

Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reife- und Diplomprüfung

BHS

12. Jänner 2017

Angewandte Mathematik

Teil A + Teil B (Cluster 8)

Korrekturheft

Korrektur- und Beurteilungsanleitung zur standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

(Detaillierte Informationen dazu finden Sie für den BHS-Bereich im Erlass mit der Geschäftszahl BMBF-17.100/0006-II/2015 des Bundesministeriums für Bildung und Frauen.)

Kompetenzbereiche

Im Beurteilungsmodell für die Angewandte Mathematik wird zwischen zwei Kompetenzbereichen unterschieden:

- *Kompetenzbereich A (KA)* umfasst die unabhängig¹ erreichbaren Punkte der Komplexitätsstufen 1 und 2 aus dem Kompetenzstufenraster.
- *Kompetenzbereich B (KB)* umfasst die abhängig erreichbaren Punkte und die Punkte der Komplexitätsstufen 3 und 4 aus dem Kompetenzstufenraster.

Die Summe der unabhängig erreichbaren Punkte aus den Komplexitätsstufen 1 und 2 (**KA**) stellt die „wesentlichen Bereiche“ eines Klausurheftes dar.

Beurteilung

Als Hilfsmittel für die Beurteilung wird ein auf ein Punktesystem basierender Beurteilungsschlüssel angegeben. Je nach gewichteter Schwierigkeit der vergebenen Punkte in den „wesentlichen Bereichen“ wird festgelegt, ab wann die „wesentlichen Bereiche überwiegend“ (Genügend) erfüllt sind, d. h., gemäß einem Punkteschema müssen Punkte aus dem Kompetenzbereich A unter Einbeziehung von Punkten aus dem Kompetenzbereich B in ausreichender Anzahl abhängig von der Zusammenstellung der Klausurhefte gelöst werden. Darauf aufbauend wird die für die übrigen Notenstufen zu erreichende Punktezahl festgelegt.

Nach der Punkteermittlung soll die Arbeit der Kandidatin/des Kandidaten nochmals ganzheitlich qualitativ betrachtet werden. Unter Zuhilfenahme des Punkteschemas und der ganzheitlichen Betrachtung ist von der Prüferin/vom Prüfer ein verbal begründeter Beurteilungsvorschlag zu erstellen, wobei die Ergebnisse der Kompetenzbereiche A und B in der Argumentation zu verwenden sind.

Beurteilungsschlüssel für die vorliegende Klausur:

| | |
|--------------|----------------|
| 43–48 Punkte | Sehr gut |
| 37–42 Punkte | Gut |
| 31–36 Punkte | Befriedigend |
| 21–30 Punkte | Genügend |
| 0–20 Punkte | Nicht genügend |

¹ Unabhängige Punkte sind solche, für die keine mathematische Vorleistung erbracht werden muss. Als mathematische Vorleistung gilt z. B. das Aufstellen einer Gleichung (unabhängiger Punkt) mit anschließender Berechnung (abhängiger Punkt).

Handreichung zur Korrektur der standardisierten schriftlichen Reife- und Diplomprüfung in Angewandter Mathematik

