# Домашнее задание 3

Юрасов Никита Андреевич

Обновлено 13 октября 2019 г.

## Содержание



Эта работа представляет собой отчет к Домашнему Заданию №3.
Так как в моделировании используется пакет `numpy.random`, то, пусть, для него будет выставлено по умолчанию стартовое значение генератора 12345678.

# 1 Нахождение выборочного среднего и выборочной дисперсии

**Определение 1.1.** *Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – выборка из какого-то распределения вероятности. Тогда ее выборочным средним называется случайная величина*

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n} X_i$$

**Определение 1.2.** *Пусть $X_1, X_2, \cdots, X_n$ – выборка из какого-то распределения вероятности. Тогда выборочная дисперсия – это случайная величина*

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2,$$

*где $\overline{X}$ – выборочное среднее.*

Для нахождения этих двух значений можно воспользоваться методами `mean` и `var` библиотеки `numpy`, но для реализации была написана собственная функция `sample_mean` и `sample_variance` соответственно. Время работы на больших выборках почти одинаковое.

## 1.1 Распределение Пуассона

```
Выборочное среднее для выборки [2. 1. 1. 3. 0.] = 1.4
Выборочное среднее для выборки [2. 1. 2. 3. 7. 2. 3. 1. 2. 0.] = 2.3
Выборочная дисперсия для выборки [2. 1. 1. 3. 0.] = 1.04
Выборочная дисперсия для выборки [2. 1. 2. 3. 7. 2. 3. 1. 2. 0.] = 3.21
```

## 1.2 Распределение Эрланга

```
Выборочное среднее для выборки [ 9.43737905 11.94755981 1.6335522 11.63186523
1.95757948] = 7.321587156076815
Выборочное среднее для выборки [ 8.30297653 17.47684737 5.71182291 2.67860603
19.66877258 7.92660288 5.52776384 8.11891813 9.22277337 16.35132395] = 10.098640758
Выборочная дисперсия для выборки [ 9.43737905 11.94755981 1.6335522 11.63186523
1.95757948] = 21.11620307310885
Выборочная дисперсия для выборки [ 8.30297653 17.47684737 5.71182291 2.67860603
19.66877258 7.92660288 5.52776384 8.11891813 9.22277337 16.35132395] = 29.294400894
```

## 2 Нахождение параметров распределений событий

Для каждого из двух распределений будем строить оценку максимального правдоподобия.

### 2.1 Распределение Пуассона

Пусть функция распределения будет выглядеть следующим образом:

$$f(x, \theta) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x \geq 0$$

Тогда функция правдоподобия:

$$L(x, \theta) = \prod_{i=0}^{n} f(x, \theta) = \prod_{i=0}^{n} \left( \frac{\theta^{x_i} e^{-\theta}}{x_i!} \right) = e^{\theta n} \frac{\theta^{\sum_{i=0}^{n} x_i}}{\prod_{i=0}^{n} x_i!}$$

Возьмем от функции правдоподобия натуральный логарифм:

$$lnL(x, \theta) = -\theta n + \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot ln\theta - ln \prod_{i=0}^{n} x_i!$$

Продифференцируем полученное выражение по $\theta$ и приравняем к нулю:

$$\frac{\partial lnL(x, \theta)}{\partial \theta} = -n + \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{\theta} = 0$$

Будем решать это уравнение относительно $\theta$:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} x_i$$

В итоге, получается, что оценка максимального правдоподобия параметра $\theta$ распределения Пуассона имеет вид выборочного среднего (см. определение 1.1).

Предложенная оценка $\hat{\theta}$ является несмещенной, так как выборочное среднее является в свою очередь несмещенной оценкой.

Состоятельность можно проверить по утверждению, что выборочные моменты k-го порядка сходятся к k-ым моментам $X$, то есть:

$$\hat{\alpha_k} \xrightarrow{P} MX^k$$

В нашем случае k=1:

$$\hat{\alpha_k} \xrightarrow{P} MX$$

Следовательно оценка $\hat{\theta} = \hat{\alpha_k}$, которая является состоятельной.

Эффективность представленной оценки также подтверждается, так как $\hat{\theta}$ – оценка максимального правдоподобия, а такая оценка эффективна.

## 2.2 Распределение Эрланга

Рассмотрим функцию распределения, которая зависит от двух параметров:

$$f(x,m,\lambda) = \frac{\lambda^m x^{m-1}}{\Gamma(m)} e^{-\lambda x}, \quad m \in \mathbb{N}, \lambda > 0, x > 0$$

Построим функцию правдоподобия:

$$L(x,m,\lambda) = \prod_{i=0}^{n} f(x,m,\lambda) = \left(\frac{\lambda^m}{\Gamma(m)}\right)^n \prod_{i=0}^{n} x_i^{m-1} e^{-\lambda x_i} = \left(\frac{\lambda^m}{\Gamma(m)}\right)^n e^{-\lambda \sum_{i=0}^{n} x_i} \prod_{i=0}^{n} x_i^{m-1}$$

Возьмем натуральный логарифм от $L(x,m,\lambda)$:

$$lnL(x,m,\lambda) = mnln\lambda + (m-1)\prod_{i=0}^{n} lnx_i - \lambda \sum_{i=0}^{n} x_i - nln\Gamma(m)$$

Продифференцируем полученное по $\lambda$ и приравняем к нулю:

$$\frac{\partial lnL(x,m,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{mn}{\lambda} - \sum_{i=0}^{n} x_i = 0$$

Решая относительно $\lambda$, получим:

$$\hat{\lambda} = \frac{mn}{\sum\limits_{i=0}^{n} x_i}$$

Также можно предложить оценку параметра $\lambda$, используя метод моментов.