

# Seminararbeit

## Verbesserung der Pfad- und Trajektorienplanung am UR5

Vorgelegt von:	Nik Julin Nowoczyn
Matrikelnummer:	8529776
Studiengang:	Ingenieurinformatik
Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Johannes Schilp
Betreuer:	Ludwig Vogt
Ausgabedatum:	01. 10. 2022
Abgabedatum:	31. 03. 2023



# Aufgabenstellung



# Kurzfassung



# Inhaltsverzeichnis

<b>Aufgabenstellung</b>	<b>I</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>III</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>IX</b>
<b>1 Räumliche Beschreibung (optional ??)</b>	<b>1</b>
1.1 Koordinatensysteme . . . . .	1
1.2 Translation . . . . .	1
1.3 Rotation . . . . .	1
1.4 Homogene Transformationsmatrix . . . . .	1
<b>2 Direkte Kinematik</b>	<b>3</b>
2.1 DH-Konvention . . . . .	3
2.2 Unified Robot Description Format . . . . .	6
2.3 Beschreibung des UR5 . . . . .	6
2.4 Geschwindigkeitskinematik . . . . .	7
<b>3 Inverse Kinematik</b>	<b>9</b>
3.1 Analytische Lösung . . . . .	9
3.2 Geometrische Lösung . . . . .	9
3.3 Singularitäten . . . . .	15
<b>4 Pfadplanung</b>	<b>17</b>
4.1 Konfigurationsraum . . . . .	17
4.2 Berechnungsmethoden . . . . .	18
4.2.1 Kürzester Weg . . . . .	18
4.2.2 Zellendekomposition . . . . .	18
4.2.3 Sampling-Verfahren . . . . .	18
4.3 Constraints und Praxisbezug . . . . .	18
<b>5 Trajektorienplanung</b>	<b>19</b>
5.1 Profile . . . . .	19

5.2	Synchronität . . . . .	19
5.3	Mehrsegment-Trajektorien . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>21</b>
	<b>Literatur</b>	<b>23</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Denavit-Hartenberg-Konvention (DH-Konvention) zwischen zwei Gelenken [4] . . . . .	5
2.2	Achsen des UR5-Roboters mit Angabe der DH-Parameter (links) und Visualisierung der Nullposition (rechts) [5] . . . . .	7
3.1	Berechnung von $\theta_1$ , Betrachtung von Gelenk eins bis fünf [5] . . . . .	11
3.2	Berechnung von $\theta_5$ , Betrachtung von allen Gelenken [5] . . . . .	11
3.3	Berechnung von $\theta_6$ mit Sphärischen Koordinaten, für Koordinatensystembeschreibung siehe Abbildung 2.2 [5] . . . . .	12
3.4	Berechnung von $\theta_4$ durch Vereinfachung als zweidimensionales System und Bestimmung der Transformation zwischen Gelenk 1 und Gelenk 4 [5]	13



# Tabellenverzeichnis

2.1	DH-Parameter des UR5e Roboters von Universal Robots [7]	7
2.2	Beschreibung der dynamischen Eigenschaften des UR5e Roboters von Universal Robots [7]	8



# Abkürzungsverzeichnis

**DH-Konvention** Denavit-Hartenberg-Konvention

**URDF** Unified Robot Description Format

**ROS** das Robot Operating System



# 1 Räumliche Beschreibung (optional ??)

ggf kürzen und/oder am Ende ergänzen ??

## 1.1 Koordinatensysteme

## 1.2 Translation

## 1.3 Rotation

Euler / current frame, Fixed Frame, Axis-Angle, Quaternion

## 1.4 Homogene Transformationsmatrix





## 2 Direkte Kinematik

Die direkte Kinematik ist dafür verantwortlich aus den verschiedenen Winkeln und Positionen der Gelenke die Rotation und Position des Endeffektors im Raum zu berechnen. Dazu wird zunächst in jedem Gelenk ein Koordinatenursprung gelegt, der eine Nullstellung jedes Gelenks beschreibt. Um alle Gelenke in einer kinematischen Kette abzubilden, kann mit einem Parameter in den Freiheitsgraden des entsprechenden Gelenks eine Rechenvorschrift aufgebaut werden, um den Roboter zu beschreiben und die Position des Endeffektors schnell bestimmen zu können.

Zur Beschreibung von Transformationen wird in dieser Arbeit auf die Homogene Transformationsmatrix zurückgegriffen. Diese besteht aus einer Rotationsmatrix  $R_{a,b}$ , die die Rotation von System  $a$  in System  $b$  beschreibt und einem Translationsvektor  $P_{a,b}$ , der die Translation zwischen den zwei Systemen entspricht [1, S. 28]. Um eine Inverse Transformation von System  $b$  in System  $a$  zu erhalten, kann die Inverse der Transformationsmatrix  $T_{a,b}$  oder die Regel aus Gleichung 2.2 verwendet werden. Bei der Multiplikation zweier geeigneter Matrizen können mehrere Transformationen in einer Matrix dargestellt werden. Ein Beispiel hierfür findet sich in Gleichung 2.3.

