Standardisierte kompetenzorientierte schriftliche Reifeprüfung

AHS

21. September 2015

Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen

Bundesinstitut bifie

Aufgabe 1

Die Bedeutung der Parameter in der Funktionsgleichung einer Polynomfunktion

a) Lösungserwartung:

$7 = (-1)^2 + b \cdot (-1) + 16 \;\Rightarrow\; -10 = -b$
$b = 10$

$f'(-1) = 2 \cdot (-1) + 10 = 8$

Lösungsschlüssel:

– Ein Ausgleichspunkt für die korrekte Angabe des Parameters b.
– Ein Punkt für die korrekte Angabe der Steigung der Funktion f an der Stelle $x = -1$.

b) Lösungserwartung:

$f'(x) = 2 \cdot x + b \;\Rightarrow\; 2 \cdot x_E + b = 0$

oder:

$x_E = -\frac{b}{2}$

$f\left(-\frac{b}{2}\right) = -9 \;\Rightarrow\; \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{2} + 16 = -9$

$\Rightarrow\; b = \pm 10$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für einen korrekten Zusammenhang zwischen x_E und b.
– Ein Punkt für die Angabe der beiden korrekten Werte für b.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Bestimmung der Tiefpunkte:

- Tiefpunkt des Graphen von f liegt auf der x-Achse $\Rightarrow$ Die Funktion f besitzt genau eine reelle Nullstelle. $f(x) = 0 \;\Rightarrow\; {}_1x_2 = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 16}$
  $\Rightarrow\; \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 16 = 0 \;\Rightarrow\; b_1 = -8 \quad b_2 = 8$
  $\Rightarrow\; x_1 = 4 \quad x_2 = -4 \;\Rightarrow\; T_1 = (4|0),\ T_2 = (-4|0)$
- Tiefpunkt des Graphen von f liegt auf der senkrechten Achse
  $\Rightarrow\; b = 0 \;\Rightarrow\; T_3 = (0|16)$

$g(x) = a \cdot x^2 + c$
$g(0) = 16 \quad c = 16$
$g(4) = 0 \;\Rightarrow\; 16 \cdot a + 16 = 0 \;\Rightarrow\; a = -1 \;\Rightarrow\; g(x) = -x^2 + 16$

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die Angabe aller drei Tiefpunkte.
– Ein Punkt für die Angabe einer korrekten Funktionsgleichung der Funktion g. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

d) Lösungserwartung:

$f(2) = 2^2 + 2 \cdot b + 16 = 2 \cdot b + 20$

Die Lage der Tangente ergibt sich aus $f(2) = f'(2) \cdot 2 + d$.
Daraus folgt: $2 \cdot b + 20 = (4 + b) \cdot 2 + d$ und daraus $d = 12$, daher ist die Lage des Punktes R unabhängig von b.

Lösungsschlüssel:

– Ein Punkt für die korrekte Angabe des Funktionswertes $f(2)$ in Abhängigkeit von b.
– Ein Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

Aufgabe 2

Mehrkampf

a) Lösungserwartung:

$P = 12{,}91 \cdot (70{,}24 - 4)^{1{,}1} \approx 1\,300{,}64$

Eine mögliche Interpretation von b:
b beschreibt die (Mindest-)Leistung (Wurfweite), die übertroffen werden muss, um Punkte zu erhalten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [1300; 1301]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Andere korrekte Interpretationen sind ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

$P(M) = 1{,}84523 \cdot (M - 75)^{1{,}348}$
$P'(M) = 2{,}48737004 \cdot (M - 75)^{0{,}348}$
$P'(209) \approx 13{,}68$

Der Wert der Steigung dieser Tangente gibt näherungsweise an, um wie viel sich die Punktezahl bei dieser Leistung pro Zentimeter Sprunghöhenänderung verändert.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [13; 14]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation. Andere korrekte Interpretationen sind ebenfalls als richtig zu werten.

c) Lösungserwartung:

$P_{1,\text{ linear}}(M) = -235{,}21 \cdot M + 3\,473{,}97$

$P_{1,\text{ linear}}(M) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; M \approx 14{,}77$

