Специальные главы линейной алгебры

Автор конспекта: Николай Колб

20 января 2025 г.

Глава 1

Евклидово и унитарное пространство

1.1 Билинейные формы и их свойства

Пусть V - Линейное пространство над вещественным полем $\mathbb{R}$

Определение 1.

Билинейной формой на V называется функция $f(x, y) : V \times V \to \mathbb{R}$, для которой определены следующие свойства:

1. $\forall x, y, z \in V \quad f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V \quad f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$
3. $\forall x, y, z \in V \quad f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z)$
4. $\forall \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V \quad f(x, \beta y) = \beta f(x, y)$

Свойства билинейной формы:

- Матричный вид билинейной формы f в базисе E задается матрицей $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

  Тогда
  $$f(x, y) = x^T Ay$$
  где x и y — вектор-столбцы координат x и y в базисе E.
- Билинейная форма f называется симметричной, если
  $$f(u, v) = f(v, u) \quad \forall u, v \in V$$
- Билинейная форма f называется кососимметричной, если
  $$f(u, v) = -f(v, u) \quad \forall u, v \in V$$
- Билинейная форма f называется невырожденной, если для любого ненулевого вектора $u \in V$ существует вектор $v \in V$ такой, что $f(u, v) \neq 0$.

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Определение 2.

Полуторолинейной формой на V называется функция $g : V \times V \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

1. $\forall x, y, z \in V \quad g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{C}\ \forall x, y \in V \quad g(\alpha x, y) = \alpha g(x, y)$
3. $\forall x, y, z \in V \quad g(x, y + z) = g(x, y) + g(x, z)$
4. $\forall \mu \in \mathbb{C},\ \forall x, y \in V \quad g(x, \mu y) = \overline{\mu} g(x, y)$
5. $g(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} g(e_i, e_j)\ \xi_i\ \overline{\nu_j}$

1.2 Определения евклидовых и унитарных пространств

Определение 3.

Евклидово пространство — это вещественное линейное пространство E, на котором задана симметричная положительно определенная билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1. $\forall x, y \in E \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in E \quad \langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\forall x, y, z \in E \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle)$
4. $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad (\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0)$

Из свойств (1, 2, 3) вытекает следствие: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

Таким образом, некоторое пространство E считается евклидовым, если и только если на нём определена скалярная симметричная билинейная форма, называемая **скалярным произведением**.

Примеры евклидовых пространств:

1. Пусть $E = \mathbb{R}^n$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ можно записать в виде:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mu_i$$

где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $y = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ — векторы в $\mathbb{R}^n$

2. Пусть E — пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.
Скалярное произведение можно определить как:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Определение 4.

Унитарное пространство — это комплексное линейное пространство U, на котором задана эрмитова положительно определенная полуторалинейная форма $\langle \cdot, \cdot\rangle : U \times U \to \mathbb{C}$, обладающая следующими свойствами:

1. $\forall x, y \in U \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall x, y \in U \quad \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
3. $\forall x, y, z \in U \quad \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
4. $\forall x \in U \quad \langle x, x\rangle \in \mathbb{R} \quad \langle x, x\rangle \geq 0 \quad (\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$

Примеры унитарных пространств:

1. Пусть $U = \mathbb{C}^n$. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ можно записать в виде:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\mu_i}$$

где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $y = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ — векторы в $\mathbb{C}^n$.

2. Пусть U — пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с комплексными значениями. Скалярное произведение можно определить как:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Пусть $V-$ Евклидово / Унитарное пространство.

Определение 5.

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ - норма вектора $x \in V$

- $\|x\| > 0 \quad \longleftrightarrow \quad x \neq 0$
- $\|x\| = 0 \quad \longleftrightarrow \quad x = 0$

Примеры норм:

- **Евклидова норма в $\mathbb{R}^n$:** $\quad \|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \dots \xi_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}$
- **Евклидова норма в $\mathbb{C}^n$:** $\quad \|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2}$

1.3 Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. (Неравенство Коши-Буняковского).

Пусть $K-$ это E или U, $\quad x, y \in K, \quad$ тогда $\|\langle x, y\rangle\| \;\le\; \|x\| \cdot \|y\|$

Доказательство.

Для Евклидова пространства $E: \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$0 \;\le\; \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle \;=\; \langle x, x\rangle - \alpha\langle y, x\rangle - \alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle \;=\; \|x\|^2 - 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\|y\|^2 \;\ge\; 0$$

Это квадратный трёхчлен относительно α.

Для того чтобы оно выполнялось для всех α, дискриминант должен быть не положительным:

$$\frac{D}{4} = \langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \le 0$$

$$\Longrightarrow \quad |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\|y\|$$

2. **Для унитарного пространства** U**:** $\quad \forall x, y \in U, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$

$$0 \;\le\; \langle \alpha x \;+\; \beta y, \alpha x \;+\; \beta y\rangle \;=\; \alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle \;+\; \alpha\overline{\beta}\langle x, y\rangle \;+\; \beta\overline{\alpha}\langle y, x\rangle \;+\; \beta\overline{\beta}\langle y, y\rangle \;=$$

$$= |\alpha|^2\;\|x\|^2 \;+\; \alpha\overline{\beta}\langle x, y\rangle \;+\; \beta\;\overline{\alpha}\overline{\langle x, y\rangle} \;+\; |\beta|^2\;\|y\|^2 \qquad \Longrightarrow$$

$$\alpha := \|y\|^2, \quad \beta := -\langle x, y\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad \|y\|^4\;\|x\|^2 - \|y\|^2\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} - \|y\|^2\;\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} \;+\; |\langle x, y\rangle|^2\;\|y\|^2 \;=$$

$$= \;\|y\|^2\;(\|y\|^2\;\|x\|^2 - \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} - \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} + |\langle x, y\rangle|^2) \;=\; \|y\|^2(\|x\|^2\;\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2) \;\ge\; 0$$

- $y \;\ne\; 0 \Longrightarrow \|x\|^2\;\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2 \;\ge\; 0 \Longrightarrow |\langle x, y\rangle| \;\le\; \|x\|\;\|y\|$
- $y \;=\; 0 \Longrightarrow \|y\| \;=\; 0,\; \langle x, y\rangle \;=\; 0 \Longrightarrow |\langle x, y\rangle \;\le\; \|x\|\;\|y\|$

■

1.4 Неравенство Минковского

Теорема 2. (Неравенство Минковского $\triangle$).
$\forall x, y \in V \quad ||x+y|| \ \leq \ ||x|| + ||y||$

Доказательство. 1. **Для Евклидова пространства E:** $\quad \forall x, y \in E$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle \leq 2 \cdot \frac{|\langle x, y\rangle| + |\langle y, x\rangle|}{2} \leq 2 \cdot \frac{\|x\|\|y\| + \|y\|\|x\|}{2} = 2\|x\|\|y\|$$

Таким образом:

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей, получаем:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

2. **Для унитарного пространства U:** $\quad \forall x, y \in U$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$||x||^2 \ + \ \overline{\langle x, y\rangle} \ + \ \langle x, y\rangle \ + \ ||y||^2 \ \leq \ ||x||^2 \ + \ 2|\langle x, y\rangle| \ + \ ||y||^2 \ \leq$$

$$\leq \ ||x||^2 \ + \ 2||x||||y|| \ + \ ||y||^2 = \langle ||x|| \ + \ ||y||\rangle^2$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей, получаем:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

■

Примеры:

1. $\mathbb{R}^n : \quad \langle x, y\rangle = \xi_1\mu_1 + \ldots + \xi_n\mu_n \quad (\sum_{i=1}^{n} \xi_i \ \mu_i)^2 \ \leq \ (\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2) \ (\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2)$
2. $\mathbb{C}^n : \quad \langle x, y\rangle = \xi_1\overline{\mu_1} + \ldots + \xi_n\overline{\mu_n} \quad (\sum_{i=1}^{n} \xi_i \ \overline{\mu_i}) \ \leq \ (\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2) \ (\sum_{i=1}^{n} |\mu_i|^2)$

Определение 6.
Пусть $\mathbb{V}$ — это E или U, и $\mathbb{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в $\mathbb{V}$.
Матрицей Грама называется матрица G, элементы которой определяются как:

$$G_{ij} = (\langle e_i, e_j \rangle),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{V}$.

Теорема 3. Теперь $\mathbb{V}$ - это только E.
$a_1, \ldots, a_k \in E, \quad G = (\langle a_i a_j \rangle)$

1. Если $a_1, \ldots, a_k$ - ЛНЗ, то $|G| > 0$
2. Если $a_1, \ldots, a_k$ - ЛЗ, то $|G| = 0$

Доказательство.

1. $a_1, \ldots, a_k$ - ЛНЗ, $\quad E_1 = \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$

   $\forall x, y \in E_1 \quad x = \xi_1 a_1 \ + \ \ldots \ + \ \xi_k a_k, \quad y = \mu_1 a_1 \ + \ \ldots \ + \ \mu_k a_k$

   $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i,j=1}^{k} (a_i a_j) \xi_i \mu_j \Longrightarrow$ по критерию Сильвестра $|G| > 0$

2. $a_1, \ldots, a_k$ - ЛЗ $\Longrightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ не все нули, такие что $\alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = \mathbf{0}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \ldots + \alpha_k \langle a_k, a_1 \rangle = \mathbf{0} \\ \alpha_1 \langle a_1, a_2 \rangle + \ldots + \alpha_k \langle a_k, a_2 \rangle = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \alpha_1 \langle a_1, a_k \rangle + \ldots + \alpha_k \langle a_k, a_k \rangle = \mathbf{0} \end{cases}$$

   $\Longrightarrow$ Система имеет нетривиальное решение $\Longrightarrow$ её определитель равен нулю, а это и есть $|G|$.

■

1.5 Ортонормированные базисы в E и U

$\mathbb{V}$ - это E или V

Определение 7. $x \perp y$, если $\langle x, y\rangle = 0$

Определение 8. $\mathbb{E}$ - базис в $\mathbb{V}$. $\mathbb{E}$ - ОНБ, если $\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Теорема 4. Если $a_1, \dots, a_k \neq 0$ и $a_i \perp a_j,\ i \neq j$, то это ЛНЗ система.

Доказательство.

От противного: Они ЛЗ $\Longrightarrow \exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_k$ не все 0, что:

$$(*)\ \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = 0$$

Умножаем на a_1

$\Longrightarrow \alpha_1\langle a_1, a_1\rangle + \alpha_2\langle a_2, a_1\rangle + \ldots + \alpha_k\langle a_k, a_1\rangle = 0 \implies \alpha_1 = 0$

умножаем $(*)$ на a_2 и получаем, что $\alpha_2 = 0$

$\Longrightarrow$ все $\alpha_i = 0 \implies$ противоречие! ■

Теорема 5. (Ортогонализация по Шмидту)

Пусть $\mathbb{V}$ - это E или V, тогда:

1. ОНБ существует
2. если $(f_1, \dots f_n)$ - базис в $\mathbb{V}$, то ОНБ можно построить по формуле:

$$\begin{cases} g_1 = f_1, & e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} \\ g_2 = f_2 - (f_2, e_1)\cdot e_1, & e_2 = \frac{g2}{\|g_2\|} \\ \vdots & \\ g_n = f_n - (f_n, e_1)\cdot e_1 - (f_n, e_2)\cdot e_2 \ldots - (f_n, e_{n-1})\cdot e_{n-1}, & e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|} \end{cases}$$

Лемма 1.

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad g_k \in \mathcal{L}(f_1, \dots f_k), \qquad g_k \neq 0$$

Доказательство. по индукции:

1. $k = 1 \quad g_1 = f_1 \in \mathcal{L}(f_1), \quad f_1 \neq 0$
2. $k = m - 1$ – верно, $k = m$?

$$g_m = f_m - \langle f_m, e_1 \rangle \, e_1 - \dots - \langle f_m, e_{m-1} \rangle \, e_{m-1} = f_m - \alpha_1 g_1 - \dots - \alpha_{m-1} g_{m-1}$$

Так как все g_i линейно выражаются через $f_1, \dots, f_{m-1}$

$\Longrightarrow f_m - \alpha_1 g_1 - \dots - \alpha_{m-1} g_{m-1} = f_m - \beta_1 f_1 - \dots \beta_{m-1} f_{m-1}$
$\Longrightarrow g_m \in \mathcal{L}(f_1, \dots, f_m)$

если $g_m = 0 \Longrightarrow f_m - \beta_1 f_1 - \dots - \beta_{m-1} f_{m-1} = 0$

Это нетривиальная линейная комбинация равная нулю $\Longrightarrow$ противоречие, так как $f_1, \dots, f_m$ - базис линейной оболочки $\mathcal{L}(f_1, \dots, f_m)$

■

Теперь вернёмся к доказательству Теоремы 5.

Доказательство. Осталось доказать, что все оставшиеся векторы попарно ортогональны.

Докажем по индукции, что для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ векторы $e_1, e_2, \dots, e_k$ образуют ортогональную систему.

1. База индукции: $k = 1$.

   По построению $e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}$, где $g_1 = f_1$. Так как $\|e_1\| = 1$, то e_1 — единичный вектор.

2. Предположим, что для некоторого $k = m - 1$ векторы $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$ образуют ортогональную систему.

3. Шаг индукции: $k = m$.

   Покажем, что e_m ортогонален каждому из $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$.

   Рассмотрим вектор g_m:

   $$g_m = f_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle f_m, e_i \rangle e_i$$

   По построению $e_m = \frac{g_m}{\|g_m\|}$.

   Для любого $j \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ вычислим скалярное произведение $\langle e_m, e_j \rangle$:

   $$\langle e_m, e_j \rangle = \left\langle \frac{g_m}{\|g_m\|}, e_j \right\rangle = \frac{1}{\|g_m\|} \langle g_m, e_j \rangle$$

   Вычислим $\langle g_m, e_j \rangle$:

   $$\langle g_m, e_j \rangle = \left\langle f_m - \sum_{i=1}^{m-1} \langle f_m, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle$$

   Раскроем скалярное произведение:

   $$\langle g_m, e_j \rangle = \langle f_m, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{m-1} \langle f_m, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle$$

   По предположению индукции $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$ ортогональны, поэтому
   $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ для $i \neq j$.

   Следовательно, $\langle g_m, e_j \rangle = \langle f_m, e_j \rangle - \langle f_m, e_j \rangle = 0$

   Таким образом, $\langle e_m, e_j \rangle = \frac{1}{\|g_m\|} \cdot 0 = 0$. Это означает, что e_m ортогонален каждому из $e_1, e_2, \dots, e_{m-1}$.

   Следовательно, векторы $e_1, e_2, \dots, e_m$ образуют ортогональную систему.

Таким образом, по индукции мы доказали, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ образуют ортогональную систему. А так как все векторы e_i нормированы ($\|e_i\| = 1$), то система $e_1, e_2, \dots, e_n$ является ортонормированным базисом.

■

Определение 9.

Ортогональная матрица — это квадратная матрица A с вещественными элементами, удовлетворяющая условию:

$$A^T A = AA^T = E$$

Унитарная матрица — это квадратная матрица U с комплексными элементами, удовлетворяющая условию:

$$U^* U = UU^* = E$$

(U^* - транспонированная и комплексно-сопряженная матрица.)

Теорема 6.

1. Пусть $\mathbb{V} = E$ — Евклидово пространство, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — ортонормированные базисы.

   T - матрица перехода, тогда T - ортогональная.

2. Пусть $\mathbb{V} = U$ — Унитарное пространство, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ — ортонормированные базисы.

   T - матрица перехода, тогда T - унитарная.

Доказательство.

1. $T = (t_{ij}), \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E}T, \quad \mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}, \quad \mathcal{E}' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$

   Для ортонормированного базиса $\mathcal{E}'$ должно выполняться условие $\delta_{ij} = \langle e'_i, e'_j \rangle$.

   Выразим e'_i и e'_j через старый базис $\mathcal{E}$:

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} e_k, \quad e'_j = \sum_{m=1}^{n} t_{mj} e_m.$$

   Тогда скалярное произведение $\langle e'_i, e'_j \rangle$ можно записать как:

$$\delta_{ij} = \langle e'_i, e'_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{ki} e_k, \sum_{m=1}^{n} t_{mj} e_m \right\rangle.$$

Используя свойства скалярного произведения, получим:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} t_{ki} t_{mj} \langle e_k, e_m \rangle.$$

Поскольку $\mathcal{E}$ — ортонормированный базис, $\langle e_k, e_m \rangle = \delta_{km}$, и следовательно:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{kj}.$$

Это означает, что $T^T T = E$, где E — единичная матрица. Таким образом, матрица T ортогональна.

2. $T = (t_{ij}), \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E}T, \quad \mathcal{E} = e_1, \ldots, e_n,\ \mathcal{E}' = \{e_1', \ldots, e_n'\}$

Для ортонормированного базиса $\mathcal{E}'$ должно выполняться условие $\delta_{ij} = \langle e_i', e_j' \rangle$.

Выразим e_i' и e_j' через старый базис $\mathcal{E}$:

$$e_i' = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} e_k, \quad e_j' = \sum_{m=1}^{n} t_{mj} e_m.$$

Тогда скалярное произведение $\langle e_i', e_j' \rangle$ можно записать как:

$$\delta_{ij} = \langle e_i', e_j' \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} t_{ki} e_k, \sum_{m=1}^{n} t_{mj} e_m \right\rangle.$$

Используя свойства скалярного произведения, получим:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} t_{ki} \overline{t_{mj}} \langle e_k, e_m \rangle.$$

Поскольку $\mathcal{E}$ — ортонормированный базис, $\langle e_k, e_m \rangle = \delta_{km}$, и следовательно:

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} \overline{t_{kj}}.$$

Это означает, что $T^* T = E$, где E — единичная матрица. Таким образом, матрица T унитарная.

■

1.6 Ортогональное дополнение подпространств

$\mathbb{V}$ - это E или U, $\quad V_1, V_2 \subseteq \mathbb{V}$ - подпространства.

Определение 10.

Ортогональное дополнение подпространства.

$V_1 \perp V_2$, если $\forall x \in V_1, \forall y \in V_2 \ \langle x, y\rangle = 0$

Теорема 7. $V_1 \perp V_2 \Longrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0\}$

Доказательство.

пусть $z \in V_1 \cap V_2$ $z \in V_1, z \in V_2, \ \langle z, z\rangle = 0 \quad \Longrightarrow z = 0$ ∎

Определение 11. $\mathbb{V}_1 \subseteq \mathbb{V} \Longrightarrow \mathbb{V}_1^{\perp} = \{z \in \mathbb{V} : \langle y, z\rangle = 0 \quad \forall y \in \mathbb{V}_1\}$

Теорема 8. $\mathbb{V}_1^{\perp}$ — подпространство.

Доказательство.

1. $\vec{0} \in \mathbb{V}_1^{\perp} \Leftrightarrow \mathbb{V}_1^{\perp} \neq \vec{0}$
2. $z_1, z_2 \in \mathbb{V}_1^{\perp} \quad x = \alpha z_1 + \beta z_2, \quad \forall y \in \mathbb{V}$

   $$\langle y, x\rangle = \langle y, \alpha z_1 + \beta z_2\rangle = \overline{\alpha}\langle y, z_1\rangle + \overline{\beta}\langle y, z_2\rangle = 0. \quad \Longrightarrow x \in \mathbb{V}_1^{\perp}$$

∎

Теорема 9.

$$\mathbb{V}_1, \mathbb{V}_1^{\perp} : \mathbb{E}_1 = \{e_1, \ldots, e_n\} \text{ — ОНБ в } \mathbb{V}_1. \quad \text{Тогда } z \in \mathbb{V}_1^{\perp} \Longrightarrow \langle z, e_1\rangle = \ldots = \langle z, e_k\rangle = 0$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Следует из определения

$\boxed{\Longleftarrow}$ $\langle z, e_1\rangle = \ldots \langle z, e_k\rangle = 0$

$\forall y \in \mathbb{V}_1 : \ y = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$

$\langle z, y\rangle = \langle z, \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n\rangle = \overline{\alpha_1}\langle z, e_1\rangle + \ldots + \overline{\alpha_n}\langle z, e_n\rangle = 0$

∎

1.7 Линейные, билинейные и полуторалинейные формы в Евклидовом пространстве

Пусть $f : \mathbb{V} \to E \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$

Лемма 2. (О скалярном произведении)

Пусть $\mathbb{V}-$ это E или U, $\quad \forall y \in \mathbb{V} \quad \langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle \quad \Longrightarrow x_1 = x_2$

Доказательство.