?? verschieben in Abschnitt 1.4 ??

$$T_{a,b} = \begin{bmatrix} R_{a,b} & P_{a,b} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$T_{b,a} = (T_{a,b})^{-1} = \begin{bmatrix} R_{b,a} & -R_{b,a}P_{a,b} \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$T_{a,b} \cdot T_{b,c} = T_{a,c} \quad (2.3)$$

### 2.1 DH-Konvention

?? Quelle

Die Konvention, die in der Regel verwendet wird, um Rotation und Translation eines Gliedes der kinematischen Kette darzustellen ist die sog. DH-Konvention oder DH-Transformation. DH-Konvention beschreibt, wie die Koordinatensysteme basieren auf dem vorherigen Koordinatensystem beschrieben werden [2, 1]. Um nun ausgehend von Gelenk  $n - 1$  das Koordinatensystem von Gelenk  $n$  zu beschreiben, müssen die folgenden Regeln befolgt werden:

1. Achse  $z_n$  liegt entlang der Bewegungsachse des Gelenks  $n$
2. Achse  $x_n$  liegt auf der kürzesten Verbindung zwischen Achsen  $z_{n-1}$  und  $z_n$ .
3. Die  $y_n$  Achse wird rechtshändig ergänzt.

Dabei sind die Ursprünge der Gelenkkordinatensysteme oftmals nicht im Gelenksprung, was Komplexität für die Berechnung von Transformationen verringert. Aus der Beziehung der zwei Koordinatensysteme können die DH-Parameter abgeleitet werden (siehe auch Abbildung 2.1):

- $\theta_n$  Winkel zwischen  $x_{n-1}$  und  $x_n$  mit Rotationsachse  $z_{n-1}$
- $d_n$ : Kleinster Abstand zwischen  $x_{n-1}$  und  $x_n$
- $a_n$ : Abstand zwischen den Achsen  $z_{n-1}$  und  $z_n$
- $\alpha_n$  Winkel zwischen  $z_{n-1}$  und  $z_n$  mit Rotationsachse  $x_n$

Dies entspricht den folgenden Transformationsmatrizen (Gleichungen 2.4, 2.5, 2.6, 2.7):

$$T_{\theta_n} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

$$T_{d_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

$$T_{a_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$T_{\alpha_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_n) & -\sin(\alpha_n) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_n) & \cos(\alpha_n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Um nun Koordinatensystem  $n - 1$  in Koordinatensystem  $n$  zu überführen, kann die Transformationsmatrix  $T_{n-1,n}$  verwendet werden (Gleichung 2.8). Für den beweglichen Freiheitsgrad der Gelenke wird dann jeweils eine freie Variable festgelegt ( $\theta_n$  für translatorische und  $d_n$  für rotatorische Gelenke).

$$T_{n-1,n}(\theta_n, d_n) := T_{\theta_n} \cdot T_{d_n} \cdot T_{a_n} \cdot T_{\alpha_n} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \cos(\alpha_n) & \sin(\theta_n) \sin(\alpha_n) & a_n \cos(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \cos(\alpha_n) & -\cos(\theta_n) \sin(\alpha_n) & a_n \sin(\theta_n) \\ 0 & \sin(\alpha_n) & \cos(\alpha_n) & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

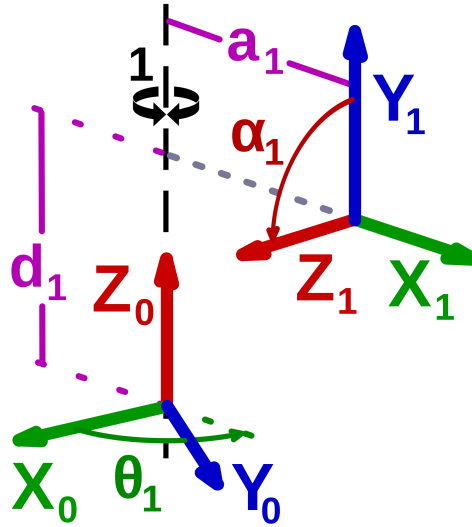


Abbildung 2.1: DH-Konvention zwischen zwei Gelenken [4]

Oftmals wird in der Literatur auch eine alternative, modifizierte Form der DH-Parameter verwendet [1, S. 75]. Um die Vergleichbarkeit mit [5] zu gewährleisten wird in der Rechnung sowie im Code diese alternative Methode eingesetzt. Dabei verändert sich die Transformationsmatrix eines Gelenks auf die Werte aus Gleichung 2.9:

$$T_{n-1,n}(\theta_n, d_n) := \begin{bmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) & 0 & a_{n-1} \\ \sin(\theta_n) \cos(\alpha_{n-1}) & \cos(\theta_n) \cos(\alpha_{n-1}) & -\sin(\alpha_{n-1}) & -d_n \sin(\alpha_{n-1}) \\ \sin(\theta_n) \sin(\alpha_{n-1}) & \cos(\theta_n) \sin(\alpha_{n-1}) & \cos(\alpha_{n-1}) & d_n \cos(\alpha_{n-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

## 2.2 Unified Robot Description Format

Unified Robot Description Format (URDF) ist ein Standard entwickelt für das Robot Operating System (ROS), um sowohl die geometrischen als auch physische und visuelle Eigenschaften eines Roboters zu beschreiben. Für die Beschreibung ist eine auf XML basierende Datei nötig, die mit Tags geschachtelt den Roboter mithilfe von sog. „Links“ und „Joints“ beschreibt [6].

