Дополнительные главы линейной алгебры

составлено Николаем Колбом

17 сентября 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Евклидовы и унитарные пространства

1.1 Билинейные формы и их свойства

Пусть V - Линейное пространство над вещественным полем $\mathbb{R}$

Определение 1.

Билинейной формой на V называется функция $f(x, y) : V \times V \to \mathbb{R}$, для которой определены следующие аксиомы:

1. $\forall x, y, z \in V \quad f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V \quad f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$
3. $\forall x, y, z \in V \quad f(x, y, z) = f(x, y) + f(x, z)$
4. $\forall \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V \quad f(x, \beta y) = \beta f(x, y)$

Свойства билинейной формы:

- Матричный вид билинейной формы f в базисе E задается матрицей $A = (a_{ij})$, где $a_{ij} = f(e_i, e_j)$.

  Тогда
  $$f(x, y) = x^T A y$$
  где x и y — вектор-столбцы координат x и y в базисе E.

- Билинейная форма f называется <u>симметричной</u>, если
  $$f(u, v) = f(v, u) \quad \forall u, v \in V$$

- Билинейная форма f называется <u>кососимметричной</u>, если
  $$f(u, v) = -f(v, u) \quad \forall u, v \in V$$

- Билинейная форма f называется <u>невырожденной</u>, если для любого ненулевого вектора $u \in V$ существует вектор $v \in V$ такой, что $f(u, v) \neq 0$.

Пусть V — векторное пространство над полем $\mathbb{C}$.

Определение 2.

Полуторолинейной формой на V называется функция $g : V \times V \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. $\forall x, y, z \in V \quad g(x + y, z) = g(x, z) + g(y, z)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{C}\ \forall x, y \in V \quad g(\alpha x, y) = \alpha g(x, y)$
3. $\forall x, y, z \in V \quad g(x, y + z) = g(x, y) + g(x, z)$
4. $\forall \mu \in \mathbb{C},\ \forall x, y \in V \quad g(x, \mu y) = \overline{\mu} g(x, y)$
5. $g(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n}\ g(e_i, e_j)\ \xi_i\ \overline{\nu_j}$

1.2 Определения евклидовых и унитарных пространств

Определение 3.

Евклидово пространство — это вещественное линейное пространство E, на котором задана симметричная положительно определенная билинейная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1. $\forall x, y \in E \quad \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
2. $\forall \alpha \in E \quad \forall x, y \in E \quad \langle \lambda x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
3. $\forall x, y, z \in E \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle)$
4. $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle \geq 0 \quad (\langle x, x \rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0)$

Из свойств (1, 2, 3) вытекает следствие: $\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$

Таким образом, некоторое пространство E считается евклидовым, если и только если на нём определена скалярная симметричная билинейная форма, называемая **скалярным произведением**.

Примеры евклидовых пространств:

1. Пусть $E = \mathbb{R}^n$. Скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ можно записать в виде:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mu_i$$

где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $y = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ — векторы в $\mathbb{R}^n$

2. Пусть E — пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$. Скалярное произведение можно определить как:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

Определение 4.

Унитарное пространство — это комплексное линейное пространство U, на котором задана эрмитова положительно определенная полуторалинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle : U \times U \to \mathbb{C}$, обладающая следующими свойствами:

1. $\forall x, y \in U \quad \langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
2. $\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall x, y \in U \quad \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
3. $\forall x, y, z \in U \quad \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
4. $\forall x \in U \quad \langle x, x\rangle \in \mathbb{R} \quad \langle x, x\rangle \geq 0 \quad (\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0)$

Примеры унитарных пространств:

1. Пусть $U = \mathbb{C}^n$. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ можно записать в виде:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\mu_i}$$

где $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ и $y = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ — векторы в $\mathbb{C}^n$.

2. Пусть U — пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с комплексными значениями. Скалярное произведение можно определить как:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

Пусть $V-$ Евклидово / Унитарное пространство.

Определение 5.

