1 Fiche Formules Appliquées - Optimisation & Convexité

1.1 1. FONCTIONS QUADRATIQUES : Identification & Écriture Matricielle

1.1.1 Application : Vérifier si $h_1(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ est quadratique

Méthode : Mettre sous forme $\frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$

$$h_1(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 1$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = 1 \quad \checkmark \text{ QUADRATIQUE}$$

1.1.2 Application : Vérifier si $h_2(x,y) = x^2 - 2xy + 5y^2 + y$ est quadratique

$$h_2(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = 0 \quad \checkmark \text{ QUADRATIQUE}$$

1.1.3 Application : $f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - x + 2xy - 2y + \frac{5}{2}$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{5}{2}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad c = \frac{5}{2}$$

1.2 2. CONVEXITÉ : Test par Valeurs Propres

1.2.1 Application : $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ est-elle convexe ?

Étape 1 : Calculer la Hessienne

$$H_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Polynôme caractéristique

$$\det(H - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$$

$$\lambda_1 = 1 > 0 \quad \lambda_2 = 3 > 0$$

Conclusion : Toutes $\lambda > 0 \Rightarrow$ **STRICTEMENT CONVEXE** ✓

1.2.2 Application : $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - x + 2xy - 2y + \frac{5}{2}$

Matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \approx 4.56 > 0$$

$$\lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \approx 0.44 > 0$$

Conclusion : STRICTEMENT CONVEXE $\Rightarrow$ possède un minimum unique

---

1.3 3. MINIMUM GLOBAL : Résolution de $\nabla f = 0$

1.3.1 Application : Trouver le minimum de $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - x + 2xy - 2y + \frac{5}{2}$

Étape 1 : Calculer le gradient

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x + 2y - 1 \\ 2x + 2y - 2 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Résoudre $\nabla f = 0$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 & (L_1) \\ 2x + 2y = 2 & (L_2) \end{cases}$$

$L_2 \Rightarrow x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$

$L_1 \Rightarrow 3x + 2(1 - x) = 1$

$$\Rightarrow 3x + 2 - 2x = 1$$

$$\Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow y = 1 - (-1) = 2$$

Étape 3 : Point critique

$$X^* = (-1, 2)$$

Étape 4 : Calculer $f(X^*)$

$$f(-1, 2) = \frac{3}{2} + 4 - 4 + 1 - 4 + \frac{5}{2}$$

$$= \left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) + (4 - 4 + 1 - 4)$$

$$= 4 - 3 = 1$$

Conclusion : Minimum global = **1** en **(-1, 2)**

1.4 4. POINTS CRITIQUES : Classification par $\det(H)$

1.4.1 Application : $f(x, y) = xe^y + ye^x$ - Nature du point $(-1, -1)$

Étape 1 : Calculer la Hessienne

$$H = \begin{pmatrix} ye^x & e^y + e^x \\ e^y + e^x & xe^y \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Évaluer en $(-1, -1)$

$$H(-1, -1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}$$

Étape 3 : Calculer D

$$D = (-e^{-1})^2 - (2e^{-1})^2$$

$$= e^{-2} - 4e^{-2}$$

$$= -3e^{-2} < 0$$

Conclusion : $D < 0 \Rightarrow$ **POINT SELLE** ✓

1.5 5. CONVEXITÉ PAR COMPOSITION : Méthode du Logarithme

1.5.1 Application : $g(x, y) = \frac{e^{x+y}}{\sqrt{x+y}}$ sur $\{x + y > 0\}$

Étape 1 : Prendre le logarithme

$$\ln(g) = \ln(e^{x+y}) - \ln(\sqrt{x + y})$$

$$= x + y - \frac{1}{2} \ln(x + y)$$

Étape 2 : Analyser chaque terme

— $(x, y) \mapsto x + y$: AFFINE $\Rightarrow$ convexe
— $t \mapsto -\frac{1}{2} \ln(t)$: CONVEXE sur $(0, +\infty)$