Links beschreiben die physischen Verbindungen zwischen zwei Gelenken. Dabei wird unterschieden zwischen visuellen Eigenschaften („visual“), Kollisionseigenschaften („collision“) und Trägheitseigenschaften („inertial“). Jede dieser Kategorien kann so die Geometrie des Links aus verschiedenen Perspektiven unterschiedlich beschreiben

Joints bezeichnen Gelenke, also die Verbindungen zweier Links und beschreiben die mögliche relative Bewegung zwischen diesen. Dabei sind nicht nur translatorische („prismatic“) und rotatorische Gelenke („revolute“) beschreibbar, sondern auch feste („fixed“), schwebende („floating“) und planare Verbindungen („planar“). Für die Beschreibung eines Joints wird der vorhergehende Link als „parent“ und der nächste Link als „child“ bezeichnet. Zudem müssen im Feld „origin“ Translation und Rotation des Ursprungs im Koordinatensystem des Parent Links, sowie im Feld „axis“ je nach Gelenk die Rotationsachse, Translationsachse oder Normale der Bewegungsoberfläche angegeben werden. Desweiteren ist es möglich, Schnittstellen für die Bewegung der Motoren zu definieren und Bewegungslimits für die Gelenke anzugeben, um die Ansteuerung des Roboters und die Bewegungsplanung zu vereinfachen.

Die Schritte zur Berechnung der direkten Kinematik können für das bessere Verständnis im Code ?? (Anhang referenz) direkt nachvollzogen und visualisiert werden.

## 2.3 Beschreibung des UR5

Der in dieser Arbeit betrachtete Roboter ist der UR5e von Universal Robots. Dieser ist ein vergleichsweise günstiger Roboter mit verringerter Zahl an Singularitäten (siehe Abschnitt 3.3), sechs Gelenken und einer offenen kinematischen Kette. Offiziell wird der Roboter mit den DH-Parametern aus Tabelle 2.1 und dynamischen Eigenschaften der Links aus Tabelle 2.2 beschrieben [7]. Abbildung 2.2 kann zudem die Dimensionierung des Roboters und die Anordnung der Achsen in Nullstellung entnommen werden.

Nach Datenblatt [8] hat der UR5 einen Arbeitsraum mit Radius 85cm (Abstand vom Befestigungspunkt bei ausgestrecktem Arm) und kann sich mit einer Maximalgeschwindigkeit von bis zu 180°/s bewegen.

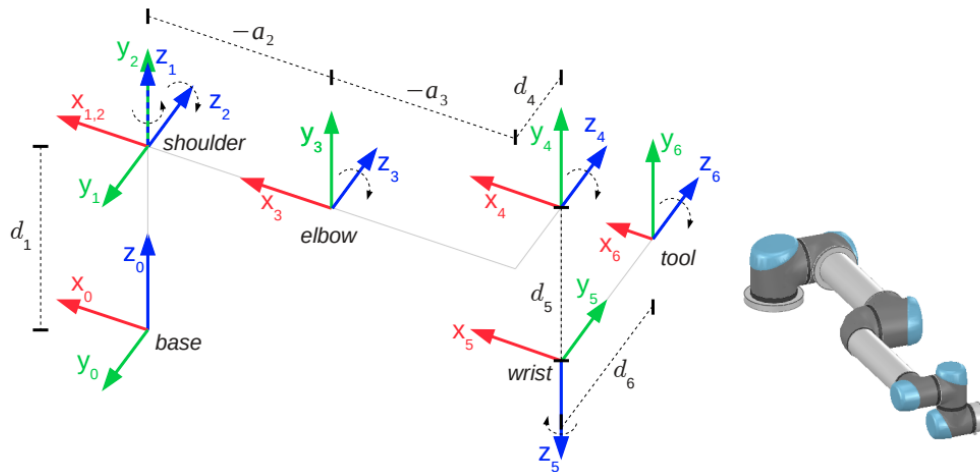


Abbildung 2.2: Achsen des UR5-Roboters mit Angabe der DH-Parameter (links) und Visualisierung der Nullposition (rechts) [5]

Tabelle 2.1: DH-Parameter des UR5e Roboters von Universal Robots [7]

Joint	$\theta$ [rad]	$a$ [m]	$d$ [m]	$\alpha$ [rad]
Joint 1	0	0	0.089159	$\pi/2$
Joint 2	0	-0.425	0	0
Joint 3	0	-0.3922	0	0
Joint 4	0	0	0.10915	$\pi/2$
Joint 5	0	0	0.09465	$-\pi/2$
Joint 6	0	0	0.09465	0

## 2.4 Geschwindigkeitskinematik

Um einen Roboter in Bewegung darzustellen, ist nicht nur die Transformation der Gelenke relevant, sondern auch dessen Kinematik und Dynamik. Dies ist besonders relevant, da in der echten Welt bestimmte Maximalwerte für (Winkel-) Geschwindigkeit und Beschleunigung, sowie Trägheit und Drehmoment eingehalten werden müssen, um den sicheren Betrieb sowie das Verhalten der Masse korrekt abzubilden.

Für die Berechnung der Geschwindigkeit des Endeffektors im Gelenk  $e$  kann die Jakobi-Matrix verwendet werden. Dabei gilt für eine Drehung nach DH-Konvention um Achse  $z_{n-1}$  für die Geschwindigkeit Gleichung 2.10 und für die Winkelgeschwindigkeit Gleichung 2.11. Für translatorische Gelenke gelten stattdessen Gleichungen 2.12 und 2.13. Die Vektoren  $z_i$  entsprechen jeweils der Einheitsvektor der z-Achse  $z_i = \frac{Z_{0,i}}{|Z_{0,i}|}$  auf Basis der Transformationsmatrix  $T_{0,i} = \prod_{n=1}^i T_{n-1,n}$  (siehe Konvention Gleichung 3.2).

