Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

12. Jänner 2017

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 9)

Korrekturheft

BMB
Bundesministerium
für Bildung

Korrektur- und Beurteilungsanleitung
zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung
in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im Erlass mit der Geschäftszahl BMBF-17.100/0006-II/2015 des Bundesministeriums für Bildung und Frauen.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A* (**KA**) umfasst die unabhängig[1] erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B* (**KB**) umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufen 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche“ eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen“ wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend“ (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punkteermittlung soll die Arbeit der Kandidatin / des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist von der Prüferin / vom Prüfer ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

43–48 Punkte	Sehr gut
37–42 Punkte	Gut
31–36 Punkte	Befriedigend
21–30 Punkte	Genügend
0–20 Punkte	Nicht genügend

[1] Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur **ein möglicher** Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.

2. Der Lösungsschlüssel ist **verbindlich** anzuwenden unter Beachtung folgender Vorgangsweisen:

   a. Punkte sind nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung vollständig erfüllt ist.

   b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.

   c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin / vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.

   d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin / vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.

   e. Werden von der Kandidatin / vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.

   f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin / des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.

   g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.

   h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.

   i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.

3. Sind Sie sich als Korrektor/in über die Punktevergabe nicht schlüssig, können Sie eine Korrekturanfrage an das BMB (via Telefon-Hotline oder Online-Helpdesk) stellen.

Aufgabe 1

Körpergröße

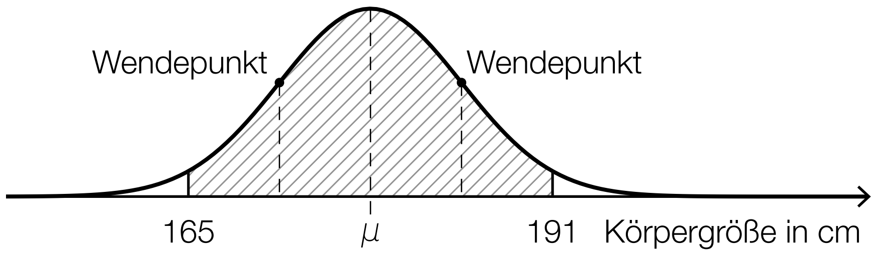
Möglicher Lösungsweg

a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$\bar{x} = 178{,}6$ cm
$\sigma = 7{,}499\ldots$ cm $\approx 7{,}5$ cm bzw. $s = 7{,}904\ldots$ cm $\approx 7{,}9$ cm

Messwerte, die für die fehlerhafte Eingabe in Frage kommen: 168, 169, 171, 174, 179

b) X … Körpergröße eines zufällig ausgewählten Studenten in cm
$P(X \geq a) = 0{,}8$
Berechnung von a mittels Technologieeinsatz:
$a = 172{,}52\ldots$ cm

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % wird eine Körpergröße von rund 172,5 cm überschritten.



Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittelwerts und der Standardabweichung (KA)
1 × C: für die richtige Angabe aller Werte, die für die fehlerhafte Eingabe in Frage kommen (KB)

b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Körpergröße (KA)
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der gegebenen Abbildung (Intervall: $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$) (KA)

Aufgabe 2

Vernetzte Welt

Möglicher Lösungsweg

a) $F(t) = F_0 \cdot a^t$

$F_0 = 5{,}5$
$820 = 5{,}5 \cdot a^6 \;\Rightarrow\; a = \sqrt[6]{\frac{820}{5{,}5}} = 2{,}30272\ldots \approx 2{,}3027$
$F(t) = 5{,}5 \cdot 2{,}3027^t$

b) 12 Jahre entsprechen der 8-fachen Verdoppelungszeit $\left(\frac{12}{1{,}5} = 8\right)$.
$2^8 = 256$

Die Behauptung ist daher falsch.

c) Binomialverteilung:
X ... Anzahl der Bauteile, die innerhalb eines Jahres ausfallen
$n = 10$, $p = 0{,}02$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0{,}1829\ldots \approx 18{,}3\,\%$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung (KA)
b) 1 × D: für den richtigen Nachweis (KA)
c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)

