

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

Angewandte Mathematik

9. Mai 2014

Korrekturheft

Teil A + Teil B (Cluster 8)

Aufgabe 1

Möglicher Lösungsweg

- a) x ... Masse der Rosinen oder Mandeln in Kilogramm (kg)
 y ... Masse der Walnüsse in Kilogramm (kg)

$$2 \cdot x + y = 80$$

$$6 \cdot x + 12 \cdot x + 14 \cdot y = 800$$

Das Lösen des Gleichungssystems ergibt:

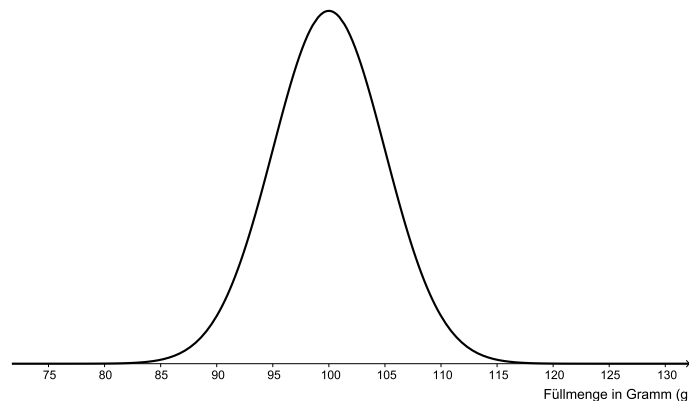
$$x = 32$$

$$y = 16$$

Es müssen je 32 kg Rosinen und Mandeln sowie 16 kg Walnüsse gekauft werden.

- b) Das gewichtete arithmetische Mittel aus den Werten in der Tabelle ergibt den Durchschnittspreis; d. h., es müssen die absoluten Häufigkeiten mit den jeweiligen Preisangaben multipliziert und es muss die Summe der Produkte durch die Anzahl der befragten Schüler/innen dividiert werden.

c)



In der Skizze des Graphen der Wahrscheinlichkeitsdichte muss klar ersichtlich sein, dass der Erwartungswert μ bei 100 g liegt.

Lösung mit Technologieeinsatz:

$$P(X < 96) = 21,19 \%$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für einen richtigen Lösungsansatz
1 × B: für die richtige Berechnung
b) 1 × D: für die richtige Erklärung
c) 1 × A: für das Erstellen einer qualitativ richtigen Skizze
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 2

Möglicher Lösungsweg

- a) $\tan(\alpha) = 0,065$ $\alpha \approx 3,72^\circ$
 $\sin(3,72^\circ) = \frac{45}{x}$ $x \approx 694 \text{ cm}$
- b) Der Steigungswinkel bleibt gleich, da das Verhältnis der beiden Katheten nicht verändert wird (ähnliche Dreiecke).
- c) Ansatz zur Berechnung mithilfe der Binomialverteilung: $n = 50, p = 0,02$
 $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 7,84 \%$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Steigungswinkels
1 × B2: für die richtige Berechnung der Länge der Rampe
- b) 1 × D: für die richtige Argumentation
- c) 1 × A: für den richtigen Ansatz mit der Binomialverteilung
1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit

Aufgabe 3

Möglicher Lösungsweg

- a) Ungefähr 75 % aller 15-jährigen Mädchen haben einen BMI, der größer ist als $18,5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ (P25 – unteres Quartil).

Toleranzbereich: [70 %; 80 %]

Berechnung des BMI des 3-jährigen Mädchens: $BMI = \frac{16}{0,97^2} = 17 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$

Der Wert liegt in der Grafik oberhalb der P75-Kurve. Daher ist der BMI des Mädchens im oberen Viertel ihrer Altersklasse.

