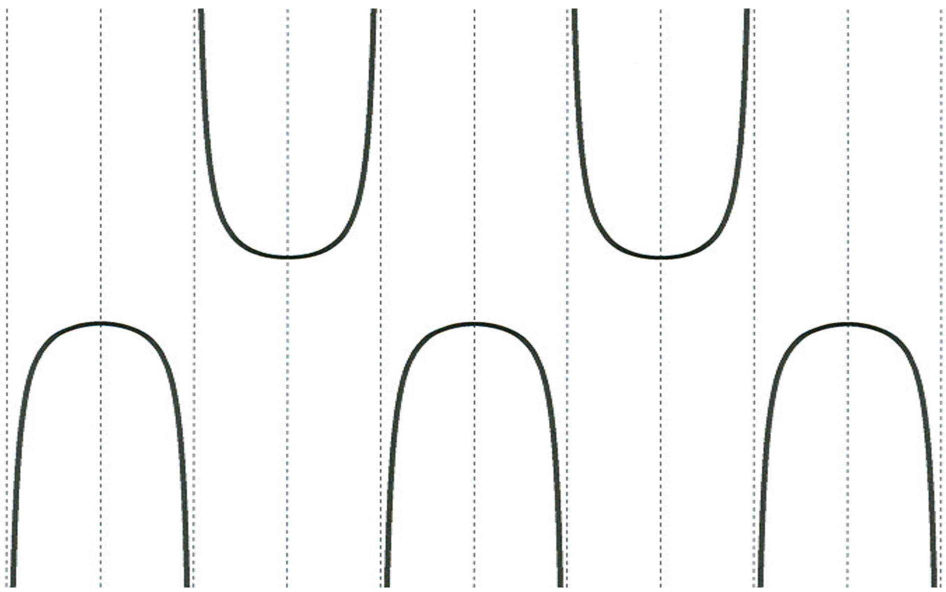
Τ.Ε.Ι. ΜΕΣΟΛΟΓΓΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΩΝ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΝΑΥΠΑΚΤΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ

(Β' ΕΞΑΜΗΝΟ)



Ι. ΚΟΥΓΙΑΣ
ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΝΑΥΠΑΚΤΟΣ 2005

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο</u>

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο</u>

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3Ο

ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4Ο

ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο</u>

ΑΠΕΙΡΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ - ΣΕΙΡΕΣ – ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^ο</u>

ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{ο}</u>

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1.1 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

<u>Ορισμός</u>: Έστω ότι η $y = f(x)$ είναι μια συνάρτηση, τότε το όριο:

$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

εάν υπάρχει, ονομάζεται <u>*παράγωγος*</u> της f στο σημείο x και συμβολίζεται με f' ή $\frac{dy}{dx}$. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η f είναι <u>*παραγωγίσιμη*</u> στο x.

<u>Παράδειγμα 1^{ο}</u> : Αν $f(x) = x^2$, τότε να υπολογιστεί η παράγωγός της f'.
<u>Λύση</u>:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x.$$

<u>Σημείωση</u>: Η $f'(x_1)$ είναι η *κλίση* της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $(x_1, f(x_1))$. Επί πλέον, αν μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x, δηλαδή υπάρχει η παράγωγός της στο σημείο αυτό, τότε η συνάρτηση είναι συνεχής στο x.

<u>Παράδειγμα 2^{ο}</u> : Να υπολογιστεί η κλίση της εφαπτομένης, καθώς και η εξίσωση αυτής, της καμπύλης $f(x) = x^2$ στο σημείο $(3,9)$.

<u>Λύση</u>: Από το πιο πάνω παράδειγμα έχουμε ότι $f'(x) = 2x$, άρα στο σημείο $(3,9)$ παίρνουμε: $f'(3) = 2\cdot 3 = 6$. Δηλαδή η εφαπτομένη της πιο πάνω καμπύλης στο σημείο $(3,9)$ έχει κλίση 6, η δε εξίσωση αυτής είναι: $y-9 = 6(x-3) \Rightarrow y = 6x-9$.

1.2 ΚΑΝΟΝΕΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

(i) Αν $f(x)=c$, όπου c είναι μια σταθερά, τότε $f'(x)=0$.

(ii) Αν $f(x)=x^n$, τότε $f'(x)=nx^{n-1}$.

(iii) Αν $g(x)=cf(x)$, τότε $g'(x)=cf'(x)$.

(iv) Αν $F(x)=f(x)\pm g(x)$, τότε $F'(x)=f'(x)\pm g'(x)$.

(v) Αν $F(x)=f(x)\cdot g(x)$, τότε $F'(x)=f(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g(x)$.

(vi) Αν $F(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, τότε $F'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$.

(vii) Αν $y=f(u)$ είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του u και u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε η παράγωγος της $y=f(u)$ είναι:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

(viii) Αν $y(u)=u^n$, όπου n είναι ένας πραγματικός αριθμός και u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε η παράγωγος της y είναι:

$$\frac{dy}{dx}=nu^{n-1}\cdot\frac{du}{dx}.$$

Ο κανόνας (v) ονομάζεται κανόνας του πολλαπλασιασμού, ο δε (vi) ονομάζεται κανόνας της διαίρεσης και, τέλος, ο (vii) ονομάζεται κανόνας αλυσίδας.

<u>Παράδειγμα 3^{ο}</u> : Να υπολογιστεί η παράγωγος των παραστάσεων:

α) $g(x)=5x^3$, β) $f(x)=\dfrac{0,45}{x^2\sqrt{x}}$, γ) $p(x)=3x^5+\sqrt{x}$,

δ) $q(x)=x^4-\sqrt[3]{x^2}$, ε) $y(x)=\dfrac{3x^2-2}{x}$, στ) $F(x)=(x^2+3x)(4x+5)$, ζ) $Q(x)=\dfrac{4x^2-2x+3}{2x-1}$

η) $\phi(u)=2u^2-3u-2$, όπου $u(x)=x^2+x$.

<u>Λύση</u>: α) $g(x)=5x^3 \Rightarrow g'(x)=3\cdot 5x^{3-1} \Rightarrow g'(x)=15x^2$.

β) $f(x)=\dfrac{0,45}{x^2\sqrt{x}} \Rightarrow f(x)=0,45x^{-\frac{5}{2}} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{5}{2}\cdot 0,45x^{-\frac{5}{2}-1} \Rightarrow$

$f'(x)=-1,125x^{-\frac{7}{2}}$.

γ) $p(x)=3x^5+\sqrt{x} \Rightarrow p'(x)=5\cdot 3x^{5-1}+\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} \Rightarrow p'(x)=15x^4+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow$

$p'(x)=15x^4+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

δ) $q(x)=x^4-\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow q(x)=x^4-x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow q'(x)=4x^{4-1}-\dfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} \Rightarrow$

$q'(x)=4x^3-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

ε) $y(x)=\dfrac{3x^2-2}{x} \Rightarrow y(x)=3x-2x^{-1} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=3\cdot 1-2\left[(-1)x^{-2}\right] \Rightarrow$

$\dfrac{dy}{dx}=3+\dfrac{2}{x^2}$.

στ) $F(x)=(x^2+3x)(4x+5) \Rightarrow F'(x)=(x^2+3x)(4x+5)'+(x^2+3x)'(4x+5)$

$\Rightarrow F'(x)=(x^2+3x)(4)+(2x+3)(4x+5) \Rightarrow F'(x)=12x^2+34x+15$.

ζ) $Q(x)=\dfrac{4x^2-2x+3}{2x-1} \Rightarrow Q'(x)=\dfrac{(2x-1)(4x^2-2x+3)'-(4x^2-2x+3)(2x-1)'}{(2x-1)^2}$

$\Rightarrow Q'(x)=\dfrac{(2x-1)(8x-2)-(4x^2-2x+3)(2)}{(2x-1)^2} \Rightarrow$

$Q'(x)=\dfrac{4(2x^2-2x-1)}{(2x-1)^2}$.

η) $\phi(u)=2u^2-3u-2$, όπου $u(x)=x^2+x \quad \Rightarrow \quad \phi'(u)=\dfrac{d\varphi}{dx}=\dfrac{d\varphi}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

$$\Rightarrow \phi'(u)=\frac{d}{du}\left(2u^2-3u-2\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2+x\right) \quad \Rightarrow \quad \phi'(u)=(4u-3)(2x+1)$$

$$\Rightarrow \phi'(u)=\left[4\left(x^2+x\right)-3\right](2x+1) \;\Rightarrow\; \phi'(u)=8x^3+12x^2-2x-3\,.$$

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης $y=lnx$ είναι $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$. Επί πλέον αν $y=lnu$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\ln u)=\frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}\,.$$

Η παράγωγος της εκθετικής συνάρτησης $y=e^u$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x είναι: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\left(e^u\right)=e^u\cdot\dfrac{du}{dx}$. Επί πλέον αν $y=a^u$, $a\succ 0$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(a^u\right)=a^u\,(lna)\cdot\frac{du}{dx}\,.$$

Τέλος, η παράγωγος μιας οποιασδήποτε λογαριθμικής συνάρτησης $y=\log_b u$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x είναι:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(log_b u\right)=\frac{1}{u}\left(log_b e\right)\cdot\frac{du}{dx}\,.$$

Πολλές φορές η εύρεση της παραγώγου μιας συνάρτησης $y=f(x)$, η οποία περιέχει γινόμενα, πηλίκα ή δυνάμεις του x, μπορεί να είναι αρκετά δύσκολη και επίπονη διαδικασία. Σε τέτοιες περιπτώσεις, παίρνουμε το λογάριθμο των δυο μελών και αφού πρώτα απλοποιήσουμε κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων των λογαρίθμων, στη συνέχεια παίρνουμε την παράγωγο των δυο μελών ως προς x θεωρώντας την $y=f(x)$ ως πεπλεγμένη συνάρτηση.

Παράδειγμα 1ο : Να υπολογιστεί η παράγωγος της : $y=\sqrt[4]{\dfrac{(x-1)(x^2+2)^2}{(x+3)(x-4)^3}}$.

Λύση: Παίρνουμε το φυσικό λογάριθμο των δυο μελών και έχουμε:

$$lny = ln\sqrt[4]{\frac{(x-1)(x^2+2)^2}{(x+3)(x-4)^3}} \quad \Rightarrow \quad lny = \frac{1}{4}ln\frac{(x-1)(x^2+2)^2}{(x+3)(x-4)^3} \quad \Rightarrow$$

$$lny = \frac{1}{4}\Big[ln(x-1)+2ln(x^2+2)-ln(x+3)-3ln(x-4)\Big].$$

Τώρα παίρνοντας την παράγωγο ως προς x και από τα δυο μέλη, έχουμε:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-1}+2\frac{1}{x^2+2}(2x)-\frac{1}{x+3}-3\frac{1}{x-4}\right]$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{y}{4}\left[\frac{1}{x-1}+\frac{4x}{x^2+2}-\frac{1}{x+3}-\frac{3}{x-4}\right].$$

Παράδειγμα 2ο : Να υπολογιστεί η παράγωγος των: α) $y=x^x$, β) $y=x^{e^{-x^2}}$.

Λύση: α) $y=x^x \Rightarrow lny=lnx^x \Rightarrow lny=xlnx$. Παίρνοντας την παράγωγο και από τα δυο μέλη έχουμε: $\dfrac{1}{y}y'=x\left(\dfrac{1}{x}\right)+(lnx)\cdot 1 \Rightarrow y'=y(1+lnx) \Rightarrow$ $y'=x^x(1+lnx)$.

β) $y=x^{e^{-x^2}} \Rightarrow lny=lnx^{e^{-x^2}} \Rightarrow lny=e^{-x^2}lnx$. Παίρνοντας την παράγωγο και από τα δυο μέλη έχουμε: $\dfrac{1}{y}y'=e^{-x^2}\left(\dfrac{1}{x}\right)+(lnx)\Big[\left(e^{-x^2}\right)(-2x)\Big] \Rightarrow$

$$y' = ye^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2xlnx\right) \quad \Rightarrow \quad y' = x^{e^{-x^2}}e^{-x^2}\left(\frac{1}{x}-2xlnx\right).$$

1.4 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Ημίτονο (sin): Αν $y=sinx$, τότε $\dfrac{dy}{dx}=(sinx)'=cosx$ (συνημίτονο).

2. Συνημίτονο (cos): Αν $y = cosx$, τότε $\dfrac{dy}{dx} = \left(cosx\right)' = -sinx$.

3. Εφαπτομένη (tan): Αν $y = tanx$, τότε $\dfrac{dy}{dx} = \left(tanx\right)' = sec^2 x$, (όπου sec είναι η τέμνουσα).

4. Τέμνουσα (sec): Αν $y = secx$, τότε $\dfrac{dy}{dx} = \left(secx\right)' = \left(secx\right) \cdot \left(tanx\right)$.

5. Συνεφαπτομένη (cot): Αν $y = cotx$, τότε $\dfrac{dy}{dx} = \left(cotx\right)' = -csc^2 x$, (όπου csc είναι η συντέμνουσα).

6. Συντέμνουσα (csc): Αν $y = cscx$, τότε $\dfrac{dy}{dx} = \left(cscx\right)' = -\left(cscx\right) \cdot \left(cotx\right)$.

Οι σχέσεις μεταξύ των πιο πάνω τριγωνομετρικών συναρτήσεων είναι οι εξής:

α) $tanx = \dfrac{sinx}{cosx}$, β) $cotx = \dfrac{cosx}{sinx}$,

γ) $secx = \dfrac{1}{cosx}$, δ) $cscx = \dfrac{1}{sinx}$.

Οι αντίστροφες συναρτήσεις των *sinx, cosx, tanx* και *cotx* είναι οι εξής:

α) $sin^{-1}x$ ή $Arcsinx$, β) $cos^{-1}x$ ή $Arccosx$,

γ) $tan^{-1}x$, ή $Arctanx$, δ) $cot^{-1}x$, ή $Arccotx$,

αντίστοιχα.

