Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

11. Mai 2015

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 2)

Korrekturheft

BM|BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

öffentliches Dokument

Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im Erlass mit der Geschäftszahl BMBF-17.200/0166-II/2014 des Bundesministeriums für Bildung und Frauen.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A* (**KA**) umfasst die unabhängig[1] erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B* (**KB**) umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufe 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche" eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen" wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend" (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punkteermittlung soll die Arbeit der Kandidatin/des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag der Prüferin/des Prüfers zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

42–47 Punkte	Sehr gut
36–41 Punkte	Gut
30–35 Punkte	Befriedigend
20–29 Punkte	Genügend
0–19 Punkte	Nicht genügend

[1] Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

öffentliches Dokument

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur ein möglicher Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.

2. Der Lösungsschlüssel ist verbindlich anzuwenden unter Beachtung folgender Vorgangsweisen:

   a. Grundsätzlich sind Punkte nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung als erfüllt zu erkennen ist.

   b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.

   c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin / vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.

   d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum Beispiel: Wird von der Kandidatin / vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.

   e. Werden von der Kandidatin / vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.

   f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin / des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.

   g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.

   h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.

   i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.

3. Sind Sie sich als Korrektor/in über die Punktevergabe nicht schlüssig, können Sie eine Korrekturanfrage an das BIFIE (via Telefon-Hotline oder Online-Helpdesk) stellen.

öffentliches Dokument

Aufgabe 1

Farbenfrohe Gummibären

Möglicher Lösungsweg

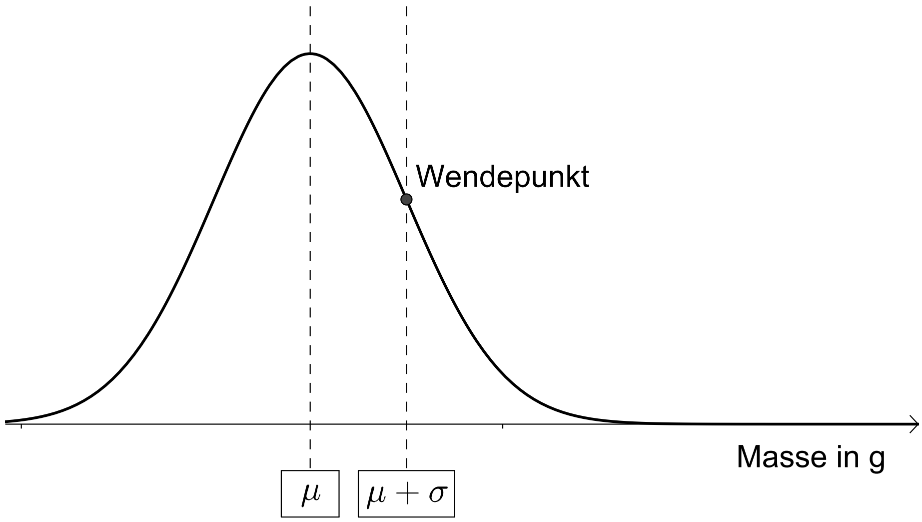
a) $\bar{x} = \dfrac{17 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 21 \cdot 3 + 22 \cdot 1 + 24 \cdot 4}{2 + 3 + 3 + 1 + 4} = 21{,}153... \approx 21{,}15$

b) Diese Packung enthält mindestens 26 und höchstens 34 gelbe Gummibären.

c) Anteil einer Geschmacksrichtung: $\frac{1}{6}$

Da die Farbe Rot 2-mal vorkommt: $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \approx 33{,}33\ \%$.

d)



P(„Gummibär wird aussortiert") = $1 - P(2{,}05 \leq X \leq 2{,}55) = 0{,}01241... \approx 0{,}0124$

Ein zufällig ausgewählter Gummibär wird mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 1,24 % aussortiert.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittels (KA)
b) 1 × C: für das richtige Ablesen des Bereichs (KA)
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes (KA)
d) 1 × A: für das richtige Eintragen der fehlenden Beschriftungen (μ und $\mu + \sigma$ bzw. die entsprechenden Werte 2,3 und 2,4) (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KB)

Aufgabe 2

Ganzkörperhyperthermie

Möglicher Lösungsweg

a) $-0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6 = 37$

Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 0{,}429... \Rightarrow t \approx 0{,}43$ h

b) Dazu muss das Maximum der Funktion f ermittelt werden: Man berechnet die Nullstellen der 1. Ableitung f'. Dann berechnet man die Funktionswerte an diesen Stellen und den Randstellen. Die größte dieser Zahlen ist der maximale Funktionswert.

