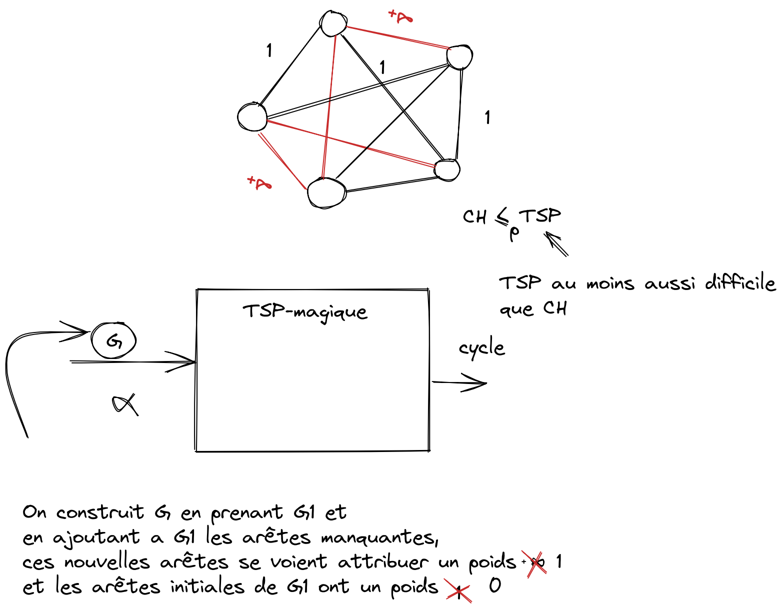
# Exercice 2

1. Soit $G_1 = (V_1, E_1)$ un graphe, $\text{TSP-magique}(G = (V, E))$ une procédure calculant une solution optimale au problème du voyageur de commerce. On cherche à utiliser $\text{TSP-magique}$ pour un cycle hamiltonien.
   On peut mettre toutes les arêtes connus du cycle hamiltonien sur un poids de $1$ et les arêtes non connus (deux points proche $(u, v)$) sur des poids lourds comme $+\infty$.
   Nous pouvons ensuite appliquer $\text{TSP-magique}$.
2. $G_1$ admet une solution au cycle hamiltonien si et seulement si par le graphe $G_1$ et la fonction de distance $d$ ainsi contrainte, la procédure $\text{TSP-magique}$ retourne un cycle dont le poids est $n$.




3. On peut trouver comme complexité en temps exponentiel

# Exercice 3

Soit $\text{TSP-magique}$ s'exécute en temps exponentiel $\mathcal{O}(n^2 2^n)$ et soit la librairie $\text{SuperGraphs}$ donne une procédure TSP-approx qui calcule une approximation au problème du TSP en temps polynomial.

1. TSP-approx retourne une solution de cout $z = 0$ si et seulement si le graphe $G_1$ contient un cycle hamiltonien.
   "$\Rightarrow$" si $z = 0$ ou $z = n$, alors le cycle construit par TSP-approx n'utilise que des arêtes de $G_1$ et dans $G_1$ admet un cycle hamiltonien
   "$\Leftarrow$" si $G_1$ admet un cycle hamiltonien alors le graphe $G$ admet une solution

optimal à TSP de coût $z = 0$ on a

$$z^* = \begin{cases} 0 \\ n \end{cases}$$

Et donc, quelque soit $c$, on a

$$c \times z^* = \begin{cases} n \\ 0 \end{cases} < \begin{cases} +\infty \\ 1 \end{cases}$$

Ainsi, on peut utiliser TSP-approx pour résoudre le cycle hamiltonien.
$\frac{3}{2} = 1.5$

$$\forall x, y, z$$

$$d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

2. A première vu nous venons de résoudre le cycle hamiltonien, soit un problème $\mathrm{NP}$. Cela crée une illusion

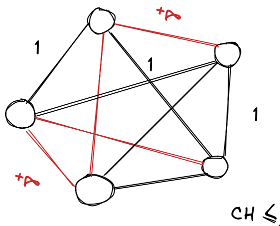
# Exercice 4

1. Soit $\mathcal{T}$ un arbre couvrant minimum de $G = (V, E)$. On duplique les arêtes de $\mathcal{T}$ afin d'obtenir un graphe eulérien
   Soit $\mathcal{C}$ un cycle qui est une solution optimale à TSP pour le graphe $G = (V, E)$, notons $z^*$ la distance totale de $\mathcal{C}$.
   Montrons que si $\mathcal{T}$ est un arbre couvrant de poids minimum, alors $\mathrm{poids}(\mathcal{T}) \leq z^*(= \mathrm{poids}(\mathcal{C}))$ :