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί η παράγωγος των:

α) $y = sin3x + cos2x$, β) $y = tanx^2$,

γ) $y = cot\left(1 - 2x^2\right)$, δ) $f\left(x\right) = \dfrac{cosx}{x}$.

<u>Λύση</u>: α) $y = sin3x + cos2x \;\;\Rightarrow$

$$y' = cos3x\frac{d}{dx}(3x) \text{ - } sin2x\frac{d}{dx}(2x) = 3cos3x \text{ - } 2sin2x.$$

β) $y = tanx^2 \;\;\Rightarrow\;\; y' = sec^2x^2\,\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x \cdot sec^2x^2$.

γ) $y = cot\left(1 \text{ - } 2x^2\right) \;\;\Rightarrow\;\; y' = \text{-}csc^2\left(1 \text{ - } 2x^2\right)\frac{d}{dx}\left(1 \text{ - } 2x^2\right) = 4x \cdot csc^2\left(1 \text{ - } 2x^2\right)$.

δ) $f(x) = \dfrac{cosx}{x} \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \dfrac{x\dfrac{d}{dx}(cosx) - cosx\dfrac{d}{dx}(x)}{x^2} = \dfrac{\text{-}xsinx - cosx}{x^2}$.

1.5 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Όταν γράφουμε τη συνάρτηση $y = sinx$, το ημίτονο εκφράζεται ως συνάρτηση της γωνίας x και έτσι, όταν μεταβάλλεται η γωνία, τότε μεταβάλλεται και το ημίτονο αυτής. Με άλλα λόγια, η γωνία x είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και το ημίτονο η εξαρτημένη.

Για να αντιστρέψουμε την πιο πάνω σχέση, δηλαδή για να εκφράσουμε τη γωνία ως συνάρτηση του ημιτόνου της, αρκεί να θεωρήσουμε τη γωνία ως εξαρτημένη μεταβλητή και το ημίτονο ως ανεξάρτητη και στη συνέχεια να λύσουμε ως προς y. Η σχέση αυτή γράφεται, όπως προαναφέραμε παραπάνω, ως εξής:

$$y = sin^{\text{-}1}x \quad \text{ή} \quad y = Arcsinx,$$

το οποίο σημαίνει ότι η y είναι η γωνία της οποίας το ημίτονο είναι το x.

Η $y = Arcsinx$ δεν είναι συνάρτηση, αφού για παράδειγμα αν $x = \frac{1}{2}$, υπάρχουν άπειρα y, όπως $y_1 = 30^{\circ}$, $y_2 = 150^{\circ}$, $y_3 = 390^{\circ}$, κ.λ.π., τα οποία έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$, ήτοι ισχύει η $y = Arcsinx$. Για να γίνει αυτή η σχέση συνάρτηση πρέπει να περιορίσουμε το σύνολο από το οποίο παίρνει τιμές η εξαρτημένη μεταβλητή. Τέτοια σύνολα είναι τα διαστήματα:

$$\left[k\pi - \frac{\pi}{2},\;\; k\pi + \frac{\pi}{2}\right],\;\; \text{όπου} \quad k = 0,\;\; \pm 1,\;\; \pm 2, \ldots.$$

Για $k=0$, η y παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$ και είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε:

1) $y = Arcsinx \Leftrightarrow x = siny$, όπου $x \in [-1,\ 1]$ και $y \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Ονομάζεται δε **αντίστροφη κυκλική συνάρτηση** (της τριγωνομετρικής συνάρτησης "ημίτονο" μιας γωνίας).

Το ίδιο ισχύει και για όλα τα $k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots$, όπου $x \in [-1,\ 1]$ και $y \in \left[k\pi - \frac{\pi}{2},\ k\pi + \frac{\pi}{2}\right]$.

Για τις άλλες αντίστροφες κυκλικές συναρτήσεις έχουμε:

2) $y = Arccosx \Leftrightarrow x = cosy$, όπου $x \in [-1,\ 1]$, $y \in [0,\ \pi]$.

3) $y = Arctanx \Leftrightarrow x = tany$, όπου $x \in (-\infty,\ +\infty)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

4) $y = Arccotx \Leftrightarrow x = coty$, όπου $x \in (-\infty,\ +\infty)$, $y \in (0,\ \pi)$.

Η παράγωγος των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων δίνεται από τα ακόλουθα:

Έστω ότι u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x, τότε

α) $\frac{d}{dx}(Arcsinu) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$, β) $\frac{d}{dx}(Arccosu) = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dx}$,

γ) $\frac{d}{dx}(Arctanu) = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$, δ) $\frac{d}{dx}(Arccotu) = -\frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{du}{dx}$,

ε) $\frac{d}{dx}(Arcsecu) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$, στ) $\frac{d}{dx}(Arccscu) = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \cdot \frac{du}{dx}$.

Παράδειγμα : Να υπολογιστεί η παράγωγος των: α) $y = Arcsin(2x-3)$, β) $y = Arccosx^2$, γ) $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \cdot Arcsin\frac{x}{a}$, δ) $f(x) = Arccot\frac{1+x}{1-x}$, ε) $y^2 sinx + y = Arctanx$.

<u>Λύση</u>: α) $y = Arcsin(2x-3) \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x-3)^2}} \cdot \dfrac{d}{dx}(2x-3) \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{1-(4x^2-12x+9)}} = \frac{2}{\sqrt{-4x^2+12x-8}} = \frac{1}{\sqrt{3x-x^2-2}}.$$

β) $y = Arccosx^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \dfrac{d}{dx}(x^2) = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}.$

γ) $f(x) = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \cdot Arcsin\dfrac{x}{a} \Rightarrow$

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) + \sqrt{a^2-x^2} + a^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(x/a\right)^2}} \cdot \frac{1}{\alpha} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a}{\sqrt{\dfrac{a^2-x^2}{a^2}}} \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} + \sqrt{a^2-x^2} = 2\sqrt{a^2-x^2}.$$

δ) $f(x) = Arccot\dfrac{1+x}{1-x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow$

$$f'(x) = -\frac{1}{1+\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} \Rightarrow$$

$$f'(x) = -\frac{(1-x)^2}{(1-x)^2+(1+x)^2} \cdot \frac{2}{(1-x)^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

ε) $y^2 sinx + y = Arctanx \Rightarrow 2yy'sinx + y^2 cosx + y' = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow$

$$y'\left(2ysinx+1\right)=\frac{1}{1+x^2}-y^2cosx \;\Rightarrow y'=\frac{1-\left(1+x^2\right)y^2cosx}{\left(1+x^2\right)\left(2ysinx+1\right)}.$$

1.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος των:

α) $ylnx=xe^y$, β) $e^{xy}=x+y$, γ) $y=e^{lnx}$,

δ) $f\left(x\right)=\left(x^3-1\right)^7$, ε) $y=\left(x^2-4\right)^5\left(3x+5\right)^4$,

στ) $q\left(x\right)=\dfrac{1}{\left(x^2-2\right)^4}$, ζ) $p\left(u\right)=u^{10}$, όπου $u=8-t^2+t^5$.

2. Παραγωγίστε τα ακόλουθα:

α) $y=tan^2x$, β) $f\left(x\right)=sec^2\sqrt{x}$,

γ) $\zeta\left(\theta\right)=\sqrt{csc2\theta}$, δ) $\psi\left(x\right)=x^2sinx$,

ε) $g\left(x\right)=tan^2\left(3x-2\right)$, στ) $siny+cosx=1$,

ζ) $y=Arccot\dfrac{1+x}{1-x}$, η) $y=xArccsc\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$.

3. Να βρεθεί η παράγωγος των παρακάτω συναρτήσεων: α) $y=Arcsinx^2$,

β) $y=Arctan\dfrac{1}{x^2}$, γ) $y=x^2Arcsin\left(1-x\right)$, δ) $y=x^2Arccot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$,

ε) $y=Arccos\sqrt{x}$, στ) $xsiny+x^3=Arctany$.

4. Παραγωγίστε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $y+y^3=x$, β) $x^3+4xy^2-y^4-25=0$, γ) $x^3=\left(y-x^2\right)^2$,

δ) $xe^y+y=4$, ε) $ylnx=xe^y$, στ) $ln\left(xy\right)+x=10$,

ζ) $y=\sqrt{\dfrac{\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{3x-4}}$, η) $y=\left(lnx\right)^{e^x}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^o

ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

2.1 ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Αν F είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$F'(x) = f(x), \tag{1}$$

τότε η F καλείται *αντιπαράγωγος* (ή *παράγουσα*) της f, δηλαδή αντιπαράγωγος μιας συνάρτησης f είναι μια άλλη συνάρτηση F, της οποίας η παράγωγος ισούται με την f. Τώρα πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (1) επί dx παίρνουμε: $F'(x)dx = f(x)dx$ ή $dF = f(x)dx$. Άρα έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός: Μια *αντιπαράγωγος*, δοθείσης συνάρτησης f, είναι μια άλλη συνάρτηση, τέτοια ώστε: $F'(x) = f(x)$ ή ισοδύναμα $dF = f(x)dx$.

Για παράδειγμα, αφού για την $f(x) = x^2$ έχουμε $f'(x) = 2x$, η x^2 είναι μια αντιπαράγωγος της $2x$. Είναι όμως αυτή η αντιπαράγωγος η μοναδική; Προφανώς όχι, αφού για οποιαδήποτε $g(x) = x^2 + C$, όπου C μια σταθερά έχουμε $g'(x) = 2x$.

Η αντιπαράγωγος της $2x$ συμβολίζεται με $\int 2xdx$ και ονομάζεται το *αόριστο ολοκλήρωμα* αυτής και επειδή όλες οι αντιπαράγωγοι της $2x$ έχουν τη μορφή $x^2 + C$, έχουμε: $\int 2xdx = x^2 + C$.

Γενικά, το αόριστο ολοκλήρωμα μια συνάρτησης f, για την οποία ισχύει η (1) πιο πάνω, δίνεται από τη σχέση:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{2}$$

όπου C είναι μια σταθερά. Η σχέση (2) ισχύει αν και μόνον αν ισχύει η σχέση (1).

Παράδειγμα 1^o: Να υπολογιστούν: α) $\int 10dx$, β) $\int xdx$, γ) $\int 4xdx$.

Λύση: α) $\int 10dx = 10x + C$, όπου C είναι μια σταθερά, διότι η παράγωγος της $10x + C$ είναι ίση με 10.

β) $\int x dx = \frac{x^2}{2} + k$, όπου k είναι μια σταθερά, διότι η παράγωγος της $\frac{x^2}{2} + k$ είναι ίση με x.

γ) $\int 4x dx = 2x^2 + l$, όπου l είναι μια σταθερά, διότι η παράγωγος της $2x^2 + l$ είναι ίση με $4x$.

2.2 ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

(ix) $\int k dx = kx + C$, για κάθε σταθερά k.

(x) $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$, όπου u είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση του x.

(xi) $\int e^u du = e^u + C$.

(xii) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, k = σταθερά.

(xiii) $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

(xiv) $\int \frac{1}{u} du = ln|u| + C$, αν $u \neq 0$.

(xv) $\int a^u du = \frac{a^u}{lna} + C$, $a \succ 0$, $a \neq 1$

<u>Παράδειγμα 2^ο</u>: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: α) $\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt$, β) $\int (x^2 + 2x - 4)dx$, γ) $\int y^2\left(y + \frac{2}{3}\right)dy$, δ) Αν $y'' = x^2 - 6$, $y'(0) = 2$ και $y(1) = -1$, να βρεθεί η y, ε) $\int \left(\frac{x^3 + x - 1}{x^2}\right)dx$, στ) $\int \left(\frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x+1}\right)dx$, ζ) $\int x \cdot \sqrt[3]{1 - x^2}\, dx$, η) $\int \sqrt{x^2 - 2x^4}\, dx$, θ) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}} dx$ ι) $\int \frac{dx}{2x-3}$.

<u>Λύση</u>: α) $\int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \int t^{-1/2} dt = \frac{t^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C = 2\sqrt{t} + C$.

β) $\int (x^2 + 2x - 4)dx = \int x^2 dx + 2\int x dx - \int 4dx$

$$= \frac{x^3}{3} + c_1 + x^2 + c_2 - 4x + c_3 = \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + C,$$

όπου $C = c_1 + c_2 + c_3$.

γ) $\int y^2\left(y+\frac{2}{3}\right)dy = \int\left(y^3+\frac{2}{3}y^2\right)dy = \frac{y^4}{4}+\frac{2y^3}{9}+k$.

δ) Αφού $y'' = x^2 - 6$, έχουμε ότι $y' = \int\left(x^2-6\right)dx = \frac{x^3}{3}-6x+c_1$.

Τώρα $y'(0)=2 \Rightarrow 2=\frac{0^3}{3}-6(0)+c_1 \Rightarrow c_1=2$ και έτσι $y'=\frac{x^3}{3}-6x+2$, απ' όπου παίρνουμε:

$y=\int\left(\frac{x^3}{3}-6x+2\right)dx = \frac{x^4}{12}-3x^2+2x+c_2$ και αφού $y(1)=-1$ έχουμε ότι:

$-1=\frac{1^4}{12}-3(1)^2+2(1)+c_2 \Rightarrow c_2=-\frac{1}{12}$. Συνεπώς $y=\frac{x^4}{12}-3x^2+2x-\frac{1}{12}$.

ε)

$$\int\left(\frac{x^3+x-1}{x^2}\right)dx = \int\left(\frac{x^3}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \int\left(x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}+ln|x|+\frac{1}{x}+k.$$

στ) Διαιρώντας αριθμητή δια παρανομαστή της παράστασης μέσα στο ολοκλήρωμα παίρνουμε:

$$\int\left(\frac{2x^3+3x^2+x+1}{2x+1}\right)dx = \int\left(x^2+x+\frac{1}{2x+1}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int\frac{1}{2x+1}dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{2x+1}(2dx) = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}ln|2x+1|+k.$$

ζ) $\int x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{3}}(-2xdx) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\left(1-x^2\right)^{\frac{4}{3}}+C \Rightarrow$

$\int x\cdot\sqrt[3]{1-x^2}\,dx = -\frac{3}{8}\left(1-x^2\right)^{\frac{4}{3}}+C$.