Die 1. Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades ist eine quadratische Funktion. Eine quadratische Funktion hat höchstens 2 Nullstellen. Daher kann der Graph der Polynomfunktion 3. Grades nur höchstens 2 Extrempunkte haben.

c) Die stärkste Temperaturzunahme erfolgt an der Maximumstelle von f':
$f''(t) = -1{,}08t + 1{,}7$
$-1{,}08t + 1{,}7 = 0 \Rightarrow t = 1{,}57... \approx 1{,}6$

Rund 1,6 Stunden nach Beginn der Therapie ist die Temperaturzunahme am größten.

d) $\overline{f} = \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 f(t)\,\mathrm{d}t = 39{,}55... \approx 39{,}6$

Die mittlere Körpertemperatur beträgt rund 39,6 °C.

Lösungsschlüssel

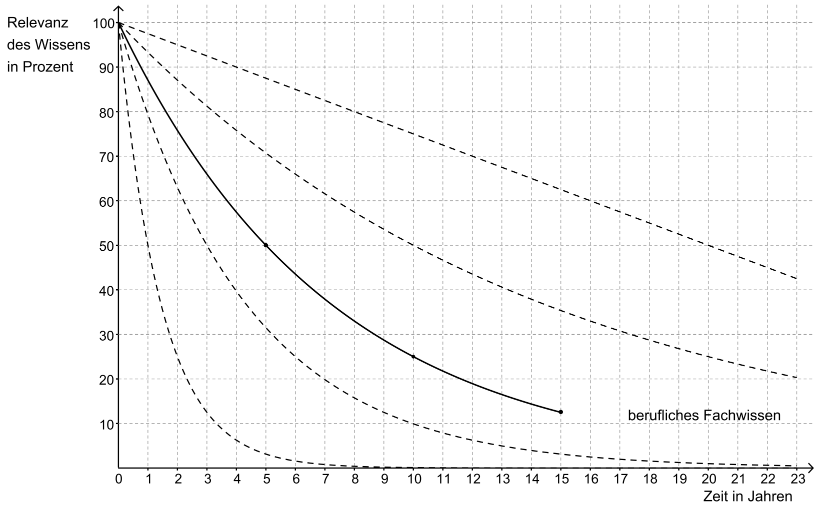
a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Zeitpunktes (KA)
b) 1 × C: für die richtige Dokumentation zur Berechnung der maximalen Körpertemperatur
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass der Extremwert der maximalen Körpertemperatur entspricht. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 2. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.) (KA)
1 × D: für die richtige Begründung (KB)
c) 1 × A: für die richtige Modellbildung (Ermittlung der Wendestelle) (KA)
1 × B: für die korrekte Berechnung des Zeitpunktes der maximalen Temperaturzunahme
(In der Grafik ist klar zu erkennen, dass an der Stelle der maximalen Temperaturänderung eine Temperaturzunahme vorliegt. Daher ist eine rechnerische Überprüfung, ob an der berechneten Stelle eine Zu- oder Abnahme erfolgt, nicht erforderlich.) (KB)
d) 1 × B: für die richtige Berechnung der mittleren Körpertemperatur (KA)

Aufgabe 3

Halbwertszeit des Wissens

Möglicher Lösungsweg

a)



b) Aufstellen der Exponentialfunktion:

$T(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$

t ... Zeit in Jahren
$T(t)$ ... Relevanz des Technologiewissens zur Zeit t in Prozent der anfänglichen Relevanz des Wissens

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$1 = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{3}} \quad \Rightarrow \quad t = 19{,}9... \approx 20$

