Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung

AHS

20. September 2018

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Aufgabe 1

Quadratische Funktion

a) Lösungserwartung:

$c > 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt $A = (0|y_A)$ liegt auf der positiven senkrechten Achse, daher ist $y_A = f(0) > 0$.
Da $c = f(0)$ ist, muss $c > 0$ sein.

oder:

Der Parameter c legt fest, in welchem Punkt der Graph von f die senkrechte Achse schneidet. Da dieser Schnittpunkt auf der positiven senkrechten Achse liegt, muss $c > 0$ gelten.

$b < 0$

Mögliche Begründung:

Der Punkt B ist ein Extrempunkt von f. Da B auf der positiven x-Achse liegt, muss seine x-Koordinate x_B positiv sein. Die Extremstelle $x_E = x_B$ der Funktion f ergibt sich aus dem Ansatz:
$f'(x_E) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_E = -2 \cdot b$.
Wegen $x_E = -2 \cdot b > 0$ muss $b < 0$ gelten.

oder:

Da aus $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b$ folgt, dass $f'(0) = b$ ist, und da f für $(-\infty; x_E)$ mit $x_E > 0$ streng monoton fallend ist, folgt $f'(0) < 0$ und somit gilt: $f'(0) = b < 0$.

oder:

Angenommen, es würde $b \geq 0$ gelten. Wegen $c > 0$ ergibt sich: $\frac{1}{4} \cdot x^2 + c > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Somit würde für alle $x > 0$ auch $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c > 0$ gelten. Dies stellt aber einen Widerspruch dazu dar, dass ein Berührpunkt mit der positiven x-Achse existiert. Folglich muss $b < 0$ gelten.

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die Angabe von $c > 0$ und eine korrekte Begründung.
– Ein Punkt für die Angabe von $b < 0$ und eine korrekte Begründung.
  Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

Die Aussage ist wahr.

Mögliche Begründung:

Da $B = (x_B|0)$ ein Extrempunkt von f ist, gilt $f'(x_B) = 0$. Weil auch $f(x_B) = 0$ ist, ist der Punkt B ein Schnittpunkt der Graphen von f und f'.

oder:

An einer Stelle, wo die Funktion f eine Extremstelle hat, weist f' eine Nullstelle auf. Da die Extremstelle von f im gegebenen Fall eine Nullstelle ist, haben f und f' die gleiche Nullstelle und somit im Punkt B einen Schnittpunkt.

Mögliche Vorgehensweise:

$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x + b \quad \Rightarrow \quad$ Die Steigung der Ableitungsfunktion f' ist $\frac{1}{2}$.

$f'(x_t) = \frac{1}{2} \cdot x_t + b = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_t = 1 - 2 \cdot b$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage wahr ist, und eine korrekte Begründung.
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Ausdrücke sind als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Vorgehensweise:

Wenn die Extremstelle von f auch Nullstelle von f ist, hat die Gleichung $\frac{1}{4} \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ genau eine Lösung.

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot 0{,}25 \cdot c}}{0{,}5} \quad \Rightarrow \quad c = b^2$

Mögliche Vorgehensweise:

$f'(x_B) = \frac{1}{2} \cdot x_B + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{-x_B}{2}$

Aus $c = b^2$ folgt: $c = \frac{x_B^2}{4}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen b und c. Andere korrekte Zusammenhänge sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die korrekte Angabe der Koeffizienten b und c in Abhängigkeit von x_B.

Aufgabe 2

Überlagerung von Schwingungen

a) Lösungserwartung:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{c \cdot \pi} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{c}$$

Mögliche Vorgehensweise:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 1$$

$$p_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{1}\int_0^1 \sin^2(2\pi \cdot t)\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad p_{\text{eff}} \approx 0{,}71 \text{ Pa}$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Berechnung des richtigen Effektivwerts des Schalldrucks, wobei die Einheit „Pa“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [0,7 Pa; 0,71 Pa]

b) Lösungserwartung:

$T = 4$ ms

Frequenz von h: $\frac{1}{0{,}004} = 250$ Hz

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Periodenlänge von h, wobei die Einheit „ms“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [3,9 ms; 4,1 ms]
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) Lösungserwartung:

Amplitude von h: ca. 2,9 nach ca. 0,2 ms

Mögliche Begründung:
Die Amplitude von h ist nicht gleich der Summe der Amplituden von h_1, h_2 und h_3, da die drei Funktionen ihre maximalen Funktionswerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreichen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Amplitude und den richtigen Zeitpunkt, wobei die Einheit „ms“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervalle: [2,85; 2,95] bzw. [0,19 ms; 0,21 ms]
- Ein Punkt für eine korrekte Begründung.

d) Lösungserwartung:

$R_1 = (1 \,|\, \sqrt{3})$

Mögliche Vorgehensweise:
$x(R_1) = 2 \cdot \cos(60°) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

$y(R_1) = 2 \cdot \sin(60°) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

Mögliche Vorgehensweise:
Entfernung zwischen L_2 und $R_2 = 2 \cdot x(R_2) = 2 \cdot 2 \cdot \cos(20°) \approx 3{,}76$ m

