Standardisierte kompetenzorientierte
schriftliche Reifeprüfung

AHS

15. Jänner 2016

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

BMBF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Quadratische Gleichungen und ihre Lösungen

a) Lösungserwartung:

$p = -\left(\frac{1}{z} + z\right)$

$q = \frac{1}{z} \cdot z = 1$, q ist somit unabhängig von z

Die reziproke quadratische Gleichung hat genau eine Lösung, wenn $z = 1$ oder $z = -1$ ist.
Minimumstelle für $z = 1$: bei $x = 1$
Minimumstelle für $z = -1$: bei $x = -1$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Parameter p und q in Abhängigkeit von z. Äquivalente Gleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für die Angabe der richtigen Werte von z und der jeweils richtigen Minimumstelle.

b) Lösungserwartung:

$x^2 + p \cdot x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1}$

Da der Ausdruck $\frac{p^2}{4}$ für alle $p \in \mathbb{R}$ größer oder gleich null ist, ist der Ausdruck unter der Wurzel (die Diskriminante) positiv. Somit gibt es genau zwei Lösungen in $\mathbb{R}$.

Mögliche Begründungen:

Jeder mögliche Funktionsgraph von f verläuft durch den Punkt $(0|-1)$ und ist eine nach oben offene Parabel. Somit hat jede Funktion f genau eine positive und eine negative Nullstelle. Diese Werte entsprechen genau den Lösungen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$.

oder:

Es gilt: $\frac{p^2}{4} + 1 > \frac{p^2}{4}$ und somit auch $\sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} > \frac{p}{2}$.

Daraus folgt: $-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} > 0$ und $-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + 1} < 0 \Rightarrow$ Es gibt immer genau eine positive und eine negative Lösung in $\mathbb{R}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte rechnerische Begründung.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür, dass die Parabel genau eine positive und eine negative Nullstelle hat.

c) Lösungserwartung:

$$\int_{-1}^{1}\left(x^2 + p \cdot x + p - \frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{px^2}{2} + px - \frac{x}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = -6 \;\Rightarrow\; p = -3$$

Für $p = -3$ ergibt die gegebene Gleichung keine wahre Aussage, weil für eine solche Funktion der Graph der Funktion f achsensymmetrisch liegen müsste, damit die Gleichung eine wahre Aussage ergibt, und das ist nur für $p = 0$ der Fall.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für den korrekten Wert von p.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die korrekte Angabe, ob die Aussage zutrifft, und eine korrekte Begründung.
  Andere korrekte Begründungen, zum Beispiel durch Rechnung, sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 2

Design-Center Linz

a) Lösungserwartung:

$$f(x) = -\frac{13}{1\,296} \cdot x^2 + 13$$

oder:

$$f(x) \approx -0{,}01 \cdot x^2 + 13$$

Durch den angegebenen Term wird das (umbaute) Volumen des Design-Centers berechnet.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für das Aufstellen einer korrekten Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Deutung.

b) Lösungserwartung:

2003 würden die Baukosten für das Design-Center ca. € 93,1 Mio. betragen.

Korrekte Vorgehensweise:
$K \cdot 1{,}032 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}019 \cdot 1{,}011 = K \cdot a^5 \;\Rightarrow$
$a = \sqrt[5]{1{,}032 \cdot 1{,}023 \cdot 1{,}021 \cdot 1{,}019 \cdot 1{,}011} \;\Rightarrow\; a \approx 1{,}02118$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Berechnung.
  Toleranzintervall: [€ 93 Mio.; € 94 Mio.]
- Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Vorgehensweise. Die numerische Berechnung des Wertes muss dabei nicht erfolgen.

Aufgabe 3

Schiefer Turm von Pisa

a) **Lösungserwartung:**

Zeit-Weg-Funktion $h(t) = 45 - 5t^2$
$0 = 45 - 5t^2$
$t_1 = 3$
Geschwindigkeitsfunktion $v(t) = h'(t) = -10t$
$v(3) = h'(3) = -30$
Der Betrag der Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Aufpralls beträgt 30 m/s.

Die Geschwindigkeitsfunktion ist eine lineare Funktion, die im Intervall [0 s; 3 s] von $v(0) = h'(0) = 0$ ausgehend monoton fallend ist – daher wird der Betrag der Geschwindigkeit immer größer.

oder:

Die Bewegung ist gleichmäßig beschleunigt – das heißt, der Betrag der Geschwindigkeit ist monoton wachsend.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit „m/s" nicht angeführt sein muss und auch –30 m/s als korrekt zu werten ist.
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

b) **Lösungserwartung:**

Die Steigung der Sekante beträgt –15.
Das bedeutet, dass der Betrag der Durchschnittsgeschwindigkeit bei der Bewegung des Körpers im Zeitraum von 0 Sekunden bis 3 Sekunden 15 m/s beträgt.

