Дополнительные главы линейной алгебры

Николай Колб

4 сентября 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Евклидовы и унитарные пространства

1.1 Билинейные формы и их свойства

Пусть V - Линейное пространство над вещественным полем $\mathbb{R}$

Определение 1.

Билинейной формой на V называется функция $f(x, y) : V \times V \to \mathbb{R}$, для которой определены следующие аксиомы:

1. $\forall x, y, z \in V \mid \ f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V \mid \ f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$
3. $\forall x, y, z \in V \mid \ f(x, y, z) = f(x, y) + f(x, z)$
4. $\forall \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V \mid \ f(x, \beta y) = \beta f(x, y)$

Свойства билинейной формы:

- Билинейная форма f называется <u>симметричной</u>, если
$$f(u, v) = f(v, u) \quad \forall u, v \in V$$
- Билинейная форма f называется <u>кососимметричной</u>, если
$$f(u, v) = -f(v, u) \quad \forall u, v \in V$$
- Билинейная форма f называется <u>невырожденной</u>, если для любого ненулевого вектора $u \in V$ существует вектор $v \in V$ такой, что $f(u, v) \neq 0$.

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Определение 2.

Полуторолинейной формой на V называется функция $f : V \times V \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим акиомам:

1. $\forall x, y, z \in V \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
$$f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z).$$

2. $\forall x, y, z \in V \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
$$f(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} f(x, y) + \overline{\beta} f(x, z).$$

Свойства полуторолинейной формы:

- Если $f(x, y) = \overline{f(x, y)}$ $\forall x, y \in V$, то f называется **эрмитовой формой**.
- Если $f(x, x) \geq 0$ $\forall x \in V$ и $f(x, x) = 0$ только при $x = \mathbf{0}$, то f называется **положительно определенной эрмитовой формой**.

Теорема 1. Очень важная теорема!