

# Seminararbeit

## Verbesserung der Pfad- und Trajektorienplanung am UR5

Vorgelegt von:	Nik Julin Nowoczyn
Matrikelnummer:	8529776
Studiengang:	Ingenieurinformatik
Prüfer:	Prof. Dr.-Ing. Johannes Schilp
Betreuer:	Ludwig Vogt
Ausgabedatum:	01. 10. 2022
Abgabedatum:	31. 03. 2023



# Aufgabenstellung



# Kurzfassung



# Inhaltsverzeichnis

<b>Aufgabenstellung</b>	<b>I</b>
<b>Kurzfassung</b>	<b>III</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>VII</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>IX</b>
<b>1 Räumliche Beschreibung (optional ??)</b>	<b>1</b>
1.1 Koordinatensysteme . . . . .	1
1.2 Translation . . . . .	1
1.3 Rotation . . . . .	1
1.4 Homogene Transformationsmatrix . . . . .	1
<b>2 Direkte Kinematik</b>	<b>3</b>
2.1 DH-Konvention . . . . .	3
2.2 Unified Robot Description Format . . . . .	5
2.3 Beschreibung des UR5e . . . . .	6
<b>3 Inverse Kinematik</b>	<b>9</b>
3.1 Analytische Lösung . . . . .	9
3.2 Geometrische Lösung . . . . .	9
3.3 Singularitäten . . . . .	14
3.4 Geschwindigkeitskinematik . . . . .	14
<b>4 Pfadplanung</b>	<b>15</b>
4.1 Formale Beschreibung . . . . .	15
4.2 Konfigurationsraum . . . . .	15
4.3 Berechnungsmethoden . . . . .	15
4.3.1 Kürzester Weg . . . . .	15
4.3.2 Zellendekomposition . . . . .	15
4.3.3 Sampling-Verfahren . . . . .	15
4.4 Constraints und Praxisbezug . . . . .	15

<b>5</b>	<b>Trajektorienplanung</b>	<b>17</b>
5.1	Profile . . . . .	17
5.2	Synchronität . . . . .	17
5.3	Mehrsegment-Trajektorien . . . . .	17
<b>6</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>19</b>
	<b>Literatur</b>	<b>21</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Denavit-Hartenberg-Konvention (DH-Konvention) zwischen zwei Gelenken [2] . . . . .	5
2.2	Achsen des UR5-Roboters mit Angabe der DH-Parameter (links) und Visualisierung der Nullposition (rechts) [3] . . . . .	6
3.1	Berechnung von $\theta_1$ , Betrachtung von Gelenk eins bis fünf [3] . . . . .	10
3.2	Berechnung von $\theta_5$ , Betrachtung von allen Gelenken [3] . . . . .	11
3.3	Berechnung von $\theta_6$ mit Sphärischen Koordinaten, für Koordinatensystembeschreibung siehe Abbildung 2.2 . . . . .	12
3.4	Berechnung von $\theta_4$ durch Vereinfachung als zweidimensionales System und Bestimmung der Transformation zwischen Gelenk 1 und Gelenk 4. . . . .	13



# Tabellenverzeichnis

2.1	DH-Parameter des UR5e Roboters von Universal Robots [4]	7
2.2	Beschreibung der dynamischen Eigenschaften des UR5e Roboters von Universal Robots [4]	7



# Abkürzungsverzeichnis

**DH-Konvention** Denavit-Hartenberg-Konvention

**URDF** Unified Robot Description Format

**ROS** das Robot Operating System



# 1 Räumliche Beschreibung (optional ??)

ggf kürzen und/oder am Ende ergänzen ??

## 1.1 Koordinatensysteme

## 1.2 Translation

## 1.3 Rotation

Euler / current frame, Fixed Frame, Axis-Angle, Quaternion

## 1.4 Homogene Transformationsmatrix





## 2 Direkte Kinematik

?? Quelle

Die direkte Kinematik ist dafür verantwortlich aus den verschiedenen Winkeln und Positionen der Gelenke die Rotation und Position des Endeffektors im Raum zu berechnen. Dazu wird zunächst in jedem Gelenk ein Koordinatenursprung gelegt, der eine Nullstellung jedes Gelenks beschreibt. Um alle Gelenke in einer kinematischen Kette abzubilden, kann dann beispielsweise mithilfe der homogenen Transformationsmatrix (Abschnitt 1.4) und einem Parameter in den Freiheitsgraden des entsprechenden Gelenks eine Rechenvorschrift aufgebaut werden, um den Roboter zu beschreiben und die Position des Endeffektors schnell bestimmen zu können.