η) $\int \sqrt{x^2-2x^4}\,dx \;=\int x\sqrt{1-2x^2}\,dx \;=-\frac{1}{4}\int\left(1-2x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(-4xdx\right)=$

$$=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1-2x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{6}\left(1-2x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C.$$

θ) $\int \frac{\left(1+x\right)^2}{\sqrt{x}}dx \;=\int\frac{1+2x+x^2}{x^{1/2}}dx \;=\int\left(x^{-1/2}+2x^{1/2}+x^{3/2}\right)dx\;=$

$$=2x^{1/2}+\frac{4}{3}x^{3/2}+\frac{2}{5}x^{5/2}+C \;=2\sqrt{x}+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C.$$

ι) $\int\frac{dx}{2x-3}\;=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(2x-3\right)}{2x-3}=\frac{1}{2}ln\left|2x-3\right|+C.$

2.3 ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

Πολλές φορές η ολοκλήρωση παραστάσεων είναι δύσκολη και επίπονη διαδικασία και δεν μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα κάνοντας απλά χρήση των γνωστών "τύπων", αλλά πρέπει να εφαρμόσουμε - επινοήσουμε διάφορα τεχνάσματα, ώστε να απλοποιήσουμε τις δεδομένες παραστάσεις με τρόπο που η ολοκλήρωση να γίνεται απλούστερη. Τέτοιες τεχνικές θα αναπτύξουμε παρακάτω.

1. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση

Έστω ότι $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα E_1 και $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η αντι-παράγωγος της f στο E_1. Έστω ακόμη ότι $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα E_2 και $g':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής στο E_2 με $g\left(E_2\right)=E_1$. Τότε ισχύει ότι:

$$\int f\left[g\left(x\right)\right]g'\left(x\right)dx=F\left[g\left(x\right)\right]+C.$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα εξής ολοκληρώματα:

α) $\int\frac{g'\left(x\right)}{g\left(x\right)}dx$, β) $\int 3x^2\left(x^3+2\right)^2dx$, γ) $\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx$, δ) $\displaystyle\int \frac{(lnx)^2}{x}dx$, ε) $\displaystyle\int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{1/3}}dx$, στ) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}dx,\ |x|\le 1$.

<u>Λύση</u>: α) $\displaystyle\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx$. Θέτουμε $t=g(x)$ και έχουμε:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx = \int \frac{1}{t}dt = ln|t| + C.$$

β) $\displaystyle\int 3x^2\left(x^3+2\right)^2 dx$. Θέτουμε $u=x^3+2$ και έτσι $du=3x^2dx$, οπότε έχουμε:

$$\int 3x^2\left(x^3+2\right)^2 dx = \int \left(x^3+2\right)^2\left(3x^2dx\right) = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3+C =$$
$$=\frac{1}{3}\left(x^3+2\right)^3+C.$$

γ) $\displaystyle\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx$. Θέτουμε $u=1-2x^2$ και έτσι $du=-4xdx$, οπότε έχουμε:

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx = 3\left(-\frac{1}{4}\right)\int\left(1-2x^2\right)^{1/2}\left(-4xdx\right) = -\frac{3}{4}\int u^{1/2}du =$$

$$= -\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C = -\frac{1}{2}u^{3/2}+C = -\frac{1}{2}\left(1-2x^2\right)^{3/2}+C.$$

δ) $\displaystyle\int \frac{(lnx)^2}{x}dx$. Θέτουμε $u=lnx$, έτσι $du=\frac{1}{x}dx$ και κατά συνέπεια:

$$\int \frac{(lnx)^2}{x}dx = \int u^2du = \frac{1}{3}u^3+C = \frac{1}{3}(lnx)^3+C.$$

ε) $\displaystyle\int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{1/3}}dx$. Θέτουμε $u=x^2+6x$, έτσι $du=(2x+6)dx$.

Οπότε παίρνουμε:

$$\int \frac{(x+3)}{(x^2+6x)^{1/3}}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+6x)^{-1/3}(2x+6)\,dx = \frac{1}{2}\int u^{-1/3}du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}u^{2/3} + C = \frac{3}{4}(x^2+6x)^{2/3} + C\,.$$

στ) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx,\ \ |x| \le 1,$ θέτουμε $x = 2\sin u$, οπότε $dx = (2\cos u)\,du$

και το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-4\sin^2 u}\,(2\cos u)\,du = \int 2\sqrt{1-\sin^2 u}\,(2\cos u)\,du =$$

$= 4\int \cos^2 u\,du$, [αφού $\sin^2 u + \cos^2 u = 1$, (τριγωνομ. ιδιότητα)]

$= 4\int \frac{1}{2}(1+\cos 2u)du$,

[αφού $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1+\cos 2u)$ (τριγωνομ. Ιδιότητα)]

$$= 2\int du + 2\int \cos 2u\,du = 2\int du + \int (\cos 2u)\,d(2u)$$

$= 2u + \sin 2u + C = 2u + 2\sin u\cdot\cos u + C$,

[αφού $\sin 2u = 2\sin u\cdot\cos u$ (τριγωνομ. ιδιότητα)].

Τώρα αλλάζοντας τη μεταβλητή από u σε x έχουμε: $x = 2\sin u \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin u = \frac{x}{2} \Rightarrow u = Arc\sin\frac{x}{2}\,.$$

Ακόμη $2\cos u = 2\sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{4-4\sin^2 u} = \sqrt{4-x^2}$.

Συνεπώς, $\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2Arc\sin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$.

2. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Όταν έχουμε να ολοκληρώσουμε μια συνάρτηση, η οποία είναι γινόμενο δυο άλλων, τότε μπορεί το ολοκλήρωμα να απλοποιηθεί, αντικαθιστώντας τη μια εκ των δυο συναρτήσεων με την παράγωγο μιας τρίτης συνάρτησης. Για παράδειγμα έστω ότι έχουμε να ολοκληρώσουμε την $f(x)h(x)$ και ότι η $h(x)$ είναι παράγωγος μιας άλλης συνάρτησης της $g(x)$.

Δηλαδή $g'(x)=h(x)$ ή $g(x)=\int h(x)dx$. Έτσι το ολοκλήρωμα της $f(x)h(x)$ είναι: $\int f(x)h(x)dx=\int f(x)g'(x)dx=\int f(x)d\left[g(x)\right]$.

Τώρα από τον κανόνα του πολλαπλασιασμού παραγώγισης συναρτήσεων έχουμε: $d\left[f(x)g(x)\right]=f(x)d\left[g(x)\right]+g(x)d\left[f(x)\right] \Rightarrow$

$$f(x)d\left[g(x)\right]=d\left[f(x)g(x)\right]-g(x)d\left[f(x)\right].$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\int f(x)d\left[g(x)\right]=\int d\left[f(x)g(x)\right]-\int g(x)d\left[f(x)\right]$$

$$=f(x)g(x)-\int g(x)d\left[f(x)\right] \Rightarrow$$

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx.$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: α) $\int 2x\sin xdx$, β) $\int xe^{x}dx$, γ) $\int \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$, δ) $\int x^{2}e^{2x+1}dx$

Λύση: α) $\int 2x\sin xdx$, θέτουμε $f(x)=x$ και $g'(x)=\sin xdx$, οπότε $d\left[f(x)\right]=dx$ και $g(x)=-\cos x$. Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int 2x\sin xdx=2\left(f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx\right)=2\left(-x\cos x-\int(-\cos x)dx\right)$$

$$=2\sin x-2x\cos x+C.$$

β) $\int xe^x dx$, θέτουμε $f(x)=x$ και $g'(x)=e^x dx$, οπότε $d\left[f(x)\right]=dx$ και $g(x)=e^x$. Συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int xe^x dx = f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx = xe^x-\int e^x dx = e^x(x-1)+C.$$

γ) $\int \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx$, θέτουμε $f(x)=lnx$ και $g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}dx$, οπότε $d\left[f(x)\right]=\frac{1}{x}dx$ και συνεπώς το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int \frac{lnx}{\sqrt{x}}dx = f(x)g(x)-\int g(x)f'(x)dx = (lnx)\left(2\sqrt{x}\right)-2\int x^{1/2}\left(\frac{1}{x}dx\right)$$

$$= 2\sqrt{x}lnx-2\int x^{-1/2}dx = 2\sqrt{x}lnx-2\left(2\sqrt{x}\right)+C$$

$$= 2\sqrt{x}\left(lnx-2\right)+C.$$

δ) Θέτουμε $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^{2x+1}dx$ και παίρνουμε $d\left[f(x)\right]=2xdx$ και $g(x)=\frac{e^{2x+1}}{2}$, οπότε έχουμε:

$$\int x^2e^{2x+1}dx = \frac{x^2e^{2x+1}}{2}-\int\frac{e^{2x+1}}{2}(2xdx) = \frac{x^2e^{2x+1}}{2}-\int xe^{2x+1}dx.$$

Τώρα για το ολοκλήρωμα της τελευταίας σχέσης, θέτουμε $f(x)=x$ και $g(x)=e^{2x+1}dx$, οπότε παίρνουμε $d\left[f(x)\right]=dx$ και $g(x)=\frac{e^{2x+1}}{2}$ και έχουμε:

$$\int xe^{2x+1}dx = \frac{xe^{2x+1}}{2}-\int\frac{e^{2x+1}}{2}dx = \frac{xe^{2x+1}}{2}-\frac{e^{2x+1}}{4}+C_1.$$

Έτσι για το αρχικό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int x^2e^{2x+1}dx = \frac{x^2e^{2x+1}}{2}-\frac{xe^{2x+1}}{2}+\frac{e^{2x+1}}{4}+C,\ \text{(όπου } C=-C_1\text{) ή}$$

$$\int x^2 e^{2x+1}dx = \frac{e^{2x+1}}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) + C .$$

3. Η μέθοδος των απλών κλασμάτων

Στις περιπτώσεις όπου η προς ολοκλήρωση παράσταση είναι μια ρητή συνάρτηση: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, όπου $p(x)$ και $q(x)$ είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις και ο βαθμός της $p(x)$ είναι μικρότερος από αυτόν της $q(x)$, τότε αναλύουμε τον παρονομαστή σε γραμμικούς παράγοντες διαφορετικούς μεταξύ τους. Στη συνέχεια η ρητή συνάρτηση γράφεται σαν άθροισμα απλών κλασμάτων, τα οποία ολοκληρώνονται ευκολότερα.

Παράδειγμα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: α) $\int \frac{x+35}{x^2-25}dx$, β) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$, γ) $\int \frac{4x^2-14x-6}{x^3-2x^2-3x}dx$, δ) $\int \frac{2x+1}{3x^2-27}dx$.

<u>**Λύση**</u>**:** α) $\int \frac{x+35}{x^2-25}dx$, γράφουμε τον παρονομαστή σαν γινόμενο παραγόντων και έχουμε: $\frac{x+35}{x^2-25} = \frac{x+35}{(x+5)(x-5)}$, τώρα έστω ότι $A, B \in \mathbb{R}$, τέτοιοι ώστε

$$\frac{x+35}{(x+5)(x-5)} = \frac{A}{(x+5)} + \frac{B}{(x-5)} \Rightarrow x+35 = A(x-5) + B(x+5) \Rightarrow$$

$x+35 = (A+B)x - 5A + 5B$. Η σχέση αυτή είναι ταυτότητα και ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ 5B-5A=35 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ B-A=7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ B=7+A \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=1 \\ B=7+A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2A=-6 \\ B=7+A \end{array}\right\} \Rightarrow A=-3, \;\; B=4 .$$

Έτσι για το αρχικό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int \frac{x+35}{x^2-25}dx = \int \frac{4}{x-5}dx - \int \frac{3}{x+5}dx \ = 4ln\left|x-5\right| - 3ln\left|x+5\right| + C.$$

β) $\int \frac{1}{x^2-a^2}dx$, γράφοντας τον παρονομαστή ως γινόμενο παραγόντων:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} \quad \text{και έστω ότι} \quad \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

Έτσι έχουμε: $1 = A(x+a) + B(x-a) \Rightarrow 1 = (A+B)x + a(A-B) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ a(A-B)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A=-B \\ -2B=\dfrac{1}{a} \end{array}\right\} \Rightarrow B=-\frac{1}{2a}, \quad A=\frac{1}{2a}.$$

Συνεπώς για το αρχικό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\Big[ln\left|x\text{ - }a\right| - ln\left|x+a\right|\Big] + C.$$

γ) $\int \frac{4x^2-14x-6}{x^3-2x^2-3x}dx$, ο παρονομαστής είναι γινόμενο παραγόντων, δηλαδή

$$\frac{4x^2-14x-6}{x(x+1)(x-3)} \quad \text{και έτσι} \quad \frac{4x^2-14x-6}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{\Gamma}{x-3} \Rightarrow$$

$$\frac{4x^2-14x-6}{x(x+1)(x-3)} = \frac{A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + \Gamma x(x+1)}{x(x+1)(x-3)} \Rightarrow$$

$$4x^2-14x-6 = A(x+1)(x-3) + Bx(x-3) + \Gamma x(x+1) \Rightarrow$$

$$4x^2-14x-6 = A\left(x^2-2x-3\right) + B\left(x^2-3x\right) + \Gamma\left(x^2+x\right) \Rightarrow$$

$$4x^2-14x-6 = x^2(A+B+\Gamma) - x(2A+3B-\Gamma) - 3A \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{ll} A+B+\Gamma & =4 \\ 2A+3B-\Gamma & =14 \\ 3A & =6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{ll} A+B+\Gamma & =4 \\ 6+4B & =18 \\ A & =2 \end{array}\right\} \Rightarrow A=2, \quad ,B=3, \quad \Gamma=-1.$$

Συνεπώς για το αρχικό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int \frac{4x^2-14x-6}{x^3-2x^2-3x}dx = \int\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{x+1}-\frac{1}{x-3}\right)dx = \int\frac{2}{x}dx+\int\frac{3}{x+1}dx-\int\frac{1}{x-3}dx$$

$$= 2ln|x|+3ln|x+1|-ln|x-3|+C = ln\left|\frac{x^2(x+1)^3}{x-3}\right|+C.$$

δ) $\int \frac{2x+1}{3x^2-27}dx = \frac{1}{3}\int\frac{2x+1}{x^2-9}dx$. Τώρα $\frac{2x+1}{(x-3)(x+3)} = \frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x-3)}$ και

$$2x+1 = A(x-3)+B(x+3) \Rightarrow 2x+1 = (A+B)x-3(A-B) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=2 \\ A-B=-\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=2-B \\ -2B=-\frac{1}{3}-2 \end{array}\right\} \Rightarrow B=\frac{7}{6},\ \ A=\frac{5}{6}.$$

Συνεπώς για το αρχικό ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\frac{1}{3}\int\frac{2x+1}{x^2-9}dx = \frac{1}{3}\left[\int\frac{5/6}{x+3}dx+\int\frac{7/6}{x-3}dx\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{5}{6}ln|x+3|+\frac{7}{6}ln|x-3|\right]+C$$

$$= \frac{1}{18}ln\left|(x+3)^5+(x-3)^7\right|+C.$$

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: α) $\int x^2e^xdx$, β) $\int x^2e^{-2x}dx$, γ) $\int t^3lntdt$, δ) $\int x\sqrt{x+1}dx$, ε) $\int\frac{ln(x+1)}{2(x+1)}dx$, στ) $\int(2x^3+x)(x^4+x^2)^{3/4}dx$.

