

Домашнее задание 1

Юрасов Никита Андреевич

Обновлено 2 октября 2019 г.

Содержание

1	Моделирования выбранных случайных величин	2
1.1	Распределение Пуассона	2
1.2	Распределение Эрланга	2
2	Построение эмпирической функции распределения	3
2.1	Распределение Пуассона	3
2.2	Распределение Эрланга	3
3	Построение вариационного ряда выборки	4
3.1	Распределение Пуассона	4
3.2	Распределение Эрланга	4
4	Построение гистограммы и полигона частот	6
4.1	Распределение Пуассона	6
4.2	Распределение Эрланга	6

1 Моделирования выбранных случайных величин

1.1 Распределение Пуассона

Алгоритмы для моделирования случайной величины были приведены еще в [Домашнем Задании №1](#). Здесь будут приведены выборки для $n = 5$ и $n = 10$, которые можно найти в файле ДЗ2.ipynb:

Выборки для $n = 5$:

3, 2, 4, 5, 3
3, 2, 1, 0, 2
0, 0, 1, 0, 1
5, 2, 1, 2, 3
3, 5, 2, 1, 2

Выборки для $n = 10$:

5, 1, 2, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 3
2, 3, 0, 5, 4, 0, 1, 2, 4, 5
3, 3, 0, 1, 4, 0, 5, 2, 5, 5
3, 0, 2, 1, 1, 4, 2, 5, 1, 0
0, 5, 3, 3, 1, 0, 3, 0, 3, 2

1.2 Распределение Эрланга

Ниже представлены 10 выборок для $n=5$ и $n=10$.

Выборка для $n = 5$ № 1

[19.1737165 6.05731135 17.04167437 29.69413063 7.01242978]

Выборка для $n = 5$ № 2

[20.94102033 6.48575996 16.88643751 3.67872403 6.82801986]

Выборка для $n = 5$ № 3

[10.54619228 17.4489759 8.25372007 17.6778771 4.9160208]

Выборка для $n = 5$ № 4

[8.58874631 15.31376918 12.88753409 36.23876433 13.14721791]

Выборка для $n = 5$ № 5

[9.47307096 13.56162222 11.03214536 8.11734598 26.75859288]

Выборка для $n = 10$ № 1

[34.22933019 12.21042258 11.1323889 5.43419976 19.62276674 11.09065638
4.60553775 4.8749829 10.96165848 3.63172443]

Выборка для $n = 10$ № 2

[6.70257093 26.28899906 11.10276011 10.21477787 5.10451035 12.0788519
3.79235536 1.01084478 5.48192401 14.51384613]

Выборка для $n = 10$ № 3

[9.46147936 23.59461559 4.07224105 1.54489137 0.27299634 6.8743321
12.20886608 0.55305523 3.31145748 7.29781774]

Выборка для $n = 10$ № 4

[3.87097209 26.71823616 10.94367322 19.12355881 1.35076053 2.67453133
4.25619674 12.80260401 12.32338934 11.46532159]

Выборка для $n = 10$ № 5

[4.02262128 4.58224671 7.37891429 6.93065105 0.98490678 4.81853169
1.60210139 13.68201202 5.43227555 19.71421185]

2 Построение эмпирической функции распределения

2.1 Распределение Пуассона

Определение 2.1. Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ рассмотрим случайную величину

$$\mu_n(x) = \sum_{i=1}^n \text{Ind}(X_i \leq x)$$

равную числу элементов выборки меньше либо равных x .

Тогда функцию $\hat{F}_n(x) = \frac{\mu_n}{n}$ будем называть эмпирической функцией распределения.

На рисунке 1 представлены графики эмпирических функций 10 выборок.

