2. Hausübung mit LyX

Niklas Fuchs

21.10.2021

1 Herleitung der kleinen Lösungsformel von quadratischen Gleichungen

Die allgemeine Form der quadratischen Gleichung kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$x^2 + px + q = 0$$

Diese Gleichung wird durch einige Schritte umgeformt:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x^2 + px = -q$$

$$x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 = -q + (\frac{p}{2})^2$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 = -q + (\frac{p}{2})^2$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{-q + (\frac{p}{2})^2}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

So kann man die kleine Lösungsformel herleiten.

2 Erklärungen und Herleitung der Formel von Cardano zu Gleichungen dritten Grades

Eine Gleichung dritten Grades hat folgende allgemeine Form:

$$Ax^3 + Bx^2 + cx + d = 0$$

mit $A \neq 0$. Durch Division durch A ergibt sich daraus folgende Normalform:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Der Fundamentalsatz der Algebra liefert für eine kubische Gleichung genau drei Lösungen. Die Herleitung der Lösungsformel ist sehr kompliziert und wird hier nur kurz angeschnitten. Durch die Substitution $x = z - a^3$ erhält man eine kubische Gleichung mit der Unbekannten z, bei der das quadratische Glied fehlt. Das heißt, aus

$$(z - \frac{a}{3})^3 + a(z - \frac{a}{3})^2 + b(z - \frac{a}{3}) + c = 0$$

ergibt sich nach dem Ausführen der Multiplikationen und des zusammenfassens:

$$z^3 + pz + q = 0$$

mit $p = b - \frac{a^2}{3}$ und $q = \frac{ab}{3} - \frac{2}{27}a^3 - c$. Auf diese reduzierte Form der kubischen Gleichung bezieht sich die folgende cardanische Lösungsformel:

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + \frac{p^3}{27}}}$$