2.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2. Με τη μέθοδο των απλών κλασμάτων να υπολογιστούν τα εξής:

α) $\int\frac{x^2+10x+6}{x^2+2x-8}dx$, β) $\int\frac{6x^2+13x+6}{(x+2)(x+1)^2}dx$ (υπόδειξη: το κλάσμα να γραφεί ως εξής: $\frac{6x^2+13x+6}{(x+2)(x+1)^2} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{\Gamma}{(x+1)^2}$).

γ) $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$, δ) $\int \frac{3x+8}{x^2+2x}dx$, ε) $\int \frac{x+10}{x^2-x-2}dx$.

3. Να υπολογιστούν τα εξής ολοκληρώματα:

α) $\int sin^2 x cosx dx$, β) $\int cos3x dx$, γ) $\int tanx dx$, δ) $\int tan2x dx$,

ε) $\int xcotx^2 dx$, στ) $\int secx dx$, ζ) $\int \frac{sinx+cosx}{cosx}dx$,

η) $\int \frac{1}{csc2x-cot2x}dx$, θ) $\int \frac{secxtanx}{a+bsecx}dx$.

4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, β) $\int \frac{1}{4x^2+9}dx$, γ) $\int \frac{1}{x\sqrt{4x^2-9}}dx$,

δ) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx$, ε) $\int \frac{x}{x^4+3}dx$, στ) $\int \frac{1}{x\sqrt{x^4-1}}dx$,

ζ) $\int \frac{(2x-7)}{x^2+9}dx$, η) $\int \frac{1}{x^2+10x+30}dx$.

2.5 ΤΟ ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

<u>Ορισμός</u>: Το <u>*ορισμένο ολοκλήρωμα*</u> μιας συνεχούς συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα $[a,\ b]$, δίνεται από τη σχέση:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

όπου $F(x)$ είναι μια αντιπαράγωγος της $f(x)$ στο διάστημα αυτό.

Τα σημεία a και b ονομάζονται το κάτω και άνω <u>όριο</u> ή <u>άκρο</u> του ολοκληρώματος αντίστοιχα..

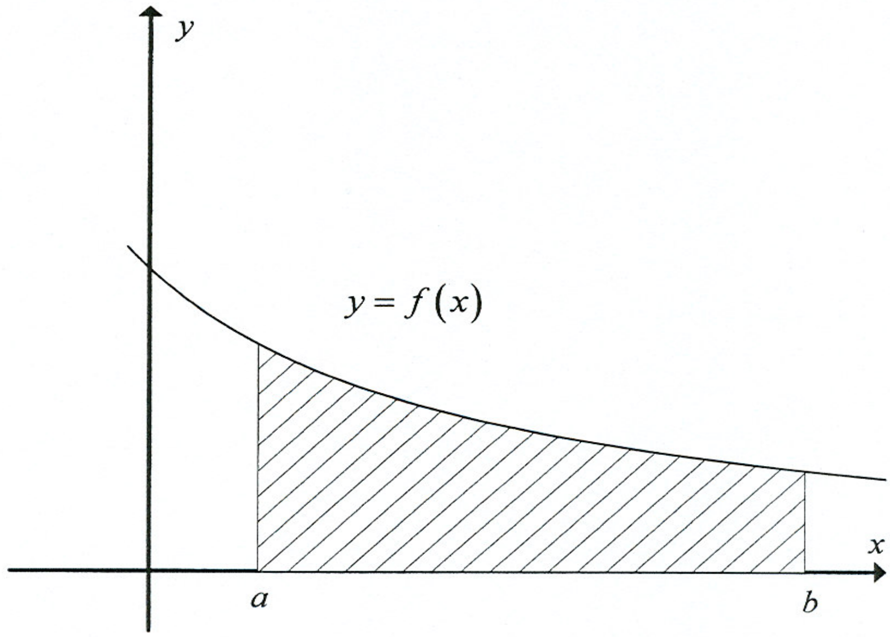
Για να υπολογίσουμε ένα ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_a^b f(x)dx$, κάνουμε τα εξής:

- Υπολογίζουμε το αόριστο ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$, δηλαδή την $F(x)$.
- Αντικαθιστούμε στην $F(x)$ τη x με το άνω άκρο b, δηλαδή $F(b)$.
- Αντικαθιστούμε στην $F(x)$ τη x με το κάνω άκρο a, δηλαδή $F(a)$.
- Αφαιρούμε την $F(a)$ από την $F(b)$.

<u>Σημείωση</u>: Κατά την αντικατάσταση των ορίων στο ολοκλήρωμα και την αφαίρεση $F(a)-F(b)$ η σταθερά ολοκλήρωσης χάνεται, εξ ου και ο όρος <u>ορισμένο</u> ολοκλήρωμα.

Ακόμη, επειδή η μεταβλητή αυξάνει από κάτω προς τα πάνω, το κάτω όριο είναι μικρότερο από το άνω, δηλαδή $a \prec b$. Πρέπει συνεπώς να προσέχουμε ιδιαίτερα στις περιπτώσεις που έχουμε αρνητικά πρόσημα στα όρια ολοκλήρωσης. Για παράδειγμα αν τα όρια είναι 0 και -1, τότε το ορισμένο ολοκλήρωμα της $f(x)$ είναι $\int_{-1}^{0} f(x)dx$.

Πολλές είναι οι πρακτικές εφαρμογές του ορισμένου ολοκληρώματος. Μια εξ αυτών είναι και ο υπολογισμός του εμβαδού της περιοχής που περικλείεται μεταξύ της "καμπύλης" που δίνει το γράφημα της συνάρτηση $y = f(x)$, του άξονα των x και των γραμμών $x = a$ και $x = b$, με την προϋπόθεση ότι η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές στο διάστημα $[a,\ b]$. (Βλ. πιο κάτω σχήμα).



Σχήμα 1

<u>Παράδειγμα 1º</u> : Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^2 \left(4-x^2\right)dx$, β) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx$, γ) $\int_0^1 e^{3t}dt$, δ) $\int_{-2}^1 x^3 dx$.

<u>Λύση</u>: α) $\int_0^2 \left(4-x^2\right)dx \;=\; \left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \left(8-\frac{8}{3}\right)-0=\frac{16}{3}$.

β) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}dx \;=\; \int_0^1 x^3\left(1+x^4\right)^{-1/2} dx \;=\frac{1}{4}\int_0^1 \left(1+x^4\right)^{-1/2}\left(4x^3dx\right) \;=$

$\left(\frac{1}{4}\right)\frac{\left(1+x^4\right)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_0^1 \;=\; \frac{1}{2}\left(1+x^4\right)^{1/2}\Big|_0^1 \;=\; \frac{1}{2}(2)^{1/2}-\frac{1}{2}(1)^{1/2} \;=\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$.

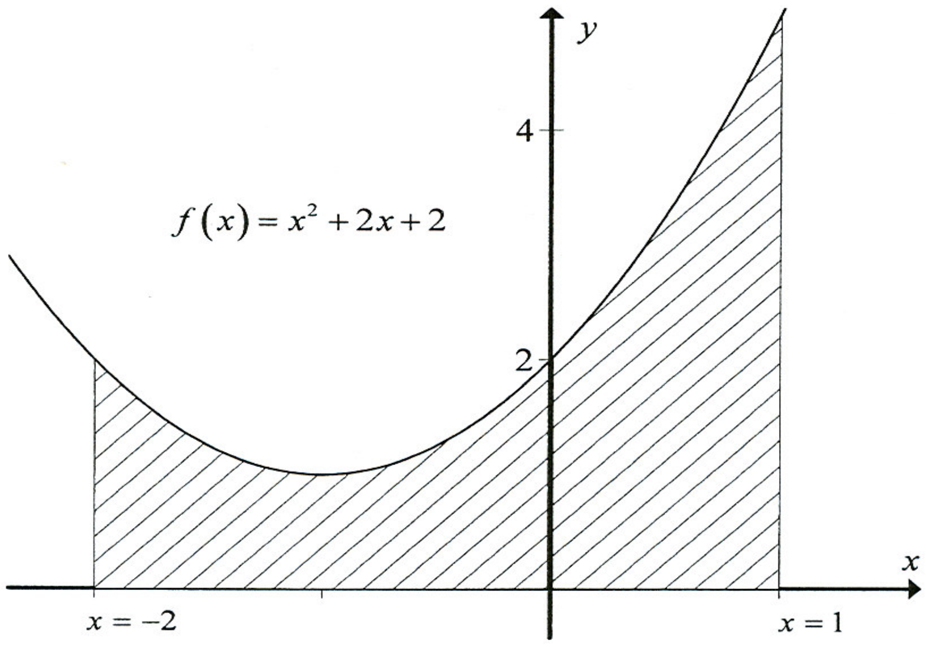
γ) $\int_0^1 e^{3t}dt \;=\frac{1}{3}\int_0^1 e^{3t}\left(3dt\right) \;=\left(\frac{1}{3}\right)e^{3t}\Big|_0^1 \;=\frac{1}{3}\left(e^3-e^0\right) \;=\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$.

δ) $\int_{-2}^{1} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}$.

<u>Παράδειγμα 2ο</u> : Να υπολογιστεί το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη: $f(x) = x^2 + 2x + 2$, του άξονα των x και των γραμμών $x = -2$ και $x = 1$.

<u>Λύση</u>: Στο σχήμα παρακάτω βλέπουμε το ζητούμενο εμβαδόν. Για τον υπολογισμό του αρκεί να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα:

$\int_{-2}^{1} \left(x^2 + 2x + 2\right) dx$.



Σχήμα 2

Άρα έχουμε: $\int_{-2}^{1} \left(x^2 + 2x + 2\right) dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)\right|_{-2}^{1} \Rightarrow$

$$\int_{-2}^{1} \left(x^2 + 2x + 2\right) dx = \left(\frac{1}{3} + 1 + 2\right) - \left(\frac{8}{3} + 4 - 4\right) = 6.$$

Συνεπώς το ζητούμενο εμβαδόν είναι 6 τετραγωνικές μονάδες.

2.6 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

1. Αν $F(x)$ είναι το αόριστο ολοκλήρωμα μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης $f(x)$, a και b το κάτω και άνω όριο του ολοκληρώματος αντίστοιχα, τότε αλλάζοντας τα όρια έχουμε:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b).$$

Δηλαδή η αμοιβαία αλλαγή των ορίων ενός ορισμένου ολοκληρώματος αλλάζει απλώς το πρόσημο του.

2. Αν $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a,\ b]$ και k ένας πραγματικός αριθμός, τότε $kf(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,\ b]$ και

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

3. Αν $f_1, f_2, ..., f_n$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις σε ένα διάστημα $[a,\ b]$, τότε το άθροισμά τους είναι επίσης μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\int_a^b \left[f_1(x) + \cdots + f_n(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \cdots + \int_a^b f_n(x)dx.$$

4. Αν $a \prec c \prec b$ και $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στα διαστήματα $[a,\ c]$ και $[c,\ b]$, τότε η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[a,\ b]$ και ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Αν $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση σε ένα κλειστό διαστήματα και $a,\ b,\ c$ τρεις οποιοιδήποτε αριθμοί στο διάστημα αυτό, τότε ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

6. Αν $f(x)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διαστήματα $[a,\ b]$, με $f(x) \geq 0,\ \ \forall x \in [a,\ b]$, τότε:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$$

7. Αν $f(x)$ και $g(x)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο διαστήματα $[a,\ b]$, με $f(x) \geq g(x),\ \forall x \in [a,\ b]$, τότε:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

8. Θεώρημα Μέσης Τιμής: Αν $f(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο κλειστό διάστημα $[a,\ b]$, τότε υπάρχει ένας αριθμός $z \in (a,\ b)$, τέτοιος ώστε:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(z)(b-a).$$

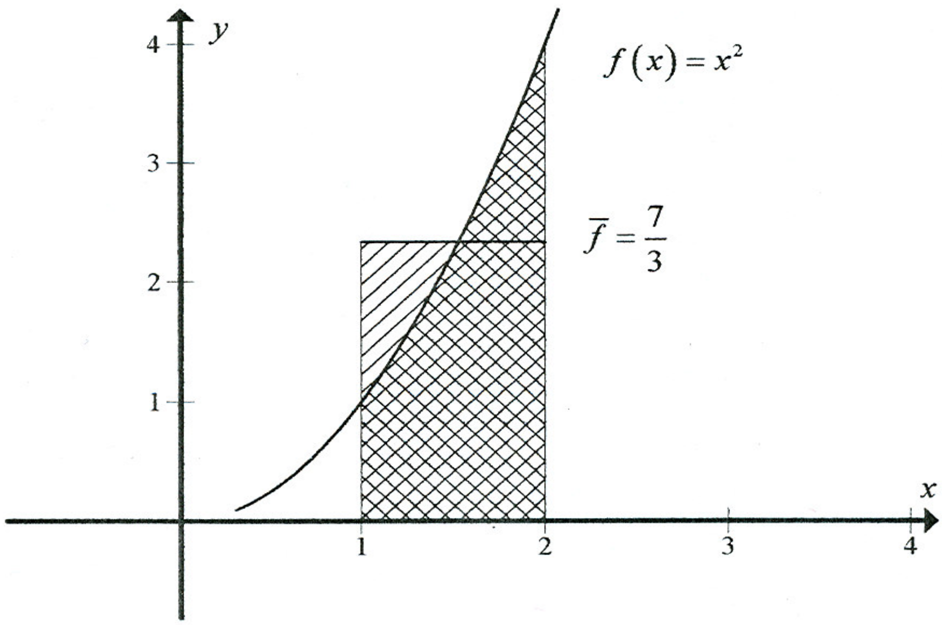
Η τιμή της συνάρτησης f στο σημείο z, ονομάζεται **μέση τιμή** της συνάρτησης, συμβολίζεται με $\overline{f}$, δηλαδή $\overline{f} = f(z)$ και δίνεται από τη σχέση:

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Παράδειγμα: Να υπολογιστεί η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[1,\ 2]$ και να εξηγηθεί γεωμετρικά.

