Лабораторная работа № 4

КЛАССИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ НА *N* КЛАССОВ МЕТОДОМ ПЕРСЕПТРОНА

Цель работы: изучить особенности классификации объектов методом персептрона, а также научиться применять этот метод на практике.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретической частью лабораторной работы.
2. Реализовать метод персептрона.
3. Оформить отчет по лабораторной работе.

Исходные данные:

1. N – количество классов, на которые требуется разделить объекты.
2. Обучающая выборка, представленная векторами с наборами признаков.

Выходные данные: *N* решающих функций.

После того, как получено *N* решающих функций, предъявляются объекты тестовой выборки, которые необходимо классифицировать, отнеся к одному из классов. Тестовый объект подставляется в каждую из решающих функций и относится к тому из классов, где было получено максимальное значение.

Количество классов, обучающих объектов и их признаков может быть произвольным.

Допустим существование *M* решающих функций, характеризующихся тем свойством, что при $x \in \omega_i$, где *x* – объект, ω_i – класс $d_i(x) > d_j(x)$ для всех $i \neq j$.

Рассмотрим *M* классов $\omega_1, \omega_2, .., \omega_M$. Пусть на *к*-м шаге процедуры обучения системе предъявляется образ *x(k)*, принадлежащий классу ω_i. Вычисляются значения *M* решающих функций $d_j[x(k)] = w_j(k)x(k), j = 1, 2, .., M$. Затем если выполняются условия $d_i[x(k)] > d_j[x(k)],\ j = 1, 2, ..., M; j \neq i,$ то векторы весов не изменяются, т. е. $w_j(k+1) = w_j(k), j = 1, 2, ..., M$.

С другой стороны, допустим, что для некоторого l $d_i[x(k)] \leq d_l[x(k)]$. В этом случае выполняются следующие коррекции весов:

$$
\begin{aligned}
&w_i(k+1) = w_i(k) + cx(k),\\
&w_l(k+1) = w_l(k) - cx(k),\\
&w_j(k+1) = w_j(k), j = 1, 2, ..., M; j \neq i, j \neq l,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где c – положительная константа.

Если при рассмотрении случая 3 классы разделимы, то доказано, что этот алгоритм сходится за конечное число итераций при произвольных начальных векторах. Рассмотрим это на примере.

Даны классы, причем каждый из них содержит один образ: ω_1: {(0, 0)}, ω_2: {(1,1}, ω_3: {(– l, 1)}. Дополним заданные образы: (0, 0, 1), (1, 1, 1), (– 1, 1, 1).

Выберем в качестве начальных векторов весов $w_1(1) = w_2(1) = w_3(1) = (0, 0, 0)$, положим c = 1 и, предъявляя образы в указанном порядке, получим следующее:

$$d_1[x(1)] = w_1(1)x(1) = 0,$$
$$d_2[x(1)] = w_2(1)x(1) = 0,$$
$$d_3[x(1)] = w_3(1)x(1) = 0.$$

Поскольку $x(1) \in \omega_1$ и $d_2[x(1)] = d_3[x(1)] = d_1[x(1)]$, первый весовой вектор увеличивается, а два других уменьшаются в соответствии с соотношениями (1), т. е.

$$w_1(2) = w_1(1) + x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$w_2(2) = w_2(1) - x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_3(2) = w_3(1) - x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Следующий предъявляемый образ $x(2)$ = (1, 1, 1) принадлежит классу ω_2. Для него получаем

$$w_1(2)x(2) = 1,\ w_2(2)x(2) = -1, w_3(2)x(2) = -1.$$

Поскольку все произведения больше либо равны $w_2(2)x(2)$, вводятся корректировки векторов коэффициентов:

$$w_1(3) = w_1(2) - x(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2(3) = w_2(2) + x(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_3(3) = w_3(2) - x(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следующий предъявленный образ $x(3)$=(-1, 1, 1) принадлежит классу ω_3. Для него получаем $w_1(3)x(3) = 0,\ w_2(3)x(3) = 0, w_3(3)x(3) = -2$. Все эти произведения опять требуют корректировки:

$$w_1(4) = w_1(3) - x(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_2(4) = w_2(3) - x(3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$w_3(4) = w_3(3) + x(3) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку в данном цикле итерации присутствовали ошибки, следует провести новый цикл. Положив $x(4) = x(1)$, $x(5) = x(2)$, $x(6) = x(3)$, получим $w_1(4)x(4) = -1,\ w_2(4)x(4) = -1, w_3(4)x(4) = -1$. Так как образ $x(4)$ принадлежит классу ω_1, то все произведения «неверны». Поэтому

$$w_1(5) = w_1(4) + x(4) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2(5) = w_2(4) - x(4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$w_3(5) = w_3(4) - x(4) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следующий предъявленный образ $x(5)$ = (1, 1, 1) принадлежит классу ω_2. Соответствующие скалярные произведения равны $w_1(5)x(5) = -2$,

$w_2(5)x(5) = 0,\ \ w_3(5)x(5) = -4$. Образ $x(5)$ классифицирован правильно. Поэтому

$$w_1(6) = w_1(5) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2(6) = w_2(5) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$w_3(6) = w_3(5) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следующий образ $x(6)$=(-1, 1, 1) принадлежит классу ω_3, для него получаем $w_1(6)x(6) = -2,\ w_2(6)x(6) = -4, w_3(6)x(6) = -0$. Этот образ также классифицирован правильно, так что коррекции не нужны, т е.

$$w_1(7) = w_1(6) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$w_2(7) = w_2(6) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$w_3(7) = w_3(6) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Если продолжить процедуру обучения, рассматривая образы $x(7)$, $x(8)$, $x(9)$, можно убедиться, что в следующем полном цикле никакие коррекции не производятся. Поэтому искомые решающие функции имеют следующий вид:

$$d_1(x) = 0 \cdot x_1 - 2x_2 + 0 = -2x_2,$$
$$d_2(x) = 2x_1 - 0 \cdot x_2 - 2 = 2x_1 - 2,$$
$$d_3(x) = -2x_1 + 0 \cdot x_2 - 2 = -2x_1 - 2.$$