Metody numeryczne
Projekt 2 – Układy równań liniowych

Wiktor Gawroński 193285

Maj 2024

1 Wstęp

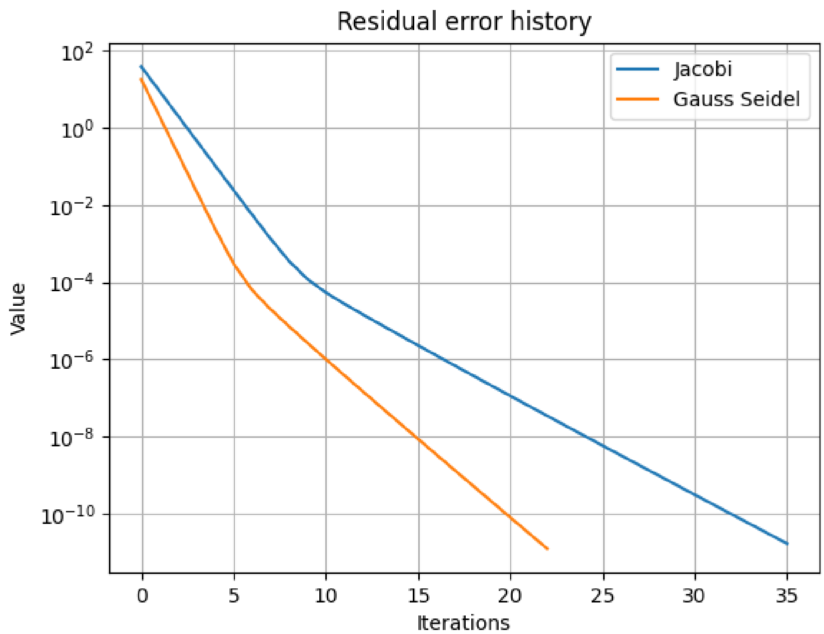
Celem projektu jest implementacja i analiza dwóch metod iteracyjnych (Jacobiego i Gaussa-Seidla) oraz jednej metody bezpośredniej (faktoryzacja LU) rozwiązywania układów równań liniowych oraz analiza ich działania. Do analizy błędu użyto normy euklidesowej.

Równania macierzowe użyte w projekcie są postaci macierza pasmowego o szerokości równej pieć i wektora o wartościach zzgodnie ze wzorem równym sin(n * (3 + 1)).

$$A = \begin{bmatrix} 5+2 & -1 & -1 & 0 & ... \\ -1 & 5+2 & -1 & -1 & ... \\ -1 & -1 & 5+2 & -1 & ... \\ 0 & -1 & -1 & 5+2 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 0.98 \\ -0.53 \\ -0.28 \\ ... \end{bmatrix}$$

2 Porównanie algorytmów

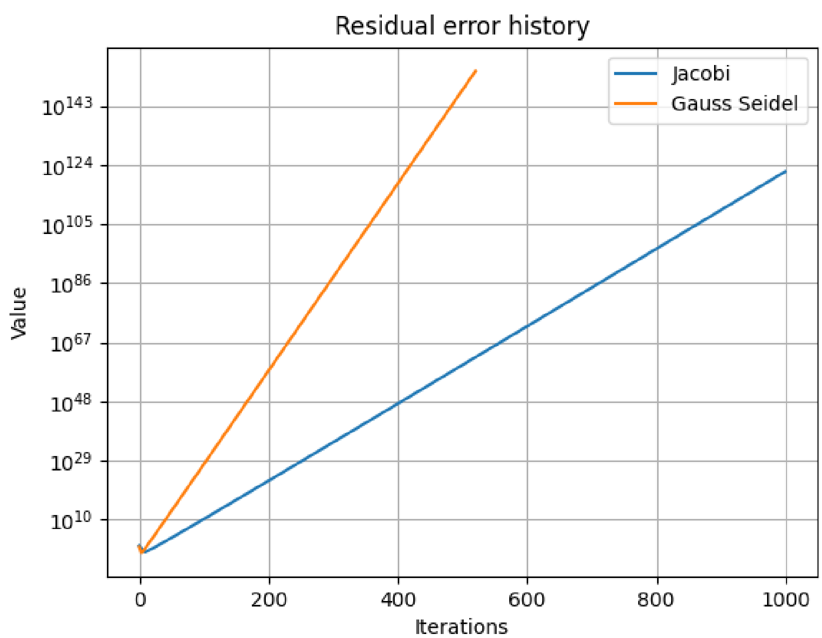
Dla normu residum równej 10^{-12} metody te zakończyły się, odpowiednia po **23** dla metody Jacobiego i **36** dla metody Gaussa-Seidla. Czasowow metodo Jacobiego zajeła **0.17** sekund, a metoda Gaussa-Seidla **0.08** sekund. Jak można zauważyć metoda Jacobiego zbiega się szybciej z większym czasem operacji w porównaniu do metody Gaussa-Seidla. Można dokładnie zauwazyć różnicę w tempie zbieżności na poniższym wykresie.



