, \lambda > 0, m \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Найдем функцию распределения по определению:

$$F(x) = P(\xi \le x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\, dx = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int\limits_{0}^{x} x^{m-1} e^{-\lambda x}\, dx$$

Математическое ожидание

Определение 1.6. *Математическое ожидание произвольной непрерывной случайной величины $\xi(\omega)$ называется интеграл Лебега от нее по мере P: $E\xi(\omega) = \int\limits_{\Omega} \xi(\omega)\, P(d\omega)$.*

При абсолютной сходимости: $E\xi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx$.

Согласно определению 1.6 можно получить математическое ожидание распределения Эрланга:

$$E\xi = \int\limits_{0}^{+\infty} x \frac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\lambda x} = \boxed{\text{делаем замену } z = \lambda x} = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{z}{\lambda} \frac{\lambda^m}{(m-1)!} \frac{z^{m-1}}{\lambda^{m-1}} e^{-z} \frac{dz}{\lambda} =$$

$$= \boxed{\Gamma(n) = (n-1)!} = \frac{1}{\lambda \Gamma(m)} \int\limits_{0}^{+\infty} z^m e^{-z}\, dz = \frac{\Gamma(m+1)}{\lambda \Gamma(m)} = \frac{m!}{\lambda (m-1)!} = \frac{m}{\lambda}$$

Дисперсия

Определение 1.7. *Дисперсией случайной величины ξ, имеющей $E\xi$, называется число:*

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

По определению 1.7 найдем дисперсию распределения Эрланга:

$$E\xi^2 = \int\limits_{0}^{+\infty} x^2 \frac{\lambda^m}{(m-1)!} x^{m-1} e^{-\lambda x}\, dx = \boxed{\text{сделаем замену } z = \lambda x} = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{z^{m+1} \lambda^m e^{-z}\, dz}{\lambda^{m+1} (m-1)! \lambda} =$$

$$= \frac{1}{\lambda^2 \Gamma(m)} \int\limits_{0}^{+\infty} z^{m+1} e^{-z}\, dz = \frac{\Gamma(m+2)}{\lambda^2 \Gamma(m)} = \frac{(m+1)!}{\lambda^2 (m-1)!} = \frac{(m+1)m}{\lambda^2}$$

Тогда: $D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{(m+1)m}{\lambda^2} - \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 = \frac{m}{\lambda^2}$

Характеристическая функция

Определение 1.8. *Характеристической функцией непрерывной случайной величины называют функцию от действительного аргумента*

$$g(t) = g_\xi(t) = Ee^{it\xi} = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{itx}\, dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\, dx$$

Найдем характеристическую функцию распределения Эрланга по определению:

$$g(t) = Ee^{it\xi} = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{itx} \frac{\lambda^m x^{m-1} e^{-\lambda x}}{(m-1)!}\, dx = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int\limits_{0}^{+\infty} x^{m-1} e^{-x(\lambda - it)}\, dx = \boxed{\text{замена } y = x(\lambda - it)} =$$

$$= \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)} \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{y^{m-1} e^{-y}}{(\lambda - it)^{m-1}} \frac{dy}{\lambda - it} = \frac{\lambda^m}{\Gamma(m)(\lambda - it)} \int\limits_{0}^{+\infty} y^{m-1} e^{-y}\, dy = \frac{\lambda^m \Gamma(m)}{\Gamma(m)(\lambda - it)^m} = \frac{\lambda^m}{(\lambda - it)^m} =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^m = \left(\frac{\lambda - it}{\lambda}\right)^{-m} = \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-m}$$

