1 Fonctions quadratiques

1.1 Forme générale

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$$

- A : matrice symétrique $(n \times n)$
- b : vecteur $(n \times 1)$
- c : constante

1.1.1 Exemple

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - x + 2xy - 2y + \frac{5}{2}$$

Écriture matricielle :

$$f(x, y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{5}{2}$$

1.2 Gradient

$$\nabla f(x) = Ax + b$$

Exemple : Si $f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - x + 2xy - 2y + \frac{5}{2}$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x + 2y - 1 \\ 2x + 2y - 2 \end{pmatrix}$$

1.3 Hessienne (constante pour les quadratiques)

$$H_f = A$$

1.4 Convexité

- **A définie positive** (toutes valeurs propres > 0) $\Rightarrow f$ **strictement convexe**
- **A semi-définie positive** (toutes valeurs propres ≥ 0) $\Rightarrow f$ **convexe**

1.4.1 Test rapide pour matrices 2×2

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$:

- **Définie positive** $\iff a > 0$ ET $\det(A) = ad - b^2 > 0$
- **Semi-définie positive** $\iff a \geq 0$ ET $\det(A) \geq 0$

1.5 Minimum global

Pour une fonction quadratique strictement convexe :

$$\nabla f(x^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax^* + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^* = -A^{-1}b$$

1.5.1 Exemple complet

$$f(x,y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - x + 2xy - 2y + \frac{5}{2}$$

1. Vérifier convexité :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \text{(toutes deux } > 0) \quad \checkmark$$

2. Trouver le minimum :

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 1 = 0 \\ 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -1,\ y = 2$$

3. Calculer f(x*) :

$$f(-1,2) = \frac{3}{2} + 4 - 4 + 1 - 4 + \frac{5}{2} = 1$$

---

2 Convexité en plusieurs variables

2.1 Test via la Hessienne

2.1.1 Matrice Hessienne

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

2.1.2 Critères de convexité

- **H définie positive** ($\det(\mathrm{H}) > 0$ ET $f_{xx} > 0$) $\Rightarrow$ **strictement convexe**
- **H semi-définie positive** ($\det(\mathrm{H}) \geq 0$ ET $f_{xx} \geq 0$) $\Rightarrow$ **convexe**

2.1.3 Exemple : $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

$$H_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(H - \lambda I) = (2 - \lambda)^2 - 1 = (1 - \lambda)(3 - \lambda)$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 1 > 0$, $\lambda_2 = 3 > 0 \Rightarrow$ **strictement convexe**

2.2 Plan tangent

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

2.2.1 Position relative

- **f convexe** $\Rightarrow$ surface **au-dessus** du plan tangent
- **f concave** $\Rightarrow$ surface **en dessous** du plan tangent

2.2.2 Exemple : $g(x,y) = \frac{e^{x+y}}{\sqrt{x+y}}$ au point (1,0)

$$g(1,0) = e, \quad g_x(1,0) = g_y(1,0) = \frac{e}{2}$$

$$z = e + \frac{e}{2}(x-1) + \frac{e}{2}y = \frac{e}{2}x + \frac{e}{2}y + \frac{e}{2}$$

Comme g est convexe, la surface est **au-dessus** du plan tangent.

2.3 Règles de composition

2.3.1 Composition avec fonction affine

- Si $h(u)$ convexe et $u = g(x)$ affine $\Rightarrow$ $h(g(x))$ convexe

2.3.2 Composition via logarithme

- Si $g > 0$ et $\ln(g)$ convexe $\Rightarrow$ g convexe
- Car ln strictement croissant

2.3.3 Exemple : $g(x,y) = \frac{e^{x+y}}{\sqrt{x+y}}$

$$\ln(g) = x + y - \frac{1}{2}\ln(x+y)$$

- $(x,y) \mapsto x+y$ est affine (donc convexe)
- $t \mapsto -\frac{1}{2}\ln(t)$ est convexe sur $(0,+\infty)$
- Somme de fonctions convexes $\Rightarrow$ $\ln(g)$ convexe $\Rightarrow$ **g convexe**