$\forall y \quad \langle x_1, y\rangle = \langle x_2, y\rangle \implies \langle x_1 - x_2, y\rangle = 0$

Пусть $y = x_1 - x_2 \implies \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle = 0 \implies x_1 - x_2 = 0 \implies x_1 = x_2$ ■

Теорема 10. (Теорема Рисса о линейном функционале)

Пусть $\mathbb{V}-$ это E, $\quad f-$ это линейный функционал из $E^* \implies$
$\implies \exists!\ h \in E : f(x) = \langle x, h\rangle$

Доказательство.

$$\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\} - \text{ ОНБ в } E, \quad x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n, \quad \forall x \in E$$

$$f(x) = \xi_1 f(e_1) + \ldots + \xi_n f(e_n)$$

$$\mu_1 = f(e_1),\ \ldots\ , \mu_n = f(e_n), \quad h = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$$

$$\implies \xi_1\mu_1 + \ldots + \xi_n\mu_n = \langle x, h\rangle$$

теперь покажем, что вектор h единственен. Пойдём от противного.

Пусть $\exists h_1, h_2 \in E \implies f(x) = \langle x, h_1\rangle,\ f(x) = \langle x, h_2\rangle \quad \Longrightarrow \langle x, h_1\rangle = \langle x, h_2\rangle \forall x \in E$

$\implies$ По лемме $h_1 = h_2$

■

Теорема 11. (Теорема типа Рисса о представлении билинейной формы в евклидовом пространстве)

Пусть $f(x, y)$ - билинейная форма в E

$\implies \exists!\ \phi \in \mathcal{L}(E, E) : f(x, y) = \langle x, \phi(y) \rangle$

Доказательство.

1.
$$\text{фиксируем } y \in E,\ f(x, y) \in E^*$$

$$\text{По теореме Рисса } \exists!\ h_y : f(x, y) = \langle x, h_y \rangle$$

$$\phi : E \to E :\ \phi(y) = h_y,\ y_1 \to h_{y_1}, \dots, y_n \to h_{y_n}$$

$$f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2) = \langle x, \phi(y_1) \rangle + \langle x, \phi(y_2) \rangle$$

$$\text{так как } \phi(y_1 + y_2) = \phi(y_1)\ +\ \phi(y_2) \implies f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y) = \alpha \langle x, h_y \rangle = \alpha \langle x, \phi(y) \rangle$$

$$\langle x, \phi(\alpha y) \rangle \leftrightarrow \langle x, \alpha \phi(y) \rangle. \text{ По лемме } (\alpha y) = \alpha \phi(y)$$

$$\implies \exists \phi \in \mathcal{L}(E, E) : f(x, y) = f(x, \phi(y))$$

2.
$$\text{Докажем единственность } \phi \text{ от противного. Пусть } \begin{matrix} f(x, y) = \langle x, \phi_1(y) \rangle \\ f(x, y) = \langle x, \phi_2(y) \rangle \end{matrix} \quad \forall x \in E$$

$$\text{По лемме } \phi_1(y) = \phi_2(y) \implies \phi_1 = \phi_2$$

3.
$$\text{если } \mathbb{V} = U, \text{ то } g(x, y) - \text{ квадратичная форма}$$

$$\implies \exists!\ \phi \in \mathcal{L}(U, U) : g(x, y) = \langle x, \phi(y) \rangle \text{ и } \exists!\ \psi \in \mathcal{L}(U, U) :\ g(x, y) = \langle \psi(x), y \rangle$$

■

Глава 2

Линейные операторы в E и U

2.1 Сопряжённые операторы

Пусть $\mathbb{V}$ - это E или U, $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$

Определение 12.

ϕ^* называется сопряжённым оператором к ϕ, если $\forall x, y \in \mathbb{V} \ \ \langle \phi(x), y \rangle = \langle x, \phi^*(y) \rangle$

Теорема 12. $\forall \phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V}) \quad \exists!\ \phi^* : \phi^* \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$

Доказательство.

$$\langle \phi(x), y \rangle - \text{ полуторалинейная форма}$$

$$\text{По теореме Рисса } \langle \phi(x), y \rangle = \langle x, \psi(y) \rangle$$

$$\text{По определению } \psi = \phi^* \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V}). \text{ Пусть есть 2 сопряжённых оператора } \phi_1^*, \phi_2^*$$

$$\langle \phi(x), y \rangle = \langle x, \phi_1(y)^* \rangle, \quad \langle \phi(x), y \rangle = \langle x, \phi_2(y)^* \rangle$$

$$\Longrightarrow \langle x, \phi_1(y)^* \rangle = \langle x, \phi_2(y)^* \rangle \text{ (По лемме } \phi_1^* = \phi_2^*)$$

■

Свойства ϕ^*:

1. $I^* = I$
2. $(\alpha\phi + \mu\psi)^* = \begin{cases} \alpha\phi^* + \mu\psi^* & \text{в } E \\ \overline{\alpha}\phi^* + \overline{\mu}\psi^* & \text{в } U \end{cases}$
3. $(\phi^*)^* = \phi$
4. $(\phi\psi)^* = \psi^*\phi^*$
5. если $\exists\phi^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, то $\exists(\phi^*)^{-1}$, $(\phi^*)^{-1} = (\phi^{-1})^*$
6. если $\mathcal{E} -$ ОНБ, то $A^{\phi}_{\phi^*} = \begin{cases} A^{eT}_{\phi} \text{ в } E \\ (A^e_{\phi})^* \text{ в } U \end{cases}$

Доказательство.

1.
$$\langle Ix, y\rangle = \langle x, y\rangle = \langle x, Iy\rangle \Longrightarrow I^* = I$$

2.
$$\text{Докажем для } E:$$
$$\langle(\lambda\phi + \mu\psi)(x), y\rangle = \langle\lambda\phi(x) + \mu\psi(x), y\rangle = \lambda\langle\phi(x), y\rangle + \mu\langle\psi(x), y\rangle =$$
$$= \lambda\langle x, \phi(y)^*\rangle + \mu\langle x, \psi(y)^*\rangle = \langle x, \lambda\phi(y)^*\rangle + \langle x, \mu\psi(y)^*\rangle = \langle x, \lambda\phi(y)^* + \mu\psi(y)^*\rangle.$$
$$\Longrightarrow \text{ По лемме } (\lambda\phi + \mu\psi)^* = \lambda\phi^* + \mu\psi^*$$

3.
$$\text{Докажем для } U:$$
$$\langle\phi(x), y\rangle = \langle x, \phi(y)^*\rangle = \overline{\langle\phi(y)^*, x\rangle} = \overline{\langle y, (\phi(x)^*))^*} =$$
$$= \langle(\phi(x)^*)^*, y\rangle \Longrightarrow \phi = (\phi^*)^* \text{ по лемме}$$

4.
$$\langle\phi\psi(x), y\rangle = \langle\psi(x), \phi(y)^*\rangle = \langle x, (\phi\psi)^*(y)\rangle = \langle x, \psi^*\phi(y)^*\rangle$$
$$\Longrightarrow \text{ по лемме } (\phi\psi)^* = \psi^*\phi^* \ \forall x \in \mathbb{V}$$

5.
$$\exists\phi^{-1} : \phi^{-1}\phi = \phi\phi^{-1} = I$$
$$(\phi^{-1}\phi)^* = (\phi\phi^{-1})^* = I^* = I \quad \Longrightarrow \phi^*(\phi^{-1})^* = \phi^*\psi = (\phi^{-1})^*\phi^* = \psi\phi^* = I$$
$$\Longrightarrow \psi^*\psi = \psi\psi^* = I$$

6. Пусть $\mathcal{E}$ — ОНБ. Обозначим матрицу оператора ϕ в базисе $\mathcal{E}$ как $A^e_\phi = (a_{ij})$, а матрицу оператора ϕ^* в том же базисе как $A^e_{\phi^*} = (b_{ij})$.
   (a) Случай 1: Базис $\mathcal{E}$ — ОНБ в пространстве E.

   В этом случае, матрица $A^e_{\phi^*}$ оператора ϕ^* в базисе $\mathcal{E}$ совпадает с транспонированной матрицей A^e_ϕ:

$$A^e_{\phi^*} = (A^e_\phi)^T$$

   Это следует из определения сопряженного оператора в ортонормированном базисе.

   (b) Случай 2: Базис $\mathcal{E}$ — ОНБ в пространстве U.

   В этом случае, матрица $A^e_{\phi^*}$ оператора ϕ^* в базисе $\mathcal{E}$ совпадает с матрицей $(A^e_\phi)^*$:

$$A^e_{\phi^*} = (A^e_\phi)^*$$

   Это также следует из определения сопряженного оператора в ортонормированном базисе, но с учетом комплексного сопряжения и транспонирования.

■

Определение 13.

$\mathbb{V}_1 \subseteq \mathbb{V}, \quad \mathbb{V}_1$ – инвариантно относительно ϕ, если $\forall x \in \mathbb{V}_1 \quad \phi(x) \in \mathbb{V}_1$

Если $\mathbb{V}_1$ инвариантно относительно ϕ, то $\mathbb{V}_1$ инвариантно относительно ϕ^*

$\Longrightarrow 0 = \langle \phi(x), y \rangle = \langle x, \phi(y)^* \rangle \Longrightarrow \quad \phi(y)^* \in \mathbb{V}_1$

Теорема 13.

Пусть $\mathbb{E}$ - произвольный базис, Γ - Матрица Грамма

$\Longrightarrow A^{\mathbb{E}}_{\phi^*} = \Gamma^{-1}(A^{\mathbb{E}}_\phi)^T\,\Gamma, \quad$ если $\mathbb{E}$ - ОНБ, то $\quad A^{\mathbb{E}}_{\phi^*} = (A^{\mathbb{E}}_\phi)^T$

Доказательство.

$$x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n, \quad y = \mu_1 e_1 + \ldots + \mu_n e_n$$

$$\phi(x) = \xi'_1 e_1 + \ldots + \xi'_n e_n, \quad \phi^*(y) = \mu'_1 e_1 + \ldots + \mu'_n e_n$$

$$\langle \phi(x), y \rangle = \langle x, \phi^*(y) \rangle$$

данное равенство можно представить в виде:

$$(\underset{\downarrow}{A^{\mathbb{E}}_{\phi}}\ \xi)^T\ \Gamma\ \underset{\downarrow}{\mu} = \underset{\downarrow}{\xi^T}\ \Gamma\ A^{\mathbb{E}}_{\phi^*}\ \underset{\downarrow}{\mu}$$

$$\Longrightarrow (A^{\mathbb{E}}_{\phi})^T\ \Gamma = \Gamma\ A^{\mathbb{E}}_{\phi^*} \quad \Longrightarrow\ A^{\mathbb{E}}_{\phi^*} = \Gamma^{-1}\ (A^{\mathbb{E}}_{\phi})^T\ \Gamma$$

если ОНБ, то матрица Грамма Γ равна единичной $\Longrightarrow A^{\mathbb{E}}_{\phi^*} = (A^{\mathbb{E}}_{\phi})^T$

■

2.2 Классы линейных операторов в E и U

$\boxed{E:}$

1. Оператор ϕ называется **нормальным**, если $\phi\phi^* = \phi^*\phi$.

   Матрица A - **нормальная**, если $A^T A = AA^T$
2. Оператор ϕ называется **самосопряжённым**, если $\phi^* = \phi$.

   Матрица A - **симметричная**, если $A^T = A$
3. Оператор ϕ называется **ортогональным**, если $\phi^* = \phi^{-1}$.

   Матрица A - **ортогональная**, если $A^T = A^{-1}$

$\boxed{U:}$

1. Оператор ϕ называется **нормальным**, если $\phi\phi^* = \phi^*\phi$.

   Матрица A - **нормальная**, если $A^* A = AA^*$
2. Оператор ϕ называется **эрмитовым**, если $\phi^* = \phi$.

   Матрица A - **эрмитова**, если $A^* = A$
3. Оператор ϕ называется **унитарным**, если $\phi^* = \phi^{-1}$.

   Матрица A - **унитарная**, если $A^* = A^{-1}$

2.3 Нормальные операторы в E

Утверждение 1.

Оператор ϕ - нормальный $\implies$ ϕ^* - нормальный

Доказательство.

$$\phi^* = \psi \implies \phi \cdot \psi = \psi \cdot \phi \implies (\phi\psi)^* = (\psi\phi)^*$$

$$\implies \psi^* \cdot \phi^* = \phi^* \cdot \psi^* \implies \psi^*\psi = \psi\psi^*$$

$$\implies \psi = \phi^* - \text{Нормальный}$$

■

Свойства нормальных операторов:

1. $\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle \phi(x)^*, \phi(y)^* \rangle$
2. $\|\phi(x)\| = \|\phi^*(x)\|$
3. $(\phi - \lambda I)$ — нормальный оператор.
4. Пусть x — собственный вектор для ϕ, соответствующий собственному числу λ, тогда x — собственный вектор для ϕ^*, соответствующий λ.
5. Собственные вектора, соответствующие различным собственным числам нормального оператора, взаимно ортогональны.
6. Пусть e — собственный вектор для ϕ, тогда $E = L(e) \oplus L(e)^\perp$, а подпространства $L(e)$ и $L(e)^\perp$ инвариантны относительно ϕ и ϕ^*.
7. Если $\mathbb{E}$ — ортонормированный базис (ОНБ), то $A_\phi^\mathbb{E}$ — нормальная матрица.
8. Если $\mathbb{E}$ — ОНБ, то $A_\phi^\mathbb{E}$ соответствует нормальному оператору ϕ .

Доказательство.

1. $$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, \phi(\phi^*(y)) \rangle = \langle \phi^*(y), \phi^*(x) \rangle = \langle \phi^*(x), \phi^*(y) \rangle$$

2. $$\|\phi(x)\| = \sqrt{\langle \phi(x), \phi(x) \rangle} = \sqrt{\langle \phi^*(x), \phi^*(x) \rangle} = \|\phi^*(x)\|.$$

3. $$(\phi - \lambda I)(\phi - \lambda I)^* = (\phi - \lambda I)(\phi^* - \lambda I) = \phi\phi^* - \lambda\phi^* - \lambda\phi + \lambda^2 I.$$
$$(\phi - \lambda I)^*(\phi - \lambda I) = (\phi^* - \lambda I)(\phi - \lambda I) = \phi^*\phi - \lambda\phi - \lambda\phi^* + \lambda^2 I.$$
$$\text{Так как } \phi\phi^* = \phi^*\phi, \text{ то } (\phi - \lambda I) \text{ — нормальный оператор.}$$

4.

$$\text{Пусть } x \text{ — собственный вектор для } \phi, \text{ соответствующий } \lambda. \text{ Тогда:}$$

$$\phi(x) = \lambda x \implies (\phi - \lambda I)(x) = 0.$$

$$\|(\phi - \lambda I)(x)\| = 0 = \|(\phi - \lambda I)^*(x)\| \implies (\phi - \lambda I)^*(x) = 0 \implies \phi^*(x) = \lambda x.$$

5.

$$\text{Пусть } e_1 \text{ и } e_2 \text{ — собственные вектора для } \phi, \text{ соответствующие } \lambda_1 \text{ и } \lambda_2 \text{ соответственно. Тогда:}$$

$$\langle \phi(e_1), e_2 \rangle = \langle \lambda_1 e_1, e_2 \rangle = \lambda_1 \langle e_1, e_2 \rangle.$$

$$\langle e_1, \phi^*(e_2) \rangle = \langle e_1, \lambda_2 e_2 \rangle = \lambda_2 \langle e_1, e_2 \rangle.$$

$$\text{Так как } \phi \text{ — нормальный, то } \lambda_1 \langle e_1, e_2 \rangle = \lambda_2 \langle e_1, e_2 \rangle \implies (\lambda_1 - \lambda_2) \langle e_1, e_2 \rangle = 0.$$

$$\text{Если } \lambda_1 \neq \lambda_2, \text{ то } \langle e_1, e_2 \rangle = 0 \implies e_1 \perp e_2.$$

6.

$$\text{Пусть } e \text{ — собственный вектор для } \phi. \text{ Тогда:}$$

$$E = L(e) \oplus L(e)^\perp.$$

$$\phi(e) = \lambda e \in L(e) \implies L(e) \text{ инвариантно относительно } \phi.$$

$$\phi^*(e) = \lambda e \in L(e) \implies L(e) \text{ инвариантно относительно } \phi^*.$$

$$\text{Следовательно, } L(e)^\perp \text{ инвариантно относительно } \phi \text{ и } \phi^*.$$

7.

$$\text{Пусть } \mathbb{E} \text{ — ОНБ. Тогда:}$$

$$A^{\mathbb{E}}_{\phi^*} = (A^{\mathbb{E}}_\phi)^T.$$

$$\text{Так как } \phi \text{ — нормальный, то:}$$

$$A^{\mathbb{E}}_\phi (A^{\mathbb{E}}_\phi)^T = (A^{\mathbb{E}}_\phi)^T A^{\mathbb{E}}_\phi.$$

$$\text{Следовательно, } A^{\mathbb{E}}_\phi \text{ — нормальная матрица.}$$

8.

$$\text{Пусть } \mathbb{E} \text{ — ОНБ. Тогда:}$$

$$A^{\mathbb{E}}_\phi (A^{\mathbb{E}}_\phi)^T = (A^{\mathbb{E}}_\phi)^T A^{\mathbb{E}}_\phi.$$

$$\text{Это эквивалентно } \phi\phi^* = \phi^*\phi \implies \phi \text{ — нормальный оператор.}$$

■

2.4 Основные свойства самосопряжённого оператора

Утверждение 2.

1.
$$\phi\phi^* = \phi^*\phi = \phi\phi \Longrightarrow \phi - \text{ Нормальный оператор}$$

(для самосопряжённых операторов верны 8 свойств нормальных операторов)

2.
$$\text{Пусть } \mathbb{E} \text{ - ОНБ и } \phi = \phi^* \Longrightarrow A^{\mathbb{E}}_{\phi} = (A^{\mathbb{E}}_{\phi})^T \Longrightarrow A^{\mathbb{E}}_{\phi} - \text{симметрична}$$

3.
$$\phi \text{ - самосопряжённый} \Longrightarrow \text{все корни характеристического многочлена } \mathbb{R}$$

Доказательство. (третьего свойства)

$$\text{От противного. } \lambda_0 - \text{корень} \Longrightarrow \lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0,\ \beta_0 \neq 0$$

$\Longrightarrow (A^{\mathbb{E}}_{\phi} - \lambda_0 E)\underset{\downarrow}{\xi} = 0, \quad \xi_0 = x_0 + iw_0 -$ нетривиальное решение.

$$\Longrightarrow (A^{\mathbb{E}}_{\phi} - (\alpha_0 + i\beta_0)E)(\underset{\downarrow}{x_0} + i\underset{\downarrow}{w_0}) = \underset{\downarrow}{0} = \begin{cases} A^{\mathbb{E}}_{\phi}\underset{\downarrow}{x_0} = \alpha_0 \underset{\downarrow}{x_0} - \beta_0 w_0 \\ A^{\mathbb{E}}_{\phi}\underset{\downarrow}{w_0} = \alpha_0 \underset{\downarrow}{w_0} + \beta_0 \underset{\downarrow}{x_0} \end{cases}$$

$$\text{Пусть } u_0 = \underset{\downarrow}{x_0} \text{ в базисе } \mathcal{E}, \quad v_0 = \underset{\downarrow}{w_0} \text{ в базисе } \mathcal{E}$$

$$\begin{cases} \phi(u_0) = \underset{\downarrow}{x_0} \text{ в } \mathcal{E} \\ \phi(v_0) = \underset{\downarrow}{w_0} \text{ в } \mathcal{E} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ \langle \phi(u_0), v_0 \rangle = \alpha_0 \langle u_0, v_0 \rangle - \beta_0 ||v_0||^2 = \langle u_0, \phi(v_0) \rangle = \alpha_0 \langle u_0, v_0 \rangle + \beta_0 ||u_0||^2 \ \Longrightarrow \ \beta_0(||v_0||^2 + ||u_0||^2) = 0$$

$$\Longrightarrow \ \beta_0 = 0 \text{ или } (||v_0||^2 + ||u_0||^2) = 0$$

Поскольку $\beta_0 \neq 0,$ это приводит к противоречию, так как $||v_0||^2 + ||u_0||^2 \neq 0$ для $\xi_0 \neq 0$.

Следовательно, все корни характеристического многочлена должны быть действительными.

∎

2.5 Спектральная теория для самосопряжённых операторов

Теорема 14.

$\phi \in \mathcal{L}(E,E),\ \phi = \phi^*$. Тогда в E $\exists$ ОНБ из собственных векторов оператора ϕ

Доказательство. По индукции по размерности.