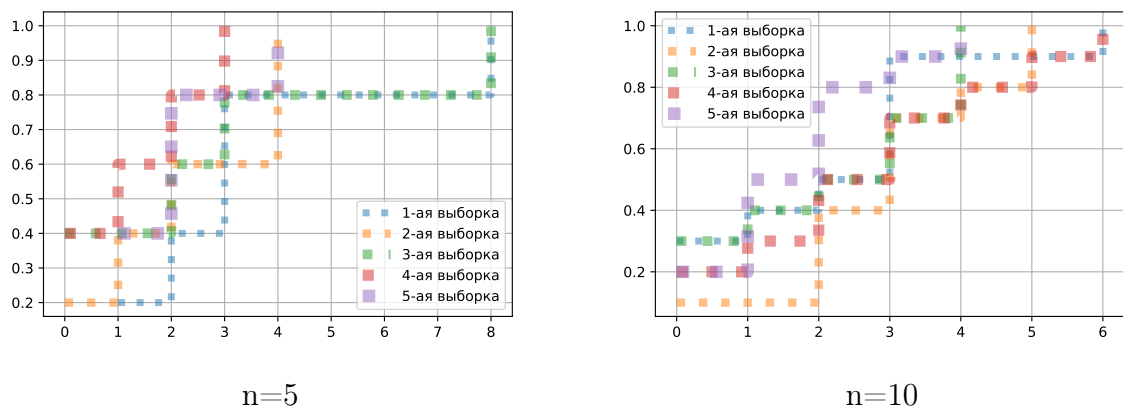


Рис. 1: Эмпирические функции

2.2 Распределение Эрланга

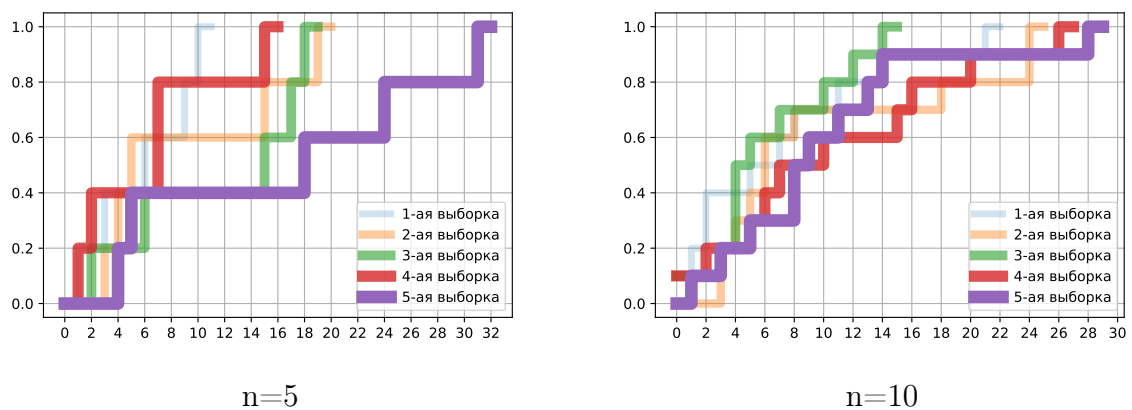


Рис. 2: Эмпирические функции

3 Построение вариационного ряда выборки

Определение 3.1. Пусть у нас имеется выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$, где X_i – независимая одинаково распределенная случайная величина из распределения ξ .

Тогда **вариационный ряд** выборки будет называть $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$, где $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.

Другими словами можно сказать, что вариационный ряд является отсортированной выборкой по возрастанию. Сортировать выборки будем встроенными методами Python, а именно встроенной функцией `sorted()`, которая принимает в качестве аргумента массиво-подобный объект и меняет этот же объект.

К сожалению, сделать так, чтобы в отчете каждый раз обновлялись данные выборок автоматически, невозможно. Поэтому ниже представлены одни из возможных выборок и их вариационных рядов.

Код функций, которые генерирую выборки, а потом делают вариационные ряды из них, можно в файле `ДЗ.jupyter`.

