

Homework 1

1. Упростить формулу:

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$$

Решение:

$$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P = \neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee P) \vee P = ((\neg P \vee Q) \wedge P) \vee P = (P \wedge Q) \vee P$$

2.

1) Определить значение истинности высказывания, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел.

$$\exists a : \forall b \exists x : x^2 + ax + b = 0$$

Решение:

$$x = -\frac{a}{2} - \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}, x = -\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

При $a^2 < 4b$ данное выражение ложно, так как появляются мнимые числа.

2) Построить отрицание к данному высказыванию.

Решение:

$$\neg(\exists a : \forall b \exists x : x^2 + ax + b = 0) \implies \forall a \exists b : \forall x x^2 + ax + b \neq 0$$

3. Доказать, что:

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$$

Решение:

$$\begin{aligned} x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C) &= x \in (A \setminus B) \vee x \in (A \cap C) = (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C) = \\ &= x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) = x \in A \wedge \neg(x \notin B \wedge x \in C) = x \in A \wedge x \notin (B \setminus C) = \\ &= x \in A \setminus (B \setminus C) \end{aligned}$$

4. Высказывание $\forall x(\neg P(x) \rightarrow (P(x) \vee \neg(\neg Q(x) \rightarrow P(x))))$ ложно. Докажите, что $\forall x, P(x)$ ложно, а $\exists x : Q(x)$ истинно.

Решение:

$$\begin{aligned} \neg P(x) \rightarrow (P(x) \vee \neg(\neg Q(x) \rightarrow P(x))) = 0 &\implies \overbrace{\neg P(x)}^1 \rightarrow \overbrace{(P(x) \vee \neg(\neg Q(x) \rightarrow P(x)))}^0 = 0 \implies \\ &\implies (0 \vee \overbrace{\neg(\neg Q(x) \rightarrow 0)}^0) = 0 \implies P(x) = 0, Q(x) = 1 \end{aligned}$$

5. Сколько подмножеств в множестве, состоящем из n элементов?

Решение:

1. Сколько различных подмножеств длины 1?

Если взять множество длины n , то мы имеем только n отличных подмножеств из одного элемента.

Допустим, что это размещения $C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n$

2. Сколько для 2?

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

3. Для $n-1$

$$C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-n+1)!} = n$$

4. Для n - одно.

$$C_n^n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1$$

5. Количество множеств в подмножестве:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k$$