1. $\boxed{\text{База индукции}}$ $\quad e_1 \neq 0 -$ базис в E. $\quad \|e_1\| = 1, \quad \phi(e_1) = \lambda e_1$
2. $\boxed{\text{Шаг индукции}}$ $-$ верно, тогда для n :

$\lambda_1 \in \mathbb{R},\ e_1 \sim \lambda_1,\ \|e_1\| = 1 \quad \Longrightarrow E = \mathcal{L}(e_1) \oplus \mathcal{L}^{\perp}(e_1).$

так как $\phi = \phi^* \Longrightarrow \phi -$ нормальный $\Longrightarrow \mathcal{L}(e_1)$ и $\mathcal{L}^{\perp}(e_1)$ инвариантны относительно ϕ

Пусть $\mathrm{E}_1 = \mathcal{L}^{\perp}(e_1) \Longrightarrow \dim(E_1) = n-1,\ \phi_1 = \phi = \phi_1^* \in \mathcal{L}(E_1, E_1)$

(рассматриваем ϕ_1 как ограничение на ϕ на подпространство E_1)
$\Longrightarrow$ по предположению индукции $\exists$ ОНБ $\mathcal{E} = \{e_2, \cdots e_n\}$ из собственных векторов ϕ_1

$\Longrightarrow$ так как $e_1 \perp \{e_2, \cdots, e_n\} \Longrightarrow \mathcal{E} = \{e_1, , e_n\} -$ искомый базис

■

Утверждение 3.

$A = A^T -$ симметричная матрица. Тогда $\exists T -$ ортогональная матрица:

$$\mathrm{T}^T A T = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix},\ \text{причём } \lambda_1, \cdots, \lambda_n - \text{ с.ч. матрицы } A$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{E}$ — ортонормированный базис (ОНБ), $\phi \in \mathcal{L}(E,E)$ и $A_\phi^{\mathcal{E}} = A$.

$$A_\phi^{\mathcal{E}} = (A_\phi^{\mathcal{E}})^T \iff \phi = \phi^* \iff \exists \mathcal{E}' \text{ — ОНБ из собственных векторов для } \phi : \overline{\mathcal{E}'} = \overline{\mathcal{E}} \cdot T.$$

Было доказано, что T — ортогональная матрица перехода от базиса $\mathcal{E}$ к базису $\mathcal{E}'$:

$$T^{-1} = T^T \iff A_\phi^{\mathcal{E}'} = T^{-1} \cdot A_\phi^{\mathcal{E}} \cdot T = T^T \cdot A_\phi^{\mathcal{E}} \cdot T.$$

Так как ϕ — самосопряженный оператор, его матрица в базисе $\mathcal{E}'$ диагональна с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ на диагонали:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

■

2.6 Ортогональные операторы

Определение 14. Оператор ϕ ортогонален, если $\phi^*\phi = \phi\phi^* = I$

Свойства ортогональных операторов:

1. $\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$
2. $\|\phi(x)\| = \|x\|$
3. $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ — ОНБ
4. Если оператор ортогональный, то его собственные числа равны $\lambda = \pm 1$ (если пространство унитарное, то $|\lambda| = 1$)
5. $\mathcal{E}$ — ОНБ $\iff$ $A_\phi^{\mathcal{E}}$ ортогональная матрица
6. Пусть A — ортогональная матрица $\Longrightarrow \det(A) = \pm 1$
7. $\mathcal{E}' = \mathcal{E}T$, где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ — ОНБ $\iff$ T — ортогональная
8. Если $\mathcal{E}$ — ОНБ и T — ортогональная, то $\mathcal{E}' = \mathcal{E}T$ — ОНБ

Доказательство.

1. $$\langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \langle x, \phi^*\phi(y) \rangle = \langle x, Iy \rangle = \langle x, y \rangle$$

2. $$\|\phi(x)\|^2 = \langle \phi(x), \phi(x) \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$$

3. $$\|\phi(e_i)\| = \|e_i\| = 1, \quad \langle \phi(e_i), \phi(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0, \text{ если } i \neq j \Rightarrow \{\phi(e_1), \ldots, \phi(e_n)\} \text{ — ОНБ}$$

4. $$\lambda \text{ — собственное число, соответствующее собственному вектору } e \Rightarrow \phi(e) = \lambda e$$
$$\|\phi(e)\| = \|\lambda e\| = |\lambda|\|e\| \Rightarrow |\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

5. $$\boxed{\Rightarrow} \quad \mathcal{E} \text{ — ОНБ}, \ \phi^*\phi = \phi\phi^* = I \Rightarrow (A_\phi^{\mathcal{E}})^T \cdot A_\phi^{\mathcal{E}} = A_\phi^{\mathcal{E}} \cdot (A_\phi^{\mathcal{E}})^T = E, \Rightarrow A_\phi^{\mathcal{E}} \text{ — ортогональный}$$
$$\boxed{\Leftarrow} \quad \phi \sim A_\phi^{\mathcal{E}}, \ \phi^* \sim (A_\phi^{\mathcal{E}})^T \Rightarrow A_\phi^{\mathcal{E}} \cdot (A_\phi^{\mathcal{E}})^T = (A_\phi^{\mathcal{E}})^T \cdot A_\phi^{\mathcal{E}} = E \Rightarrow \phi\phi^* = \phi^*\phi = I$$

6.
$$A \text{ — ортогональный} \Rightarrow AA^T = E, \quad \det(AA^T) = \det(A)^2 = \det(E) = 1$$

7. Было доказано ранее

8.
$$\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\},\ \mathcal{E}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$$
$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} e_k,\ e'_j = \sum_{s=1}^{n} t_{sj} e_s$$
$$\langle e'_i, e'_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} t_{ki} e_k, \sum_{s=1}^{n} t_{sj} e_s \rangle = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} t_{ki} t_{sj} \langle e_k, e_s \rangle = \sum_{k=1}^{n} t_{ki} t_{kj} = \delta_{ij} \Rightarrow \mathcal{E}' \text{ — ОНБ}$$

■

Лемма 3. (О клеточной диагональной матрице)

Пусть V — линейное пространство, $V = V_1 \oplus V_2, \quad \phi \in \mathcal{L}(V, V)$, и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ — базис в V, где $\mathcal{E}_1$ — базис в V_1, а $\mathcal{E}_2$ — базис в V_2.
Тогда матрица оператора ϕ в базисе $\mathcal{E}$ имеет клеточно-диагональный вид:

$$A_\phi^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_{\phi|_{V_1}}^{\mathcal{E}_1} & 0 \\ 0 & A_{\phi|_{V_2}}^{\mathcal{E}_2} \end{bmatrix}$$

Доказательство.

Пусть $\dim(V_1) = k$ и $\dim(V_2) = n - k$. Базисы $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ определены как:

$$\mathcal{E}_1 = \{e_1, \ldots, e_k\}, \quad \mathcal{E}_2 = \{e_{k+1}, \ldots, e_n\}$$

Рассмотрим действие оператора ϕ на элементы базиса:

$$\begin{cases} \phi(e_1) = \alpha_{11} e_1 + \ldots + \alpha_{k1} e_k + 0 e_{k+1} + \ldots + 0 e_n \\ \vdots \\ \phi(e_k) = \alpha_{1k} e_1 + \ldots + \alpha_{kk} e_k + 0 e_{k+1} + \ldots + 0 e_n \\ \phi(e_{k+1}) = 0 e_1 + \ldots + 0 e_k + \alpha_{k+1,k+1} e_{k+1} + \ldots + \alpha_{nk+1} e_n \\ \vdots \\ \phi(e_n) = 0 e_1 + \ldots + 0 e_k + \alpha_{k+1,n} e_{k+1} + \ldots + \alpha_{nn} e_n \end{cases}$$

Таким образом, матрица оператора ϕ в базисе $\mathcal{E}$ имеет клеточно-диагональный вид:

$$A_\phi^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{k1} & \cdots & \alpha_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1,k+1} & \cdots & \alpha_{nk+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{k+1,n} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} = A_\phi^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} A_{\phi|_{V_1}}^{\mathcal{E}_1} & 0 \\ 0 & A_{\phi|_{V_2}}^{\mathcal{E}_2} \end{bmatrix}$$

■

Теорема 15. (О существовании канонического базиса для орт. оператора)

Пусть $\phi \in \mathcal{L}(E, E)$ — ортогональный оператор. Тогда существует ОНБ $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$, в котором матрица оператора ϕ имеет вид:

$$A_\phi^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{bmatrix}$$

где каждый блок J_i представляет собой либо:

- матрицу размера 1×1: (1) или (-1)
- матрицу поворота размера 2×2 на угол θ: $\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

2.7 Приведение квадратичной формы ортогонального оператора к нормальному виду.

Пусть $f(x,x) = f(x,y)$ - полярная билинейная форма.

Тогда по теореме Рисса (2) : $f(x,y) = \langle x, \phi(y) \rangle,\ \phi \in \mathcal{L}(\mathbb{E}, \mathbb{E})$

Теорема 16.

Если форма f - симметрична, то $\phi = \phi^*$

Доказательство.

$f(x,y) = \langle x, \phi(y) \rangle,\ f(y,x) = \langle y, \phi(x) \rangle = \langle \phi(x), y \rangle = \langle x, \phi^*(y) \rangle$

$\forall x : \langle x, \phi(y) \rangle = \langle x, \phi^*(y) \rangle \implies \phi(y) = \phi^*(y) \implies \forall y \quad \phi = \phi^*$ ■

Теорема 17. $f(x,y)$ - билинейная форма, $\mathcal{E}$ - ОНБ. $\implies A_f^{\mathcal{E}} = A_\phi^{\mathcal{E}}$.

Доказательство. $A_f^{\mathcal{E}} = (a_{ij}^*);\ A_\phi^{\mathcal{E}} = (\hat{a_{ij}})$

$a_{ij}^* = f(e_i, e_j) = \langle e_i, \phi(e_j) \rangle = \langle e_i, \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{a_{kj}} e_k \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \hat{a_{kj}} \langle e_i, e_k \rangle = \hat{a_{ij}}$ ■

Теорема 18.

$f(x,x)$ — квадратичная форма в $\mathbb{E}$. Тогда $\exists$ ОНБ $\hat{\mathcal{E}}$, в котором:

$$A_f^{\hat{\mathcal{E}}} = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\implies f(x,x) = \lambda_1 \hat{e}_1^2 + \lambda_2 \hat{e}_2^2 + \cdots + \lambda_n \hat{e}_n^2$$

Доказательство. $f(x,x) \sim f(x,y) \sim \phi, \quad \phi = \phi^*$

$\implies$ по спектральной теореме для ϕ $\exists$ ОНБ из собсственных векторов оператора ϕ.

$\hat{\mathcal{E}} = \{\hat{e_1}, \ldots, \hat{e_n}\}, \quad A_\phi^{\hat{\mathcal{E}}} = \Lambda \implies f(x,x) = \lambda_1 \hat{\xi_1}^2 + \ldots + \lambda_n \hat{\xi_n}^2$ ■

Теорема 19. (Об одновременном приведении пары форм)

пусть V - Линейное пространство, на котором задана пара квадратичных форм $f(x,x), g(x,x)$, при этом одна из них положительно определена : $f(x,x) > 0$

Тогда в пространстве V $\exists \mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\} : f(x,x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2,\ g(x,x) = \lambda_1\xi_1^2 + +\lambda_n\xi_n^2$

Доказательство. $f^*(x,y)$ полярна к $f(x,x)$ и задаёт скалярное произведение $V \to E$.

Тогда по теореме 18 $\exists$ ОНБ $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$, где g имеет канонический вид $g(x,x) = \lambda_1\xi_1^2 + \ldots + \lambda_n\xi_n^2, \quad f(x,x) = \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2$ ∎

Теорема 20. (о нахождении канонического вида для формы g)

пусть заданы формы $f(x,x) > 0; g(x,x); \quad \mathcal{E}$ - исходный базис

$\mathcal{E}' = \{e_1', \ldots, e_n'\}; \quad f(x,x) = (\xi_1')^2 + \ldots + (\xi_n')^2, \quad g(x,x) = \lambda_1(\xi_1')^2 + \ldots + \lambda_n(\xi_n')^2.$

$\Longrightarrow \lambda$ - корни уравнения $|A_g^{\mathcal{E}} - \lambda A_f^{\mathcal{E}}| = 0. \quad \Longrightarrow (A_g^{\mathcal{E}} - \lambda_i A_f^{\mathcal{E}})\underset{\downarrow}{x} = \underset{\downarrow}{0}$

Доказательство. $\mathcal{E}' = \{e_1', \ldots, e_n'\}, \quad A_f^{\mathcal{E}'} = E$

$$A_g^{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, |A_g^{\mathcal{E}'} - \lambda E| = 0 \iff |A_g^{\mathcal{E}'} - \lambda A_f^{\mathcal{E}'}| = 0$$

$A_f^{\mathcal{E}'} = T^T A_f^{\mathcal{E}}\, T;\ A_g^{\mathcal{E}'} = T^T A_g^{\mathcal{E}}\, T$

$\Longrightarrow |T^T A_g^{\mathcal{E}T} - \lambda T^T A_f^{\mathcal{E}}\, T| = 0 \Longrightarrow |T^T(A_g^{\mathcal{E}} - \lambda A_f^{\mathcal{E}})\, T| = 0$

$\Longrightarrow |T^T|\ (A_g^{\mathcal{E}} - \lambda A_f^{\mathcal{E}})\ |T| = 0 \quad (|T| \neq 0) \Longrightarrow |A_g^{\mathcal{E}} - \lambda A_f^{\mathcal{E}}| = 0 \quad (|T^T| \neq 0)$

$e_i' = \underset{\downarrow}{X}$ в базисе $\mathcal{E}, \underset{\downarrow}{X'}$ в базисе $\mathcal{E}'$

$\underset{\downarrow}{X} = T\underset{\downarrow}{X'} : (A_g^{\mathcal{E}'} - \lambda_i E)\ \underset{\downarrow}{X'} = 0$

$(A_g^{\mathcal{E}'} - \lambda_i A_f^{\mathcal{E}'})\ \underset{\downarrow}{X'} = 0 \iff (T^T A_g^{\mathcal{E}}\, T - \lambda_i T^T A_f^{\mathcal{E}}\, T)\ \underset{\downarrow}{X'} = T^T(A_g^{\mathcal{E}} - \lambda_i A_f^{\mathcal{E}})\, T\underset{\downarrow}{X'} = 0$ ∎

Глава 3

Жорданова форма матрицы

3.1 Многочлены для матриц линейных операторов

Пусть $\mathbb{V} = \mathbb{R}, \quad \phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$

Определение 15.

Пусть $P(t)$ — это многочлен вида:

$$P(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

Тогда $P(\phi)$ определяется как:

$$P(\phi) = a_0 I + a_1 \phi + a_2 \phi^2 + \ldots + a_n \phi^n$$

Многочлен $P(t)$ называется аннулирующим для оператора ϕ, если $P(\phi) = 0$.

Определение 16.

Многочлен $P(a)$ от матрицы A определяется как:

$$P(a) = a_0 E + a_1 A + a_2 A^2 + \ldots + a_n A^n$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — коэффициенты многочлена, а E — единичная матрица.

$A \in M_n, \quad P(t)$ - многочлен, аннулирующий матрицу A, если $P(A) = 0$

Определение 17.

Минимальный многочлен для матрицы A_0**:** $M_A(t)$

- $M_A(A) = 0$
- Старший коэффициент при $t^k = 1 \implies M_A(t) = t^k + \dots$
- $M_A(t)$ имеет минимальную возможную степень

Минимальный многочлен для оператора ϕ**:** $M_\phi(t)$ (аналогичные свойства)

Теорема 21.

Пусть $P(t)$ — аннулирующий многочлен для матрицы A, а $M_A(t)$ — минимальный многочлен. Тогда:

$$P(t) = q(t) \cdot M_A(t)$$

для некоторого многочлена $q(t)$.

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что

$$P(t) = q(t) \cdot M_A(t) + r(t), \text{где } \deg(r(t)) < \deg(M_A(t))$$

Поскольку $P(t)$ аннулирует A, имеем:

$$0 = P(A) = q(A) \cdot M_A(A) + r(A).$$

Так как $M_A(A) = 0 \implies 0 = r(A)$

Однако, это противоречит тому, что $\deg(r(t)) < \deg(M_A(t))$, поскольку $M_A(t)$ — минимальный многочлен. Следовательно, $r(t) = 0$, и

$$P(t) = q(t) \cdot M_A(t).$$

∎

Теорема 22 (Гамильтона-Кэли)**.**

Пусть $A \in M$, и $X_A(t)$ - характеристический многочлен матрицы A, т.е. $X_A(t) = \det(A - t \cdot E)$. Тогда $X_A(t)$ является аннулирующим многочленом для A, т.е. $X_A(A) = 0$.

Доказательство. Пусть $A \in M$ и $A - t \cdot E = (c_{ij})(t)$. Обозначим $B(t) = (b_{ij}(t))$, где $b_{ij}(t)$ - алгебраические дополнения элементов C_{ij}.

Тогда $b_{ij}(t) = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)} t + \ldots + b_{ij}^{(n-1)} t^{n-1}$.

Следовательно, $B(t) = B^{(0)} + B^{(1)} t + \ldots + B^{(n-1)} t^{n-1}$, и $(A - t \cdot E)^{-1} = \frac{1}{\det(A - t \cdot E)} \cdot B(t)$.

Поскольку $B(t) = (A - t \cdot E)^{-1} \cdot X_A(t)$ для $t \neq \lambda_i$, где λ_i - корни характеристического уравнения, умножим на $(A - t \cdot E)$ справа:

$$B(t)(A - t \cdot E) = X_A(t) E$$

Это приводит к равенству многочленов:

$$(B^{(0)} + B^{(1)} t + \ldots + B^{(n-1)} t^{n-1})(A - t \cdot E) = (\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n) E$$

Убирая ограничение $t \neq \lambda_i$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} B^{(0)} A = \alpha_0 E \\ B^{(1)} A - B^{(0)} E = \alpha_1 E \\ B^{(2)} A - B^{(1)} E = \alpha_2 E \\ \vdots \\ B^{(n)} A - B^{(n-1)} E = \alpha_n E \end{cases}$$

Таким образом, $0 = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_n A^n = X_A(A)$.

Следовательно, характеристический многочлен делится на минимальный, и все корни минимального многочлена вещественны. ■

3.2 Корневые подпространства

Пусть $\mathbb{V}$ - Линейное пространство, $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, все корни $X_\phi(t)$ вещественные.

Определение 18.

$x_0 \neq 0$ - Корневой вектор, соответствующий λ_0, если $\exists k \in \mathbb{N} : (\phi - \lambda_0 I)^k x_0 = 0$.

k - высота корневого вектора x_0, если $(\phi - \lambda_0 I)^k x_0 = 0$, но $(\phi - \lambda_0 I)^{k-1} x_0 \neq 0$.

$\Longrightarrow$ собственный вектор - частный случай корневого вектора с высотой 1.

Теорема 23 (О корневом подпространстве)**.**

Пусть λ - собственное число оператора ϕ, тогда

$$\mathcal{L}_{(\alpha)} = \{\text{все корневые вектора } \sim \alpha \oplus \underset{\downarrow}{0}\}.$$

$\Longrightarrow \mathcal{L}_{(\alpha)}$ является подпространством $\mathbb{V}$ и называется корневым подпространством.

Доказательство.

Поскольку $\underset{\downarrow}{0} \in \mathcal{L}_{(\alpha)}$, то $\mathcal{L}_{(\alpha)} \neq \varnothing$. Пусть $x_1, x_2 \in \mathcal{L}_{(\alpha)}$ и $\xi, \mu \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим $y = \xi x_1 + \mu x_2$. Тогда $y \in \mathcal{L}_{(\alpha)}$.

$\Longrightarrow \exists k, s \in \mathbb{N} : (\phi - \alpha I)^k x_1 = 0$ и $(\phi - \alpha I)^s x_2 = 0$.

Пусть $m = \max(k, s)$. Тогда:

$$(\phi - \alpha I)^m y = (\phi - \alpha I)^m (\xi x_1 + \mu x_2) = \xi(\phi - \alpha I)^m x_1 + \mu(\phi - \alpha I)^m x_2 = 0.$$

Следовательно, $\mathcal{L}_{(\alpha)}$ является подпространством. Пусть $\mathbb{V}_1 \subseteq \mathbb{V}$ и $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$.

Тогда $\mathbb{V}_1$ инвариантно относительно ϕ, и $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \dots, e_k\}$ можно дополнить до базиса $\mathcal{E}$. ■

Теорема 24 (О высоте корневого вектора)**.**

$dim(\mathcal{L}_\alpha) = m, \ x \neq \underset{\downarrow}{0} \in \mathcal{L}_\alpha, \ k$ - max высота корневого вектора x. $\Longrightarrow k \leq m$

Доказательство. Рассмотрим ограничение оператора ϕ на корневое подпространство $\mathcal{L}_\alpha$, обозначим его как $\phi_1 = \phi|_{\mathcal{L}_\alpha}$.