Aufgabe 3

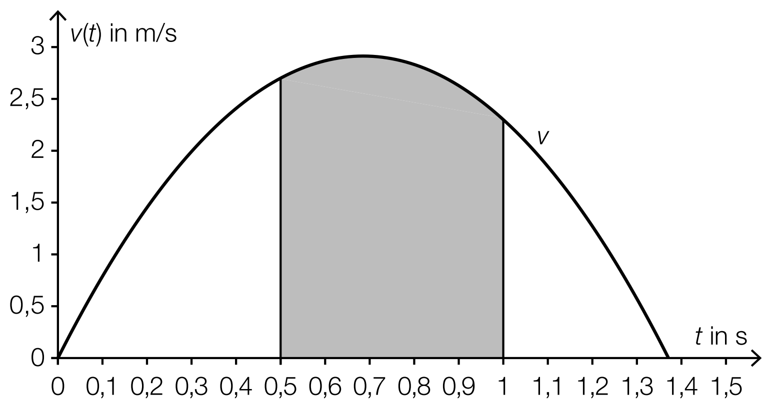
Skatepark

Möglicher Lösungsweg

a) $A = (2 \cdot a + b) \cdot h - b \cdot r - \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

$1\ \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = \frac{10^6\ \text{g}}{10^6\ \text{cm}^3} = 1\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$

b)



$v'(0{,}3)$ ist die Beschleunigung der Skaterin zum Zeitpunkt $t = 0{,}3$ s.

c) $\bar{v} = \frac{1{,}5}{0{,}6} = 2{,}5$

Toleranzbereich für $\bar{v}$: [2,1; 2,9]
Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 2,5 m/s.

d) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$f(0) = 160$		$c = 160$
$f(20) = 0$	*oder:*	$400 \cdot a + 20 \cdot b + c = 0$
$f'(0) = \tan(-80°)$		$b = \tan(-80°)$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel (KA)
1 × D: für den richtigen Nachweis (KA)
b) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen des Weges (KA)
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Geschwindigkeit im Toleranzbereich [2,1; 2,9] (KA)
d) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte *A* und *B* (KA)
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe des gegebenen Winkels (KB)

Aufgabe 4

Windräder

Möglicher Lösungsweg

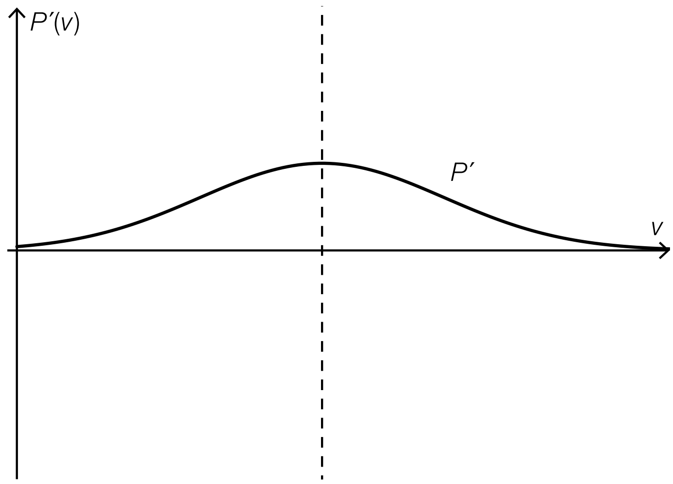
a) $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \;\Rightarrow\; P_{\mathrm{N}} = c \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

$0{,}85 = 0{,}169 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

$d = 80{,}02\ldots$

Der Durchmesser beträgt rund 80,0 m.

b) zum Beispiel:



c) $0{,}5 = 0{,}0175 \cdot v^2 - 0{,}0796 \cdot v + 0{,}0391$

$v_1 = 7{,}887\ldots$
$(v_2 = -3{,}339\ldots)$

Eine Leistung von 0,5 MW wird bei einer Windgeschwindigkeit von rund 7,89 m/s erzielt.

Es wird die relative Änderung der Leistung des Windrads bei einem Anstieg der Windgeschwindigkeit von 7 m/s auf 8 m/s ermittelt.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers (KA)

b) 1 × A1: für die richtige Darstellung (Wendestelle von P als Maximumstelle von P') (KB)
1 × A2: für die richtige Darstellung (Vorzeichen der Ableitungsfunktion P' ($P'(v) > 0$) und Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion P') (KB)
Das Krümmungsverhalten von P' ist für die Punktevergabe nicht relevant.

c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Windgeschwindigkeit (KA)
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KB)