Étape 3 : Somme de convexes

$$\ln(g) = \text{convexe} + \text{convexe} \Rightarrow \text{CONVEXE}$$

Étape 4 : Conclusion

$$\ln \text{ strictement croissant} + \ln(g) \text{ convexe} \Rightarrow g \text{ CONVEXE} \checkmark$$

1.6 6. PLAN TANGENT : Équation & Position

1.6.1 Application : Plan tangent à $g(x, y) = \frac{e^{x+y}}{\sqrt{x+y}}$ en $(1, 0)$

Étape 1 : Calculer $g(1, 0)$

$$g(1, 0) = \frac{e^{1+0}}{\sqrt{1+0}} = e$$

Étape 2 : Calculer les dérivées partielles

Avec $t = x + y$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{(2t-1)e^t}{2t^{3/2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{(2t-1)e^t}{2t^{3/2}}$$

En $(1, 0)$ avec $t = 1$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1, 0) = \frac{(2 \cdot 1 - 1)e^1}{2 \cdot 1^{3/2}} = \frac{e}{2}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1, 0) = \frac{e}{2}$$

Étape 3 : Équation du plan tangent

$$z = g(1, 0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x - 1) + \frac{\partial g}{\partial y}(y - 0)$$

$$z = e + \frac{e}{2}(x - 1) + \frac{e}{2}y$$

$$z = \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}y + \frac{e}{2}$$

Étape 4 : Position relative

$$g \text{ convexe} \Rightarrow \text{Surface AU-DESSUS du plan tangent } \checkmark$$

1.7 7. COERCIVITÉ : Minoration par $\|x\|^2$

1.7.1 Application : $g(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ est-elle coercive ?

Méthode 1 - Complétion du carré :

$$g(x,y) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Tous les termes ≥ 0, donc :

$$g(x,y) \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2$$

Conclusion :

$$g(x,y) \geq \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2 \to +\infty \text{ quand } \|(x,y)\| \to +\infty$$

$$\Rightarrow g \text{ est COERCIVE } \checkmark$$

Théorème appliqué :

$$\text{Coercive} + \text{Strictement convexe} \Rightarrow \text{MINIMUM UNIQUE}$$

$$g \text{ possède un unique minimum global}$$

1.8 8. INÉGALITÉ DE JENSEN : Applications

1.8.1 Application : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ - Convexité et Jensen

Étape 1 : Étude de convexité

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

Signe de f'' :

— $x > 0$: $e^x - 1 > 0 \Rightarrow f'' > 0 \Rightarrow$ CONVEXE sur $]0, +\infty[$
— $x < 0$: $e^x - 1 < 0 \Rightarrow f'' < 0 \Rightarrow$ CONCAVE sur $]-\infty, 0[$

Étape 2 : Application de Jensen pour $x_1, \ldots, x_n \geq 1$

Objectif : Montrer que

$$\frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+x_k}$$

Preuve :

Poser $y_i = \ln(x_i) \geq 0$ (car $x_i \geq 1$)

Sur $\mathbb{R}_+$, f est convexe. Jensen avec $\lambda_i = \frac{1}{n}$:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum y_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum f(y_k)$$

Membre gauche :

$$f\left(\frac{1}{n}\sum \ln(x_k)\right) = f\left(\ln\left(\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\right)\right) = \frac{1}{1+\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}$$

Membre droit :

$$\frac{1}{n}\sum f(\ln(x_k)) = \frac{1}{n}\sum \frac{1}{1+x_k}$$

Multiplier par $n \Rightarrow$ Résultat ✓

1.9 9. GRADIENT À PAS FIXE (GPF)

1.9.1 Application : $f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - x + 2xy - 2y + \frac{5}{2}$

Paramètres : $X^{(0)} = (0,0)$, $\alpha = \frac{1}{2}$

Étape 1 : Calculer $\nabla f(0,0)$

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1 \\ 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Formule GPF

$$X^{(1)} = X^{(0)} - \alpha \nabla f(X^{(0)})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Étape 3 : Calculer $f(X^{(1)})$

$$f(0.5,1) = \frac{3}{2} \cdot (0.5)^2 + 1^2 + 2 \cdot (0.5) \cdot 1 - 0.5 - 2 \cdot 1 + \frac{5}{2}$$

$$= 0.375 + 1 + 1 - 0.5 - 2 + 2.5$$

$$= 2.375$$

Résultat : $X^{(1)} = (0.5, 1)$, $f(X^{(1)}) = 2.375$

1.10 10. GRADIENT À PAS OPTIMAL (GPO)