Поскольку $\mathcal{L}_\alpha$ — корневое подпространство, характеристический многочлен ϕ_1 имеет вид:

$$\phi_1(t) = (t - \alpha)^m.$$

Это означает, что минимальный многочлен $X_{\phi_1}(\lambda)$ оператора ϕ_1 также имеет вид:

$$X_{\phi_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^m.$$

Таким образом, $\forall x \in \mathcal{L}_\alpha$ выполняется:

$$(\phi_1 - \alpha I)^m(x) = 0.$$

Пусть $x \neq 0$ — корневой вектор максимальной высоты k. Это означает, что:

$$(\phi_1 - \alpha I)^k(x) = 0,$$

$\forall j < k$ выполняется:

$$(\phi_1 - \alpha I)^j(x) \neq 0.$$

Поскольку $X_{\phi_1}(\lambda) = (\lambda - \alpha)^m$ и $m = \dim(\mathcal{L}_\alpha)$, максимальная высота корневого вектора x не может превышать m. Следовательно, $k \leq m$.

Таким образом, доказательство показывает, что высота корневого вектора ограничена размерностью корневого подпространства. ■

Теорема 25. (Об инвариантности корневого подпространства)

Пусть λ - собственное число оператора ϕ. $\Longrightarrow \mathcal{L}_\lambda$ инвариантно относительно ϕ

Доказательство. Рассмотрим вектор $x \in \mathcal{L}_\lambda$. По определению корневого подпространства, это означает, что существует такое натуральное число k, что:

$$(\phi - \lambda I)^k(x) = 0.$$

Нам нужно показать, что $\phi(x) \in \mathcal{L}_\lambda$, то есть:

$$(\phi - \lambda I)^k(\phi(x)) = 0.$$

Поскольку $(\phi - \lambda I)^k(x) = 0$, мы можем применить оператор ϕ к обеим частям этого уравнения:

$$\phi((\phi - \lambda I)^k(x)) = \phi(0) = 0.$$

Используя ассоциативность операторов, мы можем переписать это как:

$$(\phi - \lambda I)^k(\phi(x)) = 0.$$

Таким образом, $\phi(x) \in \mathcal{L}_\lambda$, что доказывает инвариантность корневого подпространства $\mathcal{L}_\lambda$ относительно оператора ϕ. ■

Теорема 26 (О линейной независимости корневых векторов разной высоты)**.**

Пусть $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{L}_\lambda$ и $k_1, \ldots, k_m$ — их соответствующие высоты. Тогда векторы $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы.

Доказательство (от противного). Предположим, что векторы $x_1, \ldots, x_m$ ЛЗ.

Тогда существует нетривиальная линейная комбинация:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m = 0, \quad (\exists j : \lambda_j \neq 0)$$

Применим оператор $(\phi - \lambda I)^{k_m - 1}$ к этой комбинации:

$$\lambda_1(\phi - \lambda I)^{k_m-1}x_1 + \ldots + \lambda_{m-1}(\phi - \lambda I)^{k_m-1}x_{m-1} + \lambda_m(\phi - \lambda I)^{k_m-1}x_m = 0.$$

Поскольку $k_1, \ldots, k_{m-1} \leq k_m - 1$, то:

$$\lambda_m(\phi - \lambda I)^{k_m-1}x_m = 0 \implies \lambda_m = 0.$$

Аналогично, применяя оператор $(\phi - \lambda I)^{k_m-1}$ к оставшимся векторам, получаем, что $\lambda_{m-1} = 0, \ldots, \lambda_1 = 0$. Это противоречит предположению о нетривиальности линейной комбинации.

Следовательно, векторы $x_1, \ldots, x_m$ ЛНЗ. ■

Теорема 27 (О разложении пространства в прямую сумму корневых подпространств)**.**

Пусть $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ и все корни характеристического многочлена ϕ вещественные: $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Тогда пространство $\mathbb{V}$ разлагается в прямую сумму корневых подпространств:

$$\mathbb{V} = \mathcal{L}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{\lambda_s}.$$

Доказательство.

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $x \in \mathbb{V}$. Пусть $m_x(t)$ — минимальный многочлен для x, который удовлетворяет следующим условиям:

1. $m_x(\phi)(x) = 0$.
2. $m_x(t)$ имеет старший коэффициент 1.
3. $m_x(t)$ минимальной возможной степени.

Известно, что $m_x(t)$ делит характеристический многочлен $m_\phi(t)$, и все его корни вещественные. Следовательно, $m_x(t)$ можно представить в виде:

$$m_x(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_r)^{k_r}.$$

Мы утверждаем, что x можно разложить как $x = x_1 + \ldots + x_r$, где $x_i \in \mathcal{L}_{\lambda_i}$.

Докажем это утверждение методом математической индукции по r.

База индукции: $r = 1$. В этом случае $m_x(t) = (t - \lambda_1)^{k_1}$, и, следовательно, $(\phi - \lambda_1 I)^{k_1}(x) = 0$, что означает $x \in \mathcal{L}_{\lambda_1}$. Таким образом, $x = x + 0 + \ldots + 0$.

Шаг индукции: Предположим, что утверждение верно для $r - 1$. Рассмотрим случай r. Пусть

$$m_x(t) = f(t) \cdot g(t),$$

где $f(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_{r-1})^{k_{r-1}}$ и $g(t) = (t - \lambda_r)^{k_r}$.

По теореме из школьной алгебры существуют многочлены $u(t)$ и $v(t)$ такие, что

$$u(t) \cdot f(t) + v(t) \cdot g(t) = 1.$$

Применяя оператор ϕ, получаем:

$$u(\phi) \cdot f(\phi) + v(\phi) \cdot g(\phi) = I.$$

Следовательно,

$$x = u(\phi) \cdot f(\phi)(x) + v(\phi) \cdot g(\phi)(x) = x_1 + x_2,$$

где $x_1 = u(\phi) \cdot f(\phi)(x)$ и $x_2 = v(\phi) \cdot g(\phi)(x)$.

Докажем, что x_1 и x_2 принадлежат соответствующим корневым подпространствам. Поскольку $g(\phi)(x_1) = 0$, $m_{x_1}(t)$ делит $g(t)$, и по предположению индукции x_1 можно разложить в сумму векторов из корневых подпространств.

Аналогично, $f(\phi)(x_2) = 0$, и $m_{x_2}(t)$ делит $f(t)$, что также позволяет разложить x_2 в сумму векторов из корневых подпространств.

Таким образом, любой вектор $x \in \mathbb{V}$ можно разложить в сумму векторов из корневых подпространств, что доказывает, что $\mathbb{V} = \mathcal{L}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{\lambda_s}$. ■

Доказательство. (Что сумма является прямой).

Докажем утверждение по индукции по количеству слагаемых в прямой сумме.

База индукции: Рассмотрим случай $\mathcal{L}_\lambda \oplus \mathcal{L}_\beta$. Предположим, что $\mathcal{L}_\lambda \cap \mathcal{L}_\beta = \{0\}$.

Пусть $x \neq 0$ и $x \in \mathcal{L}_\lambda \cap \mathcal{L}_\beta$. Тогда $x \in \mathcal{L}_\lambda$, следовательно, $(\phi - \lambda I)^k(x) = 0$.

Также $x \in \mathcal{L}_\beta$, следовательно, $(\phi - \beta I)^s(x) = 0$. Это означает, что $m_x(t)$ делит оба многочлена $(t-\lambda)^k$ и $(t-\beta)^s$. Поскольку $\lambda \neq \beta$, $m_x(t) = 1$, что противоречит предположению $x \neq 0$. Следовательно, $x = 0$.

Шаг индукции: Предположим, что для m подпространств $\mathcal{L}_{\lambda_1}, \ldots, \mathcal{L}_{\lambda_m}$
выполнено $\mathcal{L}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{\lambda_m} \cap \mathcal{L}_{\lambda_{m+1}} = \{0\}$.

Пусть $x_{m+1} \neq 0$, $x_{m+1} \in \mathcal{L}_{\lambda_{m+1}}$, и $x_{m+1} \in \mathcal{L}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{\lambda_m}$. Тогда $x_{m+1} = x_1 + \ldots + x_m$, где $x_i \in \mathcal{L}_{\lambda_i}$.

Т.к. $(\phi - \lambda_{m+1} I)^{k_{m+1}}(x_{m+1}) = 0$, то $(\phi - \lambda_{m+1} I)^{k_{m+1}}(x_1) + \ldots + (\phi - \lambda_{m+1} I)^{k_{m+1}}(x_m) = 0$.

Это означает, что $y_1 + \ldots + y_m = 0$, где $y_i = (\phi - \lambda_{m+1} I)^{k_{m+1}}(x_i)$.

Поскольку сумма $\mathcal{L}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{\lambda_m}$ прямая, то $y_i = 0$ для всех i. Следовательно, $x_i \in \mathcal{L}_{\lambda_i} \cap \mathcal{L}_{\lambda_{m+1}} = \{0\}$, что означает $x_i = 0$ для всех i.

Это противоречит предположению $x_{m+1} \neq 0$.

Таким образом, $z \in \mathcal{L}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{\lambda_m} \oplus \mathcal{L}_{\lambda_{m+1}}$ представляется единственным образом

$$z = z_1 + \ldots + z_m + z_{m+1},$$

где $z_i \in \mathcal{L}_{\lambda_i}$. Следовательно, сумма $\mathcal{L}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{\lambda_{m+1}}$ является прямой. ■

Следствие 1 (О ЛНЗ векторов из разных корневых подпространств).

Пусть $x_1 \in \mathcal{L}_{\alpha_1}, \ldots, x_m \in \mathcal{L}_{\alpha_m}$ — ненулевые векторы из различных корневых подпространств (т.е. $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$). Тогда система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$ линейно независима.

Доказательство. От противного:

Предположим, что система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$ линейно зависима. Тогда
существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$, не все равные нулю, такие что:

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m = 0$$

Заметим, что:

- $\lambda_1 x_1 \in \mathcal{L}_{\alpha_1}$ (т.к. корневое подпространство является линейным)
- $\vdots$
- $\lambda_m x_m \in \mathcal{L}_{\alpha_m}$

По доказанной теореме, сумма корневых подпространств $\mathcal{L}_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{\alpha_m}$ является прямой.

Следовательно, нулевой вектор может быть представлен единственным образом как сумма векторов из этих подпространств, а именно:

$$0 = 0 + \ldots + 0$$

Таким образом:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_1 = 0 \\ \vdots \\ \lambda_m x_m = 0 \end{cases}$$

Поскольку все $x_i \neq 0$ по условию, получаем:

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = 0$$

Это противоречит предположению о том, что не все λ_i равны нулю.
Следовательно, система векторов $\{x_1, \ldots, x_m\}$ линейно независима. ■

Определение 19.

Жордановой клеткой порядка k с собственным числом λ называется квадратная матрица размера $k \times k$ вида:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Определение 20.

Жордановой формой матрицы A называется блочно-диагональная матрица вида:

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{k_2}(\lambda_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{k_s}(\lambda_s) \end{pmatrix}$$

где $J_{k_i}(\lambda_i)$ — жордановы клетки, соответствующие собственным числам λ_i.

Определение 21.

Пусть $\phi : V \to V$ — линейный оператор и $x \in V$. Циклическим подпространством $\{x\}_\phi$ называется наименьшее подпространство, содержащее вектор x и инвариантное относительно оператора ϕ.

Другими словами, если x — корневой вектор, соответствующий собственному числу λ_i, то:

$$\{x\}_\phi = \operatorname{span}\{x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^{k-1}(x)\}$$

где k - наименьшее натуральное число, при котором система векторов $x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^k(x)$ становится линейно зависимой.

Теорема 28. Пусть $\phi : V \to V$ — линейный оператор, и $x \in V$ — корневой вектор, соответствующий собственному значению λ. Тогда циклическое подпространство $\{x\}_\phi$ существует.

Доказательство. Рассмотрим последовательность векторов:

$$x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^k(x),$$

где k — наименьшее натуральное число, при котором эта система становится линейно зависимой. Такое k существует, так как пространство V конечномерно.

Построим подпространство:

$$\{x\}_\phi = \operatorname{span}\{x, \phi(x), \phi^2(x), \dots, \phi^{k-1}(x)\}.$$

1. Содержит x:
По построению, $x \in \{x\}_\phi$.

2. Инвариантность относительно ϕ:
Для любого вектора $v \in \{x\}_\phi$ его образ $\phi(v)$ также принадлежит $\{x\}_\phi$.

Действительно, если

$$v = \alpha_0 x + \alpha_1 \phi(x) + \dots + \alpha_{k-1}\phi^{k-1}(x),$$

то

$$\phi(v) = \alpha_0 \phi(x) + \alpha_1 \phi^2(x) + \dots + \alpha_{k-1}\phi^k(x).$$

Поскольку $\phi^k(x)$ линейно выражается через предыдущие векторы (так как система линейно зависима), $\phi(v) \in \{x\}_\phi$.

3. Минимальность:

Пусть W — любое подпространство, содержащее x и инвариантное относительно ϕ. Тогда:

- $x \in W$

- $\phi(x) \in W$ (так как W инвариантно)
- $\phi^2(x) \in W$
- $\vdots$
- $\phi^{k-1}(x) \in W$

Следовательно, $\{x\}_\phi \subseteq W$.

Таким образом, $\{x\}_\phi$ — наименьшее подпространство, содержащее x и инвариантное относительно ϕ. ■

Теорема 29 (О базисе циклического подпространства)**.**

Пусть x — корневой вектор высоты $k \sim$ собственному значению λ. Тогда векторы

$$\begin{cases} e_0 = x, \\ e_1 = \phi(x), \\ \quad \vdots \\ e_{k-1} = \phi^{k-1}(x) \end{cases}$$

образуют базис в циклическом подпространстве $\{x\}_\phi$.

Доказательство. Рассмотрим корневой вектор $x = e_0$ высоты k. По определению корневого вектора:

$$(\phi - \lambda I)^k x = 0, \quad \text{но} \quad (\phi - \lambda I)^{k-1} x \neq 0.$$

Определим векторы:

$$\begin{cases} e_1 = (\phi - \lambda I)x, \\ e_2 = (\phi - \lambda I)^2 x, \\ \quad \vdots \\ e_{k-1} = (\phi - \lambda I)^{k-1} x. \end{cases}$$

Заметим, что:

- $e_0 = x$ имеет высоту k,
- $e_1 = (\phi - \lambda I)x$ имеет высоту $k-1$,
- $\vdots$
- $e_{k-1} = (\phi - \lambda I)^{k-1}x$ имеет высоту 1.

Векторы $e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}$ линейно независимы, так как они имеют разную высоту.

Пусть $y \in \{x\}_\phi$. Тогда y можно выразить как:

$$y = p(\phi)(x),$$

где $p(t)$ — многочлен степени не выше $k-1$:

$$p(t) = \beta_0 + \beta_1(t - \lambda) + \ldots + \beta_{k-1}(t - \lambda)^{k-1}.$$

Подставляя ϕ вместо t, получаем:

$$y = \beta_0 x + \beta_1(\phi - \lambda I)x + \ldots + \beta_{k-1}(\phi - \lambda I)^{k-1}x.$$

Это эквивалентно:

$$y = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_{k-1} e_{k-1}.$$

Таким образом, мы показали, что векторы $e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}$ линейно независимы и любой вектор $y \in \{x\}_\phi$ можно выразить как их линейную комбинацию:

Таким образом, $\{e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ образует базис в циклическом подпространстве $\{x\}_\phi$.

Рассмотрим двойственный базис $\epsilon^* = \{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_k^*\}$, который строится путём перестановки векторов $\{e_0, e_1, \ldots, e_{k-1}\}$ в обратном порядке:

$$\begin{cases} e_1^* = e_{k-1}, \\ e_2^* = e_{k-2}, \\ \quad\vdots \\ e_k^* = e_0. \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{cases} (\phi - \lambda I)e_1^* = (\phi - \lambda I)e_{k-1} = 0, \\ (\phi - \lambda I)e_2^* = (\phi - \lambda I)e_{k-2} = e_{k-1} = e_1^*, \\ \quad\vdots \\ (\phi - \lambda I)e_k^* = (\phi - \lambda I)e_0 = e_1 = e_{k-1}^*. \end{cases}$$

Это означает, что ϵ^* — циклический базис (или жорданова цепочка) в $\{x\}_\phi$. ■

Теорема 30 (О существовании Жордановой формы матрицы)**.**

Пусть U — инвариантное подпространство, состоящее из корневых векторов, соответствующих собственному значению λ.
Тогда U является прямой суммой циклических подпространств.

Теорема 31.

Пусть $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$. Если все корни характеристического уравнения действительные, то в пространстве $\mathbb{V}$ существует базис $\mathcal{E}$, в котором матрица $A_{\mathcal{E}}^{\phi}$ имеет Жорданову форму.

Доказательство.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — все собственные числа оператора ϕ, и по условию они вещественные. Рассмотрим разложение пространства $\mathbb{V}$ в прямую сумму корневых подпространств, соответствующих этим собственным значениям:

$$\mathbb{V} = \mathcal{L}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{L}_{\lambda_s},$$

где $\mathcal{L}_{\lambda_i}$ — корневое подпространство, соответствующее собственному значению λ_i.

По теореме 30 (о разложении корневого подпространства), каждое корневое подпространство $\mathcal{L}_{\lambda_i}$ раскладывается в прямую сумму циклических подпространств:

$$\mathcal{L}_{\lambda_i} = \mathbb{V}_{i1} \oplus \ldots \oplus \mathbb{V}_{ik_i},$$

где $\mathbb{V}_{ij}$ — циклическое подпространство, инвариантное относительно оператора ϕ.

В каждом циклическом подпространстве $\mathbb{V}_{ij}$ построим циклический базис $\mathcal{E}^{ij}$, следуя теореме о базисе циклического подпространства. Пусть $\mathbb{V}_{ij}$ порождается корневым вектором v_{ij} высоты m_{ij}. Тогда базис $\mathcal{E}^{ij}$ имеет вид:

$$\mathcal{E}^{ij} = \left\{ v_{ij}, (\phi - \lambda_i I)v_{ij}, (\phi - \lambda_i I)^2 v_{ij}, \ldots, (\phi - \lambda_i I)^{m_{ij}-1} v_{ij} \right\}.$$

Рассмотрим действие оператора ϕ на элементы циклического базиса $\mathcal{E}^{ij}$:

$$\begin{gathered}
\phi(v_{ij}) = \lambda_i v_{ij} + (\phi - \lambda_i I)v_{ij}, \\
\phi\left((\phi - \lambda_i I)v_{ij}\right) = \lambda_i (\phi - \lambda_i I)v_{ij} + (\phi - \lambda_i I)^2 v_{ij}, \\
\vdots \\
\phi\left((\phi - \lambda_i I)^{m_{ij}-1} v_{ij}\right) = \lambda_i (\phi - \lambda_i I)^{m_{ij}-1} v_{ij}.
\end{gathered}$$

Таким образом, матрица оператора ϕ в базисе $\mathcal{E}^{ij}$ имеет вид жордановой клетки:

$$J_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Единички над диагональю в матрице J_{ij} возникают из-за того, как оператор ϕ действует на базисные векторы $\mathcal{E}^{ij}$. Рассмотрим подробнее:

Оператор ϕ переводит каждый базисный вектор в линейную комбинацию текущего и следующего вектора базиса. Например:

$$\phi(v_{ij}) = \lambda_i v_{ij} + (\phi - \lambda_i I)v_{ij}.$$

Здесь $\lambda_i v_{ij}$ соответствует диагональному элементу λ_i, а $(\phi - \lambda_i I)v_{ij}$ — следующему базисному вектору, что дает единичку над диагональю.

Объединяя базисы $\mathcal{E}^{ij}$ для всех циклических подпространств, получаем базис всего пространства $\mathbb{V}$:

$$\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcup_{j=1}^{k_i} \mathcal{E}^{ij}.$$

Поскольку подпространства $\mathbb{V}_{ij}$ инвариантны и образуют прямую сумму, действие оператора ϕ на векторы из одного подпространства $\mathbb{V}_{ij}$ не затрагивает векторы из других подпространств.

Таким образом, матрица оператора ϕ в базисе $\mathcal{E}$ будет иметь блочно-диагональную структуру, где каждый блок соответствует действию ϕ на одно из циклических подпространств $\mathbb{V}_{ij}$. Каждый блок — это жорданова клетка J_{ij}, соответствующая подпространству $\mathbb{V}_{ij}$.

Итак, матрица $A_{\mathcal{E}}^{\phi}$ имеет вид:

$$A_{\mathcal{E}}^{\phi} = \begin{pmatrix} J_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{12} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{sk_s} \end{pmatrix},$$

где каждая J_{ij} — жорданова клетка, соответствующая циклическому подпространству $\mathbb{V}_{ij}$. Это и означает, что матрица $A_{\mathcal{E}}^{\phi}$ имеет Жорданову форму. ■

Следствие 2.