Tabelle 2.2: Beschreibung der dynamischen Eigenschaften des UR5e Roboters von Universal Robots [7]

Link	Masse [kg]	Schwerpunkt [m]
Link 1	3.7	[0, -0.02561, 0.00193]
Link 2	8.393	[0.2125, 0, 0.11336]
Link 3	2.33	[0.15, 0.0, 0.0265]
Link 4	1.219	[0, -0.0018, 0.01634]
Link 5	1.219	[0, 0.0018, 0.01634]
Link 6	0.1879	[0, 0, -0.001159]

$$J_{P_n} = z_{n-1} \times (P_e - P_{n-1}) \quad (2.10)$$

$$J_{\omega_{n+1}} = z_{n-1} \quad (2.11)$$

$$J_{P_n} = z_{n-1} \quad (2.12)$$

$$J_{\omega_{n+1}} = 0 \quad (2.13)$$

Für alle Gelenke ergibt sich dann für die Jakobi-Matrix eines Sechs-Achsen-Roboters wie dem UR5 die folgende Gleichung 2.14 mit jeweils sechs Spalten und Zeilen. Um die Geschwindigkeit des Endeffektors  $v_6$  zu erhalten, muss die Matrix mit der Geschwindigkeit  $\dot{\theta}$  multipliziert werden (Gleichung 2.15).

$$J_{0,6} = \begin{pmatrix} J_{P_1} & \dots & J_{P_6} \\ J_{\omega_1} & \dots & J_{\omega_6} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

$$v_6 = \begin{pmatrix} \dot{P}_{0,6} \\ \omega_6 \end{pmatrix} = J_{0,6} \cdot \dot{\theta} \quad (2.15)$$

## 3 Inverse Kinematik

In der direkte Kinematik wird aus den Gelenkzuständen Position und Rotation des Endeffektors bestimmt. Der umgekehrte Vorgang, also das Berechnen der Gelenkpositionen bei gegebener Zieltransformation, wird als inverse Kinematik bezeichnet. Dies ist erforderlich, um Aufgaben in der Umgebung des Roboters zu lösen und die angestrebten Zielpunkte zu erreichen. Dabei muss beachtet werden, dass oft mehrere gleichwertige Lösungen für eine Zielstellung des Endeffektors vorliegen. Allerdings kann die inverse Kinematik offener Ketten oft nicht einfach direkt mithilfe einer mathematischen Formel gelöst werden (siehe Abschnitt 3.1). Im Fall des UR5, ist dies allerdings in den meisten Fällen möglich.

Die Lösung des Problems kann geometrisch, analytisch oder numerisch gelöst werden. Auf die ersten beiden Lösungsmöglichkeiten wird im Folgenden näher eingegangen.

### 3.1 Analytische Lösung

Für eine direkte Lösung muss zunächst die Formel aus Gleichung 2.8 oder 2.9 herangezogen werden. Nach Multiplikation der Transformationsmatrizen müsste die entstehende Gleichung 3.1 nach den freien Variablen  $\theta_1$  bis  $\theta_n$  bzw.  $d_1$  bis  $d_n$  aufgelöst werden. Da aufgrund der rotatorischen Gelenke nichtlineare trigonometrische Funktionen verwendet werden, ist diese Funktion bei Industrierobotern überwiegend nichtlinear und in vielen Fällen auch nicht lösbar.

$$T_{0,n}(\vec{q}) = \prod_{i=1}^n T_{i-1,i}(q_i) \quad (3.1)$$

### 3.2 Geometrische Lösung

Um die Berechnung zu vereinfachen, wird oftmals in den äußeren drei Gelenken eines Sechsarroboters ein Handwurzelgelenk eingeführt, in dem sich die Achsgeraden dieser Gelenke schneiden. Da die Drehung des sogenannten Handgelenks die Position des Handwurzelgelenkes nicht verändert, kann so zuerst die Berechnung der Position des Handwurzelgelenkes mithilfe der Zieltransformation und im Anschluss unabhängig die Berechnung der restlichen Gelenke stattfinden. Dieser Trick ist allerdings im UR5 nicht

verwendbar, da hier wohl aufgrund der größeren Zahl an Singularitäten dieser Technik (siehe Abschnitt 3.3) auf die Verwendung eines Handwurzepunkts verzichtet wurde.

Dennoch kann durch eine Analyse der geometrischen Eigenschaften und der geringen Zahl der Singularitäten des UR5 eine Lösung von  $\vec{q}$  bzw.  $\vec{\theta}$  gefunden werden. Die Strategie hierbei ist, beim ersten Gelenk zu beginnen und nach und nach die anderen Gelenke mit der Transformation  $T_{0,6}$  des Endeffektors zu verknüpfen. Bekannt sind zu Beginn der Rechnung nur die DH-Parameter  $(\theta_i, a_i, d_i, \alpha_i)$  jedes Gelenks  $i$  im Ausgangszustand, wobei  $\theta_i$  als freie Variable jedes Gelenks betrachtet wird (Abschnitt 2.3), sowie die Transformation des Endeffektors  $T_{0,6}$ . Eine detailliertere Rechnung kann [5] und [3] entnommen werden.