### 2.1 DH-Konvention

?? Quelle

?? Unterschied UR5 und UR5e <https://www.universal-robots.com/articles/ur/application-installation/dh-parameters-for-calculations-of-kinematics-and-dynamics/> ??

Die Konvention, die in der Regel verwendet wird, um Rotation und Translation eines Gliedes der kinematischen Kette darzustellen ist die sog. DH-Konvention oder DH-Transformation. DH-Konvention beschreibt, wie die Koordinatensysteme basieren auf dem vorherigen Koordinatensystem beschrieben werden. Um nun ausgehend von Gelenk  $n - 1$  das Koordinatensystem von Gelenk  $n$  zu beschreiben, müssen die folgenden Regeln befolgt werden:

1. Achse  $z_n$  liegt entlang der Bewegungsachse des Gelenks  $n$
2. Achse  $x_n$  liegt auf der kürzesten Verbindung zwischen Achsen  $z_{n-1}$  und  $z_n$ .
3. Die  $y_n$  Achse wird rechtshändig ergänzt.

Dabei sind die Ursprünge der Gelenkkordinatensysteme oftmals nicht im Gelenkursprung, was Komplexität für die Berechnung von Transformationen verringert. Aus der Beziehung der zwei Koordinatensysteme können die DH-Parameter abgeleitet werden (siehe auch Abbildung 2.1):

- $\theta_n$  Winkel zwischen  $x_{n-1}$  und  $x_n$  mit Rotationsachse  $z_{n-1}$

- $d_n$ : Kleinsten Abstand zwischen  $x_{n-1}$  und  $x_n$
- $a_n$ : Abstand zwischen den Achsen  $z_{n-1}$  und  $z_n$
- $\alpha_n$  Winkel zwischen  $z_{n-1}$  und  $z_n$  mit Rotationsachse  $x_n$

Dies entspricht den folgenden Transformationsmatrizen (Gleichungen 2.1, 2.2, 2.3, 2.4):

$$T_{\theta_n} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) & 0 & 0 \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$T_{d_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$T_{a_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$$T_{\alpha_n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_n) & -\sin(\alpha_n) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha_n) & \cos(\alpha_n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Um nun Koordinatensystem  $n - 1$  in Koordinatensystem  $n$  zu überführen, kann die Transformationsmatrix  $T_{n-1,n}$  verwendet werden (Gleichung 2.5). Für den beweglichen Freiheitsgrad der Gelenke kann für die einfache Berechnung noch eine Substitution für Variable  $q_n$  durchgeführt werden (Gleichung 2.6 für translatorische und Gleichung 2.7 für rotatorische Gelenke).

$$T_{n-1,n}(q_n) := T_{\theta_n} \cdot T_{d_n} \cdot T_{a_n} \cdot T_{\alpha_n} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_n) & -\sin(\theta_n) \cos(\alpha_n) & \sin(\theta_n) \sin(\alpha_n) & a_n \cos(\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(\theta_n) \cos(\alpha_n) & -\cos(\theta_n) \sin(\alpha_n) & a_n \sin(\theta_n) \\ 0 & \sin(\alpha_n) & \cos(\alpha_n) & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

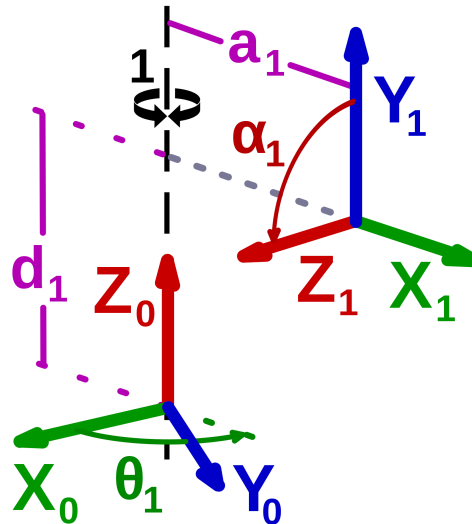


Abbildung 2.1: DH-Konvention zwischen zwei Gelenken [2]

?? Modifizierte dh-parameter, andere Matrix (siehe andersen [3])

$$d_n := d_{n_0} + q_n \quad (2.6)$$

$$\theta_n := \theta_{n_0} + q_n \quad (2.7)$$

## 2.2 Unified Robot Description Format

?? Quelle Unified Robot Description Format (URDF) ist ein Standard entwickelt für das Robot Operating System (ROS), um sowohl die geometrischen als auch physische und visuelle Eigenschaften eines Roboters zu beschreiben. Für die Beschreibung ist eine auf XML basierende Datei nötig, die mit Tags geschachtelt den Roboter mithilfe von sog. „links“ und „joints“ beschreibt.