Размер жордановой клетки никогда не превышает алгебраическую кратность данного собственного числа λ_i

Теорема 32 (О единственности Жордановой формы)**.**

Пусть $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ — линейный оператор, и все собственные значения λ_i оператора ϕ вещественные. Тогда Жорданова форма матрицы $A_{\mathcal{E}}^{\phi}$ определена однозначно с точностью до порядка расположения Жордановых клеток. Более того, количество Жордановых клеток одного и того же размера, соответствующих каждому собственному числу, является инвариантом оператора ϕ.

Доказательство. Рассмотрим собственное число λ оператора ϕ и его Жорданову форму J. Пусть:

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{количество клеток размера } 1 \times 1, \\ S_2 &= \text{количество клеток размера } 2 \times 2, \\ &\vdots \\ S_p &= \text{количество клеток размера } p \times p. \end{aligned}$$

Нам нужно доказать, что числа $S_1, S_2, \ldots, S_p$ не зависят от выбора Жорданова базиса.

Введем обозначения для рангов степеней оператора $\phi - \lambda I$:

$$r_1 = \operatorname{rang}(\phi - \lambda I) = \operatorname{rang}(J - \lambda E),$$

$$r_2 = \operatorname{rang}(\phi - \lambda I)^2 = \operatorname{rang}(J - \lambda E)^2,$$

$$\vdots$$

$$r_p = \operatorname{rang}(\phi - \lambda I)^p = \operatorname{rang}(J - \lambda E)^p.$$

Заметим, что ранг оператора ϕ равен количеству линейно независимых столбцов в матрице $A_{\mathcal{E}}^{\phi}$. Это можно записать как:

$$\operatorname{rang}(\phi) = \dim(\operatorname{Im}(\phi)).$$

Рассмотрим Жорданову клетку размера $k \times k$, соответствующую λ:

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \overset{\text{Вычитаем } \lambda}{\rightsquigarrow} J_k(\lambda) - \lambda E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг этой матрицы равен $k-1$, так как первые $k-1$ строк линейно независимы, а последняя строка нулевая. Таким образом, для каждой клетки размера $k \times k$:

$$\operatorname{rang}(J_k(\lambda) - \lambda E) = k - 1.$$

Отсюда следует, что размер клетки k выражается через ранг как:

$$k = \operatorname{rang}(J_k(\lambda) - \lambda E) + 1.$$

Если же вычесть λ из Жордановой клетки, соответствующей другому собственному числу, то матрица останется невырожденной, и её ранг не изменится.

Общий размер всех клеток равен:

$$n = \sum_{k=1}^{p} k \cdot S_k.$$

Подставляя выражение для k, получаем:

$$n = \sum_{k=1}^{p} (\operatorname{rang}(J_k(\lambda) - \lambda E) + 1) \cdot S_k.$$

Раскрывая сумму, имеем:

$$n = \sum_{k=1}^{p} \operatorname{rang}(J_k(\lambda) - \lambda E) \cdot S_k + \sum_{k=1}^{p} S_k.$$

Первая сумма равна r_1, так как r_1 — это общий ранг оператора $\phi - \lambda I$. Вторая сумма — это общее количество клеток, соответствующих λ. Таким образом:

$$n = r_1 + S_1 + S_2 + \ldots + S_p.$$

Теперь рассмотрим ранг $r_2 = \operatorname{rang}(J - \lambda E)^2$. Для Жордановой клетки размера $k \times k$:

$$(J_k(\lambda) - \lambda E)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим разность рангов $r_1 - r_2$. Эта разность показывает, насколько уменьшился ранг при возведении оператора $\phi - \lambda I$ в квадрат. Эта разность связана с количеством Жордановых клеток.

Для каждой Жордановой клетки размера $k \times k$:

$$\operatorname{rang}(J_k(\lambda) - \lambda E) - \operatorname{rang}(J_k(\lambda) - \lambda E)^2 = \begin{cases} r_1 - r_2 = (k-1) - (k-2) = 1, & \text{если } k \geq 2, \\ 0, & \text{если } k = 1. \end{cases}$$

Следовательно, общая разность $r_1 - r_2$ равна количеству клеток размера $k \times k$ $(k \geq 2)$:

$$r_1 - r_2 = S_2 + S_3 + \ldots + S_p.$$

Аналогично, для разностей $r_{m-1} - r_m$ получаем:

$$r_{m-1} - r_m = S_m + S_{m+1} + \ldots + S_p.$$

Таким образом, система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} n - r_1 = S_1 + S_2 + \ldots + S_p, \\ r_1 - r_2 = S_2 + S_3 + \ldots + S_p, \\ r_2 - r_3 = S_3 + S_4 + \ldots + S_p, \\ \vdots \\ r_{p-1} - r_p = S_p. \end{cases}$$

Решим систему последовательно. Из последнего уравнения:

$$S_p = r_{p-1} - r_p.$$

Подставляя S_p в предпоследнее уравнение:

$$r_{p-2} - r_{p-1} = S_{p-1} + S_p = S_{p-1} + (r_{p-1} - r_p),$$

откуда:

$$S_{p-1} = r_{p-2} - 2r_{p-1} + r_p.$$

Продолжая аналогично, получаем общую формулу:

$$S_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1} \quad \text{для } k = 1, 2, \ldots, p-1,$$

где $r_0 = n$ и $r_{p+1} = 0$.

Поскольку ранги r_k не зависят от выбора базиса, числа S_k, выраженные через r_k, также не зависят от выбора базиса. Это доказывает, что количество Жордановых клеток каждого размера является инвариантом оператора ϕ. ■

Следствие 3. Пусть $\mathcal{L}^\lambda$ — собственное подпространство линейного оператора ϕ, соответствующее собственному значению λ. Тогда:

$$\dim(\mathcal{L}^\lambda) = s(\lambda) = j(\lambda),$$

где:

- $s(\lambda)$ — количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ;
- $j(\lambda)$ — количество Жордановых клеток, соответствующих λ.

Доказательство. Рассмотрим оператор $\phi - \lambda I$, где I — тождественный оператор. Из классического курса линейной алгебры известно:

$$\dim(\ker(\phi - \lambda I)) + \dim(Im(\phi - \lambda I)) = n,$$

где n — размерность пространства.

Заметим, что:

- $\ker(\phi - \lambda I)$ — это собственное подпространство $\mathcal{L}^\lambda$, соответствующее λ.
- $\dim(\ker(\phi - \lambda I)) = \dim(\mathcal{L}^\lambda)$.
- $\dim(Im(\phi - \lambda I)) = r_1$, где r_1 — ранг оператора $\phi - \lambda I$.

Таким образом, получаем:

$$\dim(\mathcal{L}^\lambda) + r_1 = n.$$

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_p$ — количество Жордановых клеток размера $1 \times 1, 2 \times 2, \ldots, p \times p$ соответственно, соответствующих собственному значению λ. Тогда общее количество Жордановых клеток, соответствующих λ, равно:

$$j(\lambda) = S_1 + S_2 + \ldots + S_p.$$

Каждая Жорданова клетка размера $k \times k$ вносит ровно один линейно независимый собственный вектор. Поэтому количество линейно независимых собственных векторов, соответствующих λ, равно:

$$s(\lambda) = S_1 + S_2 + \ldots + S_p = j(\lambda).$$

С другой стороны, размерность собственного подпространства $\mathcal{L}^\lambda$ также равна количеству линейно независимых собственных векторов, то есть:

$$\dim(\mathcal{L}^\lambda) = s(\lambda) = j(\lambda).$$

■

Теорема 33.

Пусть $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ — линейный оператор, все корни характеристического уравнения которого вещественные.

Если λ_0 — собственное число алгебраической кратности l_0, то

$$\dim(\mathcal{L}_{\lambda_0}) = l_0,$$

где $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ — корневое подпространство, соответствующее λ_0.

Доказательство. Рассмотрим корневое подпространство $\mathcal{L}_{\lambda_0}$, соответствующее собственному числу λ_0.

Пусть J — жорданова форма оператора ϕ, состоящая из жордановых клеток, соответствующих собственным числам. Для собственного числа λ_0 обозначим:

- K_1 — количество жордановых клеток размера 1×1 с λ_0 на диагонали,
- K_2 — количество жордановых клеток размера 2×2 с λ_0 на диагонали,

- $\vdots$
- K_s — количество жордановых клеток размера $s \times s$ с λ_0 на диагонали.

Тогда жорданова форма J может быть записана как блочно-диагональная матрица:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_s \end{pmatrix}$$

где каждый блок J_i — жорданова клетка, соответствующая λ_0.

Корневое подпространство $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ раскладывается в прямую сумму циклических подпространств, каждое из которых соответствует одной жордановой клетке.

Следовательно, размерность $\mathcal{L}_{\lambda_0}$ равна сумме размеров всех жордановых клеток, соответствующих λ_0:

$$\dim(\mathcal{L}_{\lambda_0}) = K_1 + 2K_2 + \ldots + sK_s.$$

Характеристический многочлен оператора ϕ имеет вид:

$$\chi_\phi(t) = \det(J - tE) = (\lambda_0 - t)^{K_1}(\lambda_0 - t)^{2K_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda_0 - t)^{sK_s} = (\lambda_0 - t)^{K_1+2K_2+\ldots+sK_s}$$

Алгебраическая кратность l_0 собственного числа λ_0 равна сумме размеров всех жордановых клеток, соответствующих λ_0:

$$l_0 = K_1 + 2K_2 + \ldots + sK_s$$

Таким образом, мы получаем:

$$\dim(\mathcal{L}_{\lambda_0}) = l_0$$

что и требовалось доказать. ■

Теорема 34 (О минимальном многочлене для Жордановой матрицы)**.**

Пусть J_ϕ — жорданова форма матрицы оператора ϕ, представленная в виде блочно-диагональной матрицы.

Тогда минимальный многочлен $m_\phi(t)$ оператора ϕ (или матрицы J_ϕ) равен наименьшему общему кратному (НОК) минимальных многочленов жордановых клеток $J_1, J_2, \ldots, J_r$:

$$m_\phi(t) = m_{J_\phi}(t) = \text{НОК}\{m_{J_1}(t), m_{J_2}(t), \ldots, m_{J_r}(t)\}.$$

Если J_i — жорданова клетка размера $m \times m$, соответствующая собственному числу λ, то её минимальный многочлен имеет вид:

$$m_{J_i}(t) = (t - \lambda)^m.$$

Кроме того, корневые высоты векторов, соответствующих этой жордановой клетке, равны $1, 2, \ldots, m$.

Доказательство. Докажем, что минимальный многочлен $m_k(t)$ жордановой клетки K размера $m \times m$, соответствующей собственному числу λ, равен $(t-\lambda)^m$.

Рассмотрим жорданову клетку K размера $m \times m$:

$$K = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Покажем, что многочлен $(t-\lambda)^m$ аннулирует клетку K, то есть:

$$(K - \lambda I)^m = 0$$

Для этого рассмотрим действие $K - \lambda I$ на стандартные базисные векторы $e_1, e_2, \dots, e_m$, где e_i — вектор с единицей на i-й позиции и нулями на остальных.

Матрица $K - \lambda I$ имеет вид:

$$K - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Действие $K - \lambda I$ на базисные векторы:

$$(K-\lambda I)e_1 = 0, \quad (K-\lambda I)e_2 = e_1, \quad (K-\lambda I)e_3 = e_2, \quad \dots, \quad (K-\lambda I)e_m = e_{m-1}.$$

Таким образом, $K - \lambda I$ "сдвигает"каждый базисный вектор на одну позицию вверх, за исключением e_1, который обнуляется.

Эта матрица является нильпотентной степени m, то есть $(K-\lambda I)^m = 0$, но $(K-\lambda I)^{m-1} \neq 0$. Следовательно, $(t-\lambda)^m$ — аннулирующий многочлен для K.

Покажем, что $(t-\lambda)^m$ является минимальным многочленом для K. Предположим, что существует многочлен $p(t) = (t-\lambda)^s$, где $s < m$, который также аннулирует K. Тогда:

$$(K-\lambda I)^s = 0.$$

Однако, как было показано выше, $(K-\lambda I)^{m-1} \neq 0$, и, следовательно, s не может быть меньше m. Таким образом, минимальный многочлен $m_k(t)$ равен $(t-\lambda)^m$.

Матрица $K - \lambda I$ действует на стандартные базисные векторы $e_1, e_2, \dots, e_m$ следующим образом:

$$(K-\lambda I)e_1 = 0, \quad (K-\lambda I)e_2 = e_1, \quad \dots, \quad (K-\lambda I)e_m = e_{m-1}.$$

Отсюда видно, что:

- Вектор e_1 имеет корневую высоту 1, так как $(K-\lambda I)e_1 = 0$.
- Вектор e_2 имеет корневую высоту 2, так как $(K-\lambda I)^2 e_2 = 0$, но $(K-\lambda I)e_2 \neq 0$.
- $\vdots$
- Вектор e_m имеет корневую высоту m, так как $(K-\lambda I)^m e_m = 0$, но $(K-\lambda I)^{m-1} e_m \neq 0$.

Таким образом, минимальный многочлен $m_K(t)$ равен $(t-\lambda)^m$, так как:

- $(t-\lambda)^m$ аннулирует K, то есть $(K-\lambda I)^m = 0$.
- Никакой многочлен меньшей степени $s < m$ не может аннулировать K, так как $(K-\lambda I)^{m-1}e_m \neq 0$.

Теорема доказана. ■

Теорема 35. Пусть J — Жорданова форма матрицы оператора ϕ, и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — её собственные числа. Обозначим через h_j максимальный размер Жордановой клетки, соответствующей собственному числу λ_j. Тогда минимальный многочлен $m_\phi(t)$ оператора ϕ имеет вид:

$$m_\phi(t) = (t-\lambda_1)^{h_1} \cdot (t-\lambda_2)^{h_2} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_s)^{h_s}.$$

Доказательство. Минимальный многочлен $m_\phi(t)$ оператора ϕ совпадает с минимальным многочленом его Жордановой формы J. Жорданова форма J состоит из Жордановых клеток $J_1, J_2, \ldots, J_r$, каждая из которых соответствует одному из собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$.

Для каждой Жордановой клетки J_i, соответствующей собственному числу λ_j, минимальный многочлен равен $m_{J_i}(t) = (t-\lambda_j)^{k_i}$, где k_i — размер клетки J_i.

Следовательно, минимальный многочлен всей Жордановой формы J равен наименьшему общему кратному (НОК) минимальных многочленов всех Жордановых клеток:

$$m_\phi(t) = \text{НОК}\{m_{J_1}(t), m_{J_2}(t), \ldots, m_{J_r}(t)\}.$$

Поскольку h_j — это максимальный размер Жордановой клетки, соответствующей собственному числу λ_j, то для каждого λ_j минимальный многочлен $m_\phi(t)$ должен содержать множитель $(t-\lambda_j)^{h_j}$. Таким образом:

$$m_\phi(t) = \text{НОК}\{(t-\lambda_1)^{h_1}, (t-\lambda_2)^{h_2}, \ldots, (t-\lambda_s)^{h_s}\}.$$

Так как собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ различны, многочлены $(t-\lambda_j)^{h_j}$ взаимно просты, а значит, что НОК многочленов $(t-\lambda_1)^{h_1}, (t-\lambda_2)^{h_2}, \ldots, (t-\lambda_s)^{h_s}$ равно их произведению:

$$m_\phi(t) = (t-\lambda_1)^{h_1} \cdot (t-\lambda_2)^{h_2} \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_s)^{h_s}.$$

■

Следствие 4.

Пусть $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ и все корни характеристического уравнения вещественные. Тогда существует базис из собственных векторов ϕ тогда и только тогда, когда все корни минимального многочлена не кратные.

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ Предположим, что существует базис из собственных векторов оператора ϕ. Это означает, что каждое корневое подпространство имеет высоту 1, то есть все жордановы клетки имеют размер 1×1. Минимальный многочлен $m_\phi(t)$ в этом случае имеет вид:

$$m_\phi(t) = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения оператора ϕ. Таким образом, все корни минимального многочлена не кратные.

$\boxed{\Leftarrow}$ Обратно, предположим, что все корни минимального многочлена $m_\phi(t)$ не кратные. Тогда минимальный многочлен имеет вид:

$$m_\phi(t) = (t - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — различные собственные значения. Это означает, что все жордановы клетки имеют размер 1×1, и, следовательно, все корневые подпространства имеют высоту 1. Таким образом, существует базис из собственных векторов оператора ϕ. ■

Глава 4

Функции от матриц

4.1 Вычисление многочленов от матриц с помощью Жордановой формы.

Пусть A — матрица оператора ϕ, все корни характеристического уравнения вещественные. Рассмотрим степень матрицы A:

$$A^s = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{s \text{ раз}}.$$

Теорема 36. Пусть T — матрица перехода от A к её Жордановой форме J, то есть

$$A = TJT^{-1}.$$

Тогда для любого натурального числа s выполняется:

$$A^s = TJ^sT^{-1}.$$

Доказательство. Докажем теорему по индукции.

База индукции: Для $s = 1$ утверждение очевидно, так как

$$A^1 = A = TJT^{-1}.$$

Предположение индукции: Пусть для некоторого $s = k$ утверждение верно, то есть

$$A^k = TJ^kT^{-1}.$$

Шаг индукции: Докажем, что утверждение верно для $s = k + 1$. Рассмотрим:

$$A^{k+1} = A^k \cdot A.$$

Подставим выражение для A^k из предположения индукции:

$$A^{k+1} = (TJ^kT^{-1}) \cdot A.$$

Заметим, что $A = TJT^{-1}$, поэтому:

$$A^{k+1} = (TJ^kT^{-1}) \cdot (TJT^{-1}).$$

Упростим выражение, учитывая, что $T^{-1}T = E$:

$$A^{k+1} = TJ^k(T^{-1}T)JT^{-1} = TJ^kEJT^{-1} = TJ^kJT^{-1}.$$

Поскольку $J^kJ = J^{k+1}$, получаем:

$$A^{k+1} = TJ^{k+1}T^{-1}.$$

Таким образом, по индукции утверждение верно для любого натурального s. ∎

Определение 22. Степень Жордановой формы.

Пусть J — Жорданова форма матрицы A, состоящая из Жордановых клеток $J_1, J_2, \dots, J_m$. Тогда степень J^s определяется как блочно-диагональная матрица:

$$J^s = \begin{pmatrix} J_1^s & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m^s \end{pmatrix},$$

где каждая J_i^s — степень соответствующей Жордановой клетки.

Определение 23. Степень Жордановой клетки.

Пусть $J_k(\lambda)$ — Жорданова клетка размера $k \times k$, соответствующая собственному значению λ. Тогда её степень $J_k(\lambda)^s$ определяется как:

$$J_k(\lambda)^s = \begin{pmatrix} \lambda^s & s\lambda^{s-1} & \frac{s(s-1)}{2!}\lambda^{s-2} & \cdots & \frac{s(s-1)\cdots(s-(k-2))}{(k-1)!}\lambda^{s-k+1} \\ 0 & \lambda^s & s\lambda^{s-1} & \cdots & \frac{s(s-1)\cdots(s-(k-3))}{(k-2)!}\lambda^{s-k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^s & s\lambda^{s-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^s \end{pmatrix},$$

где:

- На диагонали стоят элементы λ^s.
- На r-й наддиагонали ($r = 1, 2, \dots, k-1$) стоят элементы вида:

$$\frac{s(s-1)\cdots(s-r+1)}{r!}\lambda^{s-r}.$$

- Коэффициент $\frac{s(s-1)\cdots(s-r+1)}{r!}$ — это биномиальный коэффициент C_s^r.

Определение 24. Многочлен от матрицы.

Пусть $P(t)$ — многочлен, а A — квадратная матрица, которая может быть приведена к Жордановой форме J с помощью матрицы перехода T.

Тогда **многочлен от матрицы** $P(A)$ определяется как:

$$P(A) = T \cdot P(J) \cdot T^{-1},$$

где $P(J)$ — блочно-диагональная матрица, состоящая из многочленов от Жордановых клеток $J_1, J_2, \ldots, J_k$:

$$P(J) = \begin{pmatrix} P(J_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P(J_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P(J_k) \end{pmatrix}.$$

Здесь $P(J_i)$ — это многочлен от i-й Жордановой клетки J_i, который вычисляется по формуле:

$$P(J_i) = \begin{pmatrix} P(\lambda_i) & \frac{P'(\lambda_i)}{1!} & \frac{P''(\lambda_i)}{2!} & \cdots & \frac{P^{(m_i-1)}(\lambda_i)}{(m_i-1)!} \\ 0 & P(\lambda_i) & \frac{P'(\lambda_i)}{1!} & \cdots & \frac{P^{(m_i-2)}(\lambda_i)}{(m_i-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & P(\lambda_i) & \frac{P'(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & P(\lambda_i) \end{pmatrix},$$

где:

- λ_i — собственное значение, соответствующее i-й Жордановой клетке J_i,
- m_i — размер i-й Жордановой клетки J_i,
- $P^{(k)}(\lambda_i)$ — k-я производная многочлена $P(t)$, вычисленная в точке λ_i.