1. In der Lösungserwartung ist nur **ein möglicher** Lösungsweg angegeben. Andere richtige Lösungswege sind als gleichwertig anzusehen.
2. Der Lösungsschlüssel ist **verbindlich** anzuwenden unter Beachtung folgender Vorgangsweisen:
 - a. Punkte sind nur zu vergeben, wenn die abgefragte Handlungskompetenz in der Bearbeitung vollständig erfüllt ist.
 - b. Berechnungen ohne nachvollziehbaren Rechenansatz bzw. ohne nachvollziehbare Dokumentation des Technologieeinsatzes (verwendete Ausgangsparameter und die verwendete Technologiefunktion müssen angegeben sein) sind mit null Punkten zu bewerten.
 - c. Werden zu einer Teilaufgabe mehrere Lösungen bzw. Lösungswege von der Kandidatin/vom Kandidaten angeboten und nicht alle diese Lösungen bzw. Lösungswege sind korrekt, so ist diese Teilaufgabe mit null Punkten zu bewerten.
 - d. Bei abhängiger Punktevergabe gilt das Prinzip des Folgefehlers. Das heißt zum **Beispiel**: Wird von der Kandidatin/vom Kandidaten zu einem Kontext ein falsches Modell aufgestellt, mit diesem Modell aber eine richtige Berechnung durchgeführt, so ist der Berechnungspunkt zu vergeben, wenn das falsch aufgestellte Modell die Berechnung nicht vereinfacht.
 - e. Werden von der Kandidatin/vom Kandidaten kombinierte Handlungsanweisungen in einem Lösungsschritt erbracht, so sind alle Punkte zu vergeben, auch wenn der Lösungsschlüssel Einzelschritte vorgibt.
 - f. Abschreibfehler, die aufgrund der Dokumentation der Kandidatin/des Kandidaten als solche identifizierbar sind, sind ohne Punkteabzug zu bewerten, wenn sie zu keiner Vereinfachung der Aufgabenstellung führen.
 - g. Rundungsfehler können vernachlässigt werden, wenn die Rundung nicht explizit eingefordert ist.
 - h. Jedes Diagramm bzw. jede Skizze, die Lösung einer Handlungsanweisung ist, muss eine qualitative Achsenbeschriftung enthalten, andernfalls ist dies mit null Punkten zu bewerten.
 - i. Die Angabe von Einheiten kann bei der Punktevergabe vernachlässigt werden, sofern sie im Lösungsschlüssel nicht explizit eingefordert wird.
3. Sind Sie sich als Korrektor/in über die Punktevergabe nicht schlüssig, können Sie eine Korrekturanfrage an das BMB (via Telefon-Hotline oder Online-Helpdesk) stellen.

Aufgabe 1

Körpergröße

Möglicher Lösungsweg

- a) Berechnung mittels Technologieeinsatz:

$$\bar{x} = 178,6 \text{ cm}$$

$$\sigma = 7,499... \text{ cm} \approx 7,5 \text{ cm} \text{ bzw. } s = 7,904... \text{ cm} \approx 7,9 \text{ cm}$$

Messwerte, die für die fehlerhafte Eingabe in Frage kommen: 168, 169, 171, 174, 179

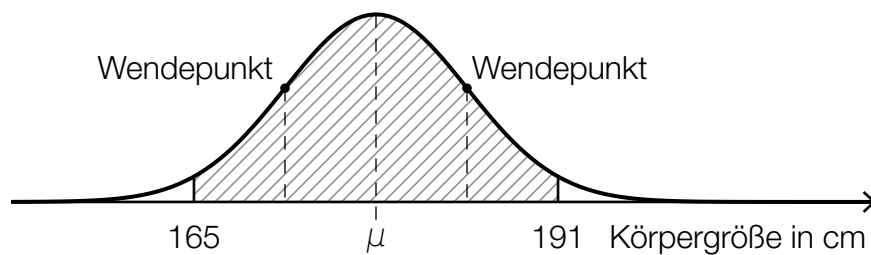
- b) X ... Körpergröße eines zufällig ausgewählten Studenten in cm

$$P(X \geq a) = 0,8$$

Berechnung von a mittels Technologieeinsatz:

$$a = 172,52... \text{ cm}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % wird eine Körpergröße von rund 172,5 cm überschritten.



Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für die richtige Berechnung des arithmetischen Mittelwerts und der Standardabweichung (KA)
1 × C: für die richtige Angabe aller Werte, die für die fehlerhafte Eingabe in Frage kommen (KB)
- b) 1 × B: für die richtige Berechnung der Körpergröße (KA)
1 × A: für das richtige Veranschaulichen der Wahrscheinlichkeit in der gegebenen Abbildung (Intervall: $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$) (KA)

Aufgabe 2

Vernetzte Welt

Möglicher Lösungsweg

a) $F(t) = F_0 \cdot a^t$

$$\begin{aligned} F_0 &= 5,5 \\ 820 &= 5,5 \cdot a^6 \Rightarrow a = \sqrt[6]{\frac{820}{5,5}} = 2,30272... \approx 2,3027 \\ F(t) &= 5,5 \cdot 2,3027^t \end{aligned}$$

b) 12 Jahre entsprechen der 8-fachen Verdoppelungszeit $\left(\frac{12}{1,5} = 8\right)$.
 $2^8 = 256$

Die Behauptung ist daher falsch.

c) Binomialverteilung:
 X ... Anzahl der Bauteile, die innerhalb eines Jahres ausfallen
 $n = 10, p = 0,02$

Berechnung mittels Technologieeinsatz: $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 0,1829... \approx 18,3 \%$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Funktionsgleichung (KA)
- b) 1 × D: für den richtigen Nachweis (KA)
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Wahrscheinlichkeit (KA)

Aufgabe 3

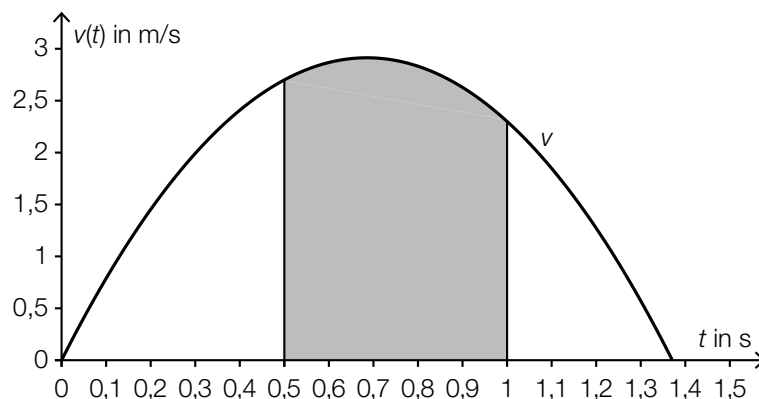
Skatepark

Möglicher Lösungsweg

a) $A = (2 \cdot a + b) \cdot h - b \cdot r - \frac{r^2 \cdot \pi}{2}$

$$1 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} = \frac{10^6 \text{ g}}{10^6 \text{ cm}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

b)



$v'(0,3)$ ist die Beschleunigung der Skaterin zum Zeitpunkt $t = 0,3$ s.

c) $\bar{v} = \frac{1,5}{0,6} = 2,5$

Toleranzbereich für \bar{v} : $[2,1; 2,9]$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt rund 2,5 m/s.

d) $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
 $f'(x) = 2 \cdot a \cdot x + b$

$$f(0) = 160$$

$$f(20) = 0$$

$$f'(0) = \tan(-80^\circ)$$

$$c = 160$$

oder: $400 \cdot a + 20 \cdot b + c = 0$

$$b = \tan(-80^\circ)$$

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Formel (KA)
 1 × D: für den richtigen Nachweis (KA)
- b) 1 × A: für das richtige Veranschaulichen des Weges (KA)
 1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
- c) 1 × B: für das richtige Ermitteln der mittleren Geschwindigkeit im Toleranzbereich $[2,1; 2,9]$ (KA)
- d) 1 × A1: für das richtige Aufstellen der Gleichungen mithilfe der Koordinaten der Punkte A und B (KA)
 1 × A2: für das richtige Aufstellen der Gleichung mithilfe des gegebenen Winkels (KB)

