1. Доказать сходимость последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot ... \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

2. Найти предел (и доказать, что этот предел существует) реккурентной последовательности:

$$a_1 > 2, \;\; a_{n+1} = \frac{2 + a_n^2}{2a_n}.$$

3. Доказать, что последовательность $x_n = \dfrac{n!}{(2n+1)!!}$ имеет предел и найти его.

Примечание:$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)$.

4. Пусть $x_0 > 0, \quad x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2 + x_{n-1}}$. Доказать, что x_n сходится.

5. Пусть $a_0 > b_0 > 0, \quad a_n = \dfrac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \;\; b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$. Доказать, что существуют $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

6. Доказать, что у любой бесконечной последовательности есть монотонная бесконечная подпоследовательность.

7*. Пусть $x_1 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{2}{x_n}$. Найти $\lim_{n\to\infty} x_n$.