3.1 Распределение Пуассона

Вариационный ряд для выборки `[3 2 4 5 3]` --> `[2, 3, 3, 4, 5]`

Вариационный ряд для выборки `[5 1 2 1 2 2 0 1 2 3]` --> `[0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 5]`

Для поиска квантилей при заданном уровне была написана функция, которая на выходе дает вот такие результаты:

Квантиль для выборки `[3 0 2 1 1 4 2 5 1 0]` уровня 0.1 == 0.5

Квантиль для выборки `[3 0 2 1 1 4 2 5 1 0]` уровня 0.5 == 2.5

Квантиль для выборки `[3 0 2 1 1 4 2 5 1 0]` уровня 0.7 == 3

Квантиль для выборки `[5 2 1 2 3]` уровня 0.1 == 0

Квантиль для выборки `[5 2 1 2 3]` уровня 0.5 == 2

Квантиль для выборки `[5 2 1 2 3]` уровня 0.7 == 3

3.2 Распределение Эрланга

Вариационный ряд для выборки `[19.1737165 6.05731135 17.04167437 29.69413063 7.01242978]` --> `[6.05731135 7.01242978 17.04167437 19.1737165 29.69413063]`

Вариационный ряд для выборки `[34.22933019 12.21042258 11.1323889 5.43419976 19.62276674 11.09065638 4.60553775 4.8749829 10.96165848 3.63172443]` --> `[3.63172443 4.60553775 4.8749829 5.43419976 10.96165848 11.09065638 11.1323889 12.21042258 19.62276674 34.22933019]`

Нахождение квантилей заданных трех уровней (0.1, 0.5, 0.7):

Квантиль для выборки `[1.30148362 2.80649906 15.47504323 7.81896157 7.34531201]` уровня 0.1 = 3.0

Квантиль для выборки [1.30148362 2.80649906 15.47504323 7.81896157 7.34531201]
уровня 0.5 = 5.0

Квантиль для выборки [1.30148362 2.80649906 15.47504323 7.81896157 7.34531201]
уровня 0.7 = 15.0

Квантиль для выборки [9.02770023 28.94668457 3.10929781 13.83457346 1.22763611
11.26452997 8.32525049 14.16950039 5.91072393 8.57862944] уровня 0.1 = 1.5

Квантиль для выборки [9.02770023 28.94668457 3.10929781 13.83457346 1.22763611
11.26452997 8.32525049 14.16950039 5.91072393 8.57862944] уровня 0.5 = 8.0

Квантиль для выборки [9.02770023 28.94668457 3.10929781 13.83457346 1.22763611
11.26452997 8.32525049 14.16950039 5.91072393 8.57862944] уровня 0.7 = 11.5

4 Построение гистограммы и полигона частот

4.1 Распределение Пуассона

На рисунке 3 представлены 5 графиков, на каждом из которых изображена функция распределения и эмпирическая функция, для $n \in \{5, 10, 100, 1000, 10^5\}$ соответственно.