Aufgabe 4

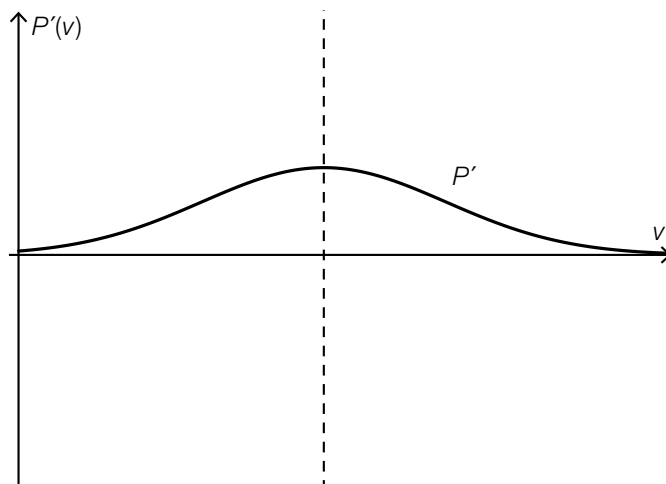
Windräder

Möglicher Lösungsweg

a) $A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \Rightarrow P_N = c \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$
 $0,85 = 0,169 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$
 $d = 80,02 \dots$

Der Durchmesser beträgt rund 80,0 m.

b) zum Beispiel:



c) $0,5 = 0,0175 \cdot v^2 - 0,0796 \cdot v + 0,0391$

$v_1 = 7,887 \dots$
 $(v_2 = -3,339 \dots)$

Eine Leistung von 0,5 MW wird bei einer Windgeschwindigkeit von rund 7,89 m/s erzielt.

Es wird die relative Änderung der Leistung des Windrads bei einem Anstieg der Windgeschwindigkeit von 7 m/s auf 8 m/s ermittelt.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für die richtige Berechnung des Durchmessers (KA)
- b) 1 × A1: für die richtige Darstellung (Wendestelle von P als Maximumstelle von P') (KB)
1 × A2: für die richtige Darstellung (Vorzeichen der Ableitungsfunktion $P'(P'(v) > 0)$ und Monotonieverhalten der Ableitungsfunktion P') (KB)
Das Krümmungsverhalten von P' ist für die Punktevergabe nicht relevant.
- c) 1 × B: für die richtige Berechnung der Windgeschwindigkeit (KA)
1 × C: für die richtige Beschreibung im gegebenen Sachzusammenhang (KB)

