1 Formulaire de Révision : Optimisation

1.1 1. Optimisation sans contraintes

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction à optimiser.

1.1.1 Dérivées et Matrices

- **Gradient** (∇f) : Le vecteur des dérivées partielles premières.

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Matrice Hessienne (H_f) : La matrice des dérivées partielles secondes.

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

1.1.2 Conditions d'optimalité

- **Condition nécessaire (Point critique)** :

$$\nabla f(x^*) = 0$$

  Un point critique est un candidat pour être un extremum (minimum, maximum ou point selle).

Convexité (Condition suffisante): * f est **convexe** si $H_f(x)$ est positive (toutes valeurs propres ≥ 0). * f est **strictement convexe** si $H_f(x)$ est définie positive (toutes valeurs propres > 0). Si f est convexe, tout minimum local est global.

1.1.3 Algorithmes de descente

Algorithme du gradient à pas fixe (α):

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha \nabla f(x^{(k)})$$

1.2 2. Optimisation sous contraintes (Égalités)

On cherche à minimiser $f(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

1.2.1 Méthode de Lagrange

Fonction Lagrangienne $(\mathcal{L})$:

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Système à résoudre (Point critique):

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \quad \text{(équivaut à } g(x,y) = 0) \end{cases}$$

1.2.2 Conditions suffisantes (Nature des points)

Matrice Hessienne Bordée ($HB_{\mathcal{L}}$):

$$HB_{\mathcal{L}}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} & \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

Test du déterminant (Δ): Soit $\Delta = \det(HB_{\mathcal{L}}(x^*, y^*, \lambda^*))$. * Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ **Maximum** local lié. * Si $\Delta < 0 \Rightarrow$ **Minimum** local lié.

1.3 3. Applications : Régression Linéaire

1.3.1 Régression Linéaire Simple

Modèle : $y_i = \beta_1 x_i + \beta_0 + \epsilon_i$.

Pente ($\hat{\beta}_1$) (MCO):

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

Ordonnée à l'origine ($\hat{\beta}_0$):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

Coefficient de détermination (R^2):

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

Dans le cas simple, c'est le carré du coefficient de corrélation : $R^2 = r^2$.

1.3.2 Régression Linéaire Multiple (Matricielle)

Modèle : $Y = X\beta + \epsilon$.

Estimateur des MCO ($\hat{\beta}$):

$$\hat{\beta} = (tXX)^{-1} tXY$$

1.4 4. Outils Algèbre Linéaire (Matrices)

1.4.1 Déterminant 2x2

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

1.4.2 Déterminant 3x3

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$