Mögliche Interpretation:
Der Betrag der Momentangeschwindigkeit ist zum Zeitpunkt $t = 1{,}5$ gleich groß wie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Körpers im Intervall [0 s; 3 s].

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Bestimmung der Sekantensteigung und eine (sinngemäß) korrekte Deutung.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

Aufgabe 4

Reaktionstest

a) Lösungserwartung:

$\overline{t} = 25$ s
$s_t \approx 4{,}9$ s

Mögliche Angaben der Werte für t_{11} und t_{12}:

$t_{11} = 23$ s, $t_{12} = 27$ s

oder:

$t_{11} = 24$ s, $t_{12} = 26$ s

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die korrekten Werte von $\overline{t}$ und s_t, wobei die Einheit nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall für s_t: [4,6 s; 5,0 s]
- Ein Punkt für eine geeignete Angabe von je einem Wert für t_{11} und t_{12}, wobei die Einheit „s" nicht angeführt sein muss und wobei allgemein gilt: Eine der beiden Zeiten muss den Wert $25 + x$, die andere den Wert $25 - x$ annehmen, wobei $x \in [0; s_t)$. Der Punkt ist auch dann zu geben, wenn die Werte für t_{11} und t_{12} auf der Basis falsch berechneter Werte von $\overline{t}$ bzw. s_t ermittelt werden, der Lösungsweg aber prinzipiell korrekt ist.

b) Lösungserwartung:

Mögliches Argument:
Durch die beiden „Ausreißer" 32,8 und 35,4 wird das arithmetische Mittel stark nach oben verzerrt. Das alternative Zentralmaß *Median* ist gegenüber Ausreißern robust.

Die Aussage ist so nicht korrekt, da aus dem Kastenschaubild nicht hervorgeht, ob es mehrere Reaktionszeiten gibt, die genau 22,4 s betragen und die im zweiten Viertel der geordneten Datenreihe liegen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein richtiges Argument und die Angabe des Medians als alternatives Zentralmaß.
- Ein Punkt für eine korrekte Entscheidung und eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

c) Lösungserwartung:

Damit die Zufallsvariable H als binomialverteilt angesehen werden kann, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Wahrscheinlichkeit für eine fehlerhafte Reaktion muss für alle 20 Reaktionen gleich hoch sein (darf also bei bestimmten Bildern nicht höher oder niedriger sein als bei anderen Bildern).
2. Die Reaktionen müssen voneinander unabhängig sein. (Ob eine vorangegangene Reaktion richtig oder falsch war, darf keinen Einfluss auf die Richtigkeit einer nachfolgenden Reaktion haben.)
3. Die Reaktionen können nur entweder fehlerhaft oder korrekt sein.

oder:

Jeder einzelne Versuch wird unter denselben Bedingungen durchgeführt.

$P(H > 2) = 1 - [P(H = 0) + P(H = 1) + P(H = 2)] \approx 0{,}595$

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die (sinngemäß) richtige Angabe erforderlicher kontextbezogener Voraussetzungen für die Verwendung der Binomialverteilung, wobei der 3. Punkt nicht angeführt sein muss.
- Ein Punkt für die richtige Lösung. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (z. B. in Prozent) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall: [0,59; 0,61]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

Aufgabe 5

Überraschungseier

a) Lösungserwartung:

$h = 0{,}03$

$0{,}03 \pm 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}03 \cdot (1 - 0{,}03)}{500}} \approx 0{,}03 \pm 0{,}013 \;\Rightarrow\; [0{,}017;\, 0{,}043]$

Mögliche Maßnahme:
Durch eine Erhöhung der Anzahl der kontrollierten Schokoladeneier auf mehr als 500 kann eine Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls erreicht werden.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,017; 0,02]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,042; 0,05]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe der entsprechenden Änderung. Andere angeführte korrekte Maßnahmen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

$O'(r) = 4r\pi - 72 \cdot r^{-2} = 4r\pi - \frac{72}{r^2}$

$4r\pi - \frac{72}{r^2} = 0$

$r^3 = \frac{18}{\pi}$

$r = \sqrt[3]{\frac{18}{\pi}} \;\Rightarrow\; r \approx 1{,}79 \text{ cm}$

$O(1{,}79) \approx 60{,}4 \text{ cm}^2$

$O''(r) = 4\pi + 144 \cdot r^{-3} = 4\pi + \frac{144}{r^3}$

$O''(1{,}79) \approx 37{,}7 > 0$, daher liegt ein lokales Minimum vor.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Berechnung der minimalen Oberfläche, wobei die Einheit „cm^2“ nicht angeführt sein muss.
  Toleranzintervall: [60 cm^2; 61 cm^2]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für einen korrekten Nachweis. Andere angeführte korrekte Nachweise sind ebenfalls als richtig zu werten.