Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

9. Mai 2018

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

BMBWF

BUNDESMINISTERIUM
FÜR BILDUNG, WISSENSCHAFT
UND FORSCHUNG

Aufgabe 1

Eigenschaften einer Polynomfunktion dritten Grades

a) Lösungserwartung:

Mögliche Begründung:

Berechnung der Nullstellen: $a \cdot x^3 + b \cdot x = x \cdot (a \cdot x^2 + b) = 0$
Eine Nullstelle ist daher $x_1 = 0$.

Berechnung weiterer Nullstellen: $a \cdot x^2 + b = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -\frac{b}{a}$

Wenn die Koeffizienten a und b unterschiedliche Vorzeichen haben, dann gilt: $-\frac{b}{a} > 0$.
Damit hat diese Gleichung zwei verschiedene reelle Lösungen und die Funktion f hat insgesamt drei verschiedene Nullstellen.

Mögliche Begründung:

Der Wert der Steigung der Tangente an den Graphen von f an einer Stelle x entspricht dem Wert $f'(x)$.
$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + b \quad \Rightarrow \quad f'(0) = b$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

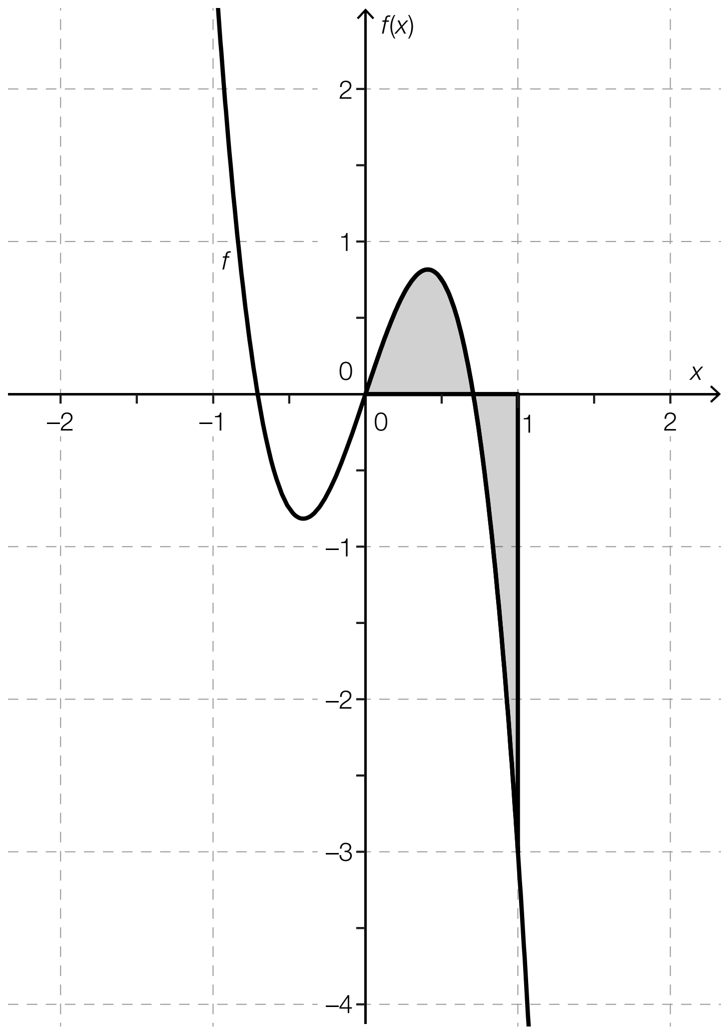
Mögliche Vorgehensweise:

$$\int_0^1 (a \cdot x^3 + b \cdot x)\,\mathrm{d}x = \left(a \cdot \frac{x^4}{4} + b \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -2 \cdot b$$

Mögliche Begründung:

Das bestimmte Integral liefert die Summe der orientierten Flächeninhalte, die vom Graphen von f und von der x-Achse begrenzt werden. Hätte f keine Nullstelle im Intervall $(0; 1)$, dann würde der Graph von f in diesem Intervall entweder zur Gänze oberhalb der x-Achse (mit $f(x) > 0$ für alle $x \in (0; 1)$) oder zur Gänze unterhalb der x-Achse (mit $f(x) < 0$ für alle $x \in (0; 1)$) verlaufen. Somit wäre das bestimmte Integral von f im Intervall $(0; 1)$ entweder größer oder kleiner null, aber keinesfalls gleich null.