---

3 Points critiques & nature

3.1 Méthode générale

3.1.1 Étape 1 : Trouver les points critiques

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

3.1.2 Étape 2 : Calculer la Hessienne au point critique

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

3.1.3 Étape 3 : Déterminer la nature

$$D = \det(H) = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

Condition	Nature
$D > 0$ et $f_{xx} > 0$	**Minimum local**
$D > 0$ et $f_{xx} < 0$	**Maximum local**
$D < 0$	**Point selle**
$D = 0$	**Test non conclusif**

3.2 Exemple complet : $f(x, y) = xe^y + ye^x$

3.2.1 1. Points critiques

$$\nabla f = \begin{pmatrix} e^y + ye^x \\ xe^y + e^x \end{pmatrix} = 0$$

En multipliant la 1ère par x et la 2ème par y :

$$\begin{cases} xe^y + xye^x = 0 \\ xye^y + ye^x = 0 \end{cases} \Rightarrow xe^y = ye^x \Rightarrow \boxed{xy = 1}$$

En injectant dans la 1ère équation :

$$e^y = -ye^x \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow e^{1/x} = -\frac{1}{x}e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{xe^{1/x} + e^x = 0}$$

3.2.2 2. Résolution de $\varphi(x) = xe^{1/x} + e^x = 0$

Test de x = -1 :

$$\varphi(-1) = (-1)e^{-1} + e^{-1} = 0 \quad \checkmark$$

Monotonie de φ pour x < 0 :

$$\varphi'(x) = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) + e^x$$

Pour $x < 0$: $e^{1/x} > 0$, $1 - \frac{1}{x^2} < 0$ mais la somme reste > 0

$$\Rightarrow \varphi \text{ strictement croissante} \Rightarrow \text{unique solution}$$

Conclusion : Point critique unique : $\boxed{(-1, -1)}$

3.2.3 3. Nature du point critique

$$H = \begin{pmatrix} ye^x & e^y + e^x \\ e^y + e^x & xe^y \end{pmatrix}$$

En $(-1,-1)$:

$$H = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$D = (-e^{-1})^2 - (2e^{-1})^2 = e^{-2} - 4e^{-2} = -3e^{-2} < 0$$

Conclusion : $(-1,-1)$ est un **point selle**

---

4 Convexité (1 variable) & Jensen

4.1 Test de convexité en 1D

$$f''(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{f strictement convexe}$$

$$f''(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{f concave}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{point d'inflexion potentiel}$$

4.2 Inégalité de Jensen

4.2.1 Pour fonction convexe

Si f convexe et $\lambda_i \geq 0$ avec $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

4.2.2 Pour fonction concave

Si f concave :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$

4.2.3 Cas particulier (moyenne arithmétique)

Avec $\lambda_i = \frac{1}{n}$:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \quad \text{(si f convexe)}$$

4.3 Exemple complet : $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

4.3.1 1. Domaine

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{(car } 1 + e^x > 0 \text{ toujours)}$$

4.3.2 2. Convexité/Concavité

$$f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^2 + e^x \cdot 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

Signe de f"(x) :

$$\begin{cases} e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0 & \Rightarrow f \text{ convexe sur }]0, +\infty[\\ e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0 & \Rightarrow f \text{ concave sur }]-\infty, 0[\end{cases}$$

4.3.3 3. Application de Jensen

Objectif : Montrer que pour $x_1, \ldots, x_n \geq 1$:

$$\frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + x_k}$$

Démonstration :

Posons $y_i = \ln(x_i) \geq 0$ (car $x_i \geq 1$).