Nach rund 20 Jahren ist die Relevanz des Technologiewissens auf 1 % der anfänglichen Relevanz gesunken.

c) $100 - N(7) = 100 - 100 \cdot e^{-0{,}0693 \cdot 7} = 38{,}4... \approx 38$

Die Relevanz des Hochschulwissens hat um rund 38 % abgenommen.

d) $k = -\frac{5}{2}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen im Intervall [0; 15] (dabei müssen die Werte nach 5, 10 bzw. 15 Jahren als 50 %, 25 % bzw. 12,5 % erkennbar sein) (KA)
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Exponentialfunktion (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Zeitdauer (KB)
c) 1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes (KA)
d) 1 × C: für das richtige Ablesen der Steigung (KA)

öffentliches Dokument

Aufgabe 4

Gold

Möglicher Lösungsweg

a) Kantenlänge des Würfels: $a = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{\frac{1{,}713 \cdot 10^{11}\text{ g}}{19{,}3\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}}} = 2070{,}4...\text{ cm}$

Der Würfel hat eine Kantenlänge von rund 20,7 Metern.

b) $W = \frac{m \cdot p}{31{,}1035}$

c) Die weltweite jährliche Förderung ist zwischen 1980 und 1990 absolut am stärksten gestiegen.

d) Die angegebenen Prozentsätze dürfen nicht addiert werden, weil sie sich nicht auf denselben Grundwert beziehen.
Der Wert der Goldmünze ist um den Faktor 1,2 · 1,1 = 1,32 gestiegen, also um 32 %.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung der Kantenlänge in Metern (KA)
b) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel (KA)
c) 1 × C: für das richtige Ablesen des Jahrzehnts mit dem stärksten Anstieg (KA)
d) 1 × D: für die richtige Begründung, warum die angegebene Wertsteigerung nicht richtig ist, oder die Angabe des richtigen Prozentsatzes (KA)

Aufgabe 5

Stadtturm

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{51}{\tan(\alpha)} - \frac{51}{\tan(2\alpha)} = 52{,}471... \approx 52{,}47$

Man muss sich um rund 52,47 m annähern.

b) Der Höhenwinkel α ($0° < \alpha < 90°$) kann bestimmt werden durch:

$\alpha = \arctan\left(\frac{h}{b}\right)$

c) Die einzukleidende Fläche setzt sich aus 2 Rechtecken (Seitenlängen 51 m und 4 m) zusammen. Um die Gesamtmasse der Glasverkleidung in Tonnen zu erhalten, muss der Gesamt-Flächeninhalt dieser beiden Rechtecke in Quadratmetern mit der Masse von 30 Kilogramm pro Quadratmeter multipliziert und anschließend durch 1 000 dividiert werden.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für die Verwendung eines richtigen Modells zur Berechnung (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{PB}$ (KB)

b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel zur Berechnung des Höhenwinkels (KA)

c) 1 × C: für die richtige Dokumentation zur Berechnung der Gesamtmasse in Tonnen (KA)

Aufgabe 6 (Teil B)

Schadstoffausbreitung

Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\overline{x} = 158{,}5$ mg/m³

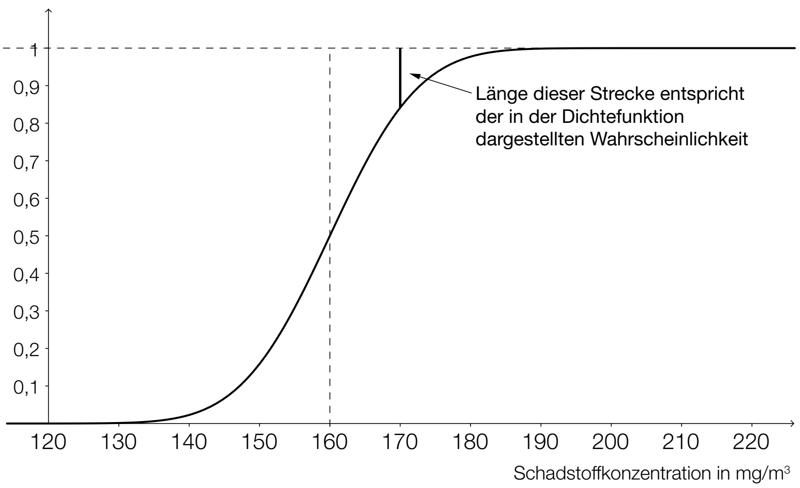
Zweiseitiges 95-%-Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$$\overline{x} \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$n = 10$
$\alpha = 5\ \%$
$u_{0{,}975} = 1{,}959...$