In der folgenden Rechnung gilt stets die untenstehende Konvention aus [1, S. 82] für eine beliebige Transformation  $T_{a,b}$  von einem System  $a$  in ein System  $b$  (Gleichung 3.2), sowie die in Abschnitt 2.1 vorgestellten Rechenregeln für Transformationsmatrizen:

$$T_{a,b} = \begin{bmatrix} X_{a,b} & Y_{a,b} & Z_{a,b} & P_{a,b} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{a,bx} & Y_{a,bx} & Z_{a,bx} & P_{a,bx} \\ X_{a,by} & Y_{a,by} & Z_{a,by} & P_{a,by} \\ X_{a,bz} & Y_{a,bz} & Z_{a,bz} & P_{a,bz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

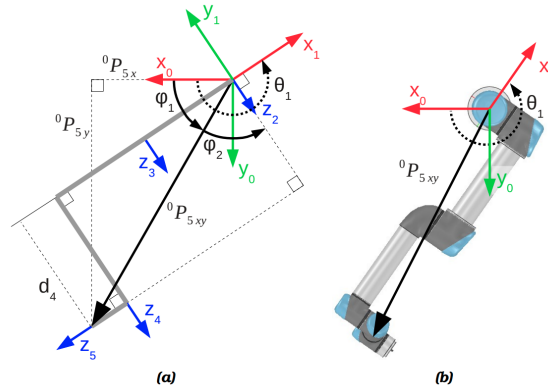
## 1. Gelenk eins (Basis)

Zunächst wird der Ausgangspunkt  $P_{0,5}$  von Gelenk 5 berechnet (Gleichung 3.3 [5, S. 4]) und im Anschluss trigonometrisch Winkel  $\theta_1$  bestimmt (Gleichung 3.4 sowie Abbildung 3.1). Dabei entstehen zwei Lösungen, die die Schulter des Roboters entweder links oder Rechts vom Ursprung platzieren.

$$P_{0,5} = T_{0,6} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$\theta_1 = \arctan2(P_{0,5y}, P_{0,5x}) \pm \arccos\left(\frac{d_4}{\sqrt{P_{0,5x}^2 + P_{0,5y}^2}}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (3.4)$$



Abbildung 3.1: Berechnung von  $\theta_1$ , Betrachtung von Gelenk eins bis fünf [5]

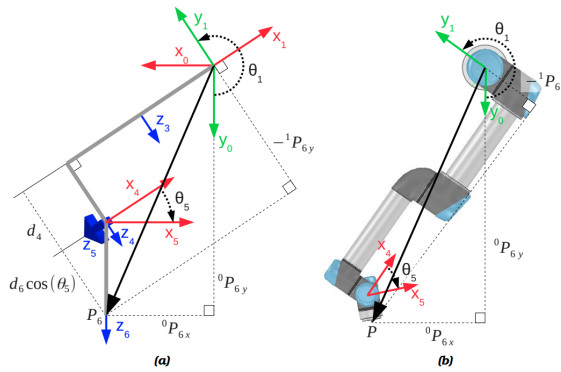
## 2. Gelenk fünf (oberes Handgelenk)

Im Anschluss kann  $\theta_5$  bestimmt werden, da der y-Teil der Position von Gelenk 6 relativ zu Gelenk 1 ( $P_{1,6y}$ ) nur mithilfe von  $\theta_5$  und bereits bekannter Parameter  $P_{0,6}$ ,  $\theta_1$  und der DH-Parameter berechnet werden kann (siehe Abbildung 3.2). Aus dieser Erkenntnis ergibt sich Gleichung 3.5  $P_{1,6y}$  erhält man durch die Rotation des Ursprungssystems  $T_{0,6}$  um die  $z_1$ -Achse (Gleichung 3.6). In Kombination erhält man die Gleichung für  $\theta_5$  (Gleichung 3.7). Dabei entstehen wiederum zwei Lösungen, die jeweils das Handgelenk ober- oder unterhalb des Arms platzieren.

$$-P_{1,6y} = d_4 + d_6 \cdot \cos(\theta_5) \quad (3.5)$$

$$P_{1,6y} = -P_{0,6x} \cdot \sin(\theta_1) + P_{0,6y} \cdot \cos(\theta_1) \quad (3.6)$$

$$\theta_5 = \pm \arccos \left( \frac{P_{0,6x} \cdot \sin \theta_1 - P_{0,6y} \cdot \cos \theta_1 - d_4}{d_6} \right) \quad (3.7)$$

Abbildung 3.2: Berechnung von  $\theta_5$ , Betrachtung von allen Gelenken [5]

### 3. Gelenk sechs (Endeffektor)

Nach  $\theta_1$  und  $\theta_5$  wird  $\theta_6$  bestimmt. Dazu wird die Eigenschaft des UR5 herangezogen, die Z-Achsen von Gelenken zwei, drei und vier liegt stets parallel zur Y-Achse von Gelenk 1 stehen (siehe Abbildung 2.2). Deshalb kann die Y-Achse  $y_1$  beschrieben von Gelenk sechs ( $Y_{6,1}$ ) unabhängig von  $\theta_{1,2,3,4}$  und kann mithilfe von sphärischen Koordinaten als  $-Y_{6,1}(-\theta_6, \theta_5)$  ( $-\theta_5$  als Azimuth sowie  $\theta_6$  als polaren Winkel) aufgefasst werden (Abbildung 3.3). Eine Umrechnung in kartesische Koordinaten ergibt deshalb Gleichung 3.8, wobei  $Y_{6,1}$  mithilfe einer Drehung um  $\theta_1$  um  $z_1$  beschrieben werden kann (Gleichung 3.9).  $Z$  und  $X$  sind hierbei jeweils Einheitsvektoren der Z- und X-Achse des jeweiligen Koordinatensystems. Nach Gleichsetzen der x- und y-Einträge der beiden Gleichungen und anschließendem Umformen erhält man  $\theta_6$  (Gleichung 3.10). Dabei kann es genau eine Lösung geben. Falls  $\sin \theta_5 = 0$ , liegt eine Singularität vor und eine Lösung kann nicht bestimmt werden. Dies tritt auf, wenn neben den Achsen  $z_2, z_3$  und  $z_4$  auch Achse  $z_6$  parallel steht. In diesem Fall kann eine beliebige Lösung gewählt werden, im Regelfall wird  $\theta_6 = 0$  gesetzt.