Links beschreiben die physischen Verbindungen zwischen zwei Gelenken. Dabei wird unterschieden zwischen visuellen Eigenschaften („visual“), Kollisionseigenschaften („collision“) und Trägheitseigenschaften („inertial“). Jede dieser Kategorien kann so die Geometrie des Links aus verschiedenen Perspektiven unterschiedlich beschreiben

Joints bezeichnen Gelenke, also die Verbindungen zweier Links und beschreiben die mögliche relative Bewegung zwischen diesen. Dabei sind nicht nur translatorische („prismatic“) und rotatorische Gelenke („revolute“) beschreibbar, sondern auch feste („fixed“), schwebende („floating“) und planare Verbindungen („planar“). Für die Beschreibung eines Joints wird der vorhergehende Link als „parent“ und der nächste Link

als „child“ bezeichnet. Zudem müssen im Feld „origin“ Translation und Rotation des Ursprungs im Koordinatensystem des Parent Links, sowie im Feld „axis“ je nach Gelenk die Rotationsachse, Translationsachse oder Normale der Bewegungsoberfläche angegeben werden. Desweiteren ist es möglich, Schnittstellen für die Bewegung der Motoren zu definieren und Bewegungslimits für die Gelenke anzugeben, um die Ansteuerung des Roboters und die Bewegungsplanung zu vereinfachen.

## 2.3 Beschreibung des UR5e

?? Quelle <https://www.universal-robots.com/articles/ur/application-installation/dh-parameters-for-calculations-of-kinematics-and-dynamics/>

Der in dieser Arbeit betrachtete Roboter ist der UR5e von Universal Robots. Dieser ist ein vergleichsweise günstiger Roboter mit verringerter Zahl an Singularitäten (siehe Abschnitt 3.3), sechs Gelenken und einer offenen kinematischen Kette. Offiziell wird der Roboter mit den DH-Parametern aus Tabelle 2.1 und dynamischen Eigenschaften der Links aus Tabelle 2.2 beschrieben. Abbildung 2.2 kann zudem die Dimensionierung des Roboters und die Anordnung der Achsen in Nullstellung entnommen werden.

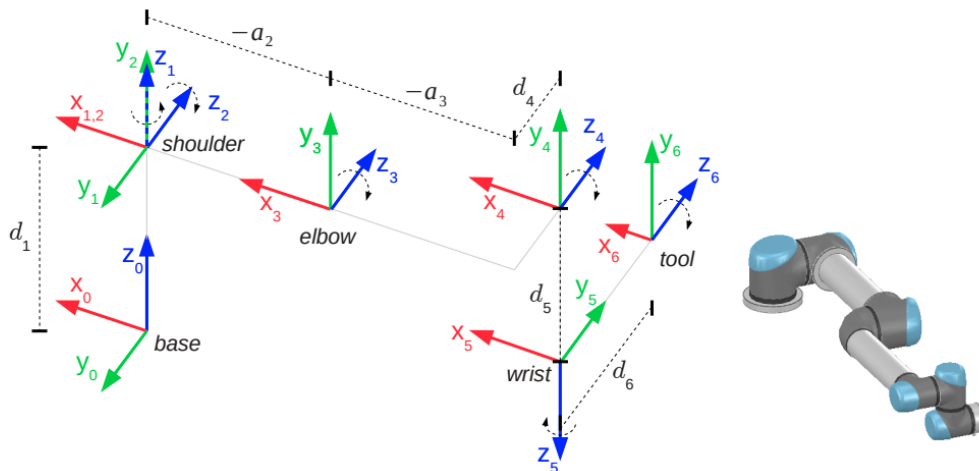


Abbildung 2.2: Achsen des UR5-Roboters mit Angabe der DH-Parameter (links) und Visualisierung der Nullposition (rechts) [3]