   $\mathcal{C}$ contient tous les sommets et $\mathcal{C}$ est un cycle.
   Retirons à $\mathcal{C}$ une arête quelconque, on obtient $\mathcal{C}'$ qui est un arbre couvrant. Or, $\mathrm{poids}(\mathcal{C}) \geq \mathrm{poids}(\mathcal{T})$

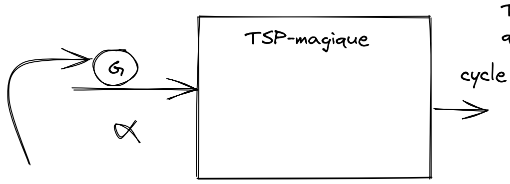
**ⓘ Graphe eulérien**

Un graphe est eulérien s'il possède un chemin ou un cycle eulérien
- Chemin eulérien : chemin parcourant chaque arêtes une fois.
- Cycle eulérien : cycle parcourant toutes les arêtes une fois et reviens au point de départ



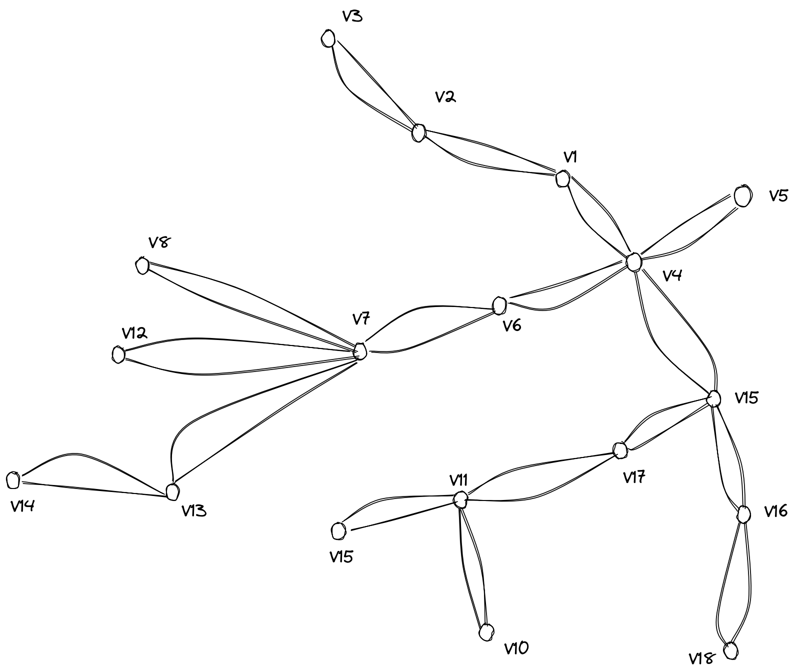

$CH \leq_p TSP$

TSP au moins aussi difficile que CH




On construit G en prenant G1 et
en ajoutant a G1 les arêtes manquantes,
ces nouvelles arêtes se voient attribuer un poids 1
et les arêtes initiales de G1 ont un poids 0

2. Soit $\mathcal{T}$ un arbre couvrant de poids $min$, on double chaque arêtes de $\mathcal{T}$. Alors $\mathcal{T}$ contient un cycle eulérien car chaque sommet a maintenant un degré pour




$v_4, v_1, v_2, v_3, v_2, v_1, v_4, v_6, v_7, v_8, v_7, v_{12}, v_7, v_{13}, v_{14}, v_7, v_6, v_4, v_5, v_6, v_{15}, \ldots$

Bien sûr, $\text{poids}(\mathcal{C}_E) = \text{poids}(\mathcal{T}) \times 2$

A partir de $\mathcal{C}_E$, on peut construire un cycle hamiltonien dont le poids est au plus $2 \times z^*$.

Pour cela, on ne consulte que la première occurrence de chaque sommet dans $\mathcal{C}_E$

A cause de l'inégalité triangulaire, le poids de ce nouveau cycle est moindre que $\text{poids}(\mathcal{C}_E)$, or $\text{poids}(\mathcal{C}_E) = 2 \times \text{poids}(\mathcal{T}) \leq 2 \times z^*$

3. ?

4. ?
5.