Определение 25. Равенство многочленов на спектре матрицы.

Пусть $P(t)$ и $Q(t)$ — многочлены, A — квадратная матрица с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$. Пусть h_j — максимальная размерность Жордановой клетки, соответствующей собственному значению λ_j.

Говорят, что многочлены $P(t)$ и $Q(t)$ **равны на спектре матрицы** A, если для каждого $j = 1, 2, \ldots, s$ выполняются следующие условия:

1. Значения многочленов совпадают в точке λ_j:

$$Q(\lambda_j) = P(\lambda_j).$$

2. Значения производных многочленов до порядка $h_j - 1$ включительно совпадают в точке λ_j:

$$Q^{(k)}(\lambda_j) = P^{(k)}(\lambda_j), \quad \forall k \in [1, 2, \ldots, h_j - 1],$$

где $Q^{(k)}$ и $P^{(k)}$ — k-е производные многочленов $Q(t)$ и $P(t)$ соответственно.

4.2 Многочлен Лагранжа-Сильвестра.

Теорема 37. О существовании и единственности интерполяционного многочлена Лагранжа-Сильвестра.

Пусть $f(t)$ — функция, определённая на спектре матрицы A. Тогда существует единственный многочлен $r_f(t)$, такой что:

1. Степень многочлена $r_f(t)$ строго меньше степени минимального многочлена матрицы A:
$$\deg r_f(t) < \deg m_A(t),$$
где $m_A(t)$ — минимальный многочлен матрицы A.
2. Многочлен $r_f(t)$ совпадает с функцией $f(t)$ на спектре матрицы A, то есть:
$$r_f(\lambda_j) = f(\lambda_j), \quad \text{для всех } j = 1, 2, \ldots, s,$$
и, если h_j — максимальная размерность Жордановой клетки, соответствующей собственному значению λ_j, то:
$$r_f^{(k)}(\lambda_j) = f^{(k)}(\lambda_j), \quad \text{для всех } k = 1, 2, \ldots, h_j - 1.$$

Тогда многочлен $r_f(t)$ называется **интерполяционным многочленом Лагранжа-Сильвестра** для функции $f(t)$ на спектре матрицы A.

Доказательство.

Рассмотрим минимальный многочлен матрицы A:
$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{h_1} \cdot (t - \lambda_2)^{h_2} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_s)^{h_s},$$
где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ — различные собственные значения матрицы A, а h_j — максимальная размерность Жордановой клетки, соответствующей собственному значению λ_j. Степень минимального многочлена равна:
$$\deg m_A(t) = h_1 + h_2 + \ldots + h_s = h.$$

Построим интерполяционный многочлен $r_f(t)$, который удовлетворяет следующим условиям интерполяции:

1. $\deg r_f(t) < h$,
2. $r_f(\lambda_j) = f(\lambda_j)$ для всех $j = 1, 2, \ldots, s$,
3. $r_f^{(k)}(\lambda_j) = f^{(k)}(\lambda_j)$ для всех $k = 1, 2, \ldots, h_j - 1$.

Пусть $r_f(t)$ имеет вид:
$$r_f(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \ldots + c_{h-1} t^{h-1}.$$

Условия интерполяции приводят к системе линейных уравнений относительно коэффициентов $c_0, c_1, \ldots, c_{h-1}$. Для каждого собственного значения λ_j и каждого $k = 0, 1, \ldots, h_j - 1$ получаем уравнение:
$$r_f^{(k)}(\lambda_j) = f^{(k)}(\lambda_j).$$

Рассмотрим **однородную** систему, соответствующую условиям интерполяции:

$$r_f^{(k)}(\lambda_j) = 0 \quad \forall j \in [1, 2, \ldots, s] \text{ и } \forall k \in [0, 1, \ldots, h_j - 1].$$

Пусть $\hat{P}(t)$ — многочлен, который удовлетворяет этой однородной системе. Тогда:

- На спектре матрицы A многочлен $\hat{P}(t)$ равен нулю, то есть $\hat{P}(\lambda_j) = 0$ и $\hat{P}^{(k)}(\lambda_j) = 0$ для всех j и k.
- Поскольку функция от матрицы A определяется значениями на её спектре, то $\hat{P}(A) = 0$. Таким образом, $\hat{P}(t)$ аннулирует матрицу A.
- Однако минимальный многочлен $m_A(t)$ также аннулирует матрицу A, причём он имеет минимальную степень среди всех таких многочленов.
- Так как $\deg \hat{P}(t) < \deg m_A(t)$, то $\hat{P}(t)$ не может быть ненулевым многочленом, аннулирующим A. Следовательно, $\hat{P}(t) = 0$.

Таким образом, однородная система имеет только тривиальное решение $\hat{P}(t) = 0$. Это означает, что соответствующая неоднородная система (с правыми частями $f^{(k)}(\lambda_j)$) имеет единственное решение. Следовательно, коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_{h-1}$ определяются однозначно, и многочлен $r_f(t)$ существует и единственен.

Построение $r_f(t)$: Поскольку система имеет единственное решение, мы можем однозначно построить многочлен $r_f(t)$, удовлетворяющий всем условиям интерполяции. Этот многочлен называется **интерполяционным многочленом Лагранжа-Сильвестра** для функции $f(t)$ на спектре матрицы A.

■

Теорема 38 (О виде многочлена Лагранжа-Сильвестра в случае простых корней)**.**

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа матрицы A, все различные.

Характеристический многочлен матрицы A имеет вид:

$$x_A(t) = (t - \lambda_1) \cdot (t - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n).$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра $r_f(t)$ для функции $f(t)$ на спектре матрицы A задаётся формулой:

$$r_f(t) = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) \cdot \frac{(t - \lambda_1) \cdot (t - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n)}{(\lambda_j - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (\lambda_j - \lambda_n)}.$$

Доказательство. Рассмотрим минимальный многочлен матрицы A:

$$m_A(t) = x_A(t) = (t - \lambda_1) \cdot (t - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_n).$$

Степень $m_A(t)$ равна n. По условию теоремы, степень интерполяционного многочлена $r_f(t)$ должна быть строго меньше n, то есть $\deg r_f(t) = n - 1 < n$.

Покажем, что $r_f(t)$ удовлетворяет условиям интерполяции. Для этого проверим, что $r_f(\lambda_i) = f(\lambda_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для любого λ_i $(i = 1, \dots, n)$ выполняется:

$$r_f(\lambda_i) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} f(\lambda_j) \cdot \frac{(\lambda_i - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_i) \cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_n)}{(\lambda_j - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_j - \lambda_{j-1})(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \cdot \ldots \cdot (\lambda_j - \lambda_n)}$$
$$+ f(\lambda_i) \cdot \frac{(\lambda_i - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_n)}{(\lambda_i - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (\lambda_i - \lambda_n)}.$$

Заметим, что в первом слагаемом числитель обращается в ноль, так как $(\lambda_i - \lambda_i) = 0$, а второе слагаемое равно $f(\lambda_i)$. Таким образом, $r_f(\lambda_i) = f(\lambda_i)$.

Теперь рассмотрим вспомогательные многочлены:

$$\psi_j(t) = \frac{m_A(t)}{t - \lambda_j}.$$

Тогда интерполяционный многочлен можно записать в виде:

$$r_f(t) = \sum_{j=1}^{n} f(\lambda_j) \cdot \frac{\psi_j(t)}{\psi_j(\lambda_j)}.$$

■

Теорема 39 (О виде многочлена Лагранжа-Сильвестра в общем случае)**.**

Пусть $m_A(t)$ — минимальный многочлен матрицы A, который имеет вид:

$$m_A(t) = (t - \lambda_1)^{h_1} \cdot (t - \lambda_2)^{h_2} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_s)^{h_s},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — различные собственные значения матрицы A.

Определим вспомогательные многочлены $\psi_j(t)$ для каждого $j = 1, 2, \dots, s$ следующим образом:

$$\psi_j(t) = \frac{m_A(t)}{(t - \lambda_j)^{h_j}}.$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа-Сильвестра $r_f(t)$ для функции $f(t)$ на спектре матрицы A задаётся формулой:

$$r_f(t) = \sum_{j=1}^{s} \psi_j(t) \cdot \left[\left.\frac{f(t)}{\psi_j(t)}\right|_{t=\lambda_j} + \frac{1}{1!} \left.\left(\frac{f(t)}{\psi_j(t)}\right)'\right|_{t=\lambda_j} \cdot (t - \lambda_j) + \right.$$
$$\left. + \ldots + \frac{1}{(h_j - 1)!} \left.\left(\frac{f(t)}{\psi_j(t)}\right)^{(h_j-1)}\right|_{t=\lambda_j} \cdot (t - \lambda_j)^{h_j - 1} \right].$$

Доказательство.

Докажем, что многочлен $r_f(t)$ удовлетворяет условиям интерполяции на спектре матрицы A.

Степень $r_f(t)$ меньше степени минимального многочлена $m_A(t)$, то есть $\deg r_f(t) < \deg m_A(t)$. Это означает, что дробь $\frac{r_f(t)}{m_A(t)}$ является правильной.

Поскольку $\frac{r_f(t)}{m_A(t)}$ — правильная дробь, её можно разложить на элементарные дроби:

$$\frac{r_f(t)}{m_A(t)} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\alpha_{j1}}{(t-\lambda_j)^{h_j}} + \frac{\alpha_{j2}}{(t-\lambda_j)^{h_j-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{jh_j}}{t-\lambda_j} \right] \quad (*)$$

Заметим, что $m_A(t) = \psi_j(t) \cdot (t-\lambda_j)^{h_j}$. Подставим это в разложение (*):

$$\frac{r_f(t)}{\psi_j(t)} = (t-\lambda_j)^{h_j} \cdot \left[\frac{\alpha_{j1}}{(t-\lambda_j)^{h_j}} + \frac{\alpha_{j2}}{(t-\lambda_j)^{h_j-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{jh_j}}{t-\lambda_j} \right] + (t-\lambda_j)^{h_j} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{s} \left[\frac{\alpha_{i1}}{(t-\lambda_i)^{h_i}} + \ldots + \frac{\alpha_{ih_i}}{t-\lambda_i} \right]$$

Упростим первое слагаемое:

$$\begin{aligned} \frac{r_f(t)}{\psi_j(t)} &= \left[\alpha_{j1} + \alpha_{j2}(t-\lambda_j) + \alpha_{j3}(t-\lambda_j)^2 + \ldots + \alpha_{jh_j}(t-\lambda_j)^{h_j-1}\right] \\ &\quad + (t-\lambda_j)^{h_j} \cdot \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{s} \left[\frac{\alpha_{i1}}{(t-\lambda_i)^{h_i}} + \frac{\alpha_{i2}}{(t-\lambda_i)^{h_i-1}} + \ldots + \frac{\alpha_{ih_i}}{t-\lambda_i} \right] \quad (**) \end{aligned}$$

Обозначим второе слагаемое как $g_j(t)$.

Заметим, что $g_j(t)$ и её производные до порядка $h_j - 1$ обращаются в ноль при $t = \lambda_j$:

$$\begin{cases} g_j(\lambda_j) = 0, \\ g_j'(\lambda_j) = 0, \\ \vdots \\ g_j^{(h_j-1)}(\lambda_j) = 0 \quad (***) \end{cases}$$

Это означает, что $g_j(t)$ не влияет на интерполяцию в точке λ_j.

Подставим $t = \lambda_j$ в выражение (**):

$$\alpha_{j1} = \left.\frac{r_f(t)}{\psi_j(t)}\right|_{t=\lambda_j}.$$

Продифференцируем (**) по t и подставим $t = \lambda_j$:

$$\alpha_{j2} = \frac{1}{1!} \left.\left(\frac{r_f(t)}{\psi_j(t)}\right)'\right|_{t=\lambda_j}$$

Продолжая аналогично, получим:

$$\alpha_{jh_j} = \frac{1}{(h_j-1)!} \left.\left(\frac{r_f(t)}{\psi_j(t)}\right)^{(h_j-1)}\right|_{t=\lambda_j}$$

Поскольку $r_f(t)$ совпадает с $f(t)$ на спектре матрицы A, коэффициенты α_{jk} можно выразить через $f(t)$:

$$\alpha_{j1} = \left.\frac{f(t)}{\psi_j(t)}\right|_{t=\lambda_j}, \quad \alpha_{j2} = \frac{1}{1!}\left.\left(\frac{f(t)}{\psi_j(t)}\right)'\right|_{t=\lambda_j}, \quad \ldots, \quad \alpha_{jh_j} = \frac{1}{(h_j-1)!}\left.\left(\frac{f(t)}{\psi_j(t)}\right)^{(h_j-1)}\right|_{t=\lambda_j}$$

Подставим найденные коэффициенты α_{jk} в разложение (*):

$$\frac{r_f(t)}{m_A(t)} = \sum_{j=1}^{s} \left[\frac{\left.\frac{f(t)}{\psi_j(t)}\right|_{t=\lambda_j}}{(t-\lambda_j)^{h_j}} + \ldots + \frac{\left.\frac{1}{(h_j-1)!}\left(\frac{f(t)}{\psi_j(t)}\right)^{(h_j-1)}\right|_{t=\lambda_j}}{t-\lambda_j} \right]$$

Умножив обе части на $m_A(t)$, получим:

$$r_f(t) = \sum_{j=1}^{s} \psi_j(t) \cdot \left[\left.\frac{f(t)}{\psi_j(t)}\right|_{t=\lambda_j} + \ldots + \frac{1}{(h_j-1)!} \left.\left(\frac{f(t)}{\psi_j(t)}\right)^{(h_j-1)}\right|_{t=\lambda_j} \cdot (t-\lambda_j)^{h_j-1} \right]$$

■

4.3 Представление функций от матриц с помощью степенных рядов

Определение 26 (Сходимость последовательности функций на спектре)**.**

Последовательность функций $f_n(t)$ сходится к функции $f(t)$ на спектре матрицы A, если $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$ и $\forall k \in \{0, 1, \ldots, h_i - 1\}$ выполняется:

$$f_n^{(k)}(\lambda_i) \to f^{(k)}(\lambda_i) \quad \text{при } n \to \infty,$$

где λ_i — собственные значения матрицы A, а h_i — размерность наибольшей жордановой клетки, соответствующей λ_i.

Определение 27 (Функция от матрицы в предельной форме)**.**

Пусть $f_n(t)$ — последовательность функций, определённых на спектре матрицы A.

Тогда функция от матрицы $f(A)$ определяется как предел:

$$f(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A),$$

если последовательность $f_n(t)$ сходится к функции $f(t)$ на спектре матрицы A.

Определение 28 (Функция от матрицы через сходящийся ряд)**.**

Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) = S(t)$ — сходящийся ряд функций, определённых на спектре матрицы A. Обозначим частичные суммы ряда как:

$$\sigma_N(t) = \sum_{k=1}^{N} u_k(t).$$

Если последовательность частичных сумм $\sigma_N(t)$ сходится к $S(t)$ на спектре матрицы A, то есть для всех собственных значений λ_i матрицы A и $\forall k = 0, 1, \ldots, h_i - 1$ выполняется:

$$\sigma_N^{(k)}(\lambda_i) \to S^{(k)}(\lambda_i) \quad \text{при } N \to \infty,$$

то функция от матрицы $S(A)$ определяется как сумма ряда:

$$S(A) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(A).$$

Определение 29 (Функция от матрицы через ряд Тейлора)**.**

Пусть $f(t)$ — аналитическая функция в точке 0. Тогда эту функцию можно разложить в ряд Тейлора:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k,$$

который сходится на некотором интервале сходимости $(-R, R)$.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — спектр матрицы оператора ϕ, и пусть все λ_j принадлежат интервалу сходимости $(-R, R)$. Тогда функция от матрицы $f(A)$ определяется как сумма ряда:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} A^k.$$

Сходимость на спектре означает, что для всех собственных значений λ_j матрицы A и для всех $k = 0, 1, \ldots, h_j - 1$ (где h_j — размерность наибольшей жордановой клетки для λ_j) выполняется:

$$\left(\sum_{m=0}^{N} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} A^m \right)^{(k)} (\lambda_j) \to f^{(k)}(\lambda_j) \quad \text{при } N \to \infty.$$

Определение 30 (Норма матрицы и сходимость по норме)**.**

Пусть $A_{n\times n} = (a_{ij})$. Её норма (норма Фробениуса) определяется как:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

Последовательность матриц $\{A_n\}$ **сходится по норме** к матрице A, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) : \|A - A_n\|_2 < \varepsilon.$$

Определение 31 (Сходимость последовательности функций от матрицы по норме)**.**

Пусть $f_n(t)$ и $f(t)$ определены на спектре матрицы A.
Говорят, что последовательность $f_n(A)$ **сходится к** $f(A)$ **по норме** (равномерно), если

$$\|f_n(A) - f(A)\| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Глава 5

Элементы теории групп

«Математика — это искусство называть разные вещи одним и тем же именем.» — Анри Пуанкаре

Определение 32 (Группа)**.**

Группой называется множество G, на котором задана бинарная операция $\circ : G \times G \to G$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. **Ассоциативность**: $\forall a, b, c \in G$ выполняется
$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$
2. **Существование нейтрального элемента**: Существует элемент $e \in G$, называемый **нейтральным элементом** (или единицей), такой, что $\forall a \in G$ выполняется
$$e \circ a = a \circ e = a.$$
3. **Существование обратного элемента**: $\forall a \in G$ существует элемент $a^{-1} \in G$, называемый **обратным элементом** к a, такой, что
$$a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

Определение 33 (Абелева группа)**.**

Группа G называется **абелевой** (или коммутативной), если для любых $a, b \in G$ выполняется
$$a \circ b = b \circ a.$$

Примеры:

- Группа целых чисел по сложению $(\mathbb{Z}, +)$.
- Группа вещественных чисел по сложению $(\mathbb{R}, +)$.
- Группа ненулевых вещественных чисел по умножению $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Примеры:

1. **Группа целых чисел по сложению**:
   - Множество: $\mathbb{Z}$
   - Операция: сложение $+$
   - Нейтральный элемент: 0
   - Обратный элемент: для $a \in \mathbb{Z}$ обратный элемент — это $-a$
   - Свойства: $a + b = b + a \quad$ (абелева группа)
2. **Группа биекций множества**:
   - Множество: $\mathrm{Bij}(X)$ — множество всех биекций $\phi : G \to G$ множества X на себя.
   - Операция: композиция отображений $\circ$: $\phi \circ \psi(x) = \phi(\psi(x))$
   - Нейтральный элемент: тождественное отображение $\mathcal{I}(x) = x \quad \forall x \in X$
   - Обратный элемент: обратное отображение ϕ^{-1}
   - Свойства: $\phi \circ \psi \neq \psi \circ \phi \quad$ в общем случае (неабелева группа, если $|X| \geq 3$)
3. **Группа невырожденных матриц**:
   - Множество: $GL(n, \mathbb{R})$ — множество всех квадратных матриц размера $n \times n$ с ненулевым определителем.
   - Операция: матричное умножение $\cdot$
   - Нейтральный элемент: единичная матрица I
   - Обратный элемент: для матрицы $A \in GL(n, \mathbb{R})$ обратный элемент — это обратная матрица A^{-1}
   - Свойства: $A \cdot B \neq B \cdot A \quad$ в общем случае (неабелева группа при $n \geq 2$)
4. **Группа движений $\mathbf{Isom}(\mathbb{R}^n)$**:
   - Множество: $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ — множество всех изометрий (движений) пространства $\mathbb{R}^n$, то есть биекций $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, сохраняющих расстояние:
   $$\|x_1 - x_2\| = \|\phi(x_1) - \phi(x_2)\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n.$$
   - Операция: композиция отображений $\circ$: $\phi \circ \psi(x) = \phi(\psi(x))$.
   - Нейтральный элемент: тождественное отображение $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}$, заданное как $\mathcal{I}_{\mathbb{R}^n}(x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
   - Обратный элемент: для изометрии $\phi \in \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ обратный элемент — это обратное отображение ϕ^{-1}, которое также является изометрией.

Определение 34 (Подгруппа)**.**

Пусть G — группа с операцией $\circ$. Подмножество $H \subset G$ называется **подгруппой** группы G, если:

1. H замкнуто относительно операции $\circ$: $\forall a, b \in H$ выполняется $a \circ b \in H$.
2. H содержит нейтральный элемент e группы G: $e \in H$.
3. H замкнуто относительно взятия обратного элемента: $\forall a \in H$ выполняется $a^{-1} \in H$.