Möglicher Graph von f:



Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Beziehung zwischen a und b.
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung und eine Skizze eines möglichen Graphen von f.
Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 2

Hopfen

a) **Lösungserwartung:**

möglicher Ausdruck: $h(t_1) - h(0)$

$h(10) - h(0) \approx 6{,}45$
Die Pflanze ist in den ersten 10 Wochen um ca. 6,45 m gewachsen.
Die mit der Modellfunktion h berechnete Zunahme der Höhe der Pflanze im Zeitintervall [0; 10] ist um ca. 0,8 % größer als die in diesem Zeitintervall tatsächlich beobachtete Zunahme (6,4 m).

Lösungsschlüssel:

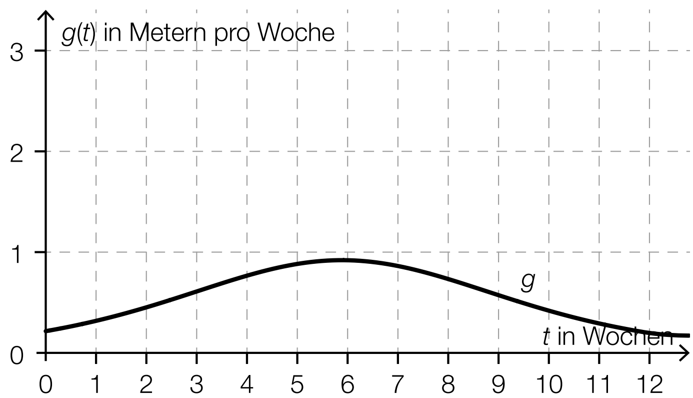
- Ein Ausgleichspunkt für einen korrekten Ausdruck. Andere korrekte Ausdrücke sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe des richtigen Wertes und der richtigen prozentuellen Abweichung. Toleranzintervall für den Wert: [6,4 m; 6,5 m]

b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Gleichung:
$h''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_2$

$t_2 \approx 5{,}9$ Wochen

$h'(t_2) \approx 0{,}92$
Die maximale Wachstumsgeschwindigkeit beträgt ca. 0,92 Meter pro Woche.



Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die Angabe des richtigen Zeitpunkts, wobei die Einheit „Wochen“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [5,4 Wochen; 6,3 Wochen]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „Meter pro Woche“ nicht angeführt sein muss, und eine korrekte Skizze des Graphen von g.
  Toleranzintervall: [0,90 Meter pro Woche; 1 Meter pro Woche]

c) Lösungserwartung:

Mögliche Funktionsgleichung von h_1:
$h_1(t) = 0{,}58\dot{3} \cdot t + 0{,}6$

Mögliche Interpretation:

Die Pflanze wächst in den ersten 12 Wochen durchschnittlich um ca. 58 cm pro Woche.

Mögliche Begründung:

Die Steigung von h ist anfangs kleiner als jene von h_1, dann größer und dann wieder kleiner. Es gibt daher mindestens zwei Zeitpunkte, in denen sie gleich ist.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung und eine korrekte Interpretation unter Verwendung korrekter Einheiten. Äquivalente Funktionsgleichungen sind als richtig zu werten. Toleranzintervall für die Steigung: [0,58; 0,59]
– Ein Punkt für eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

d) Lösungserwartung:

Möglicher Nachweis:
Für alle $k < 0$ gilt: $\lim\limits_{t \to \infty} e^{k \cdot t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{t \to \infty} h(t) = \frac{a}{1 + b \cdot 0} = a$, also ist h_{max} unabhängig von k.
$h_{max} = a$

Für das beschriebene Pflanzenwachstum muss a vergrößert und k verkleinert werden.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis und die richtige Lösung. Andere korrekte rechnerische Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.
– Ein Punkt für eine korrekte Beschreibung der Veränderung der beiden Werte von a und k.

Aufgabe 3

Abstandsmessung

a) **Lösungserwartung:**

$q_1 = 0{,}9$
$q_3 = 2{,}1$
Etwa die Hälfte der kontrollierten Fahrzeuge halten einen Tiefenabstand von mindestens 0,9 Sekunden und höchstens 2,1 Sekunden ein.

Die im Kastenschaubild dargestellten Daten bestätigen in etwa diese Erfahrungswerte.

Mögliche Begründung:
$130\text{ km/h} = 36{,}\dot{1}\text{ m/s}$
$36{,}\dot{1}\text{ m/s} \cdot 0{,}9\text{ s} = 32{,}5\text{ m} \quad \Rightarrow$ Mindestens drei Viertel der Kraftfahrer/innen halten einen Abstand von 30 m und mehr ein.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der beiden richtigen Werte und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
- Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) **Lösungserwartung:**

ein möglicher größerer Prozentsatz: 25 %

Mögliche Begründung:
Der Tiefenabstand von zwei Sekunden liegt zwischen dem Median und dem dritten Quartil.

