Modell

Gegeben: Stochastische Differentialgleichung (SDE)

$$dX_t = F(t)X_t dt + C(t)dU_t \qquad \text{tatsächlicher Prozess (Werte unbekannt)}$$
$$dZ_t = G(t)X_t dt + D(t)dV_t \qquad \text{Observierungen (Werte bekannt)}$$

Anfangsbedingungen: $X_0 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2),\ Z_0 = 0$. Regularitätsbedingungen: Die (bekannten) Funktionen $F, C, G, D, \frac{1}{D} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind stetig und beschränkt auf beschränkten Intervallen. U und V (Brownsche Bewegungen) und X_0 sind unabhängig voneinander.

Gesucht: Bester „Z-messbarer Schätzer $\hat{X} = (\hat{X}_t)_t$ mit Informationen bis zum Zeitpunkt t" bzgl. des quadratischen Fehlers $S(t)$. Ist erfüllt von

$$\hat{X}_t := \mathbb{E}[X_t \mid \sigma(Z_s \mid s \leq t)].$$

Ziel: Diesen bedingten Erwartungswert berechnen. Das Ergebnis ist durch eine SDE gegeben:

Ergebnis

Theorem: *Der eindeutige (zu schätzende) Prozess X, welcher obige SDE erfüllt, ist gegeben durch*

$$X_t = \exp\left(\int_0^t F(s)ds\right)\left(X_0 + \int_0^t \exp\left(-\int_0^s F(u)du\right)C(s)dU_s\right).$$

Theorem: *Der (im obigen Sinne) beste Filter $\hat{X}_t$ erfüllt die SDE*

$$d\hat{X}_t = (F(t) - \frac{G^2(t)S(t)}{D^2(t)})\hat{X}_t dt + \frac{G(t)S(t)}{D^2(t)}dZ_t$$

mit Anfangsbedingung $\hat{X}_0 = \mathbb{E}[X_0]$, wobei $S(t)$ der mittlere quadratische Fehler ist. Dieser erfüllt die (deterministische) Ricatti-Differentialgleichung

$$\frac{dS}{dt}(t) = 2F(t)S(t) - \frac{G^2(t)}{D^2(t)}S^2(t) + C^2(t).$$

Beweisidee:

(i)
$$\hat{X}_t = P_{\mathcal{K}(Z,t)}(X_t) = P_{\mathcal{L}(Z,t)}(X_t) = P_{\mathcal{L}(N,t)}(X_t) = P_{\mathcal{L}(R,t)}(X_t),$$

mit $\mathcal{P}$ = orthogonale Projektion; $\mathcal{L}(Z,t)$ = Abschluss der Menge aller Linearkombinationen von Z bis zum Zeitpunkt t; N und R zwei neue Prozesse, welche schönere Eigenschaften als Z haben. N ist der sogenannte Innovationsprozess und R ist Brownsche Bewegung.

(ii) Finde für $P_{\mathcal{L}(R,t)}(X)$ eine explizite Darstellung (welche noch von X abhängt).

(iii) Setze zuvor berechnete Formel von X ein, um SDE von $\hat{X}$ zu erhalten (welche nur noch von Z, nicht mehr von X, abhängt, wenn man die Ricatti-Differentialgleichung gelöst hat).

In der Anwendung kann die SDE für $\hat{X}$ eventuell nicht in geschlossener Form gelöst werden. In dem Fall ist eine numerische Lösung (etwa mithilfe von Simulationen) möglich.

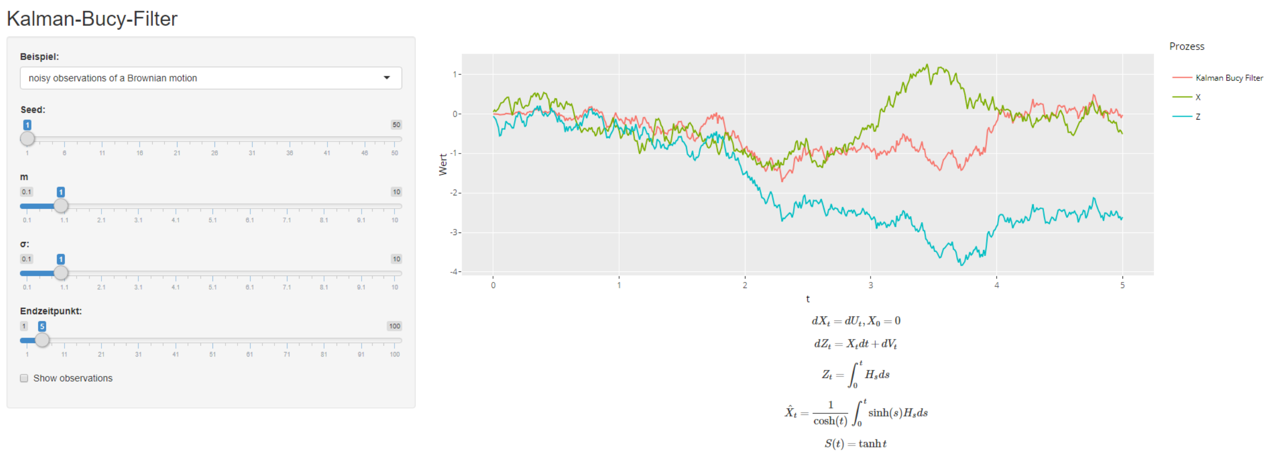

Figure 1: Der Kalman-Bucy-Filter (rot) zum Schätzen einer Brownschen Bewegung (grün) anhand der Observierungen (blau)