Aufgabe 5

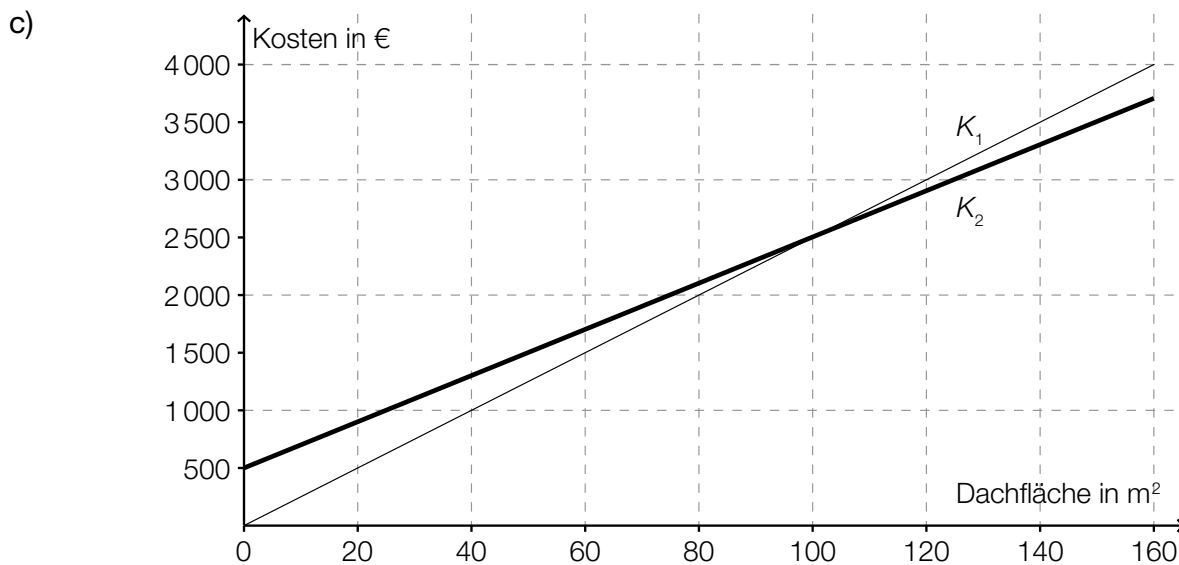
Hausbau

Möglicher Lösungsweg

a) $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{\frac{a}{2}}\right)$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{2,2}{3,5}\right) = 32,15...^\circ \approx 32,2^\circ$$

b) $b = 6,5 \cdot \cos(38^\circ) - 4,25$
 $b = 0,872... \text{ m} \approx 0,87 \text{ m}$



Aus der Abbildung entnimmt man, dass für 120 m² Dachfläche das Angebot 2 kostengünstiger ist.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × A: für das richtige Erstellen der Formel (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Winkels (KB)
- b) 1 × A: für den richtigen Ansatz zur Berechnung von b (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung von b (KB)
- c) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Graphen (KA)
1 × C: für das richtige Ablesen (KB)

Aufgabe 6 (Teil B)

Fairtrade

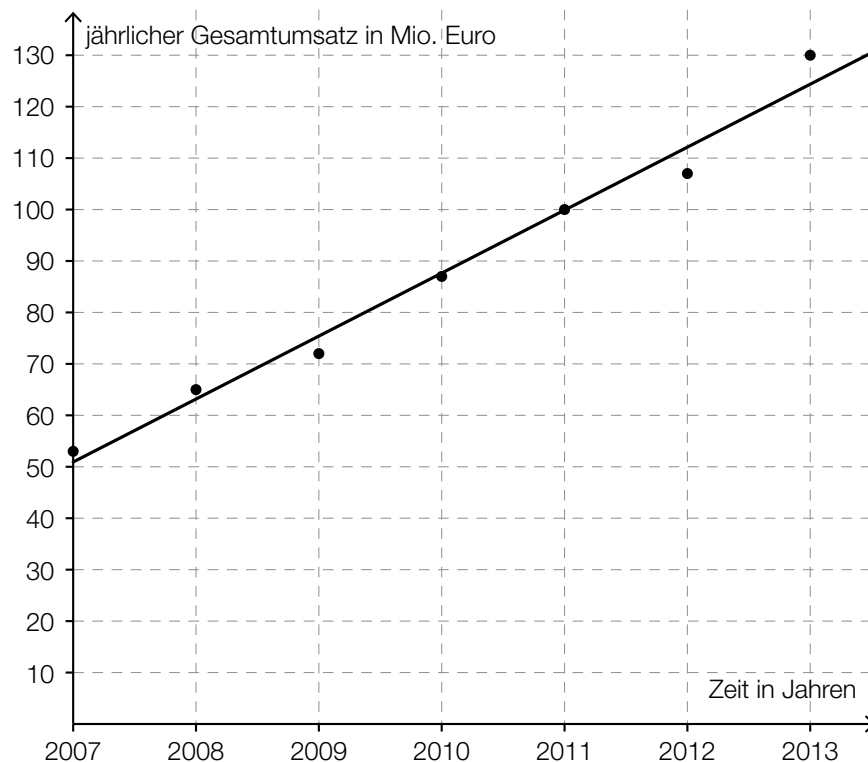
Möglicher Lösungsweg

- a) Ermitteln der Regressionsfunktion mittels Technologieeinsatz:

$$f(t) = 12,25 \cdot t + 50,96 \quad (\text{Koeffizienten gerundet})$$

t ... Zeit in Jahren ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2007)

$f(t)$... jährlicher Gesamtumsatz zur Zeit t in Mio. Euro



Ermitteln des Korrelationskoeffizienten mittels Technologieeinsatz: $r \approx 0,991$