5.1 Свойства группы

1. **Единичный элемент единственен:**
$$\exists!\, e \in G \quad \text{такой, что} \quad \forall a \in G \quad a \circ e = e \circ a = a.$$
$$\text{Пусть } e_1, e_2 \text{ — нейтральные элементы. Тогда } e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2.$$
2. **Обратный элемент единственен:**
$$\forall a \in G \quad \exists!\, a^{-1} \in G \quad \text{такой, что} \quad a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$
$$\text{Пусть } b, c \text{ — обратные к } a. \text{ Тогда } b = b \circ e = b \circ (a \circ c) = (b \circ a) \circ c = e \circ c = c.$$
3. **Уравнения $a \circ x = c$ и $x \circ b = c$ имеют единственное решение:**
$$\forall a, b, c \in G \quad \exists!\, x \in G \quad \text{такой, что} \quad a \circ x = c \quad \text{и} \quad x \circ b = c.$$
$$\text{Для } a \circ x = c: \ x = a^{-1} \circ c. \quad \text{Для } x \circ b = c: \ x = c \circ b^{-1}.$$
4. **Свойство сокращения:**
$$\forall a, b, c \in G \quad a \circ b = a \circ c \iff b = c.$$
$$\text{Если } a \circ b = a \circ c, \text{ то } b = c \text{ (умножаем слева на } a^{-1}).$$
$$\text{Если } b \circ a = c \circ a, \text{ то } b = c \text{ (умножаем справа на } a^{-1}).$$
5. **Обратный элемент композиции:**
$$\forall a, b \in G \quad (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}.$$
$$(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = a \circ (b \circ b^{-1}) \circ a^{-1} = a \circ e \circ a^{-1} = e.$$
$$\text{Аналогично, } (b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = e. \text{ Значит, } (a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}.$$

Определение 35 (Изоморфизм групп). $(G, \circ)$ и $(H, *)$ - две группы.

Отображение $\phi : G \to H$ называется **изоморфизмом групп**, если:

1. ϕ является **биекцией** (взаимно однозначным отображением).
2. ϕ сохраняет групповую операцию, то есть для любых $a, b \in G$ выполняется:

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) * \phi(b).$$

Если такой изоморфизм существует, группы G и H называются **изоморфными**, и обозначается это как $G \cong H$.

Смысл изоморфизма:

- Изоморфизм групп показывает, что две группы имеют одинаковую структуру, даже если их элементы и операции выглядят по-разному.
- Изоморфизм позволяет изучать группы абстрактно, не завися от конкретного представления их элементов и операций.

Свойства изоморфизма:

1. **Нейтральный элемент переходит в нейтральный:**

$$\text{Если } e_G \text{ — нейтральный элемент группы } G, \text{ то } \phi(e_G) = e_H.$$

2. **Обратный элемент переходит в обратный:**

$$\text{Если } a \in G \text{ и } a^{-1} \text{ — обратный к } a, \text{ то } \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}.$$

1. Нейтральный элемент переходит в нейтральный:

Пусть $\phi : G \to H$ — изоморфизм. Тогда для любого $a \in G$:

$$\phi(a) = \phi(a \circ e_G) = \phi(a) \circ \phi(e_G).$$

Умножая обе части на $\phi(a)^{-1}$, получаем:

$$\phi(a)^{-1} \circ \phi(a) \circ \phi(e_G) = \phi(a)^{-1} \circ \phi(a).$$

Упрощая, получаем:

$$e_H \circ \phi(e_G) = e_H \quad \Longrightarrow \quad \phi(e_G) = e_H.$$

2. Обратный элемент переходит в обратный:

Рассмотрим $\phi(a \circ a^{-1}) = \phi(e_G) = e_H$.

С другой стороны, $\phi(a \circ a^{-1}) = \phi(a) \circ \phi(a^{-1})$.

Таким образом:

$$\phi(a) \circ \phi(a^{-1}) = e_H, \text{ откуда } \phi(a^{-1}) = \phi(a)^{-1}.$$

5.2 Циклические подгруппы

Определение 36 (Циклическая подгруппа)**.**

Пусть G — группа, и $a \in G$ — произвольный элемент. **Циклической подгруппой**, порождённой элементом a, называется множество всех степеней элемента a:

$$\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

где:

- $a^0 = e$ (нейтральный элемент группы),
- $a^n = \underbrace{a \circ a \circ \cdots \circ a}_{n \text{ раз}}$ для $n > 0$,
- $a^{-n} = \underbrace{a^{-1} \circ a^{-1} \circ \cdots \circ a^{-1}}_{n \text{ раз}}$ для $n > 0$.

Циклическая подгруппа $\langle a \rangle$ является наименьшей подгруппой группы G, содержащей **образующий** элемент a.

Определение 37 (Бесконечная и конечная циклические подгруппы)**.**

Циклическая подгруппа $\langle a \rangle = \{a^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ может быть:

- **Бесконечной циклической подгруппой**, если все элементы a^n различны при различных n, то есть:
$$a^m \neq a^s \quad \forall m \neq s.$$
- **Конечной циклической подгруппой**, если существуют целые числа $m \neq s$ такие, что:
$$a^m = a^s.$$
В этом случае, если $m > s$, то $a^{m-s} = e$, где e — нейтральный элемент группы.

Порядок элемента a — это наименьшее положительное целое число k, такое что:

$$a^k = e.$$

Если такого k не существует, то порядок элемента a считается бесконечным.

Пример циклической подгруппы:

Рассмотрим группу корней n-й степени из единицы: $\langle \sqrt[n]{1} \rangle$

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}.$$

Эти корни имеют вид:

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Группа G является циклической и порождается элементом:

$$a = e^{i\frac{2\pi}{n}}.$$

Циклическая подгруппа, порождённая элементом a, имеет вид:

$$\langle a \rangle = \{a^k \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\} = \{e^{i\frac{2\pi k}{n}} \mid k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Элементы подгруппы:

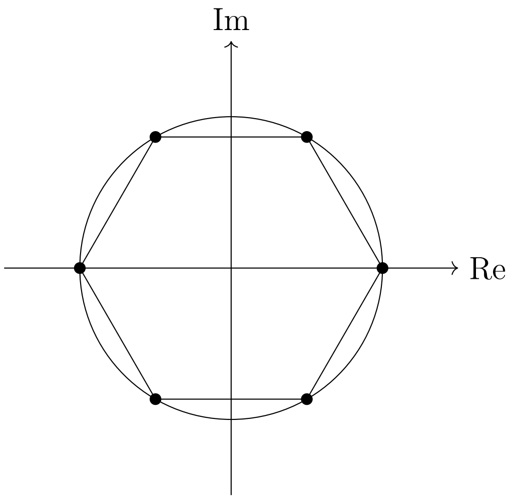
$$\langle a \rangle = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{n}}, e^{i\frac{4\pi}{n}}, \ldots, e^{i\frac{2\pi(n-1)}{n}}\right\}.$$

Рассмотрим случай $n = 6$. Корни 6-й степени из единицы:

$$z_k = e^{i\frac{2\pi k}{6}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Элементы подгруппы:

$$\langle a \rangle = \left\{1, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, -1, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}\right\}.$$



Теорема 40.

Пусть $G = \langle a \rangle$ — конечная циклическая группа порядка k, и e — нейтральный элемент группы. Тогда для любого целого числа n выполняется:

$$a^n = e \iff n \text{ кратен } k.$$

Иными словами, $a^n = e$ тогда и только тогда, когда $n = kd$ для некоторого целого числа d.

Доказательство.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть $n = kd$, где d — целое число. Тогда:

$$a^n = a^{kd} = (a^k)^d = e^d = e.$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть $a^n = e$. Предположим, что n не кратно k. Тогда, разделив n на k с остатком, получим:

$$n = kd + r, \quad \text{где } 0 < r < k.$$

Подставим это в равенство $a^n = e$:

$$a^n = a^{kd+r} = a^{kd} \cdot a^r = (a^k)^d \cdot a^r = e^d \cdot a^r = a^r.$$

Таким образом, $a^r = e$. Но $0 < r < k$, что противоречит определению порядка k как наименьшего положительного числа, для которого $a^k = e$. Следовательно, наше предположение неверно, и n должно быть кратно k. ■

Теорема 41. Пусть $G = \langle a \rangle$ — циклическая подгруппа порядка k, где a — образующий элемент, а e — нейтральный элемент группы. Тогда множество

$$\{e, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$$

полностью исчерпывает все элементы подгруппы G. Иными словами, все элементы G имеют вид a^n, где $n = 0, 1, 2, \dots, k-1$, и все эти элементы различны.

Доказательство. Докажем, что все элементы подгруппы различны.
Предположим, что существуют два совпадающих элемента: $a^m = a^s$,
где $0 \le m, s < k$ и $m > s$. Тогда:

$$a^m = a^s \implies a^{m-s} = e.$$

Поскольку $0 < m - s < k$, это противоречит тому, что k — наименьшее положительное целое число, для которого $a^k = e$. Следовательно, все элементы $e, a, a^2, \dots, a^{k-1}$ различны.

Теперь докажем, что других элементов в подгруппе нет.Рассмотрим произвольный элемент a^n, где n — целое число. Разделим n на k с остатком:

$$n = kd + r, \quad \text{где } 0 \le r < k.$$

Тогда:

$$a^n = a^{kd+r} = (a^k)^d \cdot a^r = e^d \cdot a^r = a^r.$$

Таким образом, любой элемент a^n совпадает с одним из элементов $e, a, a^2, \dots, a^{k-1}$. ■

Теорема 42. Пусть $G = \langle a \rangle$ — бесконечная циклическая группа, порождённая элементом a. Тогда:

1. Элемент a^{-1} также является образующим группы G, то есть $\langle a^{-1} \rangle$.
2. Других образующих в группе G нет.

Доказательство.

Для любого целого числа n выполняется:

$$a^n = (a^{-1})^{-n}.$$

Таким образом, любой элемент a^n может быть выражен через степень a^{-1}. Следовательно, a^{-1} также является образующим группы G, то есть $G = \langle a^{-1} \rangle$.

Предположим, что существует другой образующий элемент a^s, где $s \neq \pm 1$. Тогда a должен быть степенью a^s, то есть:

$$a = (a^s)^l = a^{sl},$$

где l — целое число. Поскольку группа G бесконечна, все степени элемента a различны. Следовательно:

$$a^{sl} = a \implies sl = 1.$$

Так как s и l — целые числа, это возможно только если $s = 1$ или $s = -1$. Таким образом, единственными образующими группы G являются a и a^{-1}. ■

Теорема 43. Пусть $G = \langle a \rangle$ — конечная циклическая группа порядка k.

Тогда элемент a^s является образующим группы G (то есть $\langle a^s \rangle = G$) тогда и только тогда, когда числа s и k взаимно просты, то есть НОД$(s, k) = 1$.

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Пусть a^s — образующий элемент группы G.

Предположим, что НОД$(s, k) = d > 1$. Тогда:

$$k = k_1 \cdot d, \quad s = s_1 \cdot d, \quad \text{где } k_1, s_1 \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим степень $(a^s)^{k_1}$:

$$(a^s)^{k_1} = (a^{s_1 d})^{k_1} = (a^{k_1 d})^{s_1} = a^{k s_1} = e^{s_1} = e.$$

Таким образом, $(a^s)^{k_1} = e$, где $0 < k_1 < k$. Это противоречит тому, что порядок a^s равен k, так как $k_1 < k$. Следовательно, НОД$(s, k) = 1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Пусть НОД$(s, k) = 1$. Тогда существуют целые числа u и v такие, что:

$$ku + sv = 1.$$

Рассмотрим элемент a:

$$a = a^{ku+sv} = a^{ku} \cdot a^{sv} = (a^k)^u \cdot (a^s)^v = e^u \cdot (a^s)^v = (a^s)^v.$$

Таким образом, a является степенью a^s, а значит, a^s порождает всю группу G, то есть $\langle a^s \rangle = G$. ■

5.3 Разбиение группы в смежные классы

Определение 38 (Разбиение группы на смежные классы)**.**

Пусть G — группа, а H — её подгруппа. Для любого элемента $a \in G$ **левый смежный класс** подгруппы H по элементу a определяется как множество:

$$aH = \{a \circ h \mid h \in H\}.$$

Аналогично, **правый смежный класс** подгруппы H по элементу a определяется как множество:

$$Ha = \{h \circ a \mid h \in H\}.$$

Множество всех левых (или правых) смежных классов подгруппы H в группе G называется **разбиением группы** G **на смежные классы по подгруппе** H.

Свойства смежных классов: (определим для левых смежных классов, для правых аналогично)

1. $\forall a \in H \quad aH = H$
2. $a \in aH \quad \forall a \in G$
3. $aH = bH \iff b^{-1} \circ a \in H$
4. Любые два левых смежных класса aH и bH либо совпадают, либо не пересекаются

Доказательство.

1. Пусть $a \in H$. Тогда:
$$aH = \{a \circ h \mid h \in H\}.$$
Поскольку H — подгруппа, для любого $h \in H$ элемент $a \circ h$ также принадлежит H. Следовательно, $aH \subseteq H$.

   Обратно, для любого $h \in H$ элемент $h = a \circ (a^{-1} \circ h)$, где $a^{-1} \circ h \in H$ (так как H — подгруппа). Таким образом, $H \subseteq aH$.

2. Поскольку $e \in H$ (нейтральный элемент), то:
$$a = a \circ e \in aH.$$

3. $\boxed{\Rightarrow}$ Пусть $aH = bH$. Тогда существуют $h_1, h_2 \in H$ такие, что:
$$a \circ h_1 = b \circ h_2.$$
"Умножаем" обе части равенства слева на b^{-1}:
$$b^{-1} \circ a \circ h_1 = h_2.$$

Теперь "домножаем" обе части на h_1^{-1}:

$$b^{-1} \circ a = h_2 \circ h_1^{-1}.$$

Поскольку H — подгруппа, $h_2 \circ h_1^{-1} \in H$. Следовательно, $b^{-1} \circ a \in H$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Пусть $b^{-1} \circ a \in H$. Тогда:

$$b^{-1} \circ aH = H \quad \text{(по свойству 1)}.$$

"Умножаем" обе части равенства слева на b:

$$aH = b \circ (b^{-1} \circ aH) = bH.$$

Таким образом, $aH = bH$.

4. Пусть aH и bH — два левых смежных класса. Если $aH \cap bH \neq \emptyset$, то $\exists x \in aH \cap bH$. Тогда:

$$x = a \circ h_1 = b \circ h_2 \quad \text{для некоторых } h_1, h_2 \in H.$$

Отсюда:

$$b^{-1} \circ a = h_2 \circ h_1^{-1} \in H.$$

По свойству 3, это означает, что $aH = bH$. Следовательно, если aH и bH пересекаются, то они совпадают.

■

Пример смежных классов:

1. Пусть $G = \mathbb{R}^2$ — группа векторов на плоскости с операцией сложения, H — подгруппа, состоящая из всех векторов, лежащих на прямой $y = x$:

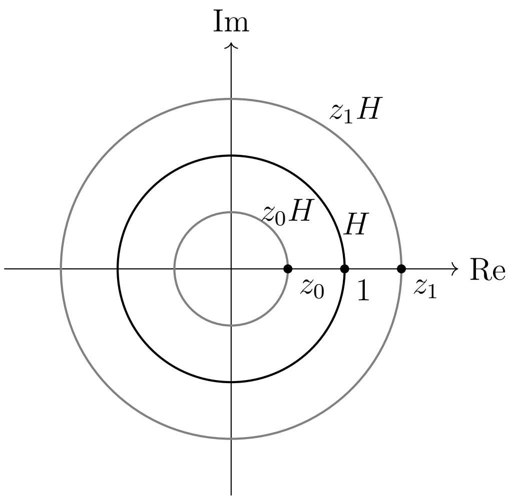
$$H = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда левые (и правые) смежные классы $a + H$ — это параллельные прямые, смещённые на вектор a.

2. Пусть $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ — группа ненулевых комплексных чисел с операцией умножения, H — подгруппа, состоящая из всех комплексных чисел, лежащих на единичной окружности:

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Тогда левые (и правые) смежные классы z_0H — это окружности с центром в нуле и радиусом $|z_0|$.



Теорема 44. Пусть G — конечная группа порядка n, H — подгруппа порядка k. Пусть j — количество смежных классов группы G по подгруппе H. Тогда

$$n = k \cdot j.$$

Доказательство. Пусть $h_1, h_2 \in H$, $g \in G$ — произвольный элемент группы G. Рассмотрим отображение:

$$\phi : H \to gH, \quad \phi(h) = g \circ h.$$

Покажем, что ϕ является биекцией.

1. Инъективность: Пусть $\phi(h_1) = \phi(h_2)$. Тогда:

   $$g \circ h_1 = g \circ h_2.$$

   Умножим обе части равенства слева на g^{-1}:

   $$g^{-1} \circ (g \circ h_1) = g^{-1} \circ (g \circ h_2) \implies (g^{-1} \circ g) \circ h_1 = (g^{-1} \circ g) \circ h_2.$$

   Так как $g^{-1} \circ g = e$, то:

   $$e \circ h_1 = e \circ h_2 \implies h_1 = h_2.$$

   Таким образом, ϕ инъективно.

2. Сюръективность: Для любого элемента $y \in gH$ существует $h \in H$, такой что $y = g \circ h$. По определению ϕ, это означает, что $\phi(h) = y$. Следовательно, ϕ сюръективно.

Так как ϕ биективно, то $|gH| = |H| = k$. Аналогично, все смежные классы gH имеют одинаковое количество элементов k.

Поскольку группа G разбивается на j смежных классов, каждый из которых содержит k элементов, то общее количество элементов в группе G равно:

$$n = k \cdot j.$$

■

Следствие 5. **Теорема Лагранжа**.

Пусть G — конечная группа. Тогда порядок любой подгруппы $H \subseteq G$ является делителем порядка группы G. То есть, если $|G| = n$ и $|H| = k$, то k делит n.

Следствие 6.

Если группа G конечна, то порядок любого элемента $g \in G$ является делителем порядка группы G.

Следствие 7. Если порядок конечной группы G является простым числом, то G является циклической группой.

Доказательство. Пусть $|G| = p$, где p — простое число. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$, отличный от нейтрального элемента e.

По следствию из теоремы Лагранжа, порядок элемента g делит порядок группы G. Так как p — простое число, то возможны только два случая:

1. Порядок элемента g равен 1. Но это возможно только если $g = e$, что противоречит выбору g.
2. Порядок элемента g равен p.

Таким образом, порядок элемента g равен p, и циклическая подгруппа $\langle g \rangle$, порождённая элементом g, содержит p элементов. Следовательно, $\langle g \rangle = G$, и группа G является циклической. ■

Определение 39 (Нормальный делитель)**.**

Подгруппа H группы G называется **нормальным делителем**, если $\forall a \in G$ левые и правые смежные классы группы G по подгруппе H совпадают, то есть:

$$aH = Ha.$$

Обозначение: $H \triangleleft G$.

Если группа G абелева, то **любая её подгруппа** H является нормальным делителем. Это следует из того, что в абелевой группе левые и правые смежные классы всегда совпадают:

$$aH = \{a \circ h \mid h \in H\} = \{h \circ a \mid h \in H\} = Ha.$$

Теорема 45. Пусть $H \triangleleft G$ — нормальный делитель группы G, и $\circ$ — групповая операция. Тогда композиция смежных классов (aH) и (bH) определяется формулой:

$$(aH) \circ (bH) = (a \circ b)H.$$

Доказательство. Рассмотрим композицию смежных классов (aH) и (bH).
Поскольку H — нормальный делитель, выполняется $Hb = bH$. Тогда:

$$(aH) \circ (bH) = a(Hb)H = a(bH)H = (a \circ b)(HH).$$

Так как H — подгруппа, то $HH = H$. Следовательно:

$$(a \circ b)(HH) = (a \circ b)H.$$

Таким образом, $(aH) \circ (bH) = (a \circ b)H$. ■

5.4 Гомоморфизм. Фактор-Группы

Определение 40 (Гомоморфизм)**.** Пусть $(G, \circ)$ — группа, а $(X, \star)$ — множество X с бинарной операцией $\star$. Отображение $\phi : G \to X$ называется **гомоморфизмом**, если для любых элементов $a, b \in G$ выполняется:

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \star \phi(b).$$

Гомоморфизм — это более общее понятие, чем изоморфизм. В отличие от изоморфизма, гомоморфизм не требует биективности, но всегда сохраняет алгебраическую структуру. Гомоморфизм может быть:

- **Инъективным**, если разные элементы G переходят в разные элементы X.
- **Сюръективным**, если образ $\phi(G)$ совпадает с X.
- **Биективным** (изоморфизм), если он одновременно инъективен и сюръективен.

Определение 41 (Эндоморфизм)**.** Пусть $(G, \circ)$ — группа.

Отображение $\phi : G \to G$ называется **эндоморфизмом**, если:

1. ϕ является гомоморфизмом, то есть $\forall a, b \in G$ выполняется:

$$\phi(a \circ b) = \phi(a) \circ \phi(b);$$

2. ϕ отображает группу G в себя, то есть $\phi(G) \subseteq G$.