Λύση: $\overline{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow \overline{f} = \dfrac{1}{2-1}\displaystyle\int_1^2 x^2 dx = \left.\dfrac{x^3}{3}\right|_1^2 = \dfrac{7}{3}.$

Αφού $\dfrac{1}{2-1}\displaystyle\int_1^2 x^2 dx = \dfrac{7}{3}$, έχουμε ότι $\displaystyle\int_1^2 x^2 dx = \dfrac{7}{3}(2-1)$. Το ολοκλήρωμα αυτό δίνει το εμβαδόν της περιοχής μεταξύ της καμπύλης $f(x) = x^2$ και του άξονα των x, από $x = 1$ έως $x = 2$, όπως φαίνεται στο σχήμα παρακάτω. Το εμβαδόν αυτό, $\dfrac{7}{3}(2-1)$, είναι ίσον με το εμβαδόν του ορθογωνίου που έχει ύψος $\overline{f} = \dfrac{7}{3}$ και πλάτος $b-a = 2-1 = 1$.



Σχήμα 3

2.7 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: α) $\int x^2e^x dx$, β) $\int x^2e^{-2x}dx$, γ) $\int t^3 lnt dt$, δ) $\int x\sqrt{x+1}dx$, ε) $\int \frac{ln(x+1)}{2(x+1)}dx$, στ) $\int (2x^3+x)(x^4+x^2)^{3/4}dx$, ζ) $\int \frac{x^2+10x+6}{x^2+2x-8}dx$, η) $\int \frac{6x^2+13x+6}{(x+2)(x+1)^2}dx$ (υπόδειξη: το κλάσμα να γραφεί ως εξής: $\frac{6x^2+13x+6}{(x+2)(x+1)^2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+1}+\frac{\Gamma}{(x+1)^2}$), θ) $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2}dx$.

2. Να υπολογιστούν τα ορισμένα ολοκληρώματα: α) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{4-x}}dx$, β) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$, γ) $\int_1^2 xlnxdx$, δ) $\int_0^1 (2x+1)(x^2+x)^4 dx$, ε) $\int_{-2}^1 (t^4-t+1)dt$, στ)

4. Να υπολογιστεί το εμβαδόν μεταξύ της συνάρτησης $f(x)=6-x-x^2$ και του άξονα των x.

5. Να βρεθεί η μέση τιμή των παρακάτω συναρτήσεων στα δοσμένα διαστήματα:

α) $f(x)=x^2$ στο $[0,\ 4]$, β) $f(x)=2-3x^2$ στο $[-1,\ 2]$, γ) $f(x)=\frac{1}{x}$ στο $[2,\ 4]$, δ) $f(t)=4t^3$ στο $[-2,\ 2]$, στ) $f(x)=3x-1$ στο $[1,\ 2]$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{O}

ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ

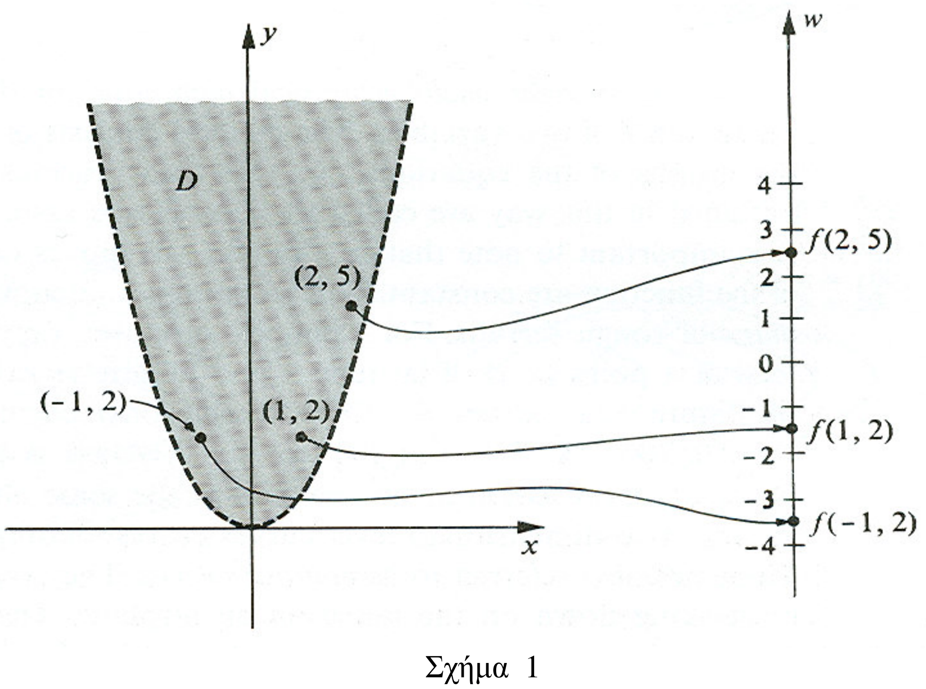
3.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ - ΟΡΙΣΜΟΙ

Ορισμός: Μια συνάρτηση f, της οποίας το πεδίο ορισμού είναι ένα υποσύνολο D του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ και πεδίο τιμών της είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, ονομάζεται συνάρτηση δυο (πραγματικών) μεταβλητών. Δηλαδή έχουμε μια συνάρτηση: $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Εάν f είναι μια συνάρτηση δυο μεταβλητών, τότε τα στοιχεία στο πεδίο ορισμού της είναι διατεταγμένα ζεύγη (x,y) πραγματικών αριθμών.

Ομοίως μπορούμε να ορίσουμε μια συνάρτηση f τριών (ή περισσοτέρων μεταβλητών), δηλαδή $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ κ.λ.π.

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(x,y)=\dfrac{xy-5}{2\sqrt{y-x^2}}$ είναι δυο μεταβλητών με πεδίο ορισμού το σύνολο όλων των ζευγών (x,y) για τα οποία ισχύει $y\succ x^2$ (αφού για να ορίζεται η f πρέπει η ποσότητα κάτω από τη ρίζα να είναι μεγαλύτερη από το 0). Στην εικόνα πιο κάτω βλέπουμε το πεδίο ορισμού της f, καθώς και την απεικόνιση των σημείων: $(2,5)$, $(-1,2)$, $(1,2)$.



Σχήμα 1

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f(x,y)$ λέμε ότι έχει όριο το A, καθώς τα $x \to x_0$ και $y \to y_0$ αν για κάθε $\varepsilon \succ 0$ οσοδήποτε μικρό, υπάρχει ένα $\delta \succ 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα (x,y) ισχύει:

$$0 \prec \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \prec \delta , \tag{1}$$

τότε $|f(x,y) - A| \prec \varepsilon$. Εδώ η σχέση (1) ορίζει την περιοχή των σημείων (x,y) εκτός του (x_0, y_0) που βρίσκονται εντός κύκλου ακτίνας δ και κέντρου το (x_0, y_0).

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f(x,y)$ λέμε ότι είναι συνεχής στο σημείο (x_0, y_0) αν ορίζεται και επί πλέον, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

3.2 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Έστω η συνάρτηση $z = f(x,y)$ των ανεξάρτητων μεταβλητών x και y. Αφού οι δυο αυτές μεταβλητές είναι ανεξάρτητες, μπορεί να γίνουν τα εξής:

(i) Να κρατήσουμε την y σταθερά και να αφήσουμε την x να μεταβάλλεται.
(ii) Να κρατήσουμε την x σταθερά και να αφήσουμε την y να μεταβάλλεται.
(iii) Να αφήσουμε και τις δυο να μεταβάλλονται ταυτόχρονα.

Στις δυο πρώτες περιπτώσεις, η z είναι στην ουσία συνάρτηση μιας μεταβλητής και, μπορεί να παραγωγιστεί σύμφωνα με τους γνωστούς κανόνες.

Στην πρώτη περίπτωση, όπου η x μεταβάλλεται ενώ η y παραμένει σταθερά, η z είναι συνάρτηση της x και η παράγωγός της ως προς x που δίνεται από τη σχέση:

$$f_x(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h} , \tag{2}$$

ονομάζεται πρώτη **μερική** παράγωγος της $z = f(x, y)$ ως προς x.

Στη δεύτερη περίπτωση, όπου η y μεταβάλλεται ενώ η x παραμένει σταθερά, η z είναι συνάρτηση της y και η παράγωγός της ως προς y που δίνεται από τη σχέση:

$$f_y(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h,) - f(x, y)}{h}, \tag{3}$$

ονομάζεται πρώτη **μερική** παράγωγος της $z = f(x, y)$ ως προς y.

Στην τρίτη περίπτωση, όπου η x και η y μεταβάλλονται και οι δυο ταυτόχρονα, εργαζόμαστε όπως και στην παραγώγιση μιας πεπλεγμένης συνάρτησης, εδώ της z.

Παραδείγματα: α) Αν $f(x, y) = xy^2 + x^2 y$, να υπολογιστούν οι f_x και f_y. Επίσης να υπολογιστούν οι $f_x(3,4)$ και $f_y(3,4)$.

Από τον πιο πάνω ορισμό της μερικής παραγώγου έχουμε:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[(x+h) y^2 + (x+h)^2 y\right] - \left[xy^2 + x^2 y\right]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{xy^2 + hy^2 + x^2 y + 2xhy + h^2 y - xy^2 - x^2 y}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(y^2 + 2xy + hy\right) = y^2 + 2xy.$$

Τώρα $f_x(3,4) = 4^2 + 2(3)(4) = 40$.

Επίσης

$$f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[x(y+h)^2+x^2(y+h)\right]-\left[xy^2+x^2y\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{xy^2+2xyh+xh^2+x^2y+x^2h-xy^2-x^2y}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(2xy+xh+x^2\right)=2xy+x^2.$$

Και τέλος, $f_y(3,4)=2(3)(4)+3^2=33$.

Η παρά πάνω διαδικασία υπολογισμού της μερικής παραγώγου απλοποιείται αν παρατηρήσουμε, από τον ορισμό αυτής, ότι για τον υπολογισμό της f_x θεωρούμε τη μεταβλητή y σταθερά και παραγωγίζουμε ως προς x. Ομοίως, υπολογίζουμε την f_y.

Έτσι έχουμε: $\quad f_x(x,y)=(1)\,y^2+(2x)\,y=y^2+2xy$ και

$$f_y(x,y)=x(2y)+x^2(1)=2xy+x^2.$$

β) Αν $z=3x^3y^3-9x^2y+xy^2+4y$, να υπολογιστούν οι $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}$ και $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-1,2)}$.

Έχουμε ότι $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3\left(3x^2\right)y^3-9(2x)\,y+(1)\,y^2+0=9x^2y^3-18xy+y^2$.

Τώρα η πιο πάνω μερική παράγωγος στο σημείο $(1,0)$ είναι

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=9(1)^2(0)-18(1)(0)+0^2=0.$$

Ακόμη, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^3\left(3y^2\right) - 9x^2\left(1\right) + x\left(2y\right) + 4\left(1\right) \; = 9x^3y^2 - 9x^2 + 2xy + 4$.

Τέλος, στο σημείο $\left(-1,2\right)$ έχουμε:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(-1,2)} = 9\left(-1\right)^3 2^2 - 9\left(-1\right)^2 + 2\left(-1\right)2 + 4 = -45 .$$

γ) Αν $\dfrac{xz^2}{x+y} + y^2 = 0$, να υπολογιστεί η $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, όταν $x = -1, \quad y = 2$ και $z = 2$.

Θεωρούμε τη z ως συνάρτηση των x και y και στη συνέχεια την παραγωγίζουμε ως προς x.

Έτσι έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xz^2}{x+y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(0\right) \Rightarrow \frac{\left(x+y\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(xz^2\right) - xz^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x+y\right)}{\left(x+y\right)^2} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\left(x+y\right)\left[x\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) + z^2\left(1\right)\right] - xz^2\left(1\right)}{\left(x+y\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2xz\left(x+y\right)\frac{\partial z}{\partial x} + z^2\left(x+y\right) - xz^2 = 0$$

και λύνοντας ως προς $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ παίρνουμε:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{xz^2 - z^2\left(x+y\right)}{2xz\left(x+y\right)} = -\frac{yz}{2x\left(x+y\right)} .$$

Τώρα στο δεδομένο σημείο $x=-1,\ \ y=2$ και $z=2$, έχουμε:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(-1,2,2)}=-\frac{2\cdot 2}{2(-1)(-1+2)}=2\,.$$

δ) Αν $se^{r^2+u^2}=uln\left(t^2+1\right)$, να υπολογιστεί η $\dfrac{\partial t}{\partial u}$.