Tabelle 2.1: DH-Parameter des UR5e Roboters von Universal Robots [4]

Joint	$\theta$ [rad]	$a$ [m]	$d$ [m]	$\alpha$ [rad]
Joint 1	0	0	0.1625	$\pi/2$
Joint 2	0	-0.425	0	0
Joint 3	0	-0.3922	0	0
Joint 4	0	0	0.1333	$\pi/2$
Joint 5	0	0	0.0997	$-\pi/2$
Joint 6	0	0	0.0996	0

Tabelle 2.2: Beschreibung der dynamischen Eigenschaften des UR5e Roboters von Universal Robots [4]

Link	Masse [kg]	Schwerpunkt [m]
Link 1	3.761	[0, -0.02561, 0.00193]
Link 2	8.058	[0.2125, 0, 0.11336]
Link 3	2.846	[0.15, 0.0, 0.0265]
Link 4	1.37	[0, -0.0018, 0.01634]
Link 5	1.3	[0, 0.0018, 0.01634]
Link 6	0.365	[0, 0, -0.001159]



## 3 Inverse Kinematik

In der direkte Kinematik wird aus den Gelenkzuständen Position und Rotation des Endeffektors bestimmt. Der umgekehrte Vorgang, also das Berechnen der Gelenkpositionen bei gegebener Zieltransformation, wird als inverse Kinematik bezeichnet. Dies ist erforderlich, um Aufgaben in der Umgebung des Roboters zu lösen und die angestrebten Zielpunkte zu erreichen. Dabei muss beachtet werden, dass oft mehrere gleichwertige Lösungen für eine Zielstellung des Endeffektors vorliegen. Allerdings kann die inverse Kinematik offener Ketten oft nicht einfach direkt mithilfe einer mathematischen Formel gelöst werden (siehe Abschnitt 3.1). Im Fall des UR5, ist dies allerdings in den meisten Fällen möglich.

Die Lösung des Problems kann geometrisch, analytisch oder numerisch gelöst werden. Auf die ersten beiden Lösungsmöglichkeiten wird im Folgenden näher eingegangen.

### 3.1 Analytische Lösung

Für eine direkte Lösung muss die Formel aus Gleichungen 2.5 und 2.7 herangezogen werden. Nach Multiplikation der Transformationsmatrizen müsste die entstehende Gleichung 3.1 nach den Variablen  $q_1$  bis  $q_n$  aufgelöst werden. Da aufgrund der rotatorischen Gelenke nichtlineare trigonometrische Funktionen verwendet werden, ist diese Funktion bei Industrierobotern meist nichtlinear und in vielen Fällen auch nicht lösbar.

$$T_{0,n}(\vec{q}) = \prod_{i=1}^n T_{i-1,i}(q_i) \quad (3.1)$$

### 3.2 Geometrische Lösung

Um die Berechnung zu vereinfachen, wird oftmals in den äußeren drei Gelenken eines Sechsarmsroboters ein Handwurzepunkt eingeführt, in dem sich die Achsgeraden dieser Gelenke schneiden. Da die Drehung des sogenannten Handgelenks die Position des Handwurzepunktes nicht verändert, kann so zuerst die Berechnung der Position des Handwurzepunktes mithilfe der Zieltransformation und im Anschluss unabhängig die Berechnung der restlichen Gelenke stattfinden. Dieser Trick ist allerdings im UR5 nicht verwendbar, da hier wohl aufgrund der größeren Zahl an Singularitäten dieser Technik (siehe Abschnitt 3.3) auf die Verwendung eines Handwurzepunktes verzichtet wurde.

Dennoch kann durch eine Analyse der geometrischen Eigenschaften und der geringen Zahl der Singularitäten des UR5 eine Lösung von  $\vec{q}$  bzw.  $\vec{\theta}$  gefunden werden. Die Strategie hierbei ist, beim ersten Gelenk zu beginnen und nach und nach die anderen Gelenke mit der Transformation  $T_{0,6}$  des Endeffektors zu verknüpfen. Bekannt sind zu Beginn der Rechnung nur die DH-Parameter  $(\theta_i, a_i, d_i, \alpha_i)$  jedes Gelenks  $i$  im Ausgangszustand, wobei  $\theta_i$  als freie Variable jedes Gelenks betrachtet wird (Abschnitt 2.3), sowie die Transformation des Endeffektors  $T_{0,6}$ . Eine detailliertere Rechnung kann [3] und [1] entnommen werden.