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von R_1.
  Toleranzintervall für die y-Koordinate: [1,7; 1,75]
- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Lösung.
  Toleranzintervall: [3,7 m; 3,8 m]

Aufgabe 3

Lachsbestand

a) **Lösungserwartung:**

$n_0 \approx 547$

Mögliche Interpretation:

Im gegebenen Kontext gibt n_0 denjenigen Lachsbestand an, bei dem die Anzahl der Lachse der Nachfolgegeneration unverändert bleibt.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall für den Lachsbestand: [547; 548]
- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Interpretation.

b) **Lösungserwartung:**

Mögliche Vorgehensweise:

$R'(n) = 0 \quad \Rightarrow \quad n_E = \frac{1}{b}$

$R\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b \cdot e}$

$\Rightarrow \quad E = \left(\frac{1}{b} \middle| \frac{a}{b \cdot e}\right)$

Möglicher Nachweis:

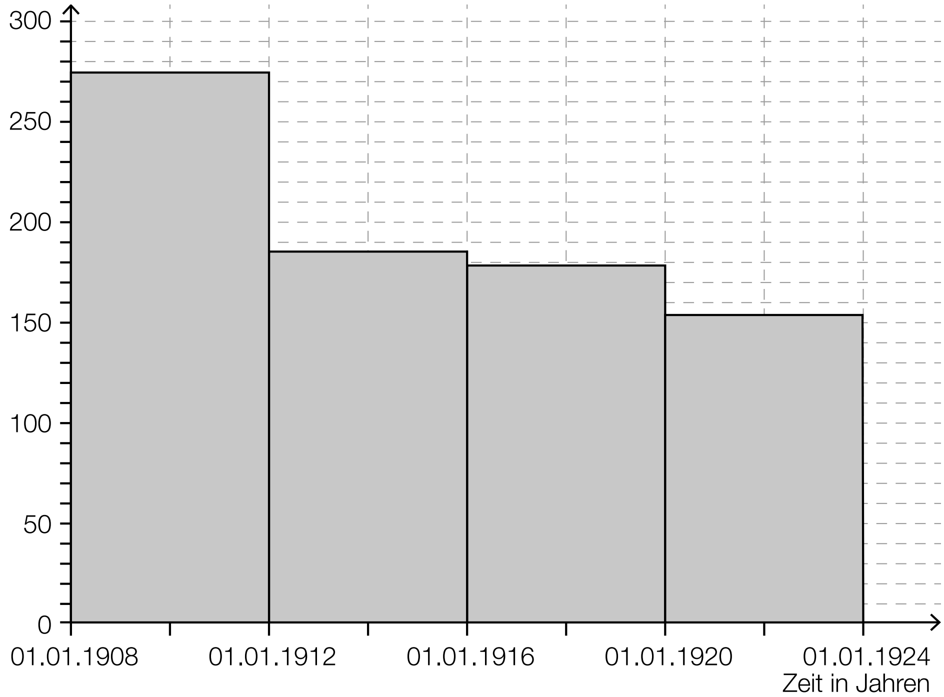
$R''\left(\frac{1}{b}\right) = -\frac{a \cdot b}{e} < 0$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad$ Maximumstelle

$\frac{a}{b \cdot e} > \frac{1}{b} \quad \Rightarrow \quad a > e$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Koordinaten von E und einen korrekten Nachweis.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) Lösungserwartung:



Zeitraum	berechneter Lachsbestand (in tausend Lachsen)
01.01.1912–31.12.1915	713
01.01.1916–31.12.1919	626
01.01.1920–31.12.1923	589

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für ein korrektes Histogramm.
– Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte in der Tabelle.

Aufgabe 4

Roulette

a) Lösungserwartung:

$P(X \geq 4) \approx 0{,}171$

Da die Spieldurchgänge voneinander unabhängig sind und somit die Ergebnisse der vorherigen Spielrunden keine Auswirkungen auf die nachfolgenden Spielrunden haben, kann der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht beeinflussen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall für $P(X \geq 4)$: [0,1; 0,2] bzw. [10 %; 20 %]
- Ein Punkt für die Angabe, dass der Spieler seine Gewinnchancen mit dieser Strategie nicht erhöhen kann, und eine korrekte Begründung.

b) Lösungserwartung:

$\left(\frac{19}{37}\right)^{10} \approx 0{,}00128$

Mögliche Vorgehensweise:

Bei zehn aufeinanderfolgenden verlorenen Spielrunden beträgt der Verlust € 10.230.
Endet die Spielserie mit einem Gewinn, so beträgt dieser € 10.
Erwartungswert für einen Gewinn: $(1 - 0{,}00128) \cdot 10 - 0{,}00128 \cdot 10\,230 \approx -3{,}11$
Ein negativer Erwartungswert zeigt, dass dieses Spiel langfristig gesehen für die Spielerin ungünstig ist.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,0012; 0,0013]
- Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.