Θεωρούμε την t ως συνάρτηση των $r,\ s$ και u. Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη ως προς u έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(se^{r^2+u^2}\right)=\frac{\partial}{\partial u}\left[uln\left(t^2+1\right)\right]$$

$$\Rightarrow 2sue^{r^2+u^2}=u\frac{\partial}{\partial u}\left[ln\left(t^2+1\right)\right]+ln\left(t^2+1\right)\frac{\partial}{\partial u}(u)$$

$$\Rightarrow 2sue^{r^2+u^2}=u\frac{2t}{t^2+1}\frac{\partial t}{\partial u}+ln\left(t^2+1\right)\Rightarrow\frac{\partial t}{\partial u}=\frac{\left(t^2+1\right)\left[2sue^{r^2+u^2}-ln\left(t^2+1\right)\right]}{2ut}.$$

3.3 ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

Αν $z=f(x,y)$, τότε δεν είναι μόνον η z μια συνάρτηση των x και y, αλλά και οι παράγωγοι f_x και f_y είναι επίσης συναρτήσεις των x και y. Συνεπώς, μπορούμε να παραγωγίσουμε τις παραγώγους αυτές και πάλι, ώστε να πάρουμε τη <u>δεύτερη μερική παράγωγο</u> ή <u>μερική παράγωγο δεύτερης τάξης</u> της $z=f(x,y)$.

Συμβολικά έχουμε:

- f_{xx} σημαίνει $\left(f_x\right)_x$ ή $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ σημαίνει $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$.

- f_{yy} σημαίνει $\left(f_y\right)_y$ ή $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ σημαίνει $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

- f_{xy} σημαίνει $\left(f_x\right)_y$ ή $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ σημαίνει $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$.

- f_{yx} σημαίνει $\left(f_y\right)_x$ ή $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ σημαίνει $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$.

Για να υπολογίσουμε π.χ. τη δεύτερη παράγωγο f_{xy}, πρώτα παραγωγίζουμε την f ως προς x και μετά ως προς y, κ.λ.π.

Μπορούμε να επεκτείνουμε τη μερική παράγωγο πέραν της δεύτερης τάξης, για παράδειγμα η f_{xyx} ή $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$ είναι μια τρίτης τάξης μερική παράγωγος της $z = f\left(x, y\right)$, η οποία προκύπτει αν την παραγωγίσουμε πρώτα ως προς x, μετά ως προς y και τέλος ως προς x ξανά.

<u>Παραδείγματα</u>: α) Να υπολογιστούν όλες οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της: $f\left(x, y\right) = x^2 y + x^2 y^2$.

Κατ' αρχάς $f_x\left(x, y\right) = 2xy + 2xy^2$ και $f_y\left(x, y\right) = x^2 + 2x^2 y$, οπότε έχουμε:

$$f_{xx}\left(x, y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + 2xy^2\right) = 2y + 2y^2,$$

$$f_{xy}\left(x, y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + 2xy^2\right) = 2x + 4xy,$$

$$f_{yy}\left(x, y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 2x^2 y\right) = 2x^2,$$

$$f_{yx}\left(x, y\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 2x^2 y\right) = 2x + 4xy.$$

Στο παράδειγμα πιο πάνω παρατηρούμε ότι $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$. Η ισότητα αυτή δεν είναι τυχαία, αλλά ισχύει για κάθε συνάρτηση $f(x,y)$, για την οποία οι $f_{xy}(x,y)$ και $f_{yx}(x,y)$ είναι **συνεχείς** συναρτήσεις. Με άλλα λόγια η σειρά παραγώγισης δεν παίζει ρόλο σε αυτή την περίπτωση.

β) Να υπολογιστεί η $\left.\dfrac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}\right|_{(1,2,3)}$ για την $w=(2x+3x+4z)^3$.

$$\frac{\partial w}{\partial z}=3(2x+3y+4z)^2\frac{\partial}{\partial z}(2x+3y+4z)\ =12(2x+3y+4z)^2.$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z dy}=12\cdot 2(2x+3y+4z)\frac{\partial}{\partial y}(2x+3y+4z)=72(2x+3y+4z).$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y dx}=72\cdot 2=144. \quad \text{Άρα} \quad \left.\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y \partial x}\right|_{(1,2,3)}=144.$$

γ) Να βρεθεί η $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ της $z^2=xy$.

Η $z^2=xy$ είναι μια πεπλεγμένη συνάρτηση των x και y, οπότε έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x}(z^2)=\frac{\partial}{\partial x}(xy)\Rightarrow$$

$$2z\frac{\partial z}{\partial x}=y\Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{2z},\quad z\neq 0.$$

Τώρα παραγωγίζουμε και τα δυο μέλη της πιο πάνω ως προς x και έχουμε:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}yz^{-1}\right)\Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} y z^{-2} \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Αντικαθιστώντας την $\frac{y}{2z}$ στη θέση της $\frac{\partial z}{\partial x}$ παίρνουμε:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} y z^{-2} \left(\frac{y}{2z}\right) = -\frac{y^2}{4z^3}, \quad z \neq 0.$$

3.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για την $f(x,y) = 3x^2y^2$ να υπολογιστούν οι $f_x(x,y)$, $f_{xy}(x,y)$.

2. Αν $f(x,y) = 3x^2y + 2xy^2 - 7y$, ποιες είναι οι $f_x(x,y)$, $f_{xx}(x,y)$;

3. Να βρεθούν οι $f_y(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$, $f_{yxy}(x,y)$ της $f(x,y) = e^{3xy} + 4x^2y$.

4. Για την $f(x,y,z) = xy^2z^3$ να υπολογιστούν οι $f_x(x,y,z)$ $f_{xz}(x,y,z)$ και $f_{xy}(x,y,z)$.

5. Για τη συνάρτηση $f(x,y) = x^4y^4 + 3x^3y^2 - 7x + 4$, να δειχθεί ότι

$f_{xyx}(x,y) = f_{xxy}(x,y)$.

6. Αν $w = ln\left(x^2 + y^2\right)$, να δειχθεί ότι $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$.

7. α) Αν $2z^2 - x^2 - 4y^2 = 0$, να υπολογιστεί η $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$. β) Αν $z^2 - 3x^2 + y^2 = 0$, να υπολογιστεί η $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

3.5 Ο ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΡΙΚΗ ΠΑΡΑΓΩΓΟ

1. Έστω η συνάρτηση $z = f(x, y)$, όπου οι x και y είναι και οι δυο συναρτήσεις των r και s που δίνονται από τις $x = x(r, s)$ και $y = y(r, s)$. Αν οι f, x και y έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους, τότε η z είναι συνάρτηση των r και s, και, οι μερικές παράγωγοί της ως προς αυτές είναι:

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

και

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}.$$

2. Ο παραπάνω κανόνας μπορεί να επεκταθεί σε συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών. Για παράδειγμα έστω ότι $z = f(u, w, x, y)$ και u, w, x και y είναι συναρτήσεις των r, s και t. Τότε

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

και

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t},$$

με την προϋπόθεση ότι οι f, u, w, x και y έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους.

3. Αν $z = f(x, y)$, όπου $x = x(t)$ και $y = y(t)$, τότε

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Εδώ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\frac{dz}{dt}$ και όχι τον $\frac{\partial z}{\partial t}$, αφού η z μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση μιας μεταβλητής, της t. Το ίδιο συμβαίνει και με τις $\frac{dx}{dt}$ και $\frac{dy}{dt}$, στη θέση των $\frac{\partial x}{\partial t}$ και $\frac{\partial y}{\partial t}$.

Παραδείγματα: α) Αν $w = f(x, y, z) = 3x^2 y + xyz - 4y^2 z^3$, όπου $x = 2r - 3s$, $y = 6r + s$ και $z = r - s$ να υπολογιστούν οι $\frac{\partial w}{\partial r}$ και $\frac{\partial w}{\partial s}$.

Αφού οι x, y και z είναι συναρτήσεις των r και s από τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = (6xy + yz)(2) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(6) + (xy - 12y^2 z^2)(1) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial r} = x(18x + 13y + 6z) + 2yz(1 - 24z^2 - 6yz).$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial s} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = (6xy + yz)(-3) + (3x^2 + xz - 8yz^3)(1) + (xy - 12y^2 z^2)(-1) \Rightarrow$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = x\left(3x - 19y + z\right) - yz\left(3 + 8z^2 - 12yz\right).$$

β) Αν $z = \dfrac{x + e^y}{y}$, όπου $x = rs + se^{rt}$ και $y = 9 + rt$, να υπολογιστεί η $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ όταν $r = -2,\ \ s = 5$ και $t = 4$.

Οι συναρτήσεις x και y είναι συναρτήσεις των μεταβλητών $r,\ s$ και t (η y μπορεί να γραφεί ως $y = 9 + rt + 0 \cdot s$), οπότε από τον παραπάνω κανόνα έχουμε:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \left(\frac{1}{y}\right)\left(r + e^{rt}\right) + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot 0 = \frac{r + e^{rt}}{y}.$$

Τώρα αν $r = -2,\ \ s = 5$ και $t = 4$, $y = 1$. Οπότε

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{\substack{r=-2\\ s=5\\ t=4}} = \frac{-2 + e^{-8}}{1} = -2 + e^{-8}.$$

γ) Να υπολογιστεί η $\dfrac{\partial y}{\partial r}$ αν $y = x^2 ln\left(x^4 + 6\right)$ και $x = \left(r + 3s\right)^6$.

Εδώ η συνάρτηση y είναι μιας μεταβλητής, της x και η x δυο μεταβλητών, των r και s. Έτσι από τον κανόνα αλυσίδας έχουμε:

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \left[x^2 \cdot \frac{4x^3}{x^4 + 6} + 2x \cdot ln\left(x^4 + 6\right)\right]\left[6\left(r + 3s\right)^5\right] \Rightarrow$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = 12x\left(r+3s\right)^5\left[\frac{2x^4}{x^4+6} + ln\left(x^4+6\right)\right].$$

δ) Αν $z = e^{xy}$, $x = r - 4s$ και $y = r - s$, να υπολογιστεί η $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ και να γραφεί ως συνάρτηση των r και s.

Έχουμε $\dfrac{\partial z}{\partial r} = \dfrac{\partial z}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial x}{\partial r} + \dfrac{\partial z}{\partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial r} \Rightarrow$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \left(ye^{xy}\right)\cdot 1 + \left(xe^{xy}\right)\cdot 1 = \left(x+y\right)e^{xy}.$$

Τώρα, αφού $x = r - 4s$ και $y = r - s$,

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \left[\left(r-4s\right)+\left(r-s\right)\right]e^{\left(r-4s\right)\left(r-s\right)} = \left(2r-5s\right)e^{r^2-5rs+4s^2}.$$

3.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $z = 5x + 3y$, $x = 2r + 3s$ και $y = r - 2s$, να υπολογιστούν οι $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial s}$.

2. Αν $z = x^2 + 3xy + 7y^3$, $x = r^2 - 2s$ και $y = 5s^2$, να υπολογιστούν οι $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial s}$.

3. Αν $w = x^2z^2 + xyz + yz^2$, $x = 5t$, $y = 2t + 3$ και $z = 6 - t$, να υπολογιστεί η $\dfrac{dw}{dt}$.

4. Αν $w = ln\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$, $x = 2 - 3t$, $y = t^2 + 3$ και $z = 4 - t$, να βρεθεί η $\dfrac{dw}{dt}$.

5. Αν $y=\dfrac{x}{(x-5)}$ και $x=2t^2-3rs-r^2t$, να υπολογιστεί η $\left.\dfrac{\partial y}{\partial t}\right|_{\substack{r=0\\ s=2\\ t=-1}}$.

6. Για τη συνάρτηση $z=\sqrt{5x+2y}$, όπου $x=4t+7$ και $y=t^2-3t+4$, να υπολογιστεί η $\dfrac{dz}{dt}$ όταν $t=1$.

7. Για τη συνάρτηση $z=(4x+3y)^3$, όπου $x=r^2s$ και $y=r-2s$, να υπολογιστεί η $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ όταν $r=0$ και $s=1$.

3.7 ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΔΥΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια του τοπικού ακρότατου (τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο) των συναρτήσεων μιας μεταβλητής και σε συναρτήσεις δυο μεταβλητών.

Ορισμός1: Μια συνάρτηση $z=f(x,y)$ λέμε ότι έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο (x_0,y_0), δηλαδή όταν $x=x_0$ και $y=y_0$, αν για όλα τα σημεία (x,y) του επιπέδου που είναι αρκούντως "κοντά" στο σημείο (x_0,y_0) ισχύει ότι:

$$f(x_0,y_0)\geq(x,y). \tag{1}$$

Ορισμός2: Μια συνάρτηση $z=f(x,y)$ λέμε ότι έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο (x_0,y_0), δηλαδή όταν $x=x_0$ και $y=y_0$, αν για όλα τα σημεία (x,y) του επιπέδου που είναι αρκούντως "κοντά" στο σημείο (x_0,y_0) ισχύει ότι:

$$f(x_0,y_0)\leq(x,y). \tag{2}$$

1^{ος} Κανόνας: Αν η συνάρτηση $z=f(x,y)$ έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο σε ένα σημείο (x_0,y_0) και αν επί πλέον, οι μερικές παράγωγοι f_x και f_y ορίζονται για όλα τα σημεία κοντά στο (x_0,y_0), είναι αναγκαίο το σημείο αυτό να είναι λύση του συστήματος:

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Ένα σημείο (x_0, y_0), για το οποίο ισχύει $f_x(x,y)=f_y(x,y)=0$, ονομάζεται <u>κρίσιμο</u> ή <u>ακρότατο</u> <u>σημείο</u> της f. Συνεπώς, λόγω του πιο πάνω κανόνα, για να βρούμε ένα τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο μιας συνάρτησης θα πρέπει να εξετάσουμε τα ακρότατα σημεία της.