3 Macierze nie zbieżne

Niesty metody Jacobiego i Gaussa-Seidla nie zawsze znajdują rozwiązanie. Dla poniższego przypadku macierza pasmowego gdzie wartość na przekątnej jest mniejsza metody te zbiegają do nieskończoności

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & ... \\ -1 & 3 & -1 & -1 & ... \\ -1 & -1 & 3 & -1 & ... \\ 0 & -1 & -1 & 3 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} -0.75 \\ 0.98 \\ -0.53 \\ -0.28 \\ ... \end{bmatrix}$$



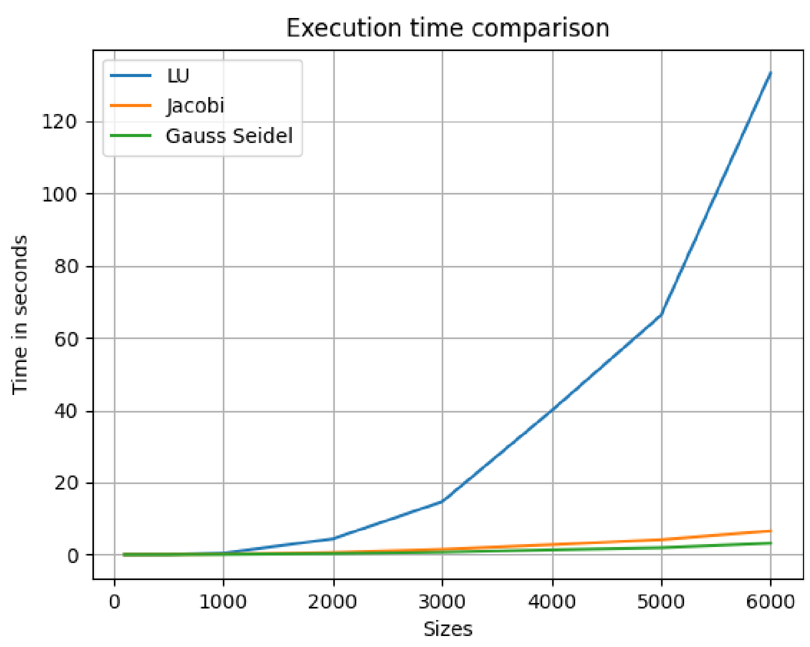
Jak widać metoda Gaussa-Seidla przedwcześnie osiągneła wartości przekraczające zakres 64 bitowej liczby zmiennoprzecinkowej. W tym przypadku dla residum mniejszego od zera metody te nie znajdą rozwiązania.

4 Metoda faktoryzacji LU

Dla nie zbieżnych macierzy pozostaje trzecia implementacja bezpośredniego algorytmu faktoryzacji LU. W metodzie LU macierz jest dzielony na dwa zredukowane macierze trójkątne, z których można wyciągnąć rozwiązanie w następujący sposób.
$Ly = b, Ux = y$
Norma rezydualna, dla tej metody wynosi 0.0.

5 Wydajność metod od rozmiarów macierzy

Niestety metoda LU nie jest najbardziej wydajna, dla większych macierzy. Między innymi dlatego wymyślono metody aproksymacyjne iteracyjne o niższej złożoności obliczeniowej takie jak metoda Jakobiego i Gaussa-Seidla. Poniżej przedstawiono czas wykonywania, każdej z wymienionych metod.



Jak można zauważyć metoda LU rośnie o wiele szybciej od wymienionych metod iteracyjnych.

6 Podsumowanie

Metody aproksymacyjne mimo swej niedokładności są niezbędnym narzędziem do wyliczania dużych systemów równań linionych, a metody bezpośrednie jak LU sprawdzają się w sytuacjach gdy dokładność rozwiązania jest kluczowa.