Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

16. Jänner 2018

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 9)

Korrekturheft

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im entsprechenden Erlass zur Beurteilung, der auf der Website https://ablauf.srdp.at/ abrufbar ist.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A* (**KA**) umfasst die unabhängig[1] erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B* (**KB**) umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufen 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche" eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen" wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend" (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punkteermittlung soll die Arbeit der Kandidatin / des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist von der Prüferin / vom Prüfer ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

44–48 Punkte	Sehr gut
39–43 Punkte	Gut
34–38 Punkte	Befriedigend
23–33 Punkte	Genügend
0–22 Punkte	Nicht genügend

[1] Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur **ein möglicher** Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.

2. Der Lösungsschlüssel ist unter Beachtung folgender Vorgangsweisen **verbindlich** anzuwenden:

   a. Punkte sind nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung vollständig erfüllt ist.

   b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.

   c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin / vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.

   d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin / vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.

   e. Werden von der Kandidatin / vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.

   f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin / des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.

   g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.

   h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.

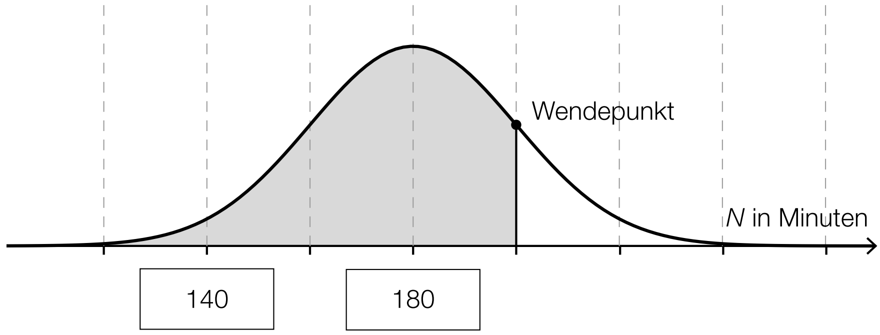
   i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.

Aufgabe 1

Internet

Möglicher Lösungsweg

a)



b) $0{,}25 \cdot \frac{1}{8} = 0{,}03125$

Sie wendet etwa 3 % ihrer gesamten Internet-Nutzungsdauer für dieses Spiel auf.

c) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
arithmetisches Mittel: $\bar{x} = 3{,}95$ h
Standardabweichung: $s = 1{,}627...$ h

Auch eine Berechnung der Standardabweichung als $s_{n-1} = 1{,}669...$ h ist als richtig zu werten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Eintragen der beiden fehlenden Zeiten (KA)
1 × A2: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der gegebenen Abbildung (KB)

b) 1 × B: für das richtige Ermitteln des Prozentsatzes (KA)

c) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung (s bzw. s_{n-1}) (KA)

Aufgabe 2

Erfassen der Geschwindigkeit

Möglicher Lösungsweg

a) $s_1(0) = 0$
$s_1(1) = 1$
$s_1(2{,}5) = 3$

oder:

$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$
$1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$
$3 = a \cdot 2{,}5^2 + b \cdot 2{,}5 + c$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$a = \frac{2}{15}$
$b = \frac{13}{15}$
$c = 0$

b) $v_2(t) = s_2'(t) = -t^2 + 4 \cdot t + \frac{1}{3}$
$v_2(0) = \frac{1}{3} \neq 0$
Das Auto hatte zu Beginn des angegebenen Zeitintervalls eine Geschwindigkeit ungleich 0.

$a_2(t) = s_2''(t) = -2 \cdot t + 4$

$a_2(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 2$

An der Stelle $t_0 = 2$ gilt:

$v_2'(2) = a_2(2) = 0$

$v_2''(2) = a_2'(2) = -2 < 0$

Daraus folgt, dass die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 maximal ist.
Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.

c) $v_3(t) = 5 \cdot t + 10$ mit $1 \leq t \leq 3$
Integrieren ergibt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + C$
Wegen $s_3(1) = 15$ gilt:
$s_3(t) = \frac{5}{2} \cdot t^2 + 10 \cdot t + \frac{5}{2}$ mit $1 \leq t \leq 3$
t ... Zeit in s
$s_3(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen des Gleichungssystems (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung der Koeffizienten (KB)
b) 1 × D1: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit ungleich null ist (KA)
   1 × B: für die richtige Berechnung der Zeit t_0 (KA)
   1 × D2: für den richtigen Nachweis, dass die Geschwindigkeit zur Zeit t_0 maximal ist (KB)
   Eine Überprüfung der Randstellen ist für die Punktevergabe nicht erforderlich.
c) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung (KB)