Aufgabe 5

Hausbau

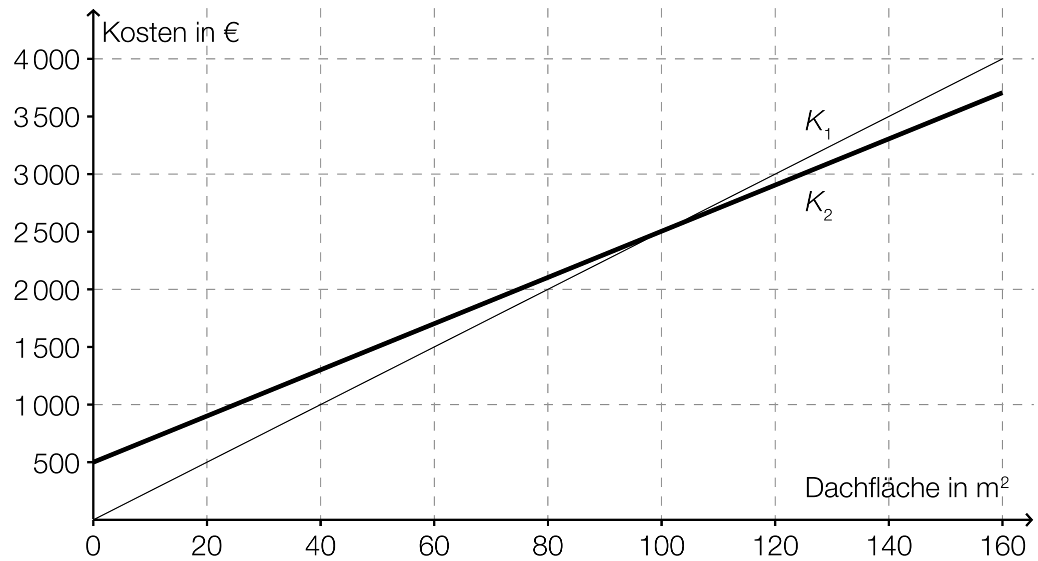
Möglicher Lösungsweg

a) $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{\frac{a}{2}}\right)$

$\alpha = \arctan\left(\frac{2,2}{3,5}\right) = 32,15\ldots° \approx 32,2°$

b) $b = 6,5 \cdot \cos(38°) - 4,25$
$b = 0,872\ldots \text{ m} \approx 0,87 \text{ m}$

c)



Aus der Abbildung entnimmt man, dass für 120 m² Dachfläche das Angebot 2 kostengünstiger ist.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels (KB)

b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung von *b* (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung von *b* (KB)

c) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Graphen (KA)
1 × C: für das richtige Ablesen (KB)

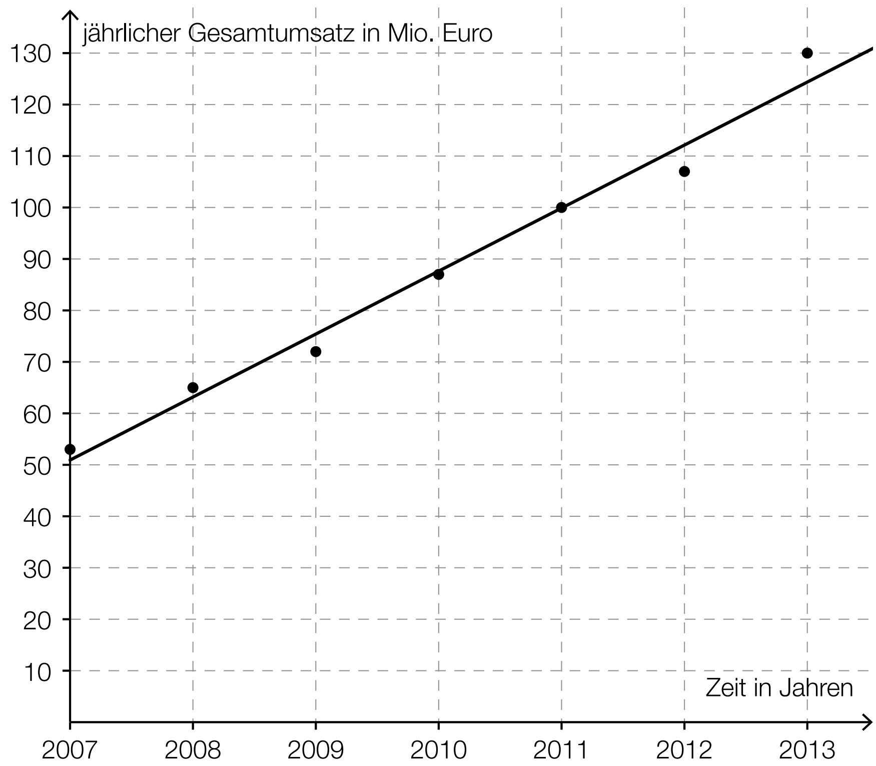
Aufgabe 6 (Teil B)