- b) F ... Körpergröße von Fritz in Metern (m)
 G ... Körpergröße von Georg in Metern (m)
 m ... Masse von Georg, Masse von Fritz in Kilogramm (kg)

$$BMI_{\text{Fritz}} = \frac{m}{F^2}$$

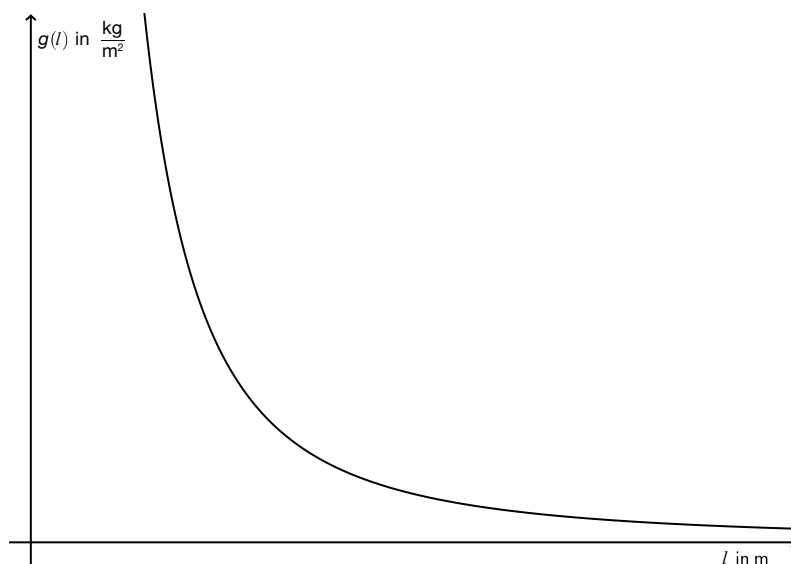
$$\text{gesuchte Formel: } BMI_{\text{Georg}} = \frac{m}{G^2} = \frac{m}{(1,1 \cdot F)^2} = \frac{m}{1,1^2 \cdot F^2}$$

Vergleicht man diese zwei Werte, so sieht man:

$$BMI_{\text{Georg}} = \frac{1}{1,1^2} \cdot BMI_{\text{Fritz}} = 0,826 \cdot BMI_{\text{Fritz}}$$

Das bedeutet, dass Georgs BMI um 17,4 % kleiner ist als jener von Fritz.

- c) Beschriftung der Koordinatenachsen:



*Die Einheiten müssen bei der Beschriftung nicht unbedingt angegeben werden.
Bei der Beschriftung der vertikalen Achse ist auch die Beschriftung „BMI in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ “ oder eine inhaltlich gleichwertige Form als richtig zu werten.*

Die Körpergröße l ist in der Funktion g die unabhängige Variable.

Die Masse m bleibt konstant.

Es liegt also der allgemeine Funktionstyp $y = \frac{a}{x^2}$ vor.

Dieser typische Funktionsverlauf ist in der Grafik dargestellt.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für das richtige Ablesen des Prozentwertes aus der Grafik
1 × D: für die richtige Überprüfung
- b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel
1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes
- c) 1 × C: für die richtige Beschriftung der Koordinatenachsen in der Grafik
1 × D: für die richtige Begründung

Aufgabe 4

Möglicher Lösungsweg

- a) Informationen aus dem Text: (140|75) und (100|65)

Berechnung von k und d :

$$k = \frac{75 - 65}{140 - 100} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$d = y - k \cdot x = 75 - 0,25 \cdot 140 = 40$$

Angabe der Funktion:

$$y = 0,25 \cdot x + 40$$

x ... Anzahl der Zirpgeräusche in 1 Minute

y ... Temperatur in °F

b) $70 = 60 + \frac{N - 92}{4,7}$

$N = 139$ Zirpgeräusche in 1 Minute

ca. 35 Zirpgeräusche in 15 Sekunden

c) Steigung: $k = \frac{1}{4,7} = 0,21$

Wenn die Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute um 1 zunimmt, beschreibt das Modell eine Temperaturzunahme um 0,21 °F.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung
- b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Anzahl der Zirpgeräusche in 1 Minute
1 × B2: für die richtige Berechnung der Anzahl der Zirpgeräusche während 15 Sekunden
- c) 1 × C1: für die richtige Bestimmung der Steigung
1 × C2: für die richtige Beschreibung des Wertes der Steigung