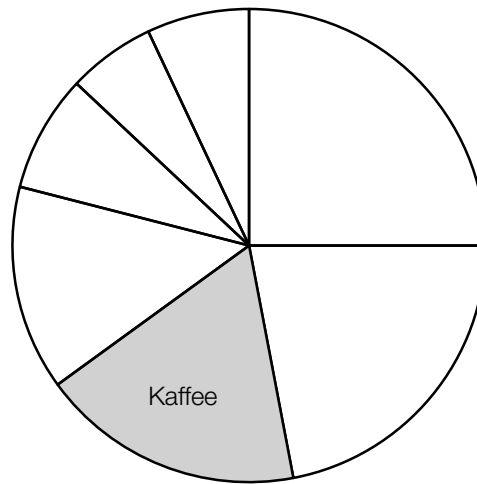
Da der Korrelationskoeffizient sehr nahe bei 1 liegt, kann ein starker linearer Zusammenhang vermutet werden.

$$f(13) = 210,2...$$

Gemäß diesem Modell wird der jährliche Gesamtumsatz im Jahr 2020 rund 210 Millionen Euro betragen.

- b) Gemäß diesem Modell steigt der jährliche Gesamtumsatz pro Jahr um 13,6 Millionen Euro.

c)



$$\frac{24}{107} = 0,2242... \approx 22,4 \%$$

Der Umsatz an Süßwaren betrug im Jahr 2012 rund 22,4 Prozent des Gesamtumsatzes.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B1: für das richtige Ermitteln der Gleichung der Regressionsfunktion (KA)
1 × B2: für das richtige Einzeichnen des Graphen der Regressionsfunktion (KB)
1 × D: für die richtige Beurteilung mithilfe des Korrelationskoeffizienten (KB)
1 × B3: für die richtige Berechnung des jährlichen Gesamtumsatzes im Jahr 2020 (KB)
- b) 1 × C: für die richtige Interpretation im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
- c) 1 × C: für das richtige Kennzeichnen des Sektors, der den Umsatz an Kaffee darstellt (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des Prozentsatzes (KA)

Aufgabe 7 (Teil B)

Druckmaschine

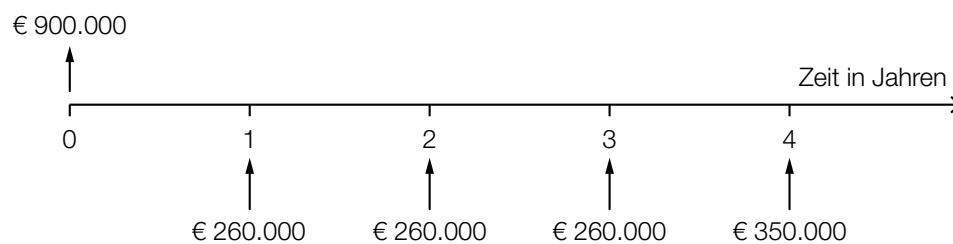
Möglicher Lösungsweg

a)

| Jahr | Einnahmen in € | Ausgaben in € | Rückflüsse in € |
|------|----------------|---------------|-----------------|
| 0 | | 1 200 000 | -1 200 000 |
| 1 | 360 000 | 88 000 | 272 000 |
| 2 | 360 000 | 88 000 | 272 000 |
| 3 | 360 000 | 88 000 | 272 000 |
| 4 | 360 000 | 88 000 | 272 000 |