<u>Σημείωση</u>: Ακρότατα σημεία συναρτήσεων περισσοτέρων των δυο μεταβλητών, π.χ. τριών $w=f(x,y,z)$, μπορούν να βρεθούν εξετάζοντας τα σημεία εκείνα για τα οποία $f_x=f_y=f_z=0$. Ακόμη, όταν μια τέτοια συνάρτηση περιορίζεται εντός ενός διαστήματος, ο έλεγχος για ολικά ακρότατα σημεία πρέπει να περιλαμβάνει, εκτός των άλλων και τα άκρα του διαστήματος.

<u>Παραδείγματα</u>: Να εξεταστούν για ακρότατα σημεία οι εξής συναρτήσεις:

α) $f(x,y)=2x^2+y^2-2xy+5x-3y+1$, β) $f(x,y)=x^3+y^3-xy$,

γ) $f(x,y,z)=2x^2+y^2+xy+100-z(x+y-100)$.

<u>Λύση</u>: α) $f_x(x,y)=4x-2y+5$ και $f_y(x,y)=2y-2x-3$, λύνοντας το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} 4x-2y+5=0 \\ -2x+2y-3=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x=-1, \quad y=\frac{1}{2},$$ έχουμε ένα και μόνο ακρότατο σημείο για τη δοθείσα συνάρτηση, το $\left(-1, \ \frac{1}{2}\right)$.

β) $f_x(x,y)=3x^2-y$ και $f_y(x,y)=3y^2-x$, λύνοντας το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}3x^2-y=0\\3y^2-x=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}27y^4-y=0\\3y^2=x\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}y\left(27y^3-1\right)=0\\3y^2=x\end{aligned}\right\}\Rightarrow y=0,\text{ οπότε } x=0$$

ή $y=\frac{1}{3}$, οπότε $x=\frac{1}{3}$. Συνεπώς τα ακρότατα σημεία της συνάρτησης είναι $(0,0)$ και $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

γ) Λύνουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned}f_x(x,y,z)&=4x+y-z=0\\f_y(x,y,z)&=x+2y-z=0\\f_z(x,y,z)&=-x-y+100=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}4x+y-z&=0\\3x-y&=0\\-x-y&=-100\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}4x+y-z&=0\\3x-y&=0\\-4y&=-300\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$y=75$, $x=25$ και $z=175$. Συνεπώς έχουμε ακρότατο σημείο στη θέση: $(25,75,175)$.

<u>2ος Κανόνας</u>: Έστω ότι η συνάρτηση $z=f(x,y)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους f_{xx}, f_{yy} και f_{xy} σε όλα τα σημεία (x,y) κοντά στο ακρότατο σημείο (x_0,y_0). Έστω ακόμη ότι η συνάρτηση E ορίζεται από τη σχέση:

$$E(x,y)=f_{xx}(x,y)\cdot f_{yy}(x,y)-\left[f_{xy}(x,y)\right]^2.$$

Τότε αν

1. $E(x_0,y_0)\succ 0$ και $f_{xx}(x_0,y_0)\prec 0$, η συνάρτηση f έχει τοπικό μέγιστο στο σημείο (x_0,y_0).
2. $E(x_0,y_0)\succ 0$ και $f_{xx}(x_0,y_0)\succ 0$, η συνάρτηση f έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο (x_0,y_0).

3. $E(x_0, y_0) \prec 0$, η συνάρτηση f δεν έχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο σημείο (x_0, y_0).

4. $E(x_0, y_0) = 0$, δεν μπορούμε να πούμε οτιδήποτε για τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο και απαιτείται περαιτέρω ανάλυση.

<u>Παραδείγματα</u>: Να εξεταστούν για μέγιστα ή ελάχιστα οι εξής συναρτήσεις:

α) $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$, β) $f(x, y) = y^2 - x^2$, γ) $f(x, y) = x^4 + (x-y)^4$.

<u>Λύση</u>: α) $f_x(x, y) = 3x^2 - y$, $f_y(x, y) = 3y^2 - x$. Από το παράδειγμα (β) πιο πάνω έχουμε ακρότατα σημεία τα $(0,0)$ και $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

(i) Στο $(0,0)$: $f_{xx}(x, y) = 6x = 0,\ f_{xy}(x, y) = -1,\ f_{yy}(x, y) = 6y = 0$ και

$E(0,0) = 0 \cdot 0 - (-1)^2 = -1 \prec 0$. Συνεπώς δεν υπάρχει τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο στο σημείο $(0,0)$.

(ii) Στο $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$: $f_{xx}(x, y) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2 \succ 0,\ f_{xy}(x, y) = -1,$

$f_{yy}(x, y) = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$ και $E\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 \succ 0$. Συνεπώς έχουμε τοπικό ελάχιστο στο $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Η τιμή της f στο σημείο αυτό είναι:

$$f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27}.$$

β) $\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = -2x = 0 \\ f_y(x,y) = \quad 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 0, \quad y = 0$. Άρα έχουμε κρίσιμο σημείο το $(0,0)$.

Ακόμη, $f_{xx}(x,y) = -2, \quad f_{xy}(x,y) = 0, \quad f_{yy}(x,y) = 2$

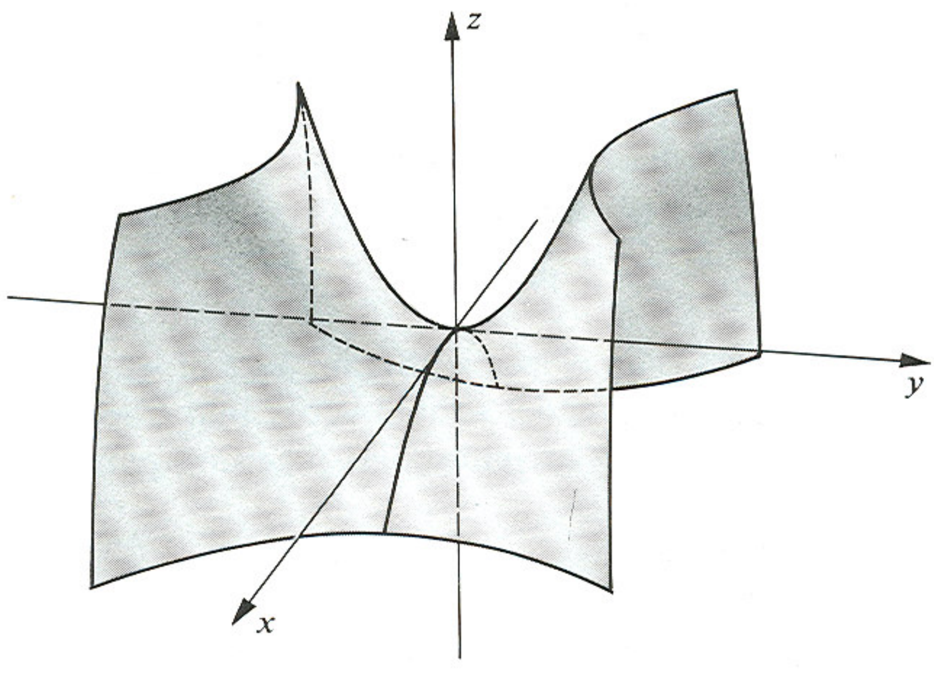
και $\quad E(0,0) = (-2)\cdot(2) - (0)^2 = -4 \prec 0$.

Συνεπώς δεν υπάρχει τοπικό ακρότατο στο σημείο $(0,0)$.

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε το γράφημα της συνάρτησης:

$$f(x,y) = y^2 - x^2.$$

Η καμπύλη επιφάνεια που διχοτομείται από το επίπεδο $y = 0$, έχει μέγιστο στο $(0,\ 0)$, αλλά για την καμπύλη επιφάνεια που διχοτομείται από το επίπεδο $x = 0$, το σημείο αυτό είναι ελάχιστο. Κατά συνέπεια, αν και το $(0,\ 0)$ είναι κρίσιμο σημείο για τη συνάρτηση, δεν είναι όμως τοπικό ακρότατο. Εδώ το σημείο $(0,\ 0)$ ονομάζεται *"σαγματικό σημείο"* , λόγω του σχήματος της καμπύλης επιφάνειας κοντά σε αυτό.



Σχήμα 2

γ) $\left.\begin{aligned} f_x(x,y)&=4x^3+4(x-y)^3=0\\ f_y(x,y)&=\quad -4(x-y)^3=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}4x^3+4(x-y)^3=0\\ x=y\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned}x=0\\ x=y\end{aligned}\right\} \Rightarrow$

$x=y=0$, δηλαδή το σημείο $(0,\ 0)$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f. Στο σημείο αυτό έχουμε:

$f_{xx}(x,y)=12x^2+12(x-y)^2=0$, $f_{xx}(x,y)=12(x-y)^2=0$ και $f_{xy}(x,y)=-12(x-y)^2=0$. Άρα $E(0,\ 0)=0$ και έτσι δεν μπορούμε να πούμε οτιδήποτε για μέγιστο ή ελάχιστο της f στο συγκεκριμένο σημείο. Παρόλα αυτά, η f είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε για κάθε σημείο $(x,\ y)=(0,\ 0)$, ισχύει ότι $f(x,y)\succ 0$, ενώ $f(0,\ 0)=0$. Συνεπώς η f έχει τοπικό (και ολικό) ελάχιστο στο $(0,\ 0)$.

3.8 ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ LAGRANGE

Είναι ανάγκη πολλές φορές να υπολογίσουμε τα μέγιστα και ελάχιστα σημεία συναρτήσεων πολλών μεταβλητών, στις οποίες επιβάλλονται ορισμένοι περιορισμοί.

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης:

$$w=x^2+y^2+z^2, \tag{1}$$

με την προϋπόθεση ότι οι ανεξάρτητες μεταβλητές ικανοποιούν τη σχέση:

$$x-y+2z=6. \tag{2}$$

Λύνοντας τη (2) ως προς x, παίρνουμε

$$x = y - 2z + 6 \tag{3}$$

και αντικαθιστώντας την (3) στην (1) έχουμε

$$w = \left(y - 2z + 6\right)^2 + y^2 + z^2 . \tag{4}$$

Τώρα η w, είναι μία συνάρτηση δυο μεταβλητών, για την οποία μπορούμε να βρούμε τα ακρότατα, με τη μέθοδο που περιγράψαμε παραπάνω.

Έτσι έχουμε:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial y} &= 2\left(y - 2z + 6\right) + 2y \quad = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -4\left(y - 2z + 6\right) + 2z = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 4y - \quad 4z + 12 = 0 \\ -4y + 10z - 24 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 6z = 12 \\ -4y + 10z - 24 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad z = 2, \quad y = -1 .$$

Επίσης από την (3) παίρνουμε $x = 1$ Άρα το κρίσιμο σημείο της (1) με τον περιορισμό (2) είναι το σημείο $\left(1, \; -1, \; 2\right)$.

Οι δεύτερες μερικές παράγωγοι της συνάρτησης στο σημείο αυτό είναι:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 10, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} = -4$$

και $\quad E\left(y_0, z_0\right) = E\left(-1, 2\right) = 4 \cdot 10 - \left(-4\right)^2 = 24 \succ 0$. Συνεπώς η συνάρτηση w, με τον περιορισμό (2), έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο $\left(1, \; -1, \; 2\right)$.

Η λύση του πιο πάνω προβλήματος βρέθηκε, αφού πρώτα εκφράσαμε μια από τις τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές συναρτήσει των άλλων δυο. Αυτό όμως δεν είναι πάντα εφικτό ή τόσο εύκολο, αλλά μπορούμε να εφαρμόσουμε μια άλλη τεχνική, γνωστή ως μέθοδο των **πολλαπλασιαστών Lagrange**[1].

Η μέθοδος αυτή έχει ως εξής.

Έστω ότι έχουμε μια συνάρτηση $f(x,y,z)$ και τον περιορισμό $g(x,y,z)=0$.

Κατασκευάζουμε μια νέα συνάρτηση F τεσσάρων μεταβλητών, η οποία ορίζεται ως ακολούθως:

$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z).$$

Εάν τώρα (x_0,y_0,z_0) είναι ένα κρίσιμο σημείο της f, με τον περιορισμό $g(x,y,z)=0$, υπάρχει μια τιμή λ_0 του λ τέτοια ώστε (x_0,y_0,z_0,λ_0) είναι κρίσιμο σημείο της F και αντιστρόφως. Έτσι, για την επίλυση του προβλήματός μας, αρκεί να λύσουμε το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} F_x(x,y,z,\lambda)=0 \\ F_y(x,y,z,\lambda)=0 \\ F_z(x,y,z,\lambda)=0 \\ F_\lambda(x,y,z,\lambda)=0 \end{array}\right\}.$$

Παραδείγματα : Να βρεθούν τα ακρότατα σημεία των παρακάτω συναρτήσεων με τους δοθέντες περιορισμούς:

α) $f(x,y)=3x-y+6$, με τον περιορισμό $x^2+y^2=4$.

β) $f(x,y,z)=xyz$, όπου $xyz\neq 0$, με τον περιορισμό $x+2y+3z=36$.

Λύση: Έχουμε ότι $g(x,y)=x^2+y^2-4=0$ και η νέα συνάρτηση είναι:

[1] Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Γάλλος μαθηματικός.

