ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 19

Пупов Нікіта

Задача 1

① Довести, що оптимальний розв'язок ЗЛП досягається в одній із вершин допустимої області

Допустима область (допустима множина) D є многогранною множиною.

Нехай x^i, $i = 1, \dots, r$ - вершини многогранної множини D. Розглянемо задачу мінімізації

$$x^* = \arg\min_{x \in D} f(x)$$

це означає, що

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \le \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad , x \in D$$

Аналогічно можемо записати через скалярний добуток

$$(c, x^*) \le (c, x) \quad x \in D$$, де

$$c = (c_1, \dots, c_n)$$

Якщо x^* - вершина D, то теорема справджується. Давайте уявимо, що x^* не є вершиною D. Тоді існують $\alpha_i \ge 0$; $i = 1, \dots, r$; $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots \alpha_r = 1$, що

$$x^* = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i$$

За скалярним добутком маємо

$$(c, x^*) = \left(c, \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x^i\right) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (c, x^i) \ge$$
$$\ge (c, x^k) \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = (c, x^k).$$

Тут x^k вершина, що

$$(c, x^k) = \min_{1 \le i \le r} (c, x^i)$$

З цих співвідношень випливає, що

$(c, x^*) = (c, x^k)$, а отже існує вершина x^k допустимої області D, де цільова ф-я приймає найменше значення.

Задача 2

② Нехай у М-методі розвязку ЗЛП отримали оптимальний розвязок $xy = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$. Довести, що тоді $x = (x_1, \ldots, x_n)$ оптимальний розвязок вихідна ЗЛП

У нас є основна задача (вихідна)

$L(\bar{x}) = (\bar{c}, \bar{x}) \to min$

$$D = \begin{cases} A\bar{x} = b \\ \bar{x} \geq 0, \bar{b} \geq 0 \end{cases}$$

І також будується допоміжна М-задача

$$\tilde{L}_M(\bar{xy}) = (\bar{c}, \bar{x}) + M(y_1 + \dots + y_m) \to min$$

$$\tilde{D} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = b_i, \quad i = \overline{1,n} \\ \bar{xy} \geq 0, \bar{b} \geq 0 \end{cases}$$

Доведення:

~~Нехай L_M~~

Нехай $\bar{xy}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, y_1^*, \dots, y_m^*)$ - оптимальний розв. ЗЛП з $y_i^* = 0$. Покажемо, що $\bar{x}^* = (x_1, \dots x_n^*)$ - оптимальний розв. ЗЛП

Отже, нехай

$$L_M(\bar{xy}^*) = L(\bar{x}^*) = L_0.$$

Припустимо, що $\exists \bar{x}' \in D, L(\bar{x}') < L_0$.

Тоді виберемо $\bar{x}_y' = (x_1', \dots, x_n', 0, \dots 0) \in \tilde{D}$

$\tilde{L}_M(\bar{x}_y') = L(\bar{x}') < L_0$, бо ~~це~~ то цей

це суперечить тому, що L_0 - оптимальний розв'язок.

Задача 3

(3) $L = z \to \min$

$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \le z$, $j = \overline{1,n}$

$\sum x_i = 1$, $x \ge 0$

Введемо змінні $x_{m+1} \dots x_{m+n}$

Запишемо у стандартному вигляді:

$L = z \to \min$

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \dots + c_{m1}x_m + x_{m+1} = z \\ c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{m2}x_m + x_{m+2} = z \\ \dots \\ c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \dots + c_{mn}x_m + x_{m+n} = z \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \end{cases}$$

$x \ge 0$

$C = (\overbrace{0, \dots 0}^{m+n})$;

$b^T = (\overbrace{z\ z\ z \dots z}^{n+1}\ 1)$

$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} \dots & c_{m1} & 1 & 0 \dots & 0 \\ c_{12} & c_{22} \dots & c_{m2} & 0 & 1 \dots & 0 \\ c_{1n} & c_{2n} \dots & c_{mn} & 0 & 0 \dots & 1 \\ 1 & 1 \dots & 1 & 0 & 0 \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Маємо двоїсту:

$$Q = 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_n + y_{n+1} \to max$$

$$\begin{cases} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \dots + c_{1n}y_n + y_{n+1} \leq 0 \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \dots + c_{2n}y_n + y_{n+1} \leq 0 \\ \dots \\ c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 + \dots + c_{mn}y_n + y_{n+1} \leq 0 \\ y_1 \leq 0 \\ y_2 \leq 0 \\ \dots \\ y_n \leq 0 \end{cases}$$