Fairtrade

Möglicher Lösungsweg

a) Ermitteln der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:
$f(t) = 12{,}25 \cdot t + 50{,}96$ (Koeffizienten gerundet)

t … Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2007)
$f(t)$ … jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro



Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0{,}991$

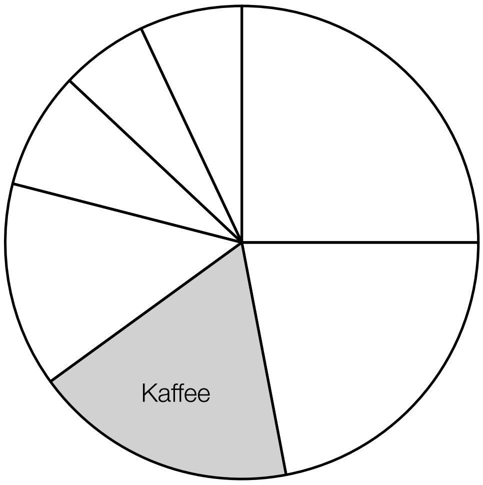
Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$f(13) = 210{,}2\ldots$

Gemäß diesem Modell wird der jährliche Gesamtumsatz im Jahr 2020 rund 210 Millionen Euro betragen.

b) Gemäß diesem Modell steigt der jährliche Gesamtumsatz pro Jahr um 13,6 Millionen Euro.

c)



$\frac{24}{107} = 0{,}2242\ldots \approx 22{,}4\ \%$

Der Umsatz an Süßwaren betrug im Jahr 2012 rund 22,4 Prozent des Gesamtumsatzes.

Lösungsschlüssel

a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion (KA)
1 × B2: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Regressionsfunktion (KB)
1 × D: für die richtige Beurteilung mithilfe des Korrelationskoeffizienten (KB)
1 × B3: für die richtige Berechnung des jährlichen Gesamtumsatzes im Jahr 2020 (KB)

b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang (KA)

c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Sektors, der den Umsatz an Kaffee darstellt (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes (KA)

Aufgabe 7 (Teil B)

Snowboard

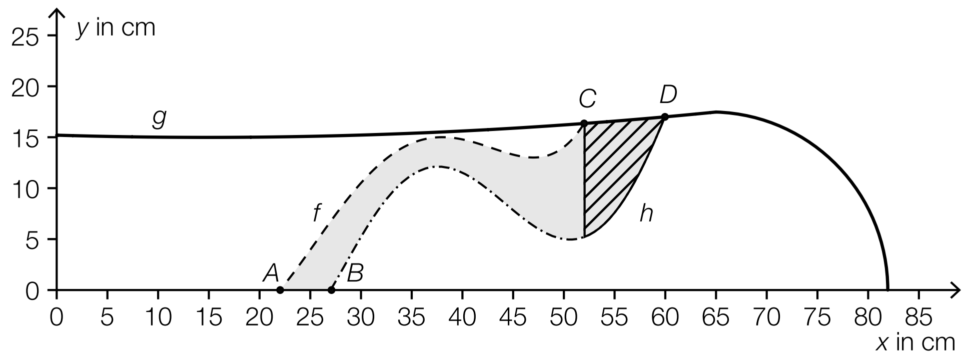
Möglicher Lösungsweg

a) $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

$f'(x) = 4 \cdot a \cdot x^3 + 3 \cdot b \cdot x^2 + 2 \cdot c \cdot x + d$

$f(22) = 0$		$22^4 \cdot a + 22^3 \cdot b + 22^2 \cdot c + 22 \cdot d + e = 0$
$f(38) = 15$		$38^4 \cdot a + 38^3 \cdot b + 38^2 \cdot c + 38 \cdot d + e = 15$
$f'(38) = 0$	*oder:*	$4 \cdot 38^3 \cdot a + 3 \cdot 38^2 \cdot b + 2 \cdot 38 \cdot c + d = 0$
$f(47) = 13$		$47^4 \cdot a + 47^3 \cdot b + 47^2 \cdot c + 47 \cdot d + e = 13$
$f'(47) = 0$		$4 \cdot 47^3 \cdot a + 3 \cdot 47^2 \cdot b + 2 \cdot 47 \cdot c + d = 0$

b)



$$A_3 = \int_{52}^{60} \left[g(x) - h(x)\right] \mathrm{d}x$$

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte (KA)
1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der 1. Ableitung (KA)