Aufgabe 5

Möglicher Lösungsweg

- a) $0,0092 = c$
 $350 = a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + c$
 $1\,050 = a \cdot 24^2 + b \cdot 24 + c$
- b) $\int_0^{24} g(t) dt = 12\,229 \text{ mSv}$
Das sind ganzzahlig gerundet 12 Sv.
- c) Die Behauptung in der Zeitung ist falsch.
 $1\,500 \text{ mSv/h} = 150 \cdot 10^7 \text{ nSv/h}$
In Fukushima war die Dosisleistung 10 000 000-mal höher als am Sonnblick.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Aufstellen des Gleichungssystems
b) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Gesamtdosis mithilfe des Integrals
1 × B2: für das richtige Umrechnen und Runden
c) 1 × D: für die schlüssige Überprüfung

Aufgabe 6 (Teil B)

Möglicher Lösungsweg

- a) mit Technologie: $r \approx 0,86$

Die gegebenen Daten lassen einen positiven linearen Zusammenhang zwischen Marketingausgaben und Umsatz vermuten.

- b) mit Technologie: $y = 4,786 \cdot x + 100,523$

Steigen die Marketingausgaben um € 1.000, dann steigt der Umsatz um ca. € 4.786.

- c) ca. € 150.000

Toleranzbereich: [€ 140.000; € 160.000]

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Korrelationskoeffizienten
1 × C: für die richtige Interpretation des Korrelationskoeffizienten
- b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsgeraden
1 × C: für die richtige Interpretation der Steigung im Sachzusammenhang
- c) 1 × C: für das richtige Ablesen des Wertes

Aufgabe 7 (Teil B)

Möglicher Lösungsweg

- a) Erlös beim Preis € 2,00: $E = 2 \cdot 500 = 1000$
Erlös beim Preis € 1,80: $E = 1,8 \cdot 600 = 1080$
Durch die Preissenkung steigt der Erlös.

(Alternativ kann mit der Elastizität argumentiert werden.)

relative Mengenänderung: $\frac{600 - 500}{500} = 20\%$

relative Preisänderung: $\frac{1,8 - 2}{2} = -10\%$

Elastizität: $\varepsilon = \frac{20\%}{-10\%} = -2$

- b) $p(0) = 3,15$: $3,15 = c$
 $p(500) = 2$: $2 = 500^2 \cdot a + 500 \cdot b + 3,15$
 $p(600) = 1,8$: $1,8 = 600^2 \cdot a + 600 \cdot b + 3,15$

$$a = 0,00000005; b = -0,00255$$

$$p(x) = 0,00000005 \cdot x^2 - 0,00255 \cdot x + 3,15$$

Sättigungsmenge: Setze $p(x) = 0$:

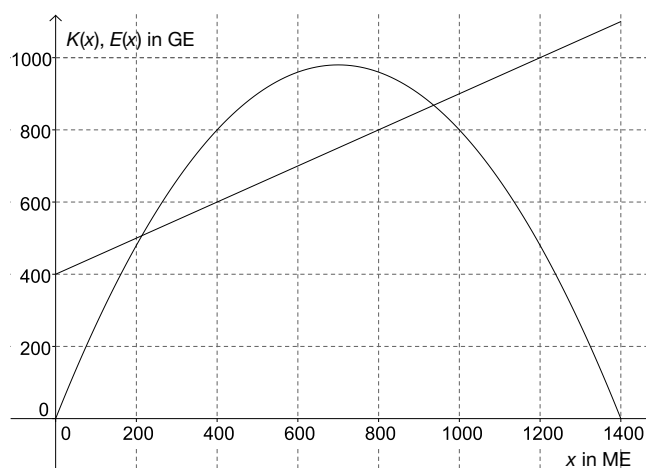
$$0 = 0,00000005 \cdot x^2 - 0,00255 \cdot x + 3,15$$

$$x_1 = 2100; (x_2 = 3000)$$

Die Sättigungsmenge liegt bei 2100 Tuben täglich.

