Technische Universität Braunschweig
Institut Computational Mathematics

Prof. Dr. D. Langemann, M. Sc. C. Reisch

Formelsammlung zur Vorlesung Ingenieurmathematik V

Allgemeines

Additionstheoreme

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$
$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

Werte trigonometrischer Funktionen

α in °	0	30	45	60	90
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos\alpha$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$

Kugelkoordinaten

$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$
$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$
$z = r \cos\vartheta$
mit $0 \le \vartheta \le \pi$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Hyperbolische Funktionen

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right)$$
$$\cosh x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right)$$
$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \sinh y \cosh x$$
$$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$
$$1 = \cosh^2 x - \sinh^2 x$$

Laplace-Operator

in Polarkoordinaten:

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

in Kugelkoordinaten:

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$

Analysis 3

Kurvenintegral

$\int_\Gamma u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}s$ mit $(\,\mathrm{d}s)^2 = (\,\mathrm{d}x_1)^2 + \cdots + (\,\mathrm{d}x_d)^2$

Arbeitsintegral

$$\int_\Gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Gamma \left(v_1 \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} + \cdots + v_d \frac{\mathrm{d}x_d}{\mathrm{d}s}\right) \mathrm{d}s$$

Transformationssatz

$$\int_{\boldsymbol{\Psi}(\Omega)} u(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}a_{\boldsymbol{y}} = \int_\Omega u(\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}))|\det\nabla\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x})|\,\mathrm{d}a_{\boldsymbol{x}}$$

Partielle Integration

$\int_\Omega u_{,j}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}a = \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{x}) n_j\,\mathrm{d}s$

1. Greensche Formel

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla w\,\mathrm{d}a + \int_\Omega u\Delta w\,\mathrm{d}a = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s$$

2. Greensche Formel

$$\int_\Omega u\Delta w - w\Delta u\,\mathrm{d}a = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{n}} - w\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}s$$

Stokesscher Integralsatz

$$\int_\Omega (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a = \int_\Gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Normalenvektor

für eine durch $p(u,v)$ parametrisierte Fläche

$$\boldsymbol{n} = \frac{\partial p}{\partial u} \times \frac{\partial p}{\partial v}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,\boldsymbol{x}) = -\nabla_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{I}(t,\boldsymbol{x})$$

konstitutive Gleichung
$\boldsymbol{I}$ in Abhängigkeit von $\nabla_{\boldsymbol{x}} u$ bzw. u

Gesamtenergie der schwingenden Membran

$$E(t) = \frac{\varrho}{2}\int_\Omega u_{,t}^2 \,\mathrm{d}a + \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u^{\mathrm{T}} A(\boldsymbol{x})\nabla u \,\mathrm{d}a$$

Plattengleichung

$$\varrho u_{,tt} = -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\Delta\Delta u$$

Stationäre elektrische Felder

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon(\boldsymbol{x})\boldsymbol{E},\ \nabla\cdot\boldsymbol{D} = \varrho,\ \boldsymbol{E} = -\nabla\Phi$$

Navier-Stokes-Gleichung

$$\varrho\,[\boldsymbol{v}_{,t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}] = \eta\Delta\boldsymbol{v} - \nabla p$$

Lineare Elastizitätstheorie

$$\varrho\boldsymbol{u}_{,tt} = \nabla\cdot\sigma + \boldsymbol{f},\ \sigma\cdot\boldsymbol{n} = p,\ \sigma = S\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} + \nabla\boldsymbol{u}),\ \nabla\cdot\sigma = \mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{u},$$

$$\mu = \frac{\mathrm{E}}{2(1+\nu)},\ \lambda = \frac{\nu\mathrm{E}}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Eigenschwingungen
zu $u_{,tt} = Du$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$:
$u(t,x) = \cos(\omega t)U(x)$
mit $-\omega^2 U(x) = DU(x)$ in Ω, $U = 0$ auf $\partial\Omega$

Spektralzerlegung

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k(t)U_k(x)$$

Eulersche Differentialgleichung
$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0$, Ansatz $y = x^\alpha$

Burgers-Gleichung
ist die eindimensionale Variante der Navier-Stokes-Gleichung

Charakteristiken von $u_{,t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,u) = 0$ erfüllen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi(t) = \frac{\partial}{\partial u}F(\xi(t), u(t,\xi(t)))$$

mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t,\xi(t)) = -\frac{\partial}{\partial x}F(\xi(t), u(t,\xi(t)))$$

Fundamentallösung

- für elliptische Gleichungen erfüllt

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\boldsymbol{y})g(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

- für die Wärmeleitungsgleichung erfüllt

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} g(t,x-y)u_0(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^t\int_{\mathbb{R}} g(t-\tau,x-y)f(\tau,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau$$

- für den Laplace-Operator:

$$g(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{r} & \text{für } d=3 \\ \frac{1}{2\pi}\ln r & \text{für } d=2 \end{cases}$$

Green-Funktion
für die Poisson-Gleichung erfüllt

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_{\Gamma_2} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})p(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y} + \int_{\Gamma_1}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{n}_y}G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})q(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y}$$

Variationsformulierung
zu $-\nabla\cdot[A(\boldsymbol{x})\nabla u] = f$ in Ω und $u = 0$ auf $\partial\Omega$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \nabla u^{\mathrm{T}}A(\boldsymbol{x})\nabla u\,\mathrm{d}a - \int_\Omega fu\,\mathrm{d}a$$

Schwache Formulierung
Multiplikation mit einer Testfunktion φ und partielle Integration

Fredholmsche Alternative
für $M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, $M\in\mathbb{R}^{n\times n}$
1. $\det M \neq 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = M^{-1}\boldsymbol{b}$ eindeutig
2. $\det M = 0$

2a) $\boldsymbol{b}\in\operatorname{im} M \Rightarrow \exists\,\boldsymbol{x} :\ M(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{b}$
$\forall\,\boldsymbol{y}\in\ker M$

2b) $\boldsymbol{b}\notin\operatorname{im} M \Rightarrow \nexists\,\boldsymbol{x} :\ M\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

Finite Elemente
Variationsformulierung für endlich-dimensionalen Ansatzraum für u (Diskretisierung) und endlich viele Testfunktionen φ_j

$$\varrho u_{,tt} = Du + f \ \rightarrow\ \varrho M\boldsymbol{\alpha}'' = -K\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{f}$$

mit Massematrix M und Steifigkeitsmatrix K