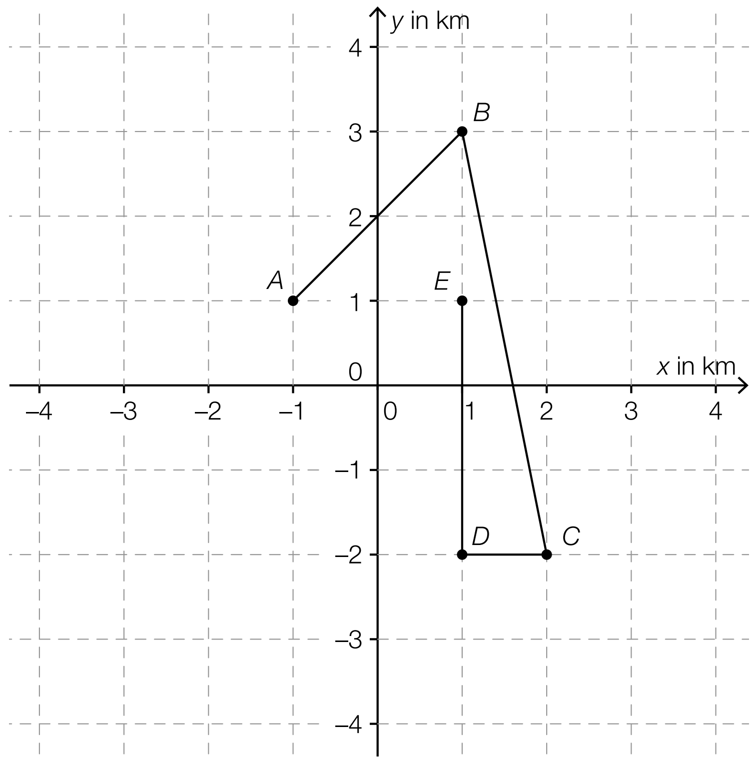
b) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen der fehlenden Teilfläche (KA)
1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel (KB)

Aufgabe 8 (Teil B)

Silvesterlauf

Möglicher Lösungsweg

a)



Das Skalarprodukt $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$, weil die beiden Vektoren normal aufeinander stehen.

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{26} = 5{,}09...$

Die Streckenlänge $\overline{BC}$ beträgt rund 5,1 km.

b) Median der Laufzeiten: 80 min

Elisabeth gehört zum Viertel der schnellsten Läufer/innen, ihre Laufzeit liegt also im Intervall von 50 min bis 60 min.

Lösungsschlüssel

a) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Laufstrecke im gegebenen Koordinatensystem (KA)
1 × D: für die richtige Erklärung (KB)
1 × B1: für das richtige Ermitteln der Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{BC}$ (KA)
1 × B2: für die richtige Berechnung der Streckenlänge $\overline{BC}$ (KB)

b) 1 × C1: für das richtige Ablesen des Medians der Laufzeiten (KA)
1 × C2: für das richtige Ablesen des kleinsten Intervalls, in dem Elisabeths Laufzeit mit Sicherheit liegen muss (KA)

Aufgabe 9 (Teil B)

Bienenwaben

Möglicher Lösungsweg

a) Glieder der Folge: $a_1 = 6$, $a_2 = 12$, $a_3 = 18$, $a_4 = 24$

rekursives Bildungsgesetz:
$a_1 = 6$
$a_{n+1} = a_n + 6$

explizites Bildungsgesetz:
$a_n = 6 + (n - 1) \cdot 6$

oder:

$a_n = 6 \cdot n$

b) $271 = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2$
Lösung mittels Technologieeinsatz: $n = 9$

Diese Wabe besteht aus 9 Ringen.

c) Honigvolumen auf einer Fläche von 3 dm² in ml: $850 \cdot 0{,}3 \cdot 3 = 765$
765 ml · 1,4 g/ml = 1 071 g

Auf einer Fläche von 3 dm² sind 1 071 g Honig zu erwarten.

d) Die Argumentation ist falsch, weil der abgebildete Wertebereich nicht bei 0, sondern bei 280 000 „beginnt".

Lösungsschlüssel

a) 1 × A1: für das richtige Angeben der ersten 4 Glieder der Folge (KA)
1 × A2: für das richtige Aufstellen des rekursiven Bildungsgesetzes (KB)
1 × A3: für das richtige Aufstellen des expliziten Bildungsgesetzes (KB)
b) 1 × B: für das richtige Ermitteln der Anzahl der Ringe (KA)
c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Masse in Gramm (KA)
d) 1 × D: für die richtige Erklärung (KB)