Sur $\mathbb{R}_+$, f est **convexe**. Appliquons Jensen avec $\lambda_i = \frac{1}{n}$:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(y_k)$$

Membre gauche :

$$f\left(\frac{1}{n}\sum \ln(x_k)\right) = f\left(\ln \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}\right) = \frac{1}{1 + \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}$$

Membre droit :

$$\frac{1}{n}\sum f(\ln(x_k)) = \frac{1}{n}\sum \frac{1}{1 + e^{\ln(x_k)}} = \frac{1}{n}\sum \frac{1}{1 + x_k}$$

En multipliant par n :

$$\boxed{\frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1 + x_k}}$$

---

5 Coercivité

5.1 Définition

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est **coercive** si :

$$\|x\| \to +\infty \quad \Rightarrow \quad f(x) \to +\infty$$

5.2 Méthode de vérification

Trouver une minoration du type :

$$f(x) \geq c\|x\|^2 \quad \text{avec } c > 0$$

5.3 Exemple : $g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

5.3.1 Méthode 1 : Minoration directe

$$g(x, y) = \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Comme tous les termes sont positifs :

$$g(x, y) \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\|(x, y)\|^2$$

Donc quand $\|(x, y)\| \to +\infty$, on a $g(x, y) \to +\infty \Rightarrow$ **g coercive**

5.3.2 Méthode 2 : Via les valeurs propres

Si $g(x) = \frac{1}{2}x^T Ax$ avec A définie positive :

$$\lambda_{\min}(A)\|x\|^2 \leq x^T Ax \leq \lambda_{\max}(A)\|x\|^2$$

Ici $\lambda_{\min} = 1 > 0$ donc g est coercive.

5.4 Conséquence fondamentale

$$\boxed{\text{Coercive + Strictement convexe} \Rightarrow \text{Minimum global UNIQUE}}$$

5.4.1 Justification

— **Coercivité** $\Rightarrow$ minimum global existe (f tend vers $+\infty$ aux bords)

— **Stricte convexité** $\Rightarrow$ unicité du minimum

---

6 Méthodes du gradient

6.1 Principe général

Pour minimiser $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha_k \nabla f(X^{(k)})$$

où $\alpha_k > 0$ est le **pas de descente**.

6.2 Gradient à Pas Fixe (GPF)

6.2.1 Formule

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} - \alpha \nabla f(X^{(k)})$$

avec $\alpha > 0$ constant.

6.2.2 Condition de convergence (fonctions quadratiques)

$$0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_{\max}(A)}$$

où A est la matrice Hessienne.

6.2.3 Exemple

$$f(x, y) = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - x + 2xy - 2y + \frac{5}{2}$$

Départ : $X^{(0)} = (0,0)$, **Pas :** $\alpha = \frac{1}{2}$

Calcul :

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(X^{(1)}) = f(0.5, 1) = 2.375$$

6.3 Gradient à Pas Optimal (GPO)

6.3.1 Principe

À chaque itération, on minimise :

$$\varphi(\alpha) = f(X^{(k)} - \alpha \nabla f(X^{(k)}))$$

6.3.2 Formule pour fonctions quadratiques

Si $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$:

$$\alpha^* = \frac{\|\nabla f(X^{(k)})\|^2}{\nabla f(X^{(k)})^T A \nabla f(X^{(k)})}$$

6.3.3 Exemple (suite)

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w^{(0)} = -\nabla f = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Paramétrage :

$$X(\alpha) = (0,0) + \alpha(1,2) = (\alpha, 2\alpha)$$

Substitution dans f :

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha, 2\alpha) = \frac{3}{2}\alpha^2 + 4\alpha^2 + 4\alpha^2 - \alpha - 4\alpha + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{19}{2}\alpha^2 - 5\alpha + \frac{5}{2}$$

Minimisation :

$$\varphi'(\alpha) = 19\alpha - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = \frac{5}{19}$$

Itéré optimal :

$$X^{(1)} = \left(\frac{5}{19}, \frac{10}{19}\right)$$

$$f(X^{(1)}) = \frac{665}{361} \approx 1.8438$$

6.4 Comparaison GPF vs GPO

Critère	GPF	GPO
Complexité	Simple	Plus coûteux
Convergence	Linéaire	Plus rapide
Exemple	f(0.5, 1) = **2.375**	f(5/19, 10/19) ≈ **1.8438**

Conclusion : GPO converge plus vite vers le minimum (f* = 1)

---

7 Dérivées usuelles

7.1 Fonctions 1D

Fonction	Dérivée
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
e^{ax}	ae^{ax}