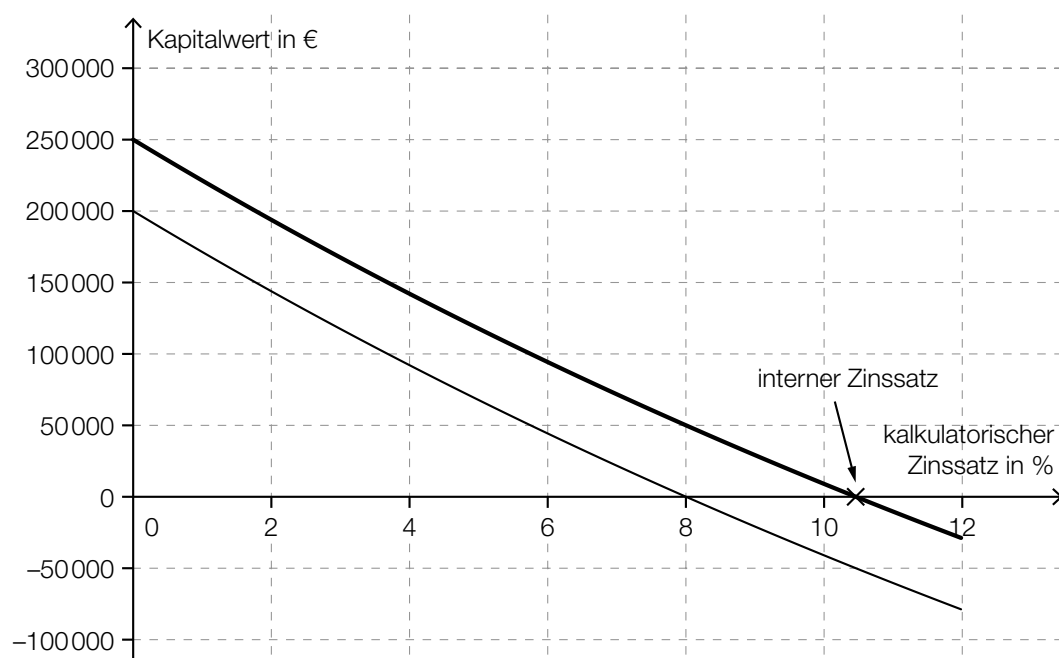
Da die Summe der positiven Rückflüsse (€ 1.088.000) kleiner als die Anschaffungskosten ist, ist diese Investition sicherlich nicht vorteilhaft.

b) kalkulatorischer Zinssatz: 7,5 %



Der Kapitalwert C_0 ist positiv, daher ist diese Investition vorteilhaft.

c)



d) Endwert E der wiederveranlagten Rückflüsse:

$$E = 220\,000 \cdot 1,035^3 + 220\,000 \cdot 1,035^2 + 220\,000 \cdot 1,035 + 280\,000 = 987\,287,4\dots$$

modifizierter interner Zinssatz i_{mod} :

$$i_{\text{mod}} = \sqrt[4]{\frac{987\,287,4\dots}{800\,000}} - 1 = 0,0539\dots \approx 5,4 \%$$

Da der modifizierte interne Zinssatz höher als der Wiederveranlagungszinssatz ist, ist diese Investition vorteilhaft.