### 1. Gelenk eins (Basis)

Zunächst wird der Ausgangspunkt  $P_{0,5}$  von Gelenk 5 berechnet (Gleichung 3.2 [3, S. 4]) und im Anschluss trigonometrisch Winkel  $\theta_1$  bestimmt (Gleichung 3.3 sowie Abbildung 3.1). Dabei entstehen zwei Lösungen, die die Schulter des Roboters entweder links oder Rechts vom Ursprung platzieren.

$$P_{0,5} = T_{0,6} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\theta_1 = \arctan2(P_{0,5y}, P_{0,5x}) \pm \arccos\left(\frac{d_4}{\sqrt{P_{0,5x}^2 + P_{0,5y}^2}}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (3.3)$$

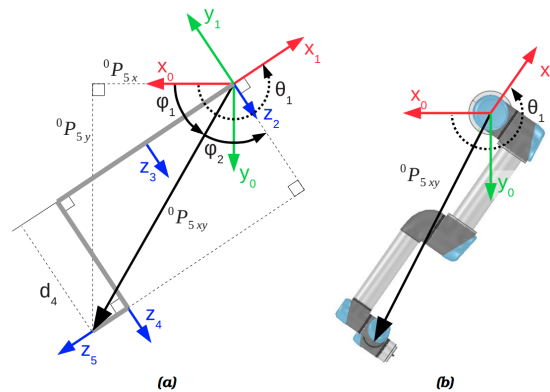


Abbildung 3.1: Berechnung von  $\theta_1$ , Betrachtung von Gelenk eins bis fünf [3]



## 2. Gelenk fünf (oberes Handgelenk)

Im Anschluss kann  $\theta_5$  bestimmt werden, da der y-Teil der Position von Gelenk 6 relativ zu Gelenk 1 ( $P_{1,6y}$ ) nur mithilfe von  $\theta_5$  und bereits bekannter Parameter  $P_{0,6}$ ,  $\theta_1$  und der DH-Parameter berechnet werden kann (siehe Abbildung 3.2). Aus dieser Erkenntnis ergibt sich Gleichung 3.4  $P_{1,6y}$  erhält man durch die Rotation des Ursprungssystems  $T_{0,6}$  um die  $z_1$ -Achse (Gleichung 3.5). In Kombination erhält man die Gleichung für  $\theta_5$  (Gleichung 3.6). Dabei entstehen wiederum zwei Lösungen, die jeweils das Handgelenk ober- oder unterhalb des Arms platzieren.

$$-P_{1,6y} = d_4 + d_6 \cdot \cos(\theta_5) \quad (3.4)$$

$$P_{1,6y} = -P_{0,6x} \cdot \sin(\theta_1) + P_{0,6y} \cdot \cos(\theta_1) \quad (3.5)$$

$$\theta_5 = \pm \arccos \left( \frac{P_{0,6x} \cdot \sin \theta_1 - P_{0,6y} \cdot \cos \theta_1 - d_4}{d_6} \right) \quad (3.6)$$

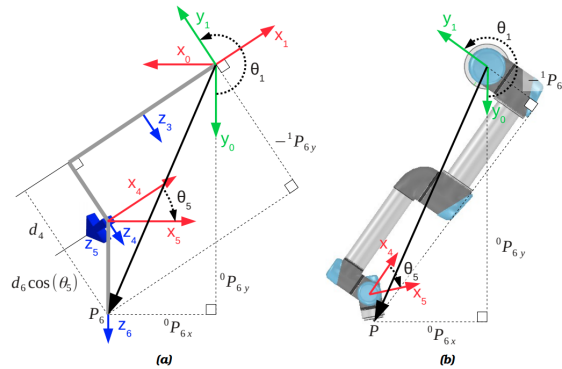


Abbildung 3.2: Berechnung von  $\theta_5$ , Betrachtung von allen Gelenken [3]