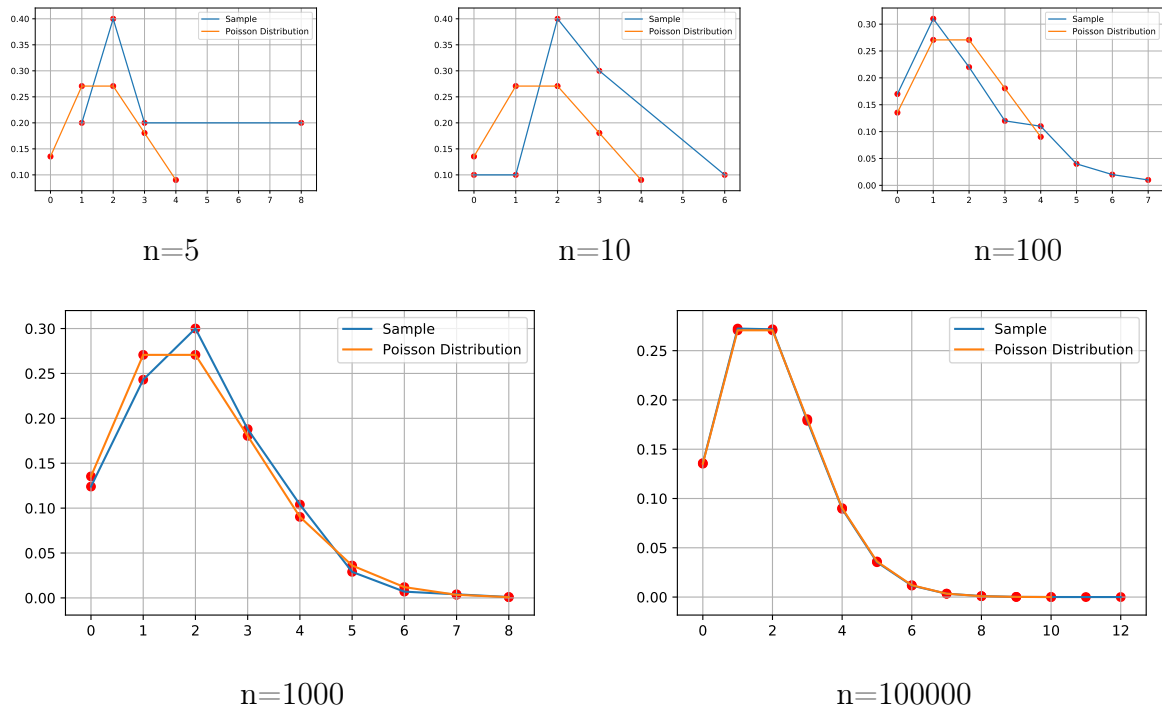
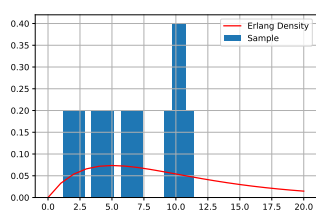


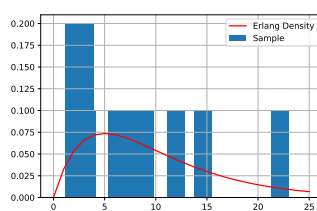
Рис. 3: Сравнение функции распределения и эмпирической функции

4.2 Распределение Эрланга

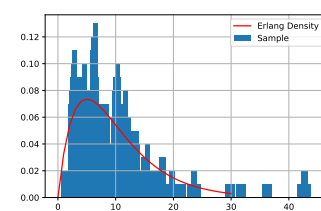
Для построения диаграмм был выбран шаг в 0.1, что можно заметить на графике. При уменьшении этого показателя можно добиться более «схожей» формы графика распределения и эмпирической функции. 5 графиков представлены на рисунке 4



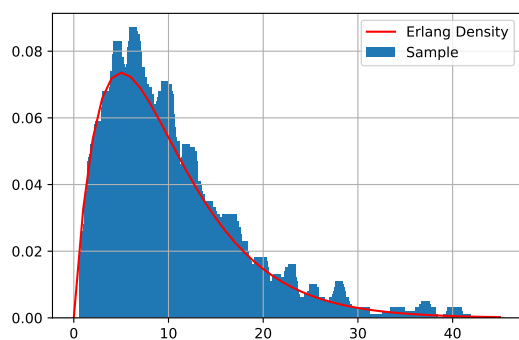
$n=5$



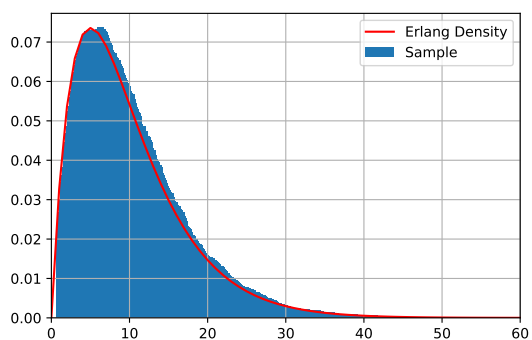
$n=10$



$n=100$



$n=1000$



$n=100000$

Рис. 4: Сравнение функции распределения и эмпирической функции