Daraus ergibt sich folgendes Konfidenzintervall in mg/m³: $153{,}2 \leq \mu \leq 163{,}8$.

b)



Der Wert der Verteilungsfunktion an einer Stelle x ist das Integral der Dichtefunktion von $-\infty$ bis x.
Oder umgekehrt: Die Dichtefunktion ist die Ableitung der Verteilungsfunktion.

c) 99-%-Zufallsstreubereich mithilfe der Normalverteilung bestimmen:

$\mu \pm u_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$
$\alpha = 1\ \%$
$u_{0{,}995} = 2{,}575...$

Daraus ergibt sich folgender Zufallsstreubereich in mg/m³: [134,2; 185,8].

Der 95-%-Zufallsstreubereich ist schmäler als der entsprechende 99-%-Zufallsstreubereich.

öffentliches Dokument

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Stichprobenmittelwerts $\overline{x}$ (KA)
   1 × A: für die Verwendung des richtigen Modells (Konfidenzintervall mithilfe der Normalverteilung) (KB)
   1 × B2: für die richtige Ermittlung des Konfidenzintervalls (KB)

b) 1 × A1: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Verteilungsfunktion (eine qualitative Beschriftung der Ordinatenachse ist nicht notwendig) (KA)
   1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in Abbildung 2 (KB)
   1 × D: für das richtige Erklären des mathematischen Zusammenhangs zwischen Dichtefunktion und Verteilungsfunktion (KB)

c) 1 × B: für die richtige Ermittlung des Zufallsstreubereichs (KA)
   1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung der Breite des Zufallsstreubereichs (KA)

öffentliches Dokument

Aufgabe 7 (Teil B)

Bakterienkultur

Möglicher Lösungsweg

a) $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = k \cdot N$

$\int \frac{1}{N}\,\mathrm{d}N = \int k\,\mathrm{d}t$

$\ln|N| = k \cdot t + c$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: N mit $N(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$

$N(0) = 50$ und $N(100) = 750$ liefert: $C = 50$ und $k = 0{,}0270...$

$N(180) = 6\,545{,}3... \approx 6\,545$

Nach 3 Stunden sind rund 6545 Bakterien vorhanden.

Wenn die Wachstumsrate der Bakterienkultur größer ist, dann bedeutet das, dass die Anzahl der Bakterien schneller wächst.

b) Ermittlung der exponentiellen Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$f(t) = 69{,}43 \cdot e^{0{,}03065 \cdot t}$

t … Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten
$f(t)$ … Bakterienanzahl zur Zeit t

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Koeffizienten bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Lösen der Gleichung $f(t) = 1\,000$ mittels Technologieeinsatz:
$t \approx 87{,}0$

Rund 87 Minuten nach Beginn der Beobachtung sind 1000 Bakterien zu erwarten.

c) Ablesen der Wendestelle der Funktion B: $t = 60$ min
Toleranzbereich: [55; 65]
Rund 60 Minuten nach Beginn der Beobachtung ist das Wachstum der Bakterienkultur am größten.

Für $B < 1\,000$ ist jeder Faktor auf der rechten Seite der Differenzialgleichung positiv, also $\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} > 0$. Daher nimmt die Bakterienzahl für diese Werte zu.