## 3. Gelenk sechs (Endeffektor)

Nach  $\theta_1$  und  $\theta_5$  wird  $\theta_6$  bestimmt. Dazu wird die Eigenschaft des UR5 herangezogen, die Z-Achsen von Gelenken zwei, drei und vier liegt stets parallel zur Y-Achse von Gelenk 1 stehen (siehe Abbildung 2.2). Deshalb kann die Y-Achse  $y_1$  beschrieben von Gelenk sechs ( $Y_{6,1}$ ) unabhängig von  $\theta_{1,2,3,4}$  und kann mithilfe von sphärischen Koordinaten als  $-Y_{6,1}(-\theta_6, \theta_5)$  ( $-\theta_5$  als Azimuth sowie  $\theta_6$  als polaren Winkel) aufgefasst werden (Abbildung 3.3). Eine Umrechnung in kartesische Koordinaten ergibt deshalb Gleichung 3.7, wobei  $Y_{6,1}$  mithilfe einer Drehung um  $\theta_1$  um  $z_1$  beschrieben werden kann (Gleichung 3.8).  $Z$  und  $X$  sind hierbei jeweils Einheitsvektoren der Z- und X-Achse des

jeweiligen Koordinatensystems. Nach Gleichsetzen der x- und y-Einträge der beiden Gleichungen und anschließendem Umformen erhält man  $\theta_6$  (Gleichung 3.9). Dabei kann es genau eine Lösung geben. Falls  $\sin \theta_5 = 0$ , liegt eine Singularität vor und eine Lösung kann nicht bestimmt werden. Dies tritt auf, wenn neben den Achsen  $z_2$ ,  $z_3$  und  $z_4$  auch Achse  $z_6$  parallel steht.

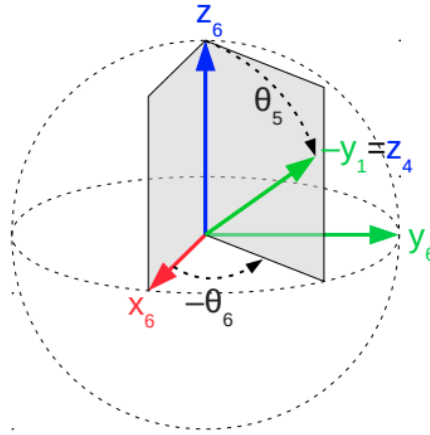


Abbildung 3.3: Berechnung von  $\theta_6$  mit Sphärischen Koordinaten, für Koordinatensystembeschreibung siehe Abbildung 2.2

$$Y_{6,1} = \begin{bmatrix} -\sin \theta_5 \cdot \cos \theta_6 \\ \sin \theta_5 \cdot \sin \theta_6 \\ -\cos \theta_5 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

$$Y_{6,1} = -\sin \theta_1 \cdot X_{6,0} + \cos \theta_1 \cdot Y_{6,0} \quad (3.8)$$

$$\theta_6 = \arctan2 \left( \frac{-X_{6,0y} \cdot \sin \theta_1 + Y_{6,0y} \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_5}, \frac{X_{6,0x} \cdot \sin \theta_1 - Y_{6,0x} \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_5} \right) \quad (3.9)$$

#### 4. Gelenk drei (Ellenbogen)

Die verbleibenden drei Gelenke haben alle parallele Achsen und lassen sich dadurch zu einem zweidimensionalen System vereinfachen (siehe Abbildung 3.4, rechts). Um  $\theta_3$  zu berechnen kann der Winkel  $\phi_3$  zu Hilfe genommen werden (siehe Gleichung 3.10). Die Werte  $a_2$ ,  $a_3$  sind dabei die DH-Parameter der jeweiligen Gelenke und  $|P_{1,4xz}|$  ist der Abstand zwischen Gelenk 1 und Gelenk 4, dessen relative Position bereits bekannt ist. Aufgrund der Geometrie gilt:  $|P_{1,4xz}| \in |a_2 \pm a_3|$ . Nach der Anwendung des arccos erhält man in der Regel zwei Lösungen, die der Position „Elbow Up“ und „Elbow Down“ entsprechen (Gleichung 3.11).

$$\cos(\theta_3) = -\cos(\phi_3) = \frac{a_2^2 + a_3^2 - |P_{1,4xz}|^2}{2a_2a_3} \quad (3.10)$$

$$\theta_3 = \pm \arccos \left( \frac{a_2^2 + a_3^2 - |P_{1,4xz}^2|}{2a_2a_3} \right) \quad (3.11)$$