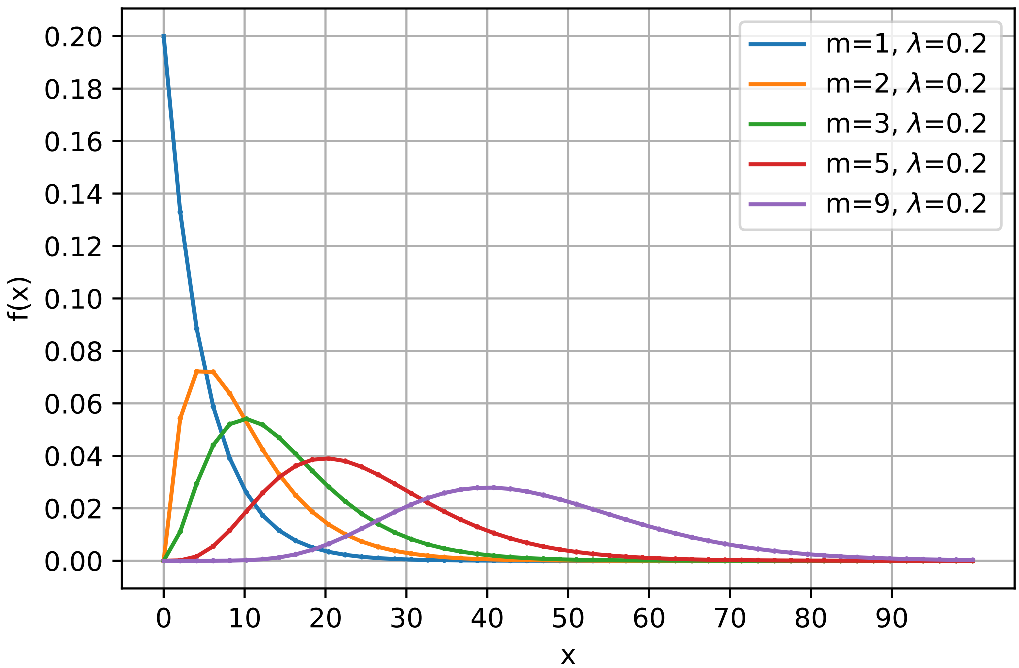


Рис. 2: Плотность распределения Эрланга

2 Поиск примеров событий

2.1 Распределение Пуассона

Типичная интерпретация
Распределение Пуассона описывает вероятность наступление k независимых событий за какое-то фиксированное время t с интенсивностью λ.

Нетипичная интерпретация
Распределение Пуассона играет большую роль в теории массового обслуживания. При простейшем потоке поступающих в систему требований, их распределение подчиняется закону распределения Пуассона.

Известные соотношения
1. Биноминальное распределение $\longrightarrow$ распределение Пуассона

$$P(\xi = k) = \lim_{x\to\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \boxed{p = \tfrac{\mu}{n}, \lim_{n\to\infty} p = 0} = \lim_{n\to\infty} C_n^k \frac{\mu^k}{n^k}\left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!}\left(\frac{\mu^k}{n^k}\right)\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^{-k} = \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu},\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\tfrac{\mu}{n}\right)^{-k} = 1},$$

$$\text{также } \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n-k)!n^k} = \boxed{\text{фиксируем } k} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n} = 1.$$

$$\text{В итоге: } P(\xi = k) = \frac{\mu^k}{k!}e^{-\mu}$$

2. Распределение Пуассона $\longleftrightarrow$ показательное распределение

$$P(\xi = k) = \frac{(\mu t)^k}{k!}e^{-\mu t}$$
$$P(\xi = 0) = e^{-\mu t}$$
$$P(\xi > 0) = e^{-\mu t}$$
$$P(\xi \le 0) = 1 - e^{-\mu t}$$

А это функция показательного распределения

3. Распределение Пуассона $\longrightarrow$ Нормальное (Гаусса) распределение

При увеличении параметра λ распределение Пуассона стремится к нормальному распределению (распределению Гаусса) с параметрами $\sigma = \sqrt{\lambda}$ и сдвигом λ.
Для вывода нужно воспользоваться формулой Стирлинга:

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\cdot e^{-\frac{\theta}{12n}(1+O(1/n))}, \quad n\to\infty, 0<\theta<1$$

Разложение в ряд Тейлора $ln(\frac{\lambda}{k})^k$ в окрестности точки $k = \lambda$:

$$ln\left(\frac{\lambda}{k}\right)^k = -(k-\lambda) - \frac{(k-\lambda)^2}{2\lambda} + O(k-\lambda)^3$$

$\sqrt{k} \approx \sqrt{\lambda}$
Тогда:

$$P(\xi = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\cdot e^{-\frac{(k-\lambda)^2}{2\lambda}}$$

2.2 Распределение Эрланга

Типичная интерпретация

Распределение Эрланга является одним из основных распределений математической статистики для получения случайных величин. Так как параметра m – целое число, распределение Эраланга описывает время, необходимое, для появления ровно m событий при условии, что они независимы и появляются с постоянной интенсивностью λ.

Нетипичная интерпретация

Это распределение широко применяется при описании появления отказов изнашивающихся элементов, времени восстановления, наработки на отказ резервирования систем.