Теорема 46. Пусть G — группа, а X — множество с бинарной операцией $\star$. Если $\phi : G \to X$ — гомоморфизм, то X является группой относительно операции $\star$.

Доказательство. Чтобы доказать, что X — группа, проверим выполнение аксиом группы:

1. Ассоциативность: Для любых $x, y, z \in X$ существуют $a, b, c \in G$, такие что $x = \phi(a)$, $y = \phi(b)$, $z = \phi(c)$. Тогда:

$$(x \star y) \star z = (\phi(a) \star \phi(b)) \star \phi(c) = \phi(a \circ b) \star \phi(c) = \phi((a \circ b) \circ c).$$

Аналогично:

$$x \star (y \star z) = \phi(a) \star (\phi(b) \star \phi(c)) = \phi(a) \star \phi(b \circ c) = \phi(a \circ (b \circ c)).$$

Поскольку G — группа, $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$, следовательно:

$$(x \star y) \star z = x \star (y \star z).$$

2. Нейтральный элемент: Пусть e_G — нейтральный элемент группы G.
Положим $e_X = \phi(e_G)$. Тогда для любого $x \in X$, где $x = \phi(a)$, выполняется:

$$e_X \star x = \phi(e_G) \star \phi(a) = \phi(e_G \circ a) = \phi(a) = x.$$

Аналогично:
$$x \star e_X = \phi(a) \star \phi(e_G) = \phi(a \circ e_G) = \phi(a) = x.$$
Таким образом, e_X — нейтральный элемент в X.

3. Обратный элемент: Для любого $x \in X$, где $x = \phi(a)$, рассмотрим элемент $y = \phi(a^{-1})$, где a^{-1} — обратный к a в G. Тогда:
$$x \star y = \phi(a) \star \phi(a^{-1}) = \phi(a \circ a^{-1}) = \phi(e_G) = e_X.$$
Аналогично:
$$y \star x = \phi(a^{-1}) \star \phi(a) = \phi(a^{-1} \circ a) = \phi(e_G) = e_X.$$
Таким образом, y — обратный элемент к x в X.

Все аксиомы группы выполнены, следовательно, X — группа. ■

Определение 42 (Ядро гомоморфизма)**.**

Пусть $\phi : G \to X$ — гомоморфизм. **Ядром** гомоморфизма ϕ называется множество всех элементов группы G, которые отображаются в нейтральный элемент e_X группы X. Формально:
$$\ker(\phi) = \{g \in G \mid \phi(g) = e_X\}.$$

Теорема 47. Пусть $\phi : G \to X$ — гомоморфизм группы $(G, \circ)$ в группу X с групповой операцией $\star$. Тогда ядро $\ker(\phi)$ является:

1. Подгруппой группы G.
2. Нормальным делителем группы G.

Доказательство. Докажем оба утверждения.

1. Ядро $\ker(\phi)$ — подгруппа группы G: Проверим выполнение аксиом подгруппы:
   - Замыкание: Пусть $a, b \in \ker(\phi)$. Тогда:
   $$\phi(a \circ b) = \phi(a) \star \phi(b) = e_X \star e_X = e_X.$$
   Следовательно, $a \circ b \in \ker(\phi)$.
   - Нейтральный элемент: Поскольку $\phi(e_G) = e_X$, то $e_G \in \ker(\phi)$.
   - Обратный элемент: Пусть $a \in \ker(\phi)$. Тогда:
   $$\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1} = e_X^{-1} = e_X.$$
   Следовательно, $a^{-1} \in \ker(\phi)$.

   Таким образом, $\ker(\phi)$ — подгруппа группы G.
2. Ядро $\ker(\phi)$ — нормальный делитель группы G: Покажем, что для любого $a \in G$ выполняется $a^{-1} \ker(\phi) a \subseteq \ker(\phi)$.

Рассмотрим произвольный элемент $h \in \ker(\phi)$ и произвольный элемент $a \in G$. Покажем, что $a^{-1} \circ h \circ a \in \ker(\phi)$. Применим гомоморфизм ϕ к этому элементу:

$$\phi(a^{-1} \circ h \circ a) = \phi(a^{-1}) \star \phi(h) \star \phi(a).$$

Поскольку $h \in \ker(\phi)$, то $\phi(h) = e_X$. Также, так как ϕ — гомоморфизм, выполняется $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$. Подставляем:

$$\phi(a^{-1} \circ h \circ a) = (\phi(a))^{-1} \star e_X \star \phi(a) = (\phi(a))^{-1} \star \phi(a) = e_X.$$

Таким образом, $\phi(a^{-1} \circ h \circ a) = e_X$, что означает $a^{-1} \circ h \circ a \in \ker(\phi)$.

Мы показали, что для любого $a \in G$ и любого $h \in \ker(\phi)$ выполняется $a^{-1} \circ h \circ a \in \ker(\phi)$. Это означает, что:

$$a^{-1} \ker(\phi) a \subseteq \ker(\phi).$$

Теперь "домножим"обе части включения справа на a. Получим:

$$\ker(\phi) a \subseteq \ker(\phi) a.$$

Теперь покажем обратное включение. Рассмотрим произвольный элемент $h \in \ker(\phi)$ и произвольный элемент $a \in G$. Покажем, что $a \circ h \circ a^{-1} \in \ker(\phi)$. Применим гомоморфизм ϕ к этому элементу:

$$\phi(a \circ h \circ a^{-1}) = \phi(a) \star \phi(h) \star \phi(a^{-1}).$$

Поскольку $h \in \ker(\phi)$, то $\phi(h) = e_X$. Также, так как ϕ — гомоморфизм, выполняется $\phi(a^{-1}) = (\phi(a))^{-1}$. Подставляем:

$$\phi(a \circ h \circ a^{-1}) = \phi(a) \star e_X \star (\phi(a))^{-1} = \phi(a) \star (\phi(a))^{-1} = e_X.$$

Таким образом, $\phi(a \circ h \circ a^{-1}) = e_X$, что означает $a \circ h \circ a^{-1} \in \ker(\phi)$.

Мы показали, что для любого $a \in G$ и любого $h \in \ker(\phi)$ выполняется $a \circ h \circ a^{-1} \in \ker(\phi)$. Это означает, что:

$$a \ker(\phi) a^{-1} \subseteq \ker(\phi).$$

Таким образом, мы получили два включения:

$$a^{-1} \ker(\phi) a \subseteq \ker(\phi) \quad \text{и} \quad a \ker(\phi) a^{-1} \subseteq \ker(\phi).$$

Из этих включений следует, что:

$$a \ker(\phi) = \ker(\phi) a.$$

Это и есть определение нормального делителя.

$\blacksquare$

Определение 43 (Фактор-группа)**.**

Пусть G — группа, а $H \triangleleft G$ — её нормальный делитель. **Фактор-группой** группы G по подгруппе H называется множество всех смежных классов G по H с операцией, определённой следующим образом:

$$(aH) \circ (bH) = (a \circ b)H,$$

где $a, b \in G$, а $\circ$ — групповая операция в G. Обозначение: G/H.

Теорема 48. Пусть G — циклическая группа, порождённая элементом g. Тогда:

1. Если G бесконечна, то $G \cong \mathbb{Z}$ (группа целых чисел с операцией сложения).
2. Если G конечна порядка n, то $G \cong \mathbb{Z}_n$ (группа целых чисел по модулю n с операцией сложения).

Доказательство. Докажем оба утверждения.

1. Случай бесконечной циклической группы: Пусть $G = \langle g \rangle$ — бесконечная циклическая группа. Поскольку G бесконечна, $\forall k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$, если $k_1 \neq k_2$, то $g^{k_1} \neq g^{k_2}$. Построим отображение $\phi : G \to \mathbb{Z}$ по правилу:

   $$\phi(g^k) = k.$$

   Покажем, что ϕ — изоморфизм:

   - Инъективность: Пусть $\exists g^{k_1}, g^{k_2} \in G$ такие, что $\phi(g^{k_1}) = \phi(g^{k_2})$. Тогда $k_1 = k_2$, откуда $g^{k_1} = g^{k_2}$. Следовательно, ϕ инъективен.
   - Сюръективность: $\forall k \in \mathbb{Z}\, \exists g^k \in G$ такой, что $\phi(g^k) = k$. Следовательно, ϕ сюръективен.
   - Сохранение операции: $\forall g^k, g^m \in G$ выполняется:

     $$\phi(g^k \circ g^m) = \phi(g^{k+m}) = k + m = \phi(g^k) + \phi(g^m).$$

     Таким образом, ϕ сохраняет операцию.

   Поскольку ϕ является биекцией и сохраняет операцию, ϕ — изоморфизм, и $G \cong \mathbb{Z}$.

2. Случай конечной циклической группы: Пусть $G = \langle g \rangle$ — циклическая группа порядка n. Тогда $G = \{e, g, g^2, \dots, g^{n-1}\}$, и $g^n = e$. Построим отображение $\phi : G \to \mathbb{Z}/H_n$ по правилу:

   $$\phi(g^r) = r + nq,$$

   где $r = 0, 1, \dots, n-1$, а $q \in \mathbb{Z}$ — произвольное целое число. Покажем, что ϕ — изоморфизм:

   - Сюръективность: $\forall r + nq \in \mathbb{Z}/H_n\ \exists g^r \in G$ такой, что $\phi(g^r) = r + nq$. Поскольку r пробегает значения от 0 до $n-1$, все смежные классы $\mathbb{Z}/H_n$ покрываются. Следовательно, ϕ сюръективен.
   - Инъективность: Пусть $g^{r_1}, g^{r_2} \in G$ такие, что $\phi(g^{r_1}) = \phi(g^{r_2})$. Тогда $r_1 + nq_1 = r_2 + nq_2$ для некоторых $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. Это означает, что $r_1 - r_2 =$

$n(q_2 - q_1)$, то есть $r_1 \equiv r_2 \pmod{n}$ (разность $r_1 - r_2$ делится на n). Поскольку $0 \leq r_1, r_2 < n$, это возможно только если $r_1 = r_2$. Следовательно, $g^{r_1} = g^{r_2}$, и ϕ инъективен.

- Сохранение операции: $\forall g^k, g^m \in G$ выполняется:

$$\phi(g^k \circ g^m) = \phi(g^{k+m}) = (k+m) + nq = (k + nq_1) + (m + nq_2) = \phi(g^k) + \phi(g^m),$$

где $q = q_1 + q_2$. Таким образом, ϕ сохраняет операцию.

Поскольку ϕ является биекцией и сохраняет операцию, ϕ — изоморфизм, и $G \cong \mathbb{Z}/H_n$.

$\blacksquare$

Лемма 4. Пусть G, X — группы, и $\phi : G \to X$ — гомоморфизм групп. Тогда $\forall g_1, g_2 \in G$ выполнено:

$$g_1 \ker \phi = g_2 \ker \phi \iff \phi(g_1) = \phi(g_2).$$

Доказательство.

$\boxed{\Longrightarrow}$: Пусть $g_1 \ker \phi = g_2 \ker \phi$. Тогда:

$$g_1 \in g_2 \ker \phi.$$

Это означает, что существует $h \in \ker \phi$ такой, что:

$$g_1 = g_2 \circ h.$$

Применим гомоморфизм ϕ к обеим частям равенства:

$$\phi(g_1) = \phi(g_2 \circ h) = \phi(g_2) \circ \phi(h).$$

Поскольку $h \in \ker \phi$, то $\phi(h) = e_X$. Следовательно:

$$\phi(g_1) = \phi(g_2) \circ e_X = \phi(g_2).$$

Таким образом, $\phi(g_1) = \phi(g_2)$.

$\boxed{\Longleftarrow}$: Пусть $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. Рассмотрим элемент $g_1^{-1} \circ g_2$. Применим к нему гомоморфизм ϕ:

$$\phi(g_1^{-1} \circ g_2) = \phi(g_1^{-1}) \circ \phi(g_2) = \phi(g_1)^{-1} \circ \phi(g_2).$$

Поскольку $\phi(g_1) = \phi(g_2)$, то:

$$\phi(g_1^{-1} \circ g_2) = \phi(g_1)^{-1} \circ \phi(g_1) = e_X.$$

Это означает, что $g_1^{-1} \circ g_2 \in \ker \phi$. Следовательно, существует $h \in \ker \phi$ такой, что:

$$g_1^{-1} \circ g_2 = h.$$

Умножим обе части равенства на g_1:

$$g_2 = g_1 \circ h.$$

Это означает, что $g_2 \in g_1 \ker \phi$. Поскольку g_2 также лежит в своём смежном классе $g_2 \ker \phi$, а смежные классы либо не пересекаются, либо совпадают, то:

$$g_1 \ker \phi = g_2 \ker \phi.$$

$\blacksquare$

Теорема 49 (Основная теорема о гомоморфизме)**.**

Пусть $\phi : G \to X$ — гомоморфизм групп. Тогда образ $\phi(G)$ изоморфен факторгруппе $G/\ker(\phi)$, то есть:

$$\phi(G) \cong G/\ker(\phi).$$

Доказательство. Построим отображение $\psi : G/\ker(\phi) \to \phi(G)$ по правилу:

$$\psi(g\ker(\phi)) = \phi(g).$$

Покажем, что ψ — изоморфизм.

- Корректность и однозначность: Пусть $g_1\ker(\phi) = g_2\ker(\phi)$. Тогда по лемме о смежных классах:

  $$\phi(g_1) = \phi(g_2).$$

  Следовательно, $\psi(g_1\ker(\phi)) = \psi(g_2\ker(\phi))$, и отображение ψ корректно определено и однозначно.

- Инъективность: Пусть $\psi(g_1\ker(\phi)) = \psi(g_2\ker(\phi))$. Тогда:

  $$\phi(g_1) = \phi(g_2).$$

  По лемме о смежных классах это означает, что $g_1\ker(\phi) = g_2\ker(\phi)$. Следовательно, ψ инъективно.

- Сюръективность: Для любого $y \in \phi(G)$ существует $g \in G$ такой, что $\phi(g) = y$. Тогда:

  $$\psi(g\ker(\phi)) = \phi(g) = y.$$

  Следовательно, ψ сюръективно.

- Сохранение операции: Для любых $g_1\ker(\phi), g_2\ker(\phi) \in G/\ker(\phi)$ выполняется:

  $$\psi((g_1\ker(\phi)) \circ (g_2\ker(\phi))) = \psi(g_1g_2\ker(\phi)) = \phi(g_1g_2).$$

  С другой стороны:

  $$\psi(g_1\ker(\phi)) \circ \psi(g_2\ker(\phi)) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2).$$

  Поскольку ϕ — гомоморфизм, то:

  $$\phi(g_1g_2) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2).$$

  Таким образом, ψ сохраняет операцию.

Отображение ψ является биективным гомоморфизмом, то есть изоморфизмом. Следовательно:

$$G/\ker(\phi) \cong \phi(G)$$

■

Теорема 50. Пусть G и X — конечные циклические группы, и $\phi : G \to X$ — гомоморфизм. Тогда порядок группы G равен произведению порядка группы X и порядка ядра $\ker(\phi)$, то есть:

$$|G| = |X| \cdot |\ker(\phi)|$$

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $\phi : G \to X$. По основной теореме о гомоморфизме:

$$G/\ker(\phi) \cong \phi(G).$$

Отсюда следует, что порядок факторгруппы $G/\ker(\phi)$ равен порядку образа $\phi(G)$:

$$|G/\ker(\phi)| = |\phi(G)|.$$

С другой стороны, факторгруппа $G/\ker(\phi)$ состоит из смежных классов $g\ker(\phi)$, количество которых равно:

$$|G/\ker(\phi)| = \frac{|G|}{|\ker(\phi)|}.$$

Подставляя это в равенство, получаем:

$$\frac{|G|}{|\ker(\phi)|} = |\phi(G)|.$$

Отсюда:

$$|G| = |\phi(G)| \cdot |\ker(\phi)|.$$

■

5.5 Группы линейных преобразований

Определение 44. Пусть $\mathbb{V}$ — конечномерное векторное пространство над полем $\mathbb{F}$, и $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ — множество всех линейных операторов на $\mathbb{V}$. Пусть $\mathcal{E}$ — фиксированный базис $\mathbb{V}$.

Для линейных операторов $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ определим операцию композиции:

$$\phi_1 \circ \phi_2 = \phi_1(\phi_2)$$

Матрица оператора $\phi_1 \circ \phi_2$ в базисе $\mathcal{E}$ выражается как произведение матриц:

$$A_{\mathcal{E}}^{\phi_1 \circ \phi_2} = A_{\mathcal{E}}^{\phi_1} \cdot A_{\mathcal{E}}^{\phi_2}.$$

Потребуем, чтобы матрицы операторов были невырожденными (то есть их определитель отличен от нуля). Тогда каждый оператор ϕ является биекцией (изоморфизмом) на $\mathbb{V}$.

Множество всех таких невырожденных линейных операторов образует группу относительно операции композиции. Эта группа называется **группой линейных преобразований** и обозначается $GL(n, \mathbb{F})$, где $n = \dim(\mathbb{V})$, а $\mathbb{F}$ — поле, над которым определено пространство $\mathbb{V}$.

Определение 45. Линейный оператор $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ называется ортогональным, если его матрица A в любом ортонормированном базисе удовлетворяет условию:

$$A^T A = E,$$

где A^T — транспонированная матрица, а E — единичная матрица. Множество всех таких операторов образует группу, которая называется **ортогональной группой** и обозначается $O(n)$, где $n = \dim(\mathbb{V})$.

Теорема 51. Ортогональная группа $O(n)$ является подгруппой $GL(n)$.

Доказательство. Докажем, что $O(n)$ удовлетворяет всем свойствам подгруппы, используя матричное представление операторов.

1. Замкнутость относительно композиции:
   Пусть $\phi_1, \phi_2 \in O(n)$, и их матрицы в ОНБ $\mathcal{E}$ равны $A_e^{\phi_1}$ и $A_e^{\phi_2}$ соответственно. Тогда матрица композиции $\phi_1 \circ \phi_2$ равна $A_e^{\phi_1 \circ \phi_2} = A_e^{\phi_1} \cdot A_e^{\phi_2}$. Проверим, что $A_e^{\phi_1 \circ \phi_2}$ ортогональна:
   $$(A_e^{\phi_1 \circ \phi_2})^{-1} = (A_e^{\phi_1} \cdot A_e^{\phi_2})^{-1} = (A_e^{\phi_2})^{-1} \cdot (A_e^{\phi_1})^{-1}.$$
   С другой стороны, транспонирование произведения матриц дает:
   $$(A_e^{\phi_1 \circ \phi_2})^T = (A_e^{\phi_1} \cdot A_e^{\phi_2})^T = (A_e^{\phi_2})^T \cdot (A_e^{\phi_1})^T.$$
   Поскольку $\phi_1, \phi_2 \in O(n)$, их матрицы ортогональны, то есть $(A_e^{\phi_1})^T = (A_e^{\phi_1})^{-1}$ и $(A_e^{\phi_2})^T = (A_e^{\phi_2})^{-1}$. Подставляя, получаем:
   $$(A_e^{\phi_1 \circ \phi_2})^T = (A_e^{\phi_2})^{-1} \cdot (A_e^{\phi_1})^{-1} = (A_e^{\phi_1 \circ \phi_2})^{-1}.$$
   Таким образом, $A_e^{\phi_1 \circ \phi_2}$ ортогональна, и $\phi_1 \circ \phi_2 \in O(n)$.
2. Замкнутость относительно взятия обратного:
   Пусть $\phi \in O(n)$, и его матрица в базисе $\mathcal{E}$ равна A_e^{ϕ}. Поскольку ϕ ортогонален, выполняется $(A_e^{\phi})^T \cdot A_e^{\phi} = E$, откуда $(A_e^{\phi})^{-1} = (A_e^{\phi})^T$. Проверим, что ϕ^{-1} также ортогонален:
   $$A_e^{\phi^{-1}} = (A_e^{\phi})^{-1}.$$
   Транспонируем обе части:
   $$(A_e^{\phi^{-1}})^T = ((A_e^{\phi})^{-1})^T = ((A_e^{\phi})^T)^T = A_e^{\phi}.$$
   Учитывая, что A_e^{ϕ} ортогональна, получаем:
   $$(A_e^{\phi^{-1}})^T \cdot A_e^{\phi^{-1}} = A_e^{\phi} \cdot (A_e^{\phi})^{-1} = E.$$
   Следовательно, $\phi^{-1} \in O(n)$.
3. Непустота:
   Тождественный оператор $\mathcal{I}$ имеет матрицу E, которая удовлетворяет условию $E^T E = E$. Следовательно, $\mathcal{I} \in O(n)$.

Таким образом, $O(n)$ — подгруппа $GL(n)$. ■