Um Punkte zu erhalten, dürfte die Laufzeit maximal 14,77 s betragen.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine korrekte Funktionsgleichung. Äquivalente Funktionsgleichungen sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für k: [–236; –235]
  Toleranzintervall für d: [3473; 3474]
- Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit nicht angegeben werden muss.
  Toleranzintervall: [14,7 s; 15 s]

d) Lösungserwartung:

mittlere Änderungsrate zwischen $M = 100$ und $M = 150$: –15,14 Punkte pro Sekunde
mittlere Änderungsrate zwischen $M = 150$ und $M = 200$: –9,82 Punkte pro Sekunde

Da die Funktion linksgekrümmt ist, sind die Änderungsraten bei kürzeren Laufzeiten (betragsmäßig) größer als bei längeren Laufzeiten.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die korrekte Angabe beider Werte.
  Toleranzintervalle: [–16; –14] und [–10; –9]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Andere korrekte Begründungen sind ebenfalls als richtig zu werten.

Aufgabe 3

Lorenz-Kurve

a) Lösungserwartung:

$100 - f(80) = 38{,}816$

Es entfallen ca. 38,8 % des Gesamteinkommens auf die reichsten 20 % der Haushalte.

$f(x) = 4 \cdot 10^{-7} \cdot x^4 + 2 \cdot 10^{-3} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-1} \cdot x$
$f'(x) = 1{,}6 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + 4 \cdot 10^{-3} \cdot x + 4 \cdot 10^{-1}$
$f''(x) = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-3}$

Die Funktion f ist linksgekrümmt, weil: $f''(x) = 4{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot x^2 + 4 \cdot 10^{-3} > 0$ für alle $x \in [0; 100]$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervalle: [38 %; 39 %] bzw. [0,38; 0,39]
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

b) Lösungserwartung:

$$A_1 = \int_0^{100} f(x)\,\mathrm{d}x = 3466{,}\overline{6}$$

$$A_2 = \frac{100 \cdot 100}{2} = 5000$$

$$\frac{A_2 - A_1}{A_2} = \frac{1533{,}\overline{3}}{5000} = 0{,}30\overline{6} \approx 0{,}31$$

Der Gini-Koeffizient für das Land mit der Lorenz-Kurve f beträgt 0,31.

$$\frac{0}{5000} = 0$$

Der Wert des Gini-Koeffizienten für einen Staat, in dem alle Haushalte gleich viel verdienen, beträgt 0.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung.
  Toleranzintervall: [0,30; 0,31]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

Aufgabe 4

FSME-Impfung

a) Lösungserwartung:

$0{,}05 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}0045$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,45 %.

In einem Risikogebiet ist schlimmstenfalls jede zwanzigste Zecke mit FSME infiziert, d. h., der Anteil infizierter Zecken ist bis zu 1 000-mal höher als in einem Nichtrisikogebiet.
Daher ändert sich die berechnete Wahrscheinlichkeit für eine FSME-Erkrankung um den Faktor $\frac{1}{1\,000}$.

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervalle: [0,4 %; 0,5 %] bzw. [0,004; 0,005]
- Ein Punkt für die richtige Lösung sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung. Bei einer entsprechenden (sinngemäß) korrekten Begründung ist der Faktor 1 000 ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

Da im Durchschnitt 1 % der Erkrankungen tödlich verlaufen, war nur ein Todesfall (1 % von 113) zu erwarten. Vier Todesfälle sind daher mehr, als zu erwarten war.

Mögliche Berechnung:
$n = 400$, $h = 0{,}16$
$2 \cdot \phi(z) - 1 = 0{,}95 \;\Rightarrow\; z = 1{,}96$

$$h \pm z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} = 0{,}16 \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}16 \cdot (1-0{,}16)}{400}} \approx 0{,}16 \pm 0{,}036 \;\Rightarrow\; [0{,}124; 0{,}196]$$

Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die richtige Antwort sowie eine (sinngemäß) korrekte Begründung.
- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Andere Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
  Toleranzintervall für den unteren Wert: [0,12; 0,13]
  Toleranzintervall für den oberen Wert: [0,19; 0,2]
  Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.