$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ - норма вектора $x \in V$

- $\|x\| > 0 \quad \longleftrightarrow \quad x \neq 0$
- $\|x\| = 0 \quad \longleftrightarrow \quad x = 0$

Примеры норм:

- Класс Гёльдоровых норм $(\|X\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots |x_n^p|)^{\frac{1}{p}})$, где $p \geq 1$.
  1. **Евклидова норма в $\mathbb{R}^n$:** $\|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots \xi_n^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \xi_k^2}$
  2. **Евклидова норма в $\mathbb{C}^n$:** $\|x\| = \sqrt{|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2}$

1.3 Неравенство Коши-Буняковского

Теорема 1. (Неравенство Коши-Буняковского).

Пусть $K-$ это E или V, $\quad x, y \in K, \quad$ тогда $\|\langle x, y\rangle\| \ \leq \ \|x\| \cdot \|y\|$

Доказательство. 1. **Для Евклидова пространства** E : $\ \forall x, y \in E, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$0 \ \leq \ \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle \ = \ \langle x, x\rangle - \alpha\langle y, x\rangle - \alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle \ = \ \|x\|^2 - 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\|y\|^2 \ \geq \ 0$$

Это квадратный трёхчлен относительно α.

Для того чтобы оно выполнялось для всех α, дискриминант должен быть не положительным:

$$\frac{D}{4} = \langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\|y\|^2 \leq 0$$

$$\implies \quad |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

2. **Для унитарного пространства** V**:** $\quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

$$0 \ \leq \ \langle \alpha x \ + \ \beta y, \alpha x \ + \ \beta y\rangle \ = \ \alpha\overline{\alpha}\langle x, x\rangle \ + \ \alpha\overline{\beta}\langle x, y\rangle \ + \ \beta\overline{\alpha}\langle y, x\rangle \ + \ \beta\overline{\beta}\langle y, y\rangle \ =$$

$$= |\alpha|^2 \ \|x\|^2 \ + \ \alpha\overline{\beta}\langle x, y\rangle \ + \ \beta \ \overline{\alpha}\overline{\langle x, y\rangle} \ + \ |\beta|^2 \ \|y\|^2 \qquad \implies$$

$$\alpha := \|y\|^2), \quad (\beta := -\langle x, y\rangle$$

$$\implies \quad \|y\|^4 \ \|x\|^2 - \|y\|^2\langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} - \|y\|^2 \ \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} \ + \ |\langle x, y\rangle|^2 \ \|y\|^2 \ =$$

$$= \ \|y\|^2 \ (\|y\|^2 \ \|x\|^2 - \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} - \langle x, y\rangle\overline{\langle x, y\rangle} + |\langle x, y\rangle|^2) \ = \ \|y\|^2(\|x\|^2 \ \|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2) \ \geq \ 0$$

- $y \ \neq \ 0 \implies \|x\|^2 \ \|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2 \ \geq \ 0 \implies |\langle x, y\rangle| \ \leq \ \|x\| \ \|y\|$
- $y \ = \ 0 \implies \|y\| \ = \ 0, \ \langle x, y\rangle \ = \ 0 \implies |\langle x, y\rangle \ \leq \ \|x\| \ \|y\|$

∎

1.4 Неравенство Минковского

Теорема 2. (Неравенство Минковского $\triangle$).
$\forall x, y \in V \quad ||x+y|| \ \leq \ ||x|| + ||y||$

Доказательство. 1. **Для Евклидова пространства E:** $\quad \forall x, y \in E$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$\langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle \leq 2 \cdot \frac{|\langle x,y \rangle| + |\langle y,x \rangle|}{2} \leq 2 \cdot \frac{\|x\|\|y\| + \|y\|\|x\|}{2} = 2\|x\|\|y\|$$

Таким образом:

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей, получаем:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

2. **Для унитарного пространства V:** $\quad \forall x, y \in V$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x,x \rangle + \langle x,y \rangle + \langle y,x \rangle + \langle y,y \rangle$$