Aufgabe 3

Bevölkerungsentwicklung

Möglicher Lösungsweg

a) $N_1(t) = k \cdot t + d$

$d = N_1(0) = 7\,965$

$k = \frac{4\,524 - 7\,965}{22} = -156{,}4...$

$N_1(t) = -156 \cdot t + 7\,965$

Im gegebenen Zeitraum nahm die Bevölkerungszahl im Mittel pro Jahr um etwa 156 Personen ab.

b)

P	C
Q	B

A	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) > 0$
B	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) > 0$
C	$N_2'(t) < 0$ und $N_2''(t) < 0$
D	$N_2'(t) > 0$ und $N_2''(t) < 0$

c) $N_3(t) = N_3(0) \cdot a^t$

$4\,524 = 10\,068 \cdot a^{33} \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}976...$

$N_3(t) = 10\,068 \cdot 0{,}976...^t$

oder: $N_3(t) = N_3(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$

$4\,524 = 10\,068 \cdot e^{-\lambda \cdot 33} \quad \Rightarrow \quad \lambda = -0{,}024...$

$N_3(t) = 10\,068 \cdot e^{-0{,}024... \cdot t}$

$N_3(49) = 3\,069{,}5...$

Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3070 Personen zu erwarten.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_1 (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation des Werts der Steigung im gegebenen Sachzusammenhang (KB)

b) 1 × C: für die richtige Zuordnung (KA)

c) 1 × A: für das richtige Erstellen einer Gleichung der Funktion N_3 (KA)
1 × B: für das richtige Ermitteln der Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 (KB)

Aufgabe 4

Fußball

Möglicher Lösungsweg

a) Der Ausdruck $25^{1,32} + 30^{1,32}$ wurde nicht eingeklammert.

Berechnung mithilfe der Formel:
$25^{1,32} : (25^{1,32} + 30^{1,32}) \cdot 36 \cdot 2{,}753 = 43{,}6... \approx 44$
Verdoppelung der Punkte nach der ersten Saisonhälfte: $19 \cdot 2 = 38$
Die Zahl, die mit der Formel berechnet wurde, ist näher an der tatsächlichen Punkteanzahl als die Verdoppelung der Punkte in der ersten Saisonhälfte.

$\sqrt[100]{T^{132}}$	☒

b) $n = 5$ und $p = 0{,}8$
X ... Anzahl der verwandelten Elfmeter
Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$P(X = 4) = 0{,}4096$

c) $\overline{AE}$: $\sqrt{3^2 + 11^2} = \sqrt{130}$
$\overline{EP}$: $\cos(\alpha) = \frac{\overline{AE}}{\overline{EP}} \Rightarrow \overline{EP} = \frac{\sqrt{130}}{\cos(5°)} = 11{,}445...$
$\overline{EP} \approx 11{,}45$ m

$\frac{11{,}44...\text{ m}}{0{,}4\text{ s}} = 28{,}61...\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 103\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$

Lösungsschlüssel

a) 1 × C1: für die richtige Beschreibung, welcher Fehler gemacht wurde (KA)
1 × D: für die richtige nachweisliche Überprüfung (KA)
1 × C2: für das richtige Ankreuzen (KA)
b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)
c) 1 × B1: für die richtige Berechnung der Länge $\overline{EP}$ (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der mittleren Geschwindigkeit in km/h (KB)

Aufgabe 5

Der Genfer See

Möglicher Lösungsweg

a) $h'(t_{max}) = 0$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$t_{max} = 5{,}673...$
$h(t_{max}) = 157{,}72...$

prozentueller Unterschied zur angegebenen maximalen Höhe:
$\frac{157{,}72... - 140}{140} = 0{,}1265... \approx 12{,}7\ \%$

b) Mit dem Ausdruck wird die gesamte Wassermenge in m³ berechnet, die innerhalb dieser 48 Stunden den See durch den Abfluss verlassen hat.

F ist monoton steigend im Intervall [4; 26].	☒

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des prozentuellen Unterschieds (KB)
b) 1 × C1: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang mit Angabe der entsprechenden Einheit (KA)
1 × C2: für das richtige Ankreuzen (KB)