1.10.1 Application : Même fonction f, même point de départ

Étape 1 : Direction de descente

$$w^{(0)} = -\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Étape 2 : Paramétrage

$$X(\alpha) = X^{(0)} + \alpha w^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix}$$

Étape 3 : Former $\varphi(\alpha) = f(\alpha, 2\alpha)$

$$\varphi(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha^2 + (2\alpha)^2 + 2\alpha \cdot (2\alpha) - \alpha - 2 \cdot (2\alpha) + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\alpha^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha^2 - \alpha - 4\alpha + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{19}{2}\alpha^2 - 5\alpha + \frac{5}{2}$$

Étape 4 : Minimiser φ

$$\varphi'(\alpha) = 19\alpha - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^* = \frac{5}{19}$$

Étape 5 : Calculer $X^{(1)}$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 5/19 \\ 10/19 \end{pmatrix}$$

Étape 6 : Calculer $f(X^{(1)})$

$$f\left(\frac{5}{19}, \frac{10}{19}\right) = \frac{665}{361} \approx 1.8438$$

Résultat : $X^{(1)} = \left(\frac{5}{19}, \frac{10}{19}\right)$, $f(X^{(1)}) \approx 1.8438$

1.11 11. COMPARAISON GPF vs GPO

1.11.1 Résultats sur $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - x + 2xy - 2y + \frac{5}{2}$

Minimum global : $X^* = (-1, 2)$, $f(X^*) = 1$

GPF ($\alpha = \frac{1}{2}$) : - $X^{(1)} = (0.5, 1)$ - $f(X^{(1)}) = 2.375$ - Écart au minimum : 1.375

GPO : - $X^{(1)} = \left(\frac{5}{19}, \frac{10}{19}\right) \approx (0.263, 0.526)$ - $f(X^{(1)}) \approx 1.8438$ - Écart au minimum : 0.8438

Conclusion : GPO converge PLUS VITE (écart réduit de 38%) ✓

1.12 12. CHECKLIST MÉTHODE COMPLÈTE

1.12.1 Exemple traité : $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

ÉTAPE 1 : Identification - Quadratique homogène - Domaine : $\mathbb{R}^2$

ÉTAPE 2 : Convexité

$$H_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3 \Rightarrow \text{STRICTEMENT CONVEXE} \checkmark$$

ÉTAPE 3 : Coercivité

$$g(x,y) \geq \frac{1}{2}\|(x,y)\|^2 \Rightarrow \text{COERCIVE} \checkmark$$

ÉTAPE 4 : Minimum unique

$$\text{Convexe} + \text{Coercive} \Rightarrow \exists! \text{ minimum global}$$

ÉTAPE 5 : Trouver le minimum

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X^* = (0,0)$$

ÉTAPE 6 : Valeur

$$g(0,0) = 0 \Rightarrow \text{Minimum} = 0\checkmark$$

1.13 FORMULES ESSENTIELLES (À CONNAÎTRE PAR COEUR)

$$\boxed{\nabla f = Ax + b} \quad \text{(gradient quadratique)}$$

$$\boxed{D = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2} \quad \text{(classification points critiques)}$$

$$\boxed{\text{Coercive} + \text{Strictement convexe} \Rightarrow \text{min unique}}$$

$$\boxed{\alpha^* = \frac{\|\nabla f\|^2}{\nabla f^T A \nabla f}} \quad \text{(pas optimal GPO)}$$

$$\boxed{f\left(\sum \lambda_i x_i\right) \leq \sum \lambda_i f(x_i)} \quad \text{(Jensen convexe)}$$

$$\boxed{\ln(g) \text{ convexe} + \ln \text{ croissant} \Rightarrow g \text{ convexe}}$$