Ein sinnvolles Intervall ist $[0; 2100]$, da der Preis nicht unter null gesenkt werden kann.

c)



gewinnmaximale Menge: ca. 600 ME (exakt 575 ME)

Toleranzbereich: $[450; 650]$

Achtung: $x = 700$ ist falsch!

- d) Die gewinnmaximale Menge ändert sich nicht, wenn die Fixkosten geändert werden.

Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der bei der Ableitung wegfällt. Da die gewinnmaximale Menge die Nullstelle des Grenzgewinns ist, haben die Fixkosten keinen Einfluss auf die gewinnmaximale Menge.

oder

Im Gewinnmaximum sind die Grenzkosten gleich dem Grenzerlös. Die Grenzkosten sind unabhängig von den Fixkosten.

oder

$$G(x) = E(x) - K_v(x) - F$$

$$G'(x) = E'(x) - K_v'(x)$$

x ... produzierte bzw. abgesetzte Menge in ME

$G(x)$... Gewinn in GE

$E(x)$... Erlös in GE

$K_v(x)$... variable Kosten in GE

F ... Fixkosten in GE

Der Gewinn ist maximal, wenn gilt: $E'(x) = K_v'(x)$, d. h., die Fixkosten sind irrelevant.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × C: für die richtige Beschreibung der Erlösänderung
1 × B: für die richtige Berechnung der Elastizität
- b) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Bedingungen
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Funktionsgleichung
1 × B2: für die richtige Berechnung der Sättigungsmenge
1 × D: für die richtige Erklärung des Intervalls
- c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Kostenfunktion
1 × C: für das richtige Ablesen der gewinnmaximalen Menge
- d) 1 × D: für die richtige Begründung

Aufgabe 8 (Teil B)

Möglicher Lösungsweg

a)

Jahr	Einnahmen	Ausgaben
0		€ 34.000
1	€ 12.000	€ 6.000
2	€ 14.000	€ 6.000
3	€ 16.000	€ 6.000
4	€ 24.800	€ 6.000

b) Kapitalwert: $-42\,000 + \frac{8\,000}{1,06} + \frac{10\,000}{1,06^2} + \frac{12\,000}{1,06^3} + \frac{22\,000}{1,06^4} \approx 1\,949$

Der Kapitalwert beträgt ca. € 1.949.

Die Investition ist vorteilhaft, weil der Kapitalwert positiv ist.

c) Der Kapitalwert ist gleich der Summe aus den abgezinste Rückflüssen minus der Anschaffungskosten.

Je niedriger der Zinssatz ist, mit dem kalkuliert wird, desto höher sind die abgezinste Rückflüsse und desto höher ist der Kapitalwert.

d) Endwert: $E = 9\,000 \cdot 1,045^3 + 11\,000 \cdot 1,045^2 + 13\,000 \cdot 1,045 + 15\,000 = 50\,867,77$

Modifizierter interner Zinssatz:

$$45\,000 \cdot (1 + i_{\text{mod}})^4 = 50\,867,77$$

$$i_{\text{mod}} = \sqrt[4]{\frac{50\,867,77}{45\,000}} - 1 \approx 0,0311$$

Der modifizierte interne Zinssatz beträgt ca. 3,11 % p. a.

Da der modifizierte interne Zinssatz kleiner als der Wiederveranlagungszinssatz ist, ist die Investition nicht sinnvoll.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A1: für das richtige Übertragen der Einnahmen
1 × A2: für das richtige Übertragen der Ausgaben
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung des Kapitalwerts
1 × D: für die richtige Begründung
- c) 1 × D: für die richtige Erklärung
- d) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Endwerts
1 × B2: für die richtige Berechnung des modifizierten internen Zinssatzes
1 × C: für die richtige Interpretation des modifizierten internen Zinssatzes

Beurteilungsschlüssel

Sehr gut: 42–47 Punkte

Gut: 34–41 Punkte

Befriedigend: 26–33 Punkte

Genügend: 17–25 Punkte

Nicht genügend: 0–16 Punkte