öffentliches Dokument

Lösungsschlüssel

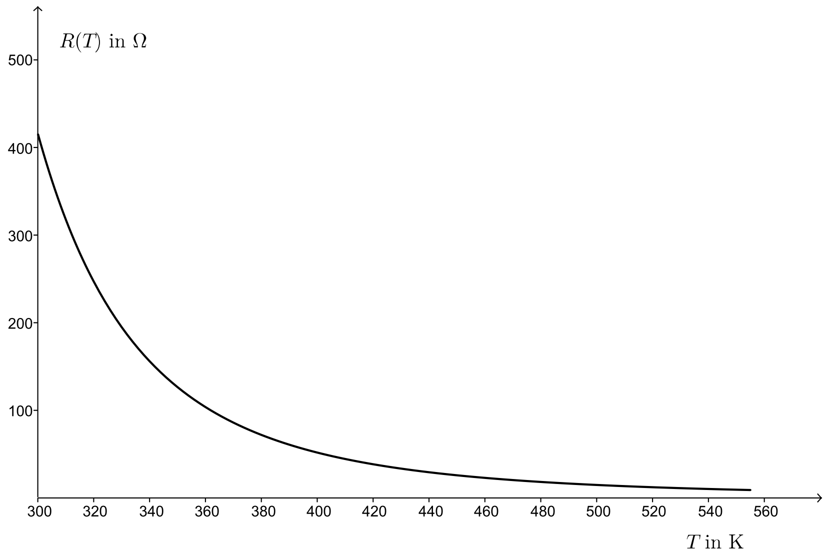
a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Differenzialgleichung (KA)
   1 × B1: für die richtige allgemeine Lösung der Differenzialgleichung (KB)
   1 × B2: für die richtige Berechnung der Bakterienanzahl nach 3 Stunden (KB)
   1 × C: für die richtige Beschreibung der Veränderung des Wachstumsverhaltens (KB)
b) 1 × B1: für die richtige Ermittlung der Ausgleichsfunktion (KA)
   1 × B2: für die richtige Berechnung, nach welcher Zeit 1 000 Bakterien zu erwarten sind (KB)
c) 1 × C: für das richtige Ablesen im Toleranzbereich [55; 65] (KA)
   1 × D: für eine richtige Argumentation anhand der Differenzialgleichung (KB)

Aufgabe 8 (Teil B)

Thermistor

Möglicher Lösungsweg

a) Begründung für die Monotonie:
Für größer werdendes T (und $b > 0$) wird die Hochzahl $\frac{b}{T}$ immer kleiner und damit (wegen $a > 0$) auch $a \cdot e^{\frac{b}{T}}$.



b) $g(T) = k \cdot T + d$

$R'(T) = -a \cdot b \cdot \frac{1}{T^2} \cdot e^{\frac{b}{T}}$

Steigung: $k = R'(373{,}15)$ ergibt $k = -1{,}458... \approx -1{,}46$.

Achsenabschnitt: $d = R(373{,}15) - k \cdot 373{,}15$ ergibt $d = 625{,}353... \approx 625{,}35$.

Betrag des relativen Fehlers an der Stelle $T = 390$ K: $\left|\frac{R(390) - g(390)}{R(390)}\right| \approx 6{,}8\ \%$

c) Ermitteln der Ausgleichsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$P(T) = -9{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 + T^2 - 365 \cdot T + 4{,}4 \cdot 10^4$

Abhängig von der verwendeten Technologie kann man geringfügig abweichende Koeffizienten bei der Ermittlung der Ausgleichsfunktion erhalten.

Da in der Abbildung der Wendepunkt erkennbar ist, ist diese Polynomfunktion 3. Grades streng monoton fallend und es liegen somit keine Stellen mit horizontaler Tangentensteigung vor. Daher hat die 1. Ableitung von P keine reellen Nullstellen.

öffentliches Dokument

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige Begründung zur Monotonie (Verweis auf die Grafik ist nicht ausreichend) (KA)
   1 × B: für das richtige Zeichnen des Funktionsgraphen im angegebenen Intervall (KA)

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Linearisierung der Funktion R (KA)
   1 × B1: für die richtige Berechnung der Tangente (KB)
   1 × B2: für die richtige Ermittlung des Betrags des relativen Fehlers (KB)

c) 1 × B: für die richtige Ermittlung der Ausgleichsfunktion (KA)
   1 × D: für die richtige Erklärung ausgehend von der Abbildung (KB)