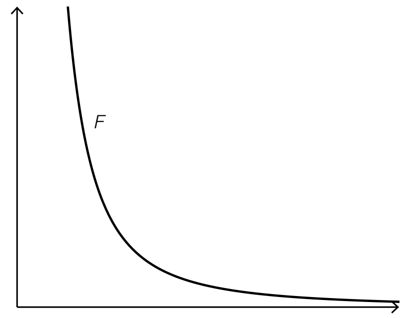
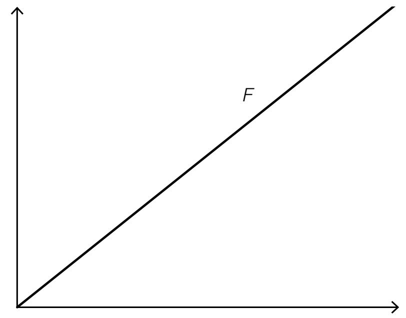
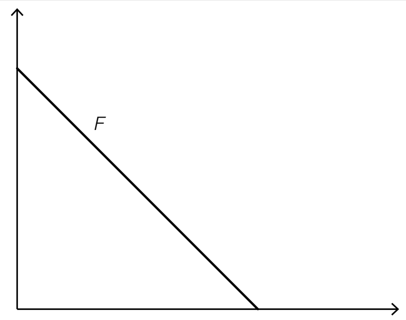
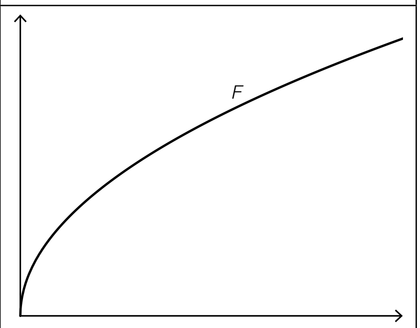
Aufgabe 6 (Teil B)

Fundamentale Wechselwirkungen

Möglicher Lösungsweg

a)

Betrag F der Gravitationskraft abhängig vom Abstand r (m_1 und m_2 konstant)	A
Betrag F der Gravitationskraft abhängig von der Masse m_1 (m_2 und r konstant)	B

A	
B	
C	
D	

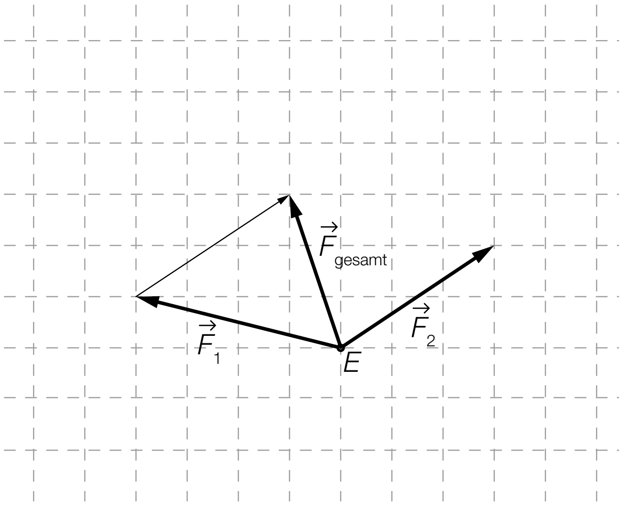
b)

Wechselwirkung	Stärke
elektromagnetische Wechselwirkung	1
schwache Wechselwirkung	10^{-13}
Gravitation	10^{-39}

$\frac{10^{-13}}{10^{-39}} = 10^{26}$

Die „schwache Wechselwirkung" ist um den Faktor 10^{26} stärker als die Gravitation.

c)



Lösungsschlüssel

a) 1 × C: für die richtige Zuordnung (KA)
b) 1 × A: für das richtige Ergänzen der fehlenden Hochzahl (KA)
1 × B: für das richtige Ermitteln des Faktors (KB)
c) 1 × A: für das richtige Einzeichnen der Gesamtkraft (KA)

Aufgabe 7 (Teil B)

Baumkronenpfad

Möglicher Lösungsweg

a) Höhenunterschied in Metern: $160 \cdot 0{,}08 = 12{,}8$

$\alpha = \arctan(0{,}08) = 4{,}57...°$

Auch $\alpha = -4{,}57...°$ *ist als richtig zu werten.*
Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

b) maximale Auslenkung: 0,17 m
Toleranzbereich: [0,16 m; 0,18 m]

$c = f(0) = 0{,}2$

Da die gegebene Exponentialfunktion streng monoton fallend ist, gilt für den Parameter a:
$0 < a < 1$.

c) $h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
$h'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$h(0) = 0$
$h(40) = 8$
$h(90) = 10$
$h(160) = 0$
$h'(90) = 0$

oder:

$0 = a \cdot 0^4 + b \cdot 0^3 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0 + e$
$8 = a \cdot 40^4 + b \cdot 40^3 + c \cdot 40^2 + d \cdot 40 + e$
$10 = a \cdot 90^4 + b \cdot 90^3 + c \cdot 90^2 + d \cdot 90 + e$
$0 = a \cdot 160^4 + b \cdot 160^3 + c \cdot 160^2 + d \cdot 160 + e$
$0 = 4 \cdot a \cdot 90^3 + 3 \cdot b \cdot 90^2 + 2 \cdot c \cdot 90 + d$

Auch das Erstellen eines Gleichungssystems zur Berechnung der Koeffizienten von –h *ist als richtig zu werten.*

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Höhenunterschieds (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung des Neigungswinkels (KA)
Auch die Berechnung des Winkels im Bogenmaß ist als richtig zu werten.

