Пупов Нікіта

Білет 25

$3) \neg A, \neg(B \wedge (C \to D)) \vdash A \to (B \wedge (C \to D))$

2 $\neg A, \neg B, \neg C, D \vdash A \to (B \wedge (C \to D))$

1) $\neg C, D \vdash C \to D$

2) $\neg B, C \to D \vdash \neg(B \wedge (C \to D))$

3) $\neg A, \neg(B \wedge (C \to D)) \vdash A \to (B \wedge (C \to D))$

(3)

Дослідити множину

$\{\forall x \forall y (P(x,y) \to Q(x,y)), \forall x \forall y (Q(x,y) \to R(x,y)),$

$\exists x \exists y\, P(x,y))\}$

Вона еквівалентна формулі:

$\forall x \forall y (P(x,y) \to Q(x,y)) \wedge \forall x \forall y (Q(x,y) \to R(x,y)) \wedge$

$\wedge \exists x \exists y\, P(x,y))$

Зводимо до попер. норм. форми:

$\forall x \forall y (\neg P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge \forall x \forall y (\neg Q(x,y) \vee R(x,y)) \wedge$

$\wedge \exists x \exists y\, P(x,y) \equiv$

$\forall x \forall y \exists a \exists b (\neg P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee R(x,y)) \wedge$

$\wedge P(a,b)$;

Зводимо до стандартн. форми

$a = f(x,y)$; $b = g(x,y)$

$\forall x \forall y (\neg P(x,y) \vee Q(x,y)) \wedge (\neg Q(x,y) \vee R(x,y)) \wedge$

$\wedge P(f(x,y), g(x,y))$

Множина диз'юнктів:

$S = \{ \neg P(x,y) \vee Q(x,y),\ \neg Q(x,y) \vee R(x,y),\ \cancel{P(f(x,y}$,
$P(f(x,y), g(x,y)) \}$

Ербранівський універсум:

$E = \{ a, b, f(a,b), g(a,b) \}$

Виведення пустого диз'юнкта

1). $P(f(a,b), g(a,b))$

2) $\neg P(f(a,b), g(a,b)) \vee Q(f(a,b), g(a,b))$

3). $Q(f(a,b), g(a,b)$ (резулв. 1,2)

4). $\neg Q(f(a,b), g(a,b)) \vee R(f(a,b), g(a,b))$

5). $R(f(a,b), g(a,b))$ (резулв. 3,4)

Вивести пустий диз'юнкт не вдалося.
Перевіримо заперечення до формули:

$$\neg(\forall x \forall y (P(x,y) \to Q(x,y)) \land \forall x \forall y (Q(x,y) \to R(x,y)) \land$$
$$\land \exists x \exists y\, P(x,y)) =$$
$$\neg \forall x \forall y (P(x,y) \to Q(x,y)) \lor \neg(\forall x \forall y (Q(x,y) \to R(x,y)) \lor$$
$$\lor \neg \exists x \exists y\, P(x,y)) =$$
$$\exists x \exists y \neg(\neg P(x,y) \lor Q(x,y)) \lor \exists x \exists y \neg(\neg Q(x,y) \lor R(x,y))$$
$$\lor \forall x \forall y \neg P(x,y) =$$
$$\exists x \exists y (P(x,y) \land \neg Q(x,y)) \lor \exists x \exists y (Q(x,y) \land \neg R(x,y)) \lor$$
$$\lor \forall x \forall y \neg P(x,y) =$$
$$\exists x \exists y \forall a \forall b ((P(x,y) \lor Q(x,y)) \land (P(x,y) \lor \neg R(x,y)) \land$$
$$\land (\neg Q(x,y) \lor Q(x,y)) \land (\neg Q(x,y) \lor \neg R(x,y))) \lor \neg P(a,b) =$$
$$= \exists x \exists y \forall a \forall b ((P(x,y) \lor Q(x,y) \lor \neg P(a,b)) \land$$
$$\land (P(x,y) \lor \neg R(x,y) \lor \neg P(a,b)) \land (\neg Q(x,y) \lor Q(x,y) \lor$$
$$\lor \neg P(a,b)) \land (\neg Q(x,y) \lor \neg R(x,y) \lor \neg P(a,b)).$$

$x = c_1,\ y = c_2;$

$\forall a \forall b ((P(c_1, c_2) \vee Q(c_1, c_2) \vee \neg P(a,b)) \wedge$
$\wedge (P(c_1, c_2) \vee \neg R(c_1, c_2) \vee \neg P(a,b)) \wedge$
$\wedge (\neg Q(c_1, c_2) \vee \neg R(c_1, c_2) \vee \neg P(a,b))$

$S = \{ P(c_1, c_2) \vee Q(c_1, c_2) \vee \neg P(a,b),$
$P(c_1, c_2) \vee \neg R(c_1, c_2) \vee \neg P(a,b),$
$\neg Q(c_1, c_2) \vee Q(c_1, c_2) \vee \neg P(a,b),$
$\neg Q(c_1, c_2) \vee \neg R(c_1, c_2) \vee \neg P(a,b) \}$

$E = \{c_1, c_2\}$

Порожній диз'юнкт вивести також не вдалось. Отже, множина не є ні тавтологією, ні суперечливою