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем:

$$||x||^2 \ + \ \overline{\langle x, y \rangle} \ + \ \langle x, y \rangle \ + \ ||y||^2 \ \leq \ ||x||^2 \ + \ 2|\langle x, y \rangle| \ + \ ||y||^2 \ \leq$$

$$\leq \ ||x||^2 \ + \ 2||x||||y|| \ + \ ||y||^2 = \langle ||x|| \ + \ ||y|| \rangle^2$$

Извлекая квадратный корень из обеих частей, получаем:

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

■

Примеры:

1. $\mathbb{R}^n: \quad \langle x, y \rangle = \xi_1 \mu_1 + \ldots + \xi_n \mu_n \quad (\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \ \mu_i)^2 \ \leq \ (\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i^2) \ (\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i^2)$
2. $\mathbb{C}^n: \quad \langle x, y \rangle = \xi_1 \overline{\mu_1} + \ldots + \xi_n \overline{\mu_n} \quad (\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \ \overline{\mu_i}) \ \leq \ (\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^2) \ (\sum\limits_{i=1}^{n} |\mu_i|^2)$

Определение 6.
Пусть $\mathbb{V}$ — это E или V, и $\mathbb{E} = \{e_1, \dots, e_n\}$ — базис в $\mathbb{V}$.
Матрицей Грама называется матрица G, элементы которой определяются как:

$$G_{ij} = (\langle e_i, e_j \rangle),$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $\mathbb{V}$.

Теорема 3. Теперь $\mathbb{V}$ - это только E.
$a_1, \dots, a_k \in E, \quad G = (\langle a_i a_j \rangle)$

1. Если $a_1, \dots, a_k$ - ЛНЗ, то $|G| > 0$
2. Если $a_1, \dots, a_k$ - ЛЗ, то $|G| = 0$

Доказательство.

1. $a_1, \dots, a_k$ - ЛНЗ, $\quad E_1 = \alpha(a_1, \dots, a_k)$

   $\forall x, y \in E_1 \quad x = \xi_1 a_1 \ + \ \dots \ + \ \xi_k a_k, \quad y = \mu_1 a_1 \ + \ \dots \ + \ \mu_k a_k$

   $\langle x, y \rangle = \sum\limits_{i,j=1}^{k} (a_i a_j) \xi_i \mu_j \Longrightarrow$ по критерию Сильвестра $|E| > 0$

2. $a_1, \dots, a_k$ - ЛЗ $\Longrightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k$ не все нули, такие что $\alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k = \mathbf{0}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \dots + \alpha_k \langle a_k, a_1 \rangle = \mathbf{0} \\ \alpha_1 \langle a_1, a_2 \rangle + \dots + \alpha_k \langle a_k, a_2 \rangle = \mathbf{0} \\ \vdots \\ \alpha_1 \langle a_1, a_k \rangle + \dots + \alpha_k \langle a_k, a_k \rangle = \mathbf{0} \end{cases}$$

   $\Longrightarrow$ Система имеет нетривиальное решение $\Longrightarrow$ её определитель равен нулю, а это и есть $|G|$.

■

1.5 Ортонормированные базисы в E и V

$\mathbb{V}$ - это E или V

Определение 7. $x \perp y$, если $\langle x, y \rangle = 0$

Определение 8. $\mathbb{E}$ - базис в $\mathbb{V}$. $\mathbb{E}$ - ОНБ, если $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Теорема 4.
Если $a_1, \ldots, a_k \neq 0$ и $a_i \perp a_j,\ i \neq j$, то это ЛНЗ система.

Доказательство.

От противного: Они ЛНЗ $\Longrightarrow \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ не все 0, что:

$$(*)\ \alpha_1 a_1 + \ldots + \alpha_k a_k = 0$$

. Умножаем скалярно на a_1

$\Longrightarrow \alpha_1 \langle a_1, a_1 \rangle + \alpha_2 \langle a_2, a_1 \rangle + \ldots + \alpha_k \langle a_k, a_1 \rangle = 0 \implies \alpha_1 = 0$

умножаем $(*)$ на a_2 и получаем, что $\alpha_2 = 0$

$\Longrightarrow$ все $\alpha_i = 0 \implies$ противоречие!

■