Известные соотношения

1. Распределение Эрланга $\longleftarrow$ экспоненциальное распределение

$$\Gamma(1, \lambda) \equiv Exp(1/\lambda)$$

2. Распределение Эрланга $\longleftarrow$ χ^2 распределение

$$\Gamma(m/2, 2) \equiv \chi^2(m)$$

3. Распределение Эрланга $\longrightarrow$ Бета-распределение

Так как распределение Эрланга является частным случаем гамма-распределения, то:

$$\text{Пусть } \xi \sim \Gamma(\alpha, 1), \eta \sim \Gamma(\beta, 1), \alpha, \beta \in \mathbb{N}$$

Тогда:

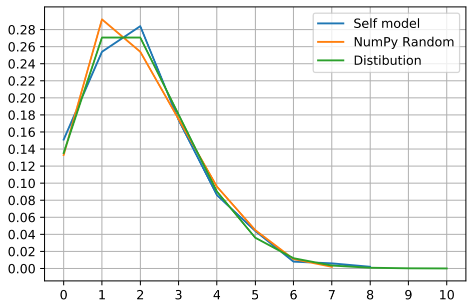
$$\frac{\xi}{\xi + \eta} \sim Be(\alpha, \beta),$$

где $Be(\alpha, \beta)$– есть бета-распределение.

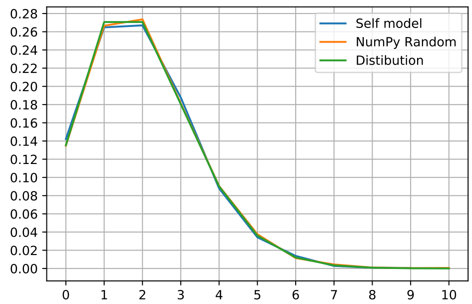
3 Моделирование

3.1 Распределение Пуассона

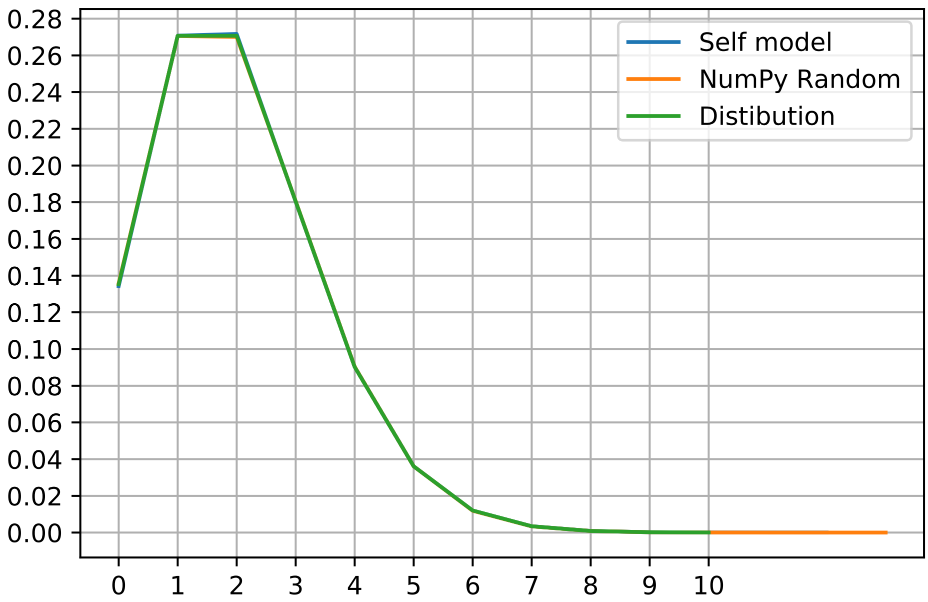
Моделирование случайной величины Пуассона выполнено методом генерации равномерно распределенных случайных величин на отрезке (0, 1) (используя функцию библиотеки NumPy: `numpy.random.uniform(low=0.0, high=1.0, size=None)`).



а) 1000 точек



б) 5000 точек



в) 1000000 точек

Рис. 3: Моделирование случайной величины Пуассона в сравнении с библиотечной функцией и функцией распределения

Оценка времени

```
In [5]: %%timeit
        data = create_data((transform_numbers(random_poisson(2, 10000))))

        56 ms ± 3.55 ms per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops each)

In [6]: %%timeit
        data2 = create_data((transform_numbers(np.random.poisson(2, 10000))))

        4.77 ms ± 48.6 µs per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 100 loops each)
```

Рис. 4: Оценка времени моделирования

3.2 Распределение Эрланга

Для моделирования случайно величины Эрланга воспользуемся методом обратной функции[1]. Из факта, что сумма экспоненциальных случайных величин распределена по закону Эрланга, можно смоделировать случайную величину Эрланга.