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen der maximalen Auslenkung
im Toleranzbereich [0,16 m; 0,18 m] (KA)
1 × C2: für das richtige Ablesen des Parameters c (KA)
1 × D: für die richtige Begründung zum Parameter a (KB)

c) 1 × A1: für das richtige Erstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der gegebenen Punkte (KA)
1 × A2: für das richtige Erstellen der Gleichung mithilfe der gegebenen Maximumstelle (KA)
Auch das Erstellen eines Gleichungssystems zur Berechnung der Koeffizienten von $-h$ ist als richtig zu werten.

Aufgabe 8 (Teil B)

Epidemie

Möglicher Lösungsweg

a) $N(t) = N_0 \cdot a^t$
$N_0 = 1$
$a = \sqrt[4]{2} = 1{,}18920...$
$N(t) = 1 \cdot 1{,}1892...^t$ oder $N(t) = 1 \cdot 2^{\frac{t}{4}}$
t ... Zeit seit dem ersten Infektionsfall in Tagen
$N(t)$ ... Anzahl der Neuinfektionen zur Zeit t

Eine exponentielle Zunahme ist auf lange Sicht nicht möglich, da die Anzahl der Personen, die infiziert werden können, beschränkt ist, die Funktion N aber nicht.

b) $1\,200 = \frac{30\,000}{1 + b \cdot e^{-0{,}1739 \cdot 41}}$
Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $b = 29\,970{,}0...$

$17\,000 = \frac{30\,000}{1 + 29\,970{,}0... \cdot e^{-0{,}1739 \cdot t}}$
Lösung der Gleichung mittels Technologieeinsatz: $t = 60{,}8...$

Nach etwa 61 Tagen werden erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein.

c) $I(45)$ gibt an, wie viele Personen insgesamt in den ersten 45 Tagen infiziert wurden.

Nach 60 Tagen ist die Anzahl der Neuinfektionen pro Tag am höchsten (Toleranzbereich: ± 5 Tage).

Dazu ermittelt man die Nullstelle der 2. Ableitung der Funktion I im dargestellten Bereich.

In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I *im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.*

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Gleichung der Funktion N (KA)
   1 × D: für die richtige Argumentation (KA)

b) 1 × B1: für die richtige Berechnung des Parameters b (KA)
   1 × B2: für das richtige Ermitteln der Zeit, nach der erstmals mehr als 17 000 Personen infiziert sein werden (KB)

c) 1 × C1: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
   1 × C2: für das richtige Ablesen der Wendestelle im Toleranzbereich [55; 65] (KA)
   1 × C3: für die richtige Dokumentation in Worten (KB)
   (In der Grafik ist klar zu erkennen, dass I im dargestellten Intervall nur eine Wendestelle hat und dass an dieser Stelle die Zunahme am stärksten ist. Daher sind eine Überprüfung mithilfe der 1. Ableitung und eine Überprüfung der Randstellen nicht erforderlich.)

Aufgabe 9 (Teil B)

Sitzreihen

Möglicher Lösungsweg

a) Die Differenz der Anzahlen der Stühle zweier aufeinanderfolgender Sitzreihen ist konstant.

$a_1 = 8$ und $a_{n+1} = a_n + 3$

b) $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 1$
$a_n = 4 + n$

$126 = \frac{(9 + n) \cdot n}{2}$
$n^2 + 9 \cdot n - 252 = 0$

Lösung mittels Technologieeinsatz:
$n_1 = 12$ (und $n_2 = -21$)

Der Sektor II besteht aus 12 Sitzreihen.

c) 5 … Anzahl der Stühle in der ersten Sitzreihe
4 … in jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 4

$a_7 = 5 + (7 - 1) \cdot 4 = 29$

Es stehen 29 Stühle in der 7. Sitzreihe.

Lösungsschlüssel

a) 1 × D: für die richtige mathematische Begründung (KA)
1 × A: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes (KB)
b) 1 × A: für das richtige Aufstellen des expliziten Bildungsgesetzes (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Sitzreihen in Sektor II (KA)
c) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung der Anzahl der Stühle in der 7. Sitzreihe (KA)