

1. Найдите супремум, инфинум, минимум, максимум, верхний и нижний пределы последовательностей:

а) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}};$

б) $x_n = \frac{(3 \cos \frac{\pi n}{2} - 1)n + 1}{n};$

в) $\left(1 - \frac{6}{2 + n!}\right)^{1+n!} (-1)^n + \sin \frac{\pi n}{4}.$

2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$.

3. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n}$.

4. Какое выражение больше при достаточно больших n ?

а) $100n + 200$ или $0.01n^2$; б) 2^n или n^{1000} ; в) 1000^n или $2n!$.

5. Найдите все частичные пределы последовательности

$$\frac{1}{2}; \quad \frac{1}{3}; \quad \frac{2}{3}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{2}{4}; \quad \frac{3}{4}; \quad \frac{1}{5}; \quad \frac{2}{5}; \quad \frac{3}{5}; \quad \frac{4}{5}; \dots$$

6. Последовательность задана рекуррентно. Найдите её верхний и нижний пределы.

$$x_1 = 0, \quad x_{2k} = \frac{x_{2k-1}}{2}, \quad x_{2k+1} = 1 + x_{2k}.$$

7. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \dots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}$.

8. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

9*. Доказать, что

$$\sum_2^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n} = \infty.$$