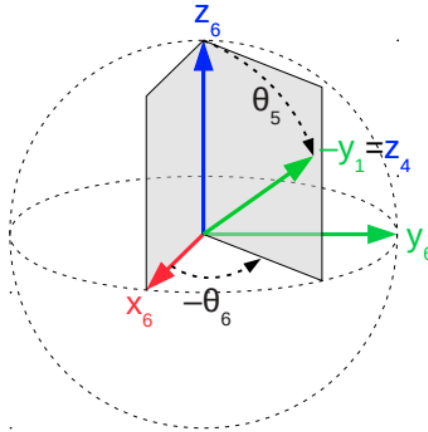


Abbildung 3.3: Berechnung von  $\theta_6$  mit Sphärischen Koordinaten, für Koordinatensystembeschreibung siehe Abbildung 2.2 [5]

$$Y_{6,1} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_5 \cdot \cos \theta_6 \\ \sin \theta_5 \cdot \sin \theta_6 \\ -\cos \theta_5 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$Y_{6,1} = -\sin \theta_1 \cdot X_{6,0} + \cos \theta_1 \cdot Y_{6,0} \quad (3.9)$$

$$\theta_6 = \arctan2 \left( \frac{-X_{6,0y} \cdot \sin \theta_1 + Y_{6,0y} \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_5}, \frac{X_{6,0x} \cdot \sin \theta_1 - Y_{6,0x} \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_5} \right) \quad (3.10)$$

#### 4. Gelenk drei (Ellenbogen)

Die verbleibenden drei Gelenke haben alle parallele Achsen und lassen sich dadurch zu einem zweidimensionalen System vereinfachen (siehe Abbildung 3.4, rechts). Um  $\theta_3$  zu berechnen kann der Winkel  $\phi_3$  zu Hilfe genommen werden (siehe Gleichung 3.11). Die Werte  $a_2$ ,  $a_3$  sind dabei die DH-Parameter der jeweiligen Gelenke und  $|P_{1,4xz}|$  ist der Abstand zwischen Gelenk 1 und Gelenk 4, dessen relative Position bereits bekannt ist. Aufgrund der Geometrie gilt:  $|P_{1,4xz}| \in |a_2 \pm a_3|$ . Nach der Anwendung des arccos erhält man in der Regel zwei Lösungen, die der Position „Elbow Up“ und „Elbow Down“ entsprechen (Gleichung 3.12).

$$\cos(\theta_3) = -\cos(\phi_3) = \frac{a_2^2 + a_3^2 - |P_{1,4xz}|^2}{2a_2a_3} \quad (3.11)$$

$$\theta_3 = \pm \arccos\left(\frac{a_2^2 + a_3^2 - |P_{1,4xz}|^2}{2a_2a_3}\right) \quad (3.12)$$

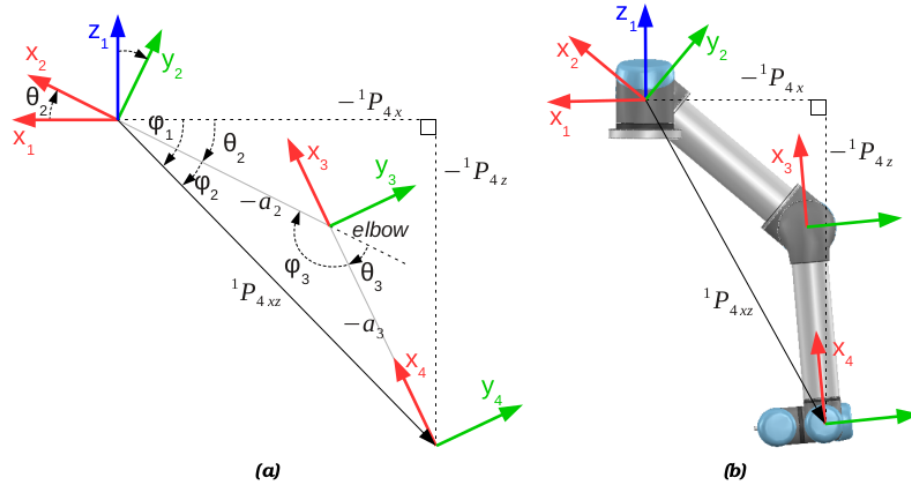


Abbildung 3.4: Berechnung von  $\theta_4$  durch Vereinfachung als zweidimensionales System und Bestimmung der Transformation zwischen Gelenk 1 und Gelenk 4 [5]

#### 5. Gelenk zwei (Schulter)

$\theta_2$  kann mithilfe von Abbildung 3.4 ( $\theta_2 = \phi_1 - \phi_2$ ), sowie Gleichung 3.13 und 3.14 bestimmt werden. Nach der Substitution von  $\phi_3 = \sin(\pi - \theta_3) = \sin(\theta_3)$  erhält man

eine Lösung für  $\theta_2$  (Gleichung 3.15).