Mögliche Vorgehensweise:
Zufallsvariable X = Anzahl der Kraftfahrlenker/innen, die den empfohlenen Mindestabstand eingehalten haben

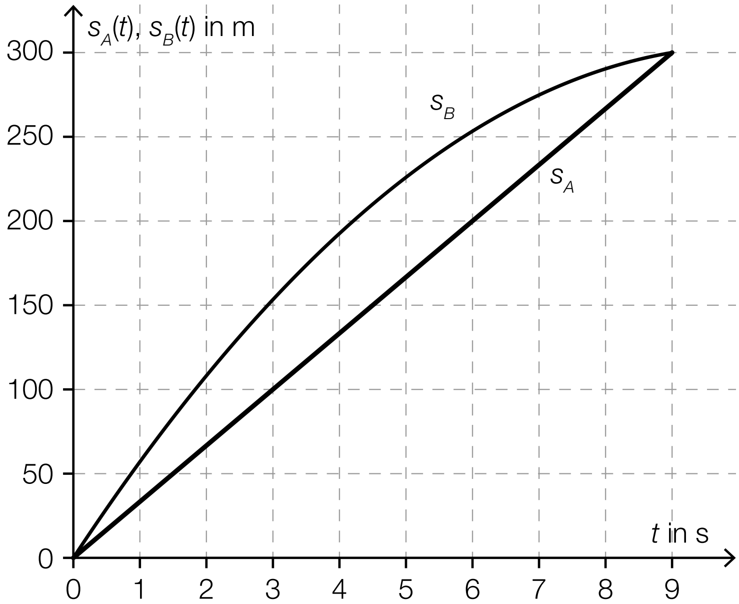
$p = 0{,}25$ ... Wahrscheinlichkeit, dass der empfohlene Mindestabstand eingehalten wurde
$n = 10$ ... Anzahl der ausgewählten Messungen
$P(X \geq 6) \approx 0{,}0197$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe eines richtigen Wertes und eine korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: (20 %; 25 %]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Lösung für den von der Kandidatin / vom Kandidaten gewählten Wert richtig sein muss. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Fahrzeug A fährt mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h.



Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Darstellung von s_A.
– Ein Punkt für eine korrekte Skizze eines möglichen Graphen von s_B.

Aufgabe 4

Bitcoin

a) **Lösungserwartung:**

Monat: August

Kursverlust: ≈ € 55

$\frac{K_2 - K_1}{AT} \approx -1{,}8$

Mögliche Interpretation:

Im August 2015 betrug die durchschnittliche Kursänderung pro Tag ca. € –1,8.

oder:

Im August 2015 betrug der durchschnittliche Kursverlust pro Tag ca. € 1,8.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe des richtigen Monats sowie des korrekten Wertes für den Kursverlust.
  Toleranzintervall: [€ 50; € 70]
- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.
  Toleranzintervall: [–2,3; –1,5] bzw. [1,5; 2,3]

b) **Lösungserwartung:**

$\frac{f(8) - f(7)}{f(7)} \approx 0{,}065$

Mögliche Interpretation:

Die Anzahl der im Umlauf befindlichen Bitcoins nimmt im Zeitraum von Anfang Jänner 2016 bis Anfang Jänner 2017 um ca. 6,5 % zu.

Mögliche Gleichung:

$f(t) = 20 \cdot 10^6$

Lösung der Gleichung: $t \approx 17$
Ungefähr Anfang Jänner 2026 kann nur mehr 1 Million Bitcoins in Umlauf gebracht werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung und eine korrekte Interpretation.
  Toleranzintervall: [0,06; 0,07] bzw. [6 %; 7 %]
- Ein Punkt für eine korrekte Gleichung und die richtige Lösung. Andere korrekte Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall [16; 17] bzw. [2025; 2026]

c) Lösungserwartung:

$n = 171 \qquad h \approx 0{,}807$

$0{,}807 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}807 \cdot (1 - 0{,}807)}{171}} \approx 0{,}807 \pm 0{,}059 \quad \Rightarrow \quad [0{,}748; 0{,}866]$

Mögliche Vorgehensweise:

$0{,}880 - \frac{138}{171} \approx 0{,}073$

$0{,}073 \leq z \cdot \sqrt{\frac{0{,}807 \cdot (1 - 0{,}807)}{171}} \quad \Rightarrow \quad z \geq 2{,}418$

$2 \cdot \Phi(2{,}418) - 1 \approx 0{,}984$

Das Konfidenzniveau muss mindestens 98,4 % betragen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,74; 0,75]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,86; 0,87]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,98; 0,99] bzw. [98 %; 99 %]