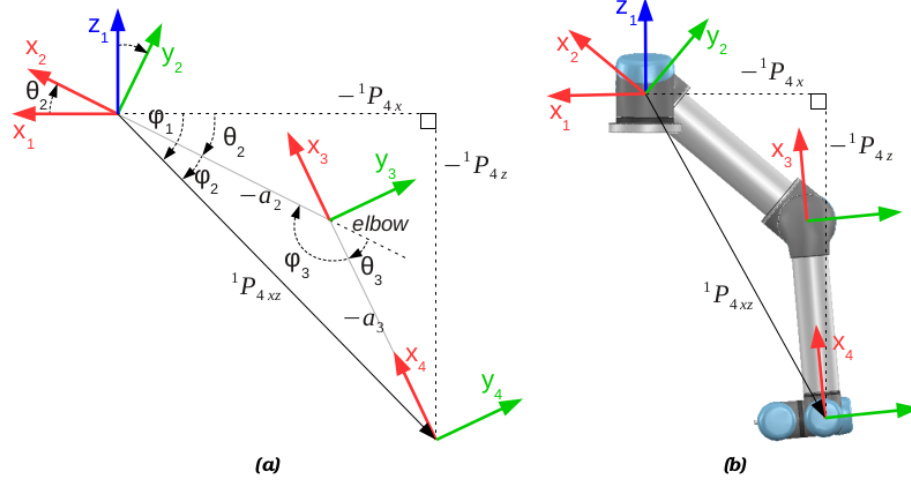


Abbildung 3.4: Berechnung von  $\theta_4$  durch Vereinfachung als zweidimensionales System und Bestimmung der Transformation zwischen Gelenk 1 und Gelenk 4.

## 5. Gelenk zwei (Schulter)

$\theta_2$  kann mithilfe von Abbildung 3.4 ( $\theta_2 = \phi_1 - \phi_2$ ), sowie Gleichung 3.12 und 3.13 bestimmt werden. Nach der Substitution von  $\phi_3 = \sin(\pi - \theta_3) = \sin(\theta_3)$  erhält man eine Lösung für  $\theta_2$  (Gleichung 3.14).

$$\phi_1 = \arctan2(-P_{1,4z}, -P_{1,4x}) \quad (3.12)$$

$$\phi_2 = \arcsin \left( \frac{-a_3 \cdot \sin \phi_3}{|P_{1,4xz}|} \right) \quad (3.13)$$

$$\theta_2 = \phi_1 - \phi_2 = \arctan2(-P_{1,4z}, -P_{1,4x}) - \arcsin \left( \frac{-a_3 \cdot \sin \theta_3}{|P_{1,4xz}|} \right) \quad (3.14)$$

## 6. Gelenk vier (unteres Handgelenk)

Der Winkel des letzten Gelenks ist definiert als der Winkel zwischen den Achsen  $x_3$  und  $x_4$  um Rotationsachse  $z_4$  (siehe Definition DH-Parameter, Abschnitt 2.1). Da alle anderen Winkel bereits bekannt sind, kann der letzte Winkel der ersten Spalte  $X_{3,4}$  der Transformationsmatrix  $T_{3,4}$  entnommen werden. Mit den ersten beiden Werten dieser Spalte,  $X_{3,4x}$  und  $X_{3,4y}$ , erhält man den Wert von  $\theta_4$  (Gleichung 3.15)

$$\theta_4 = \arctan2(X_{3,4y}, X_{3,4x}) \quad (3.15)$$

### Zusammenfassung

Mithilfe der Gleichungen 3.16 bis 3.21 kann die Inverse Kinematik eines UR5-Roboters direkt bestimmt werden. Dabei existieren acht Lösungen, jeweils eine für die Gelenke sechs (Endeffektor), zwei (Schulter) und vier (unteres Handgelenk) und jeweils zwei für die Gelenke eins (Basis), drei (Ellenbogen) und fünf (oberes Handgelenk). Neben den DH-Parametern und der gewünschten Transformation des Endeffektors muss für Gleichung 3.16  $P_{0,5}$  (siehe Gleichung 3.1), für Gleichung 3.18 die Einheitsvektoren  $X_{6,0x}$ ,  $X_{6,0y}$  und  $Y_{6,0x}$ ,  $Y_{6,0y}$ , für Gleichung 3.19 und 3.19 die x- und y-Werte des Vektors  $P_{1,4}$  und für Gleichung 3.21 die Werte (1, 1) und (2, 1) der Transformationsmatrix  $T_{3,4}$  bestimmt werden.