$$\phi_1 = \arctan2(-P_{1,4z}, -P_{1,4x}) \quad (3.13)$$

$$\phi_2 = \arcsin\left(\frac{-a_3 \cdot \sin \phi_3}{|P_{1,4xz}|}\right) \quad (3.14)$$

$$\theta_2 = \phi_1 - \phi_2 = \arctan2(-P_{1,4z}, -P_{1,4x}) - \arcsin\left(\frac{-a_3 \cdot \sin \theta_3}{|P_{1,4xz}|}\right) \quad (3.15)$$

## 6. Gelenk vier (unteres Handgelenk)

Der Winkel des letzten Gelenks ist definiert als der Winkel zwischen den Achsen  $x_3$  und  $x_4$  um Rotationsachse  $z_4$  (siehe Definition DH-Parameter, Abschnitt 2.1). Da alle anderen Winkel bereits bekannt sind, kann der letzte Winkel der ersten Spalte  $X_{3,4}$  der Transformationsmatrix  $T_{3,4}$  entnommen werden. Mit den ersten beiden Werten dieser Spalte,  $X_{3,4x}$  und  $X_{3,4y}$ , erhält man den Wert von  $\theta_4$  (Gleichung 3.16)

$$\theta_4 = \arctan2(X_{3,4y}, X_{3,4x}) \quad (3.16)$$

## Zusammenfassung

Mithilfe der Gleichungen 3.17 bis 3.22 kann die Inverse Kinematik eines UR5-Roboters direkt bestimmt werden. Dabei existieren in der Regel acht mögliche Lösungen, jeweils eine für die Gelenke sechs (Endeffektor), zwei (Schulter) und vier (unteres Handgelenk) und jeweils zwei für die Gelenke eins (Basis), drei (Ellenbogen) und fünf (oberes Handgelenk). Falls die Achsen  $z_2$ ,  $z_3$ ,  $z_4$  und  $z_6$  parallel stehen, kann  $\theta_6$  beliebig gewählt werden, sodass eine Singularität mit beliebig vielen Lösungen vorliegt. Neben den DH-Parametern und der gewünschten Transformation des Endeffektors muss für Gleichung 3.17  $P_{0,5}$  (Gleichung 3.1), für Gleichung 3.19 die Transformation  $T_{60}$ , für Gleichung 3.20 und 3.20 die Transformation  $T_{14}$  und für Gleichung 3.22 die Transformation  $T_{3,4}$  mit der Regeln aus Gleichungen 2.1, 2.2 und 2.3 bestimmt werden.

$$\theta_1 = \arctan2(P_{0,5y}, P_{0,5x}) \pm \arccos\left(\frac{d_4}{\sqrt{P_{0,5x}^2 + P_{0,5y}^2}}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (3.17)$$

$$\theta_5 = \pm \arccos\left(\frac{P_{0,6x} \cdot \sin \theta_1 - P_{0,6y} \cdot \cos \theta_1 - d_4}{d_6}\right) \quad (3.18)$$

$$\theta_6 = \arctan2\left(\frac{-X_{6,0y} \cdot \sin \theta_1 + Y_{6,0y} \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_5}, \frac{X_{6,0x} \cdot \sin \theta_1 - Y_{6,0x} \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_5}\right) \quad (3.19)$$

$$\theta_3 = \pm \arccos \left( \frac{a_2^2 + a_3^2 - |P_{1,4xz}|^2}{2a_2a_3} \right) \quad (3.20)$$

$$\theta_2 = \phi_1 - \phi_2 = \arctan2(-P_{1,4z}, -P_{1,4x}) - \arcsin \left( \frac{-a_3 \cdot \sin \theta_3}{|P_{1,4xz}|} \right) \quad (3.21)$$

$$\theta_4 = \arctan2(X_{3,4y}, X_{3,4x}) \quad (3.22)$$

Die Schritte zur Berechnung der inversen Kinematik können für das bessere Verständnis im Code ?? (Anhang referenz) direkt nachvollzogen und visualisiert werden.

### 3.3 Singularitäten

Wie in Abschnitt 3.2 ermittelt, existiert beim UR5 genau eine Position, bei der eine Singularität vorliegt. Singularitäten zeichnen sich dadurch aus, dass es unendlich viele Lösungen für eine bestimmte Zieltransformation gibt. In der Regel tritt dies genau dann auf, wenn zwei Rotationsachsen parallel zueinander stehen und ihre Bewegung durch das Drehen in gegensätzliche Richtungen beliebig ausgleichen können.

In der Praxis tritt dieser Fall allerdings kaum auf, da durch kleine Rundungsfehler bei der Rechnung nur im Extremfall eine exakte Parallelität hergestellt wird. Trotzdem sind Singularitäten problematisch, da beim Durchfahren einer solchen Position extreme Positionsänderungen der verschiedenen Gelenke erforderlich sind. Aus diesem Grund ist es ratsam, diese Positionen möglichst zu vermeiden. Für weitere Informationen zur Pfadplanung, siehe Abschnitt 4.



## 4 Pfadplanung

Bei der Pfadplanung geht es darum, eine Reihe an Konfigurationen zu berechnen, die den Weg von einer bestimmten Transformation in eine andere beschreiben. Eine einzelne Konfiguration ist im Falle des UR5 ein Tupel mit sechs Winkeln, die die Ausrichtung der sechs Gelenke des Roboters beschreiben.