7.2 Fonctions 2D

Fonction	$\frac{\partial f}{\partial x}$	$\frac{\partial f}{\partial y}$
$x^2 + y^2$	$2x$	$2y$
xy	y	x
$2xy$	$2y$	$2x$
e^{x+y}	e^{x+y}	e^{x+y}
$\ln(x+y)$	$\frac{1}{x+y}$	$\frac{1}{x+y}$
$\frac{1}{\sqrt{x+y}}$	$-\frac{1}{2(x+y)^{3/2}}$	$-\frac{1}{2(x+y)^{3/2}}$
xe^y	e^y	xe^y
ye^x	ye^x	e^x

7.3 Hessienne

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Théorème de Schwarz : Si f est C^2, alors $f_{xy} = f_{yx}$

---

8 Astuces de calcul

8.1 Valeurs propres matrice 2×2

Pour $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$:

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - b^2) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-b^2)}}{2}$$

Simplification :

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-b^2) = (a-d)^2 + 4b^2$$

8.2 Test rapide de convexité d'un domaine

Un ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$ est convexe si :

$$\forall x, y \in D, \quad \forall t \in [0,1], \quad tx + (1-t)y \in D$$

Exemples :

- $\{(x,y) : x + y > 0\}$ est convexe (demi-plan)
- $\{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}$ est convexe (disque)
- $\{(x,y) : xy > 1\}$ est **non** convexe

8.3 Changement de variable utile

Si $f(x,y)$ dépend de $u = x + y$ uniquement :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = f'(u)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = f'(u)$$

---

9 Checklist pour les examens

9.1 Pour une fonction donnée

9.1.1 Étape 1 : Identification

- ☐ Quadratique ? (forme $\frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c$)
- ☐ Domaine de définition ?

9.1.2 Étape 2 : Propriétés

- ☐ Calculer le gradient ∇f
- ☐ Calculer la Hessienne H_f
- ☐ Tester la convexité (valeurs propres ou déterminant)
- ☐ Vérifier la coercivité (si demandé)

9.1.3 Étape 3 : Optimisation

- ☐ Résoudre $\nabla f = 0$ (points critiques)
- ☐ Classifier les points (min/max/selle via det(H))
- ☐ Calculer f au minimum

9.1.4 Étape 4 : Méthodes numériques (si demandé)

- ☐ GPF : calculer $X^{(1)} = X^{(0)} - \alpha \nabla f(X^{(0)})$
- ☐ GPO : minimiser $\phi(\alpha)$ puis calculer $X^{(1)}$
- ☐ Comparer les valeurs f(X^{(1)})

---

10 Erreurs classiques à éviter

10.1 Calcul

- Oublier le facteur $\frac{1}{2}$ dans la forme quadratique
- Confondre f_{xy} et $(f_{xy})^2$ dans le déterminant
- Ne pas vérifier que $f_{xy} = f_{yx}$ (Schwarz)

10.2 Raisonnement

- Dire "H > 0 donc convexe" sans vérifier toutes les valeurs propres
- Conclure "point critique = minimum" sans tester la Hessienne
- Oublier de vérifier la coercivité avant d'affirmer l'existence d'un minimum

10.3 Méthodologie

- Sauter l'étape "vérifier que c'est quadratique"
- Ne pas justifier les calculs intermédiaires
- Oublier de calculer f(x*) à la fin

---

11 Formules clés à retenir par cœur

$$\boxed{\nabla f = Ax + b} \quad \text{(quadratique)}$$

$$\boxed{D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2} \quad \text{(déterminant Hessienne)}$$

$$\boxed{\text{coercive + strictement convexe} \Rightarrow \text{min unique}}$$

$$\boxed{\alpha^* = \frac{\|\nabla f\|^2}{\nabla f^T A \nabla f}} \quad \text{(GPO quadratique)}$$

$$\boxed{f\left(\sum \lambda_i x_i\right) \leq \sum \lambda_i f(x_i)} \quad \text{(Jensen convexe)}$$