$$\theta_1 = \arctan2(P_{0,5y}, P_{0,5x}) \pm \arccos\left(\frac{d_4}{\sqrt{P_{0,5x}^2 + P_{0,5y}^2}}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (3.16)$$

$$\theta_5 = \pm \arccos\left(\frac{P_{0,6x} \cdot \sin \theta_1 - P_{0,6y} \cdot \cos \theta_1 - d_4}{d_6}\right) \quad (3.17)$$

$$\theta_6 = \arctan2\left(\frac{-X_{6,0y} \cdot \sin \theta_1 + Y_{6,0y} \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_5}, \frac{X_{6,0x} \cdot \sin \theta_1 - Y_{6,0x} \cdot \cos \theta_1}{\sin \theta_5}\right) \quad (3.18)$$

$$\theta_3 = \pm \arccos\left(\frac{a_2^2 + a_3^2 - |P_{1,4xz}|^2}{2a_2a_3}\right) \quad (3.19)$$

$$\theta_2 = \phi_1 - \phi_2 = \arctan2(-P_{1,4z}, -P_{1,4x}) - \arcsin\left(\frac{-a_3 \cdot \sin \theta_3}{|P_{1,4xz}|}\right) \quad (3.20)$$

$$\theta_4 = \arctan2(X_{3,4y}, X_{3,4x}) \quad (3.21)$$

## 3.3 Singularitäten

Kuka vs UR5.

Theorie (rundungsfehler), Praxis (große Geschwindigkeiten) alpha-2 alpha-1 alpha-5  
Elbow-Up / Elbow-Down

## 3.4 Geschwindigkeitskinematik

## 4 Pfadplanung

### 4.1 Formale Beschreibung

### 4.2 Konfigurationsraum

Konfigurationsraum und Kollisionsfreier Konfigurationsraum

### 4.3 Berechnungsmethoden

#### 4.3.1 Kürzester Weg

#### 4.3.2 Zellendekomposition

Zellendekomposition (Vollständige Abtastung)

#### 4.3.3 Sampling-Verfahren

Single-Query Unidirektional vs. Bidirektional RRT biased / unbiased to exploration  
Q-space muss nicht vollständig bekannt sein RRT\* Multi-Query Probabilistic Roadmaps  
Potentialfeldmethode / Gradientenverfahren Genetische Algorithmen

### 4.4 Constraints und Praxisbezug

Kinematisch (Winkelbegrenzung) Dynamisch (Geschwindigkeit) Einbezug der Constraints in den Algorithmen Praxis: OMPL (MoveIt+ ROS / CoppeliaSim Plugin)



# 5 Trajektorienplanung

## 5.1 Profile

Trapez, 7-Segment

## 5.2 Synchronität

Vollsynchon, Teilsynchon, Asynchon

## 5.3 Mehrsegment-Trajektorien

Ggf besser in Pfadplanung ??

Mehrsegment-Trajektorien (z.B. Bezier, Überschleifen)





## **6 Fazit und Ausblick**



# Literatur

- [1] Kelsey P. Hawkins. *Analytic Inverse Kinematics for the Universal Robots UR-5/UR-10 Arms*. Technical Report. Georgia Institute of Technology, 7. Dez. 2013 (S. 10).
- [2] Jahobr. *Coordinate systems and Denavit-Hartenberg parameters*. 2007. URL: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Denavit-Hartenberg-Transformation.svg> (besucht am 24.11.2022) (S. 5).
- [3] Rasmus Andersen. „Kinematics of a UR5“. In: (2018) (S. 5, 6, 10, 11).
- [4] *Universal Robots - DH Parameters for Calculations of Kinematics and Dynamics*. URL: <https://www.universal-robots.com/articles/ur/application-installation/dh-parameters-for-calculations-of-kinematics-and-dynamics/> (besucht am 24.11.2022) (S. 7).



# Erklärung

Die vorliegende Arbeit habe ich selbstständig ohne Benutzung anderer als der angegebenen Quellen angefertigt. Alle Stellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Die Arbeit ist in gleicher oder ähnlicher Form oder auszugsweise im Rahmen einer oder anderer Prüfungen noch nicht vorgelegt worden.

Augsburg, den 31.03.2023

Nik Julin Nowoczyn