Lösungsschlüssel

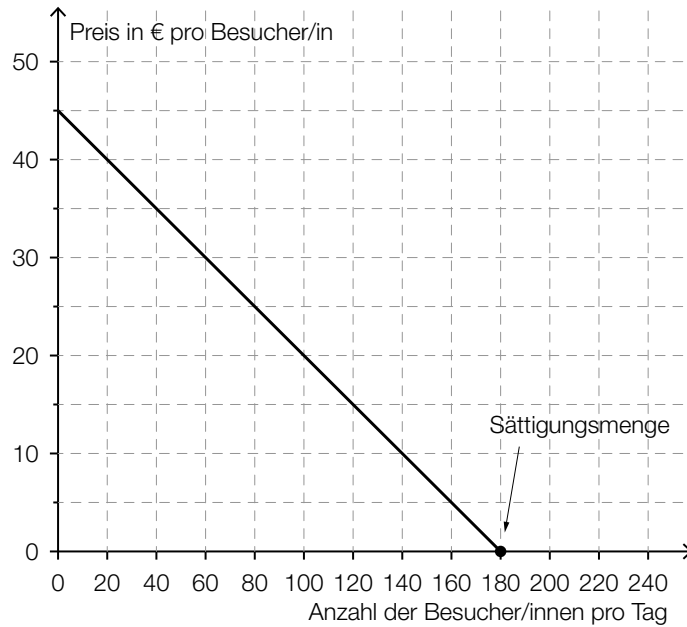
- a) 1 × A: für das richtige Übertragen der Einnahmen, Ausgaben und Rückflüsse in die vorgegebene Tabelle (KA)
1 × D: für die richtige Erklärung zur Vorteilhaftigkeit der Investition (KB)
- b) 1 × C1: für das richtige Ablesen des kalkulatorischen Zinssatzes (KA)
1 × A: für das richtige Darstellen des Zahlungsstroms auf einer Zeitachse (KB)
1 × C2: für die richtige Interpretation des Kapitalwerts im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit der Investition (KA)
- c) 1 × A: für das richtige Skizzieren der Kapitalwertkurve (KA)
1 × C: für das richtige Markieren des internen Zinssatzes in der neu skizzierten Kapitalwertkurve (KB)
- d) 1 × B: für die richtige Berechnung des modifizierten internen Zinssatzes (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation des modifizierten internen Zinssatzes im Hinblick auf die Vorteilhaftigkeit der Investition (KB)

Aufgabe 8 (Teil B)

Kunst und Kaffee

Möglicher Lösungsweg

a)



- b) Gemäß dem Modell steigt die Besucheranzahl um 1 Person pro Tag, wenn der Preis um € 0,25 pro Person reduziert wird (Steigung der Preisfunktion der Nachfrage). Daher muss der Preis um € 2,50 pro Person gesenkt werden, wenn man 10 Besucher/innen mehr pro Tag gewinnen möchte.

c) $E(x) = p(x) \cdot x = -0,25 \cdot x^2 + 45 \cdot x$

x ... Anzahl der Besucher/innen pro Tag

$E(x)$... Erlös bei x Besucherinnen und Besuchern in €

Die erste Koordinate des Scheitelpunkts gibt an, bei welcher Anzahl an Besucherinnen und Besuchern pro Tag der Erlös maximal ist, die zweite Koordinate gibt an, wie hoch dieser maximale Erlös ist.

$$G(x) = E(x) - K(x) = -0,3 \cdot x^2 + 33 \cdot x - 500$$

Lösen der Gleichung $G'(x) = 0$:

$$-0,6 \cdot x + 33 = 0 \Rightarrow x = 55$$

$$G(55) = 407,50$$

Der maximale Gewinn beträgt € 407,50 pro Tag.

Eine Änderung der Fixkosten entspricht der Addition bzw. Subtraktion einer konstanten Funktion zur Gewinnfunktion. Sie bewirkt eine vertikale Verschiebung des Graphen, wodurch sich die Maximumstelle nicht verändert.

oder:

Die Stelle des maximalen Gewinns ist die Nullstelle der 1. Ableitung der Gewinnfunktion. Die Fixkosten sind in der Gewinnfunktion ein konstanter Summand, der beim Bilden der 1. Ableitung wegfällt. Folglich haben sie auch keinen Einfluss auf die Stelle des maximalen Gewinns.

Lösungsschlüssel

- a) 1 × B: für das richtige Einzeichnen des Funktionsgraphen (KA)
1 × C: für das richtige Markieren der Sättigungsmenge (KB)
- b) 1 × C: für das richtige Ermitteln der Preisreduktion (KA)
- c) 1 × A: für das richtige Aufstellen der Funktionsgleichung (KA)
1 × C: für die richtige Interpretation der beiden Koordinaten des Scheitelpunkts im gegebenen Sachzusammenhang (KA)
1 × B: für die richtige Berechnung des maximalen Gewinns (KB)
1 × D: für die richtige Erklärung (KA)