Die einfachste Form der Pfadplanung ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten (Abschnitt 4.2.1), die schnellste Verbindung ist immer der Weg der direkten Kinematik mit maximaler Winkelgeschwindigkeit bei der Bewegung (Abschnitt 2). Komplizierter wird es, wenn Beschränkungen im Arbeitsraum des Roboters, wie Kollisionen mit der Umgebung oder mit sich selbst, vorliegen. In diesem Fall muss ein komplizierteres Berechnungsverfahren herangezogen werden.

In diesem Kapitel sollen die Grundlagen der Pfadplanung, sowie einige Algorithmen näher vorgestellt werden.

### 4.1 Konfigurationsraum

Der Konfigurationsraum  $C$  stellt die Grundlage für die Algorithmen in der Pfadplanung dar und beschreibt alle möglichen Konfigurationen, die der Roboter einnehmen kann. Eine Konfiguration des UR5 ist dabei wie in Gleichung 4.1 definiert, wobei die Winkelwerte  $\theta_i$  durch ihre Maximal- und Minimalwerte des Datenblatts [8] von  $\pm 360^\circ$  beschränkt sind. Gleichsam existieren Konfigurationen innerhalb dieser Menge  $O \in C$ , die Kollisionen beschreiben. Darunter zählen Konfigurationen, bei denen sich der Roboter selbst im Weg steht, sowie welche, bei denen der Untergrund oder statische Hindernisse eine erfolgreiche Ausführung der Bewegung verhindern. Der für die Pfadplanung relevante Bereich ist demzufolge der in Gleichung 4.2 beschriebene Menge  $C_{free}$ , der freie Konfigurationsraum, dessen Konfigurationen den Bereich beschreiben, durch den Roboter sich bewegen kann.

$$C = \{(\theta_1, \dots, \theta_6) \in \theta_1 \times \dots \times \theta_6 \mid \theta_i \in [-2\pi, 2\pi]\} \quad (4.1)$$

$$C_{free} = C \setminus O \quad (4.2)$$

Je nach Algorithmus muss der Konfigurationsraum allerdings nicht im vorhinein berechnet werden

Konfigurationsraum und Kollisionsfreier Konfigurationsraum

## 4.2 Berechnungsmethoden

### 4.2.1 Kürzester Weg

### 4.2.2 Zellendekomposition

Zellendekomposition (Vollständige Abtastung)

### 4.2.3 Sampling-Verfahren

Single-Query Unidirektional vs. Bidirektional RRT biased / unbiased to exploration  
Q-space muss nicht vollständig bekannt sein RRT\* Multi-Query Probabilistic Roadmaps  
Potentialfeldmethode / Gradientenverfahren Genetische Algorithmen

## 4.3 Constraints und Praxisbezug

Kinematisch (Winkelbegrenzung) Dynamisch (Geschwindigkeit) Einbezug der Constraints in den Algorithmen Praxis: OMPL (MoveIt+ ROS / Copelliasim Plugin)



# 5 Trajektorienplanung

## 5.1 Profile

Trapez, 7-Segment

## 5.2 Synchronität

Vollsynchon, Teilsynchon, Asynchon

## 5.3 Mehrsegment-Trajektorien

Ggf besser in Pfadplanung ??

Mehrsegment-Trajektorien (z.B. Bezier, Überschleifen)



## **6 Fazit und Ausblick**



# Literatur

- [1] John J. Craig. *Introduction to Robotics: Mechanics and Control*. Third edition, Indian subcontinent adaptation. Chennai: Pearson, 2009. ISBN: 978-81-317-1836-0 (S. 3, 5, 10).
- [2] J. Denavit und R. S. Hartenberg. „A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices“. In: *Journal of Applied Mechanics* 22.2 (1. Juni 1955), S. 215–221. ISSN: 0021-8936, 1528-9036. DOI: 10.1115/1.4011045 (S. 3).
- [3] Kelsey P. Hawkins. *Analytic Inverse Kinematics for the Universal Robots UR-5/UR-10 Arms*. Technical Report. Georgia Institute of Technology, 7. Dez. 2013 (S. 10).
- [4] Jahobr. *Coordinate systems and Denavit-Hartenberg parameters*. 2007. URL: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Denavit-Hartenberg-Transformation.svg> (besucht am 24.11.2022) (S. 5).
- [5] Rasmus Andersen. „Kinematics of a UR5“. In: (2018) (S. 5, 7, 10–13).
- [6] ROS.org. *Urdf/XML/Model*. URL: <http://wiki.ros.org/urdf/XML/model> (besucht am 02.12.2022) (S. 6).
- [7] Universal Robots. *Universal Robots - DH Parameters for Calculations of Kinematics and Dynamics*. URL: <https://www.universal-robots.com/articles/ur/application-installation/dh-parameters-for-calculations-of-kinematics-and-dynamics/> (besucht am 02.12.2022) (S. 6–8).
- [8] Universal Robots. *UR5 Technical Specifications*. URL: [https://www.universal-robots.com/media/50588/ur5\\_en.pdf](https://www.universal-robots.com/media/50588/ur5_en.pdf) (besucht am 09.12.2022) (S. 6, 17).



# Erklärung

Die vorliegende Arbeit habe ich selbstständig ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer oder anderer Prüfungen noch nicht vorgelegt worden.

Augsburg, den 31.03.2023

Nik Julin Nowoczyn