Функция экспоненциального распределения:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Пусть $R \sim U(0, 1)$. Тогда:

$$R = \int\limits_0^x f(x)\, dx = \int\limits_0^x \lambda e^{-\lambda x} = 1 - e^{-\lambda x} = F(x)$$

Отсюда:

$$x = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - R)$$

Так как случайная величина $(1 - R)$ распределена так же как и R, то:

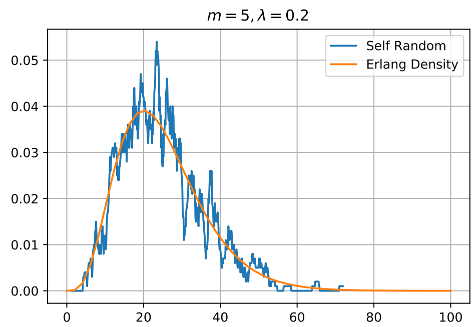
$$x = -\frac{1}{\lambda} ln(R)$$

Что касается библиотечного моделирования: в библиотеке `numpy`, в модуле `random` есть функция `gamma(shape, scale, size=None)`, которая может моделировать случайные величины, но по другому виду распределения (взято с сайта NumPy):

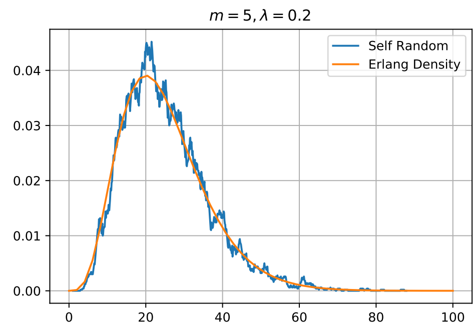
$$p(x) = x^{k-1} \frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}$$

Отличие составляет параметр θ или, в случае этой работы, λ, который должен быть обратным (θ^{-1}).

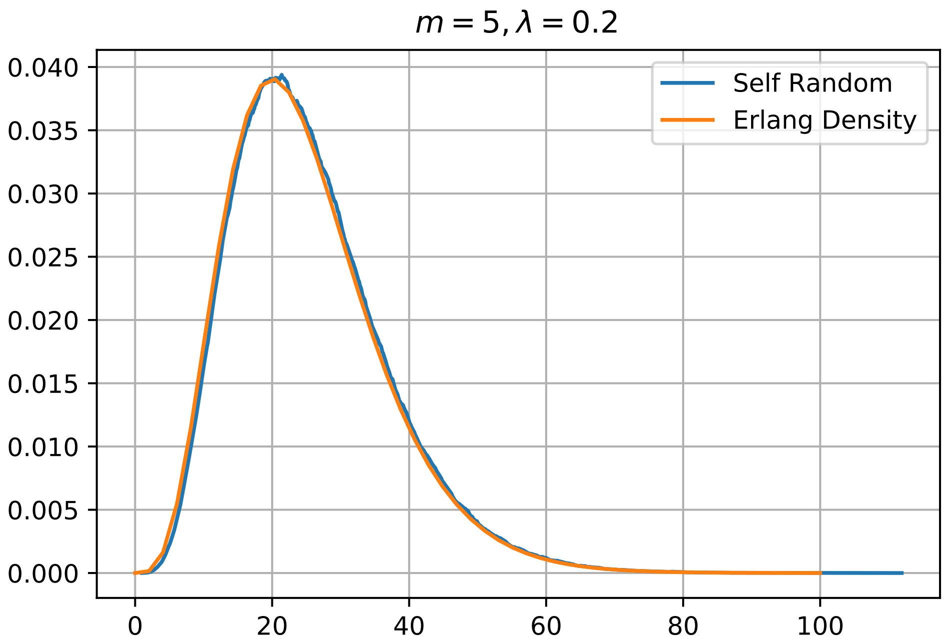
Ниже представлены 3 рисунка моделирования случайной величины Эрланга при 3 разных количествах точек



1000 точек



5000 точек



1000000 точек

Рис. 5: Моделирование случайной величины Эрланга в сравнении с функцией распределения с параметрами $m = 5, \lambda = 0.2$

Оценка времени Ниже будет приведен код, который с помощью `magic commands` в Jupyter notebook вычисляет работу времени отдельного куска кода. В двух ячейках проиллюстрированы оценки времени для функции распределения и самостоятельного моделирования.

Как видно из рисунка 6, реализация библиотечной функции быстрее в примерно 330 раз.

Оценка времени

In [12]:
```
%%timeit
random_erlang(5,0.2,100000)
```

```
1.65 s ± 149 ms per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 1 loop each)
```

In [13]:
```
%%timeit
np.random.gamma(5,0.2,100000)
```

```
5.12 ms ± 17.5 µs per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 100 loops each)
```

Рис. 6: Скриншот с оценкой времени

Список литературы

[1] Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. — СПб.: Наука, 2001, 295 с.