Table of Contents

1 Multiplier Bootstrap

Lemma 1 (Vector Hefding inequality). *Let* $\mathbb{E}X_i = 0$, $\|X_i\| < c_i$, *then*

$$\mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\| > t\right) \le exp\left(-\frac{(t-v)^2}{2v^2}\right), \quad t \ge v,$$

$$v^2 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n c_i^2.$$

$$\mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i=1}^n X_i\right\| > v(1+\sqrt{2x})\right) \le e^{-x}.$$

Lemma 2 (Deviations of empirical process norm). *Given the restrictions with* $\|\gamma_1\| = \|\gamma_2\| = 1$

$$\log \mathbb{E} exp\left\{\frac{\lambda}{\omega}\gamma_1 D_0^{-1}\nabla^2\zeta_i(\theta)D_0^{-1}\gamma_2\right\} \le \frac{\lambda^2\nu_i^2}{2}, \quad \sum_i \nu_i^2 = \nu_0^2, \tag{ED}$$

under $\zeta = \sum_i \zeta_i$ *in local region of radius* r *with probability* $1 - e^{-x}$ *the next statement is fulfilled*

$$\|D_0^{-1}(\nabla\zeta(\theta_2) - \nabla\zeta(\theta_1))\| \le 12\nu_0 z(x)\omega r.$$

Рассмотрим функционал

$$\alpha^o(\theta_2,\theta_1) = L^o(\theta_2) - L^o(\theta_1) - (\theta_2-\theta_1)^T\nabla L^o(\theta_1) + \frac{1}{2}\|D_0(\theta_2-\theta_1)\|^2$$

Будем подразумевать что дифференцирование производится по θ_2 для функций типа $(\theta_2,\theta_1) \to \mathbb{R}$. Оценим величину его среднего значения и отклонения от среднего

$$\|D_0^{-1}\nabla\mathbb{E}^0\alpha^o(\theta_2,\theta_1)\| = \|D_0^{-1}\nabla\alpha(\theta_2,\theta_1)\| \le 2\diamondsuit(r,x)$$

с вероятностью $1 - e^{-x}$.

$$S(\theta_2,\theta_1) = D_0^{-1}\{\nabla\alpha^o(\theta_2,\theta_1) - \mathbb{E}^o\nabla\alpha^o(\theta_2,\theta_1)\} = \sum_{i=1}^n D_0^{-1}(\nabla l_i(\theta_2) - \nabla l_i(\theta_1))(u_i-1),$$

где $\operatorname{Var} u_i = 1$, $\mathbb{E}u_i = 1$. Обозначим за $\overset{o}{S} = S(\theta_2,\theta_1) - \mathbb{E}S(\theta_2,\theta_1)$, тогда с вероятностью $1 - e^{-x}$

$$\|\overset{o}{S}\| \le 12\nu_0 z(x)\omega r\sqrt{\sum_{i=1}^n(\nu_i^2/\nu_0^2)(u_i-1)^2}.$$

Ограничим u_i:

$$\mathbb{E}e^{(u_i-1)^2/\sigma_u^2} \le e,$$

тогда вероятностью $1 - e^{-t}$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n(\nu_i^2/\nu_0^2)(u_i-1)^2} \le \sigma_u\sqrt{1+t}$$

Таким образом, с вероятностью $1 - 2e^{-x}$

$$\|\overset{o}{S}\| \le 12\nu_0 z(x)\omega r\sigma_u\sqrt{1+x}.$$

Наложим ограничение на $\mathbb{E}S(\theta_2, \theta_1)$ в виде

$$\|D_0^{-1} \nabla^2 \mathbb{E} l_i(\theta) D_0^{-1}\| \le \frac{C_i(r)}{n}, \tag{Lm}$$

в результате чего при помощи векторного неравенства Хефдинга получим с вероятностью $1 - e^{-x}$

$$\|\mathbb{E}S(\theta_2, \theta_1)\| \le \frac{1 + \sqrt{2x}}{2n} C(r) r c_u,$$

где $C(r) = \sqrt{\sum_i C_i^2(r)}$, $c_u = \max(u_i - 1)$. В итоге приходим к следующему результату

Theorem 1 (Бутстреп, Вилкс). *При выполнении условий (ED) и (Lm), (a), а также ограничений для весов u_i, в локальной области радиуса r имеет место неравенство с вероятностью $1 - 4e^{-x}$*

$$|\alpha^o(\theta_2, \theta_1)| \le \|D_0(\theta_2 - \theta_1)\| \left(2\diamondsuit(r, x) + 12\nu_0 z(x) \omega r \sigma_u \sqrt{1 + x} + \frac{1 + \sqrt{2x}}{2n} C(r) r c_u \right) = \tag{a'}$$

$$= \|D_0(\theta_2 - \theta_1)\| \, 2\diamondsuit^o(r, x).$$

Для вывода теоремы Фишера для взвешенной функции правдоподобия в мире бутстрепа введем переменную

$$\chi^o(\theta_2, \theta_1) = D_0^{-1}(\nabla L^o(\theta_2) - \nabla L^o(\theta_1)) + D_0(\theta_2 - \theta_1),$$

из верхней оценки которой легко получить теорему Фишера. Заметим, что

$$\chi^o(\theta_2, \theta_1) = D_0^{-1} \nabla \alpha^o(\theta_2, \theta_1).$$

Тогда, проводя рассуждения аналогичные доказательству теоремы Вилкса, получаем верхнюю оценку $\chi^o(\theta_2, \theta_1)$.

Theorem 2 (Бутстреп, Фишер). *При выполнении условий (ED) и (Lm), (a), а также ограничений для весов u_i, в локальной области радиуса r имеет место неравенство с вероятностью $1 - 4e^{-x}$*

$$\|\chi^o(\widehat{\theta}^o, \widehat{\theta})\| = \|D_0(\widehat{\theta}^o - \widehat{\theta}) - D_0^{-1} \nabla L^o(\widehat{\theta})\| \le 2\diamondsuit^o(r, x),$$

где $\widehat{\theta}^o$, $\widehat{\theta}$ – ОМП для взвешенной и невзвешенной функций правдоподобия.