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = 3x - y + 6 - \lambda\left(x^2 + y^2 - 4\right).$$

Για $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ παίρνουμε

$$\left.\begin{aligned} 3-2x\lambda=0 \\ -1-2y\lambda=0 \\ -x^2-y^2+4=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x=\frac{3}{2\lambda} \\ y=-\frac{1}{2\lambda} \\ -\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2-\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2+4=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Για $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{4}$, $x = \frac{3}{2\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$, $y = \frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Για $\lambda = -\frac{\sqrt{10}}{4}$, $x = -\frac{3\sqrt{10}}{5}$, $y = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

Άρα τα κρίσιμα σημεία της $f(x,y) = 3x - y + 6$ με τον περιορισμό ότι $x^2 + y^2 = 4$, είναι τα $\left(\frac{3\sqrt{10}}{5},\ -\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$ και $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{5},\ \frac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

β) $F(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x + 2y + 3z - 36)$ και

$$\left.\begin{aligned} F_x &= yz-\lambda=0 \\ F_y &= xz-2\lambda=0 \\ F_z &= xy-3\lambda=0 \\ F_\lambda &= -x-2y-3z+36=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} yz&=\lambda \\ xz&=2\lambda \\ xy&=3\lambda \\ x+2y+3z-36&=0 \end{aligned}\right\},$$ αφού $xyz \neq 0$ έχουμε

$\frac{yz}{xz} = \frac{\lambda}{2\lambda} \Rightarrow y = \frac{x}{2}$ και $\frac{yz}{xy} = \frac{\lambda}{3\lambda} \Rightarrow z = \frac{x}{3}$, οπότε $x + 2\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{3}\right) - 36 = 0 \Rightarrow$

$3x = 36 \Rightarrow x = 12$ και έτσι $y = 6, \quad z = 4$.

Συνεπώς το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f με τον δοσμένο περιορισμό είναι το $(12, \ 6, \ 4)$.

3.9 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Για τις παρακάτω συναρτήσεις να βρεθούν τα ακρότατα και να προσδιοριστούν αν είναι μέγιστα ή ελάχιστα.

α) $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 4x - 9y + 3$, β) $f(x,y) = y - y^2 - 3x - 6x^2$,

γ) $f(x,y) = \frac{1}{3}\left(x^3 + 8y^3\right) - 2\left(x^2 + y^2\right) + 1$, δ) $f(x,y) = x^3 + x^2 + y^2 - xy$.

2. Σε μια αυτοματοποιημένη διαδικασία παραγωγής ενός προϊόντος, οι μηχανές M και N είναι προγραμματισμένες να λειτουργούν σε καθημερινή βάση m και n ώρες αντίστοιχα. Αν η συνάρτηση ημερήσιας παραγωγής q δίνεται από τη σχέση: $q(m,n) = 4{,}5m + 5n - 0{,}5m^2 - n^2 - 0{,}25mn$, να βρεθούν οι τιμές των m και n που μεγιστοποιούν την παραγωγή.

3. Αν η παραγωγή ενός προϊόντος μια εταιρείας είναι συνάρτηση των εισροών $k, \ l$ και δίνεται από τη σχέση: $p(k,l) = 1{,}08k^2 - 0{,}03k^3 + 1{,}68l^2 - 0{,}08l^3$, να βρεθούν οι τιμές των k και l, οι οποίες μεγιστοποιούν την παραγωγή.

4. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα ορθογώνιο κουτί, ανοικτό από πάνω, το οποίο να έχει όγκο 6 μ^3. Το κόστος κατασκευής για κάθε μ^2 του χρησιμοποιούμενου υλικού είναι 3 € για τη βάση, 1 € για τις μεγαλύτερες πλευρές του και 0,50 € για τις μικρότερες. Να υπολογιστούν οι διαστάσεις του κουτιού, για τις οποίες το κόστος του υλικού είναι ελάχιστο.

5. Με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών του Lagrange να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία των παρακάτω συναρτήσεων υπό τους δοσμένους περιορισμούς.

α) $f(x,y)=x^2+4y^2+6$, $2x-8y=20$.

β) $f(x,y)=-2x^2+5y^2+7$, $3x-2y=7$.

γ) $f(x,y,z)=xyz$, $x+y+z=12$, $x+y-z=0$, $(xyz\neq 0)$.
(Υπόδειξη, $F(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2)=xyz-\lambda_1(x+y+z-12)-\lambda_2(x+y-z)$).

δ) $f(x,y,z,w)=2x^2+2y^2+3z^2-4w^2$, $4x-8y+6z+16w=6$.

6. Για να ανταποκριθεί σε μια παραγγελία 100 μονάδων από το προϊόν που παράγει ένα εργοστάσιο πρέπει να κατανείμει την παραγωγή στα τμήματά του, A και B. Αν η συνάρτηση, c του συνολικού κόστους αυτής της παραγωγής είναι: $c(x,y)=0{,}1x^2+7x+15y+1000$, όπου x και y είναι ο αριθμός των παραγόμενων μονάδων των τμημάτων A και B αντίστοιχα, πως πρέπει να γίνει η κατανομή ώστε να ελαχιστοποιηθεί το κόστος παραγωγής;

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{O}

ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.1 ΤΟ ΔΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

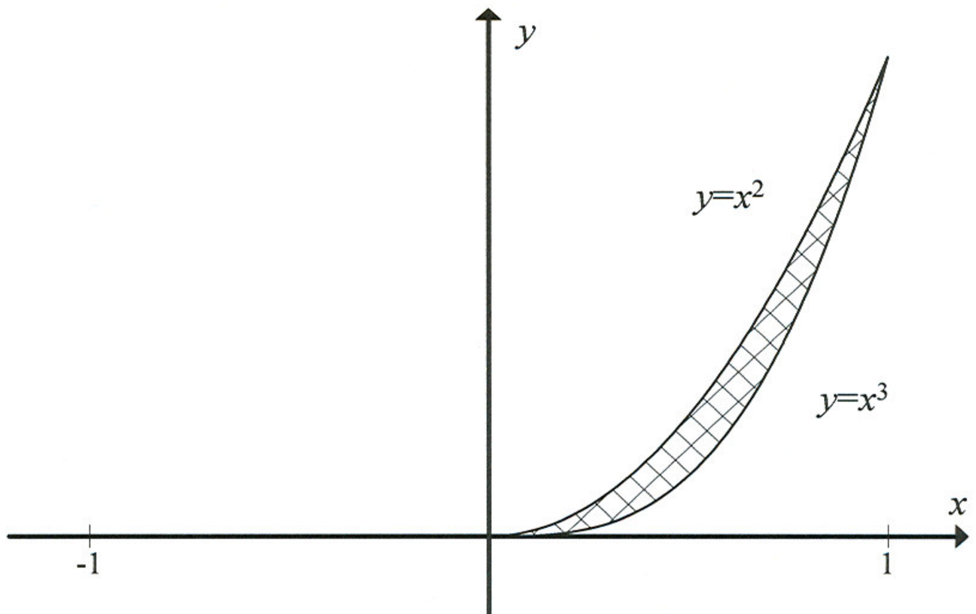
Όπως είδαμε, νωρίτερα, το ορισμένο ολοκλήρωμα συναρτήσεων μιας μεταβλητής σχετίζεται με τη διαδικασία ολοκλήρωσης αυτών σε συγκεκριμένο διάστημα. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα συναρτήσεων δυο μεταβλητών, το οποίο ονομάζεται (ορισμένο) **διπλό ολοκλήρωμα** και το οποίο σχετίζεται με την ολοκλήρωση αυτών των συναρτήσεων σε μια περιοχή του $xy-$επιπέδου.

Για παράδειγμα, το

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \left(x^3 - xy\right) dy dx \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \int_0^1 \left[\int_{x^3}^{x^2} \left(x^3 - xy\right) dy \right] dx$$

είναι το διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f\left(x, y\right) = x^3 - xy$ στην περιοχή που προσδιορίζεται από τα όρια ολοκλήρωσης, ήτοι την περιοχή όλων των σημείων του $xy-$επιπέδου τέτοια ώστε $x^3 \le y \le x^2$ και $0 \le x \le 1$.

Η περιοχή αυτή φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Σχήμα 1

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω διπλό ολοκλήρωμα, ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς y, κρατώντας τη x σταθερά και αντικαθιστούμε τα όρια αυτού του ολοκληρώματος. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το δεύτερο ορισμένο ολοκλήρωμα ως προς x, της συνάρτησης που προέκυψε από την πρώτη ολοκλήρωση.

Έτσι έχουμε:

$$\int_{x^3}^{x^2}\left(x^3-xy\right)dy \;=\left(x^3y-\frac{xy^2}{2}\right)\Bigg|_{x^3}^{x^2}$$

$$=\left[x^3\left(x^2\right)-\frac{x\left(x^2\right)^2}{2}\right]-\left[x^3\left(x^3\right)-\frac{x\left(x^3\right)^2}{2}\right]$$

$$=x^5-\frac{x^5}{2}-x^6+\frac{x^7}{2}=\frac{x^5}{2}-x^6+\frac{x^7}{2}.$$

Τώρα ολοκληρώνουμε ως προς x και έχουμε:

$$\int_0^1\left(\frac{x^5}{2}-x^6+\frac{x^7}{2}\right)dx=\left(\frac{x^6}{12}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^8}{16}\right)\Bigg|_0^1$$

$$=\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{7}+\frac{1}{16}\right)-0=\frac{1}{336}.$$

Συνεπώς $\int_0^1\int_{x^3}^{x^2}\left(x^3-xy\right)dydx=\frac{1}{336}$.

Για το διπλό ολοκλήρωμα

$$\int_0^2\int_3^4\left(xy\right)dxdy$$

ή ισοδύναμα το

$$\int_0^2\left[\int_3^4\left(xy\right)dx\right]dy,$$

η περιοχή ολοκλήρωσης είναι όλα τα σημεία (x, y) του $xy-$επιπέδου, για τα οποία, $3 \leq x \leq 4$ και $0 \leq y \leq 2$.

Για τον υπολογισμό του διπλού αυτού ολοκληρώματος, κρατάμε την y σταθερά και ολοκληρώνουμε ως προς x, μεταξύ 3 και 4. Κατόπιν ολοκληρώνουμε το αποτέλεσμα της πρώτης ολοκλήρωσης ως προς y μεταξύ του 0 και του 2.

Έτσι έχουμε:

$$\int_0^2 \int_3^4 (xy)\,dxdy = \int_0^2 \left[\int_3^4 (xy)\,dx\right] dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x^2 y}{2}\right)\Bigg|_3^4 dy$$

$$= \int_0^2 \left(8y - \frac{9}{2}y\right) dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{7}{2}y\right) dy$$

$$= \frac{7y^2}{4}\Bigg|_0^1 = 7 - 0 = 7.$$

<u>Παραδείγματα</u>: Να υπολογιστούν τα διπλά ολοκληρώματα:

α) $\int_{-1}^{1} \int_0^{1-x} (2x+1)\,dydx$,

β) $\int_1^{ln2} \int_{e^y}^{2} dxdy$.

<u>Λύση</u>:

α) $\int_{-1}^{1} \int_0^{1-x} (2x+1)\,dydx = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{1-x} (2x+1)\,dy\right] dx$

$$=\int_{-1}^{1}\left(2xy+y\right)\Big|_{0}^{1-x}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left\{\left[2x\left(1-x\right)+\left(1-x\right)\right]-0\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left(-2x^2+x+1\right)dx$$

$$=\left(-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-1\right)=\frac{2}{3}.$$

β) $\int_{1}^{ln2}\int_{e^y}^{2}dxdy=\int_{1}^{ln2}\left[\int_{e^y}^{2}dx\right]dy=\int_{1}^{ln2}x\Big|_{e^y}^{2}dy$

$$=\int_{1}^{ln2}\left(2-e^y\right)dy$$

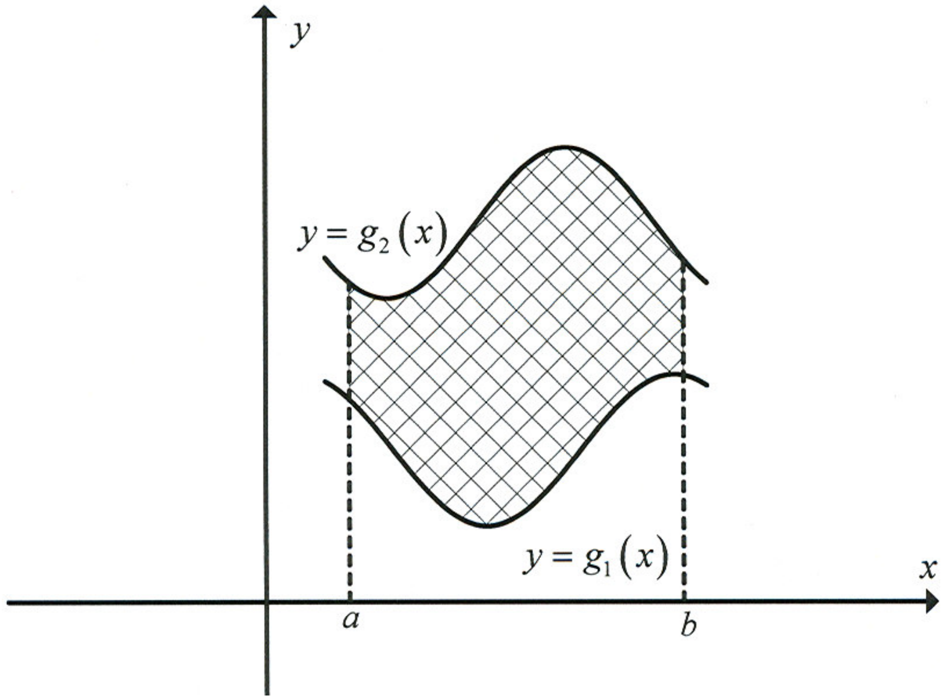
$$=\left(2y-e^y\right)\Big|_{1}^{ln2}$$

$$=\left(2ln2-2\right)-\left(2-e\right)=2ln2-4+e=ln4-4+e\,.$$

4.2 ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΟΥ ΔΙΠΛΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

Στο σχήμα πιο κάτω βλέπουμε την περιοχή μεταξύ των "ομαλών" καμπυλών $y=g_2\left(x\right)$, $\quad y=g_1\left(x\right)$ και των ευθειών $x=a$, $x=b$. Το εμβαδόν αυτής της περιοχής βρίσκεται, ως γνωστόν, από τη διαφορά:

$$\int_{a}^{b}\left[g_2\left(x\right)\right]dx-\int_{a}^{b}\left[g_1\left(x\right)\right]dx=\int_{a}^{b}\left[g_2\left(x\right)-g_1\left(x\right)\right]dx\,. \qquad (1)$$



Σχήμα 2

Τώρα από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 dy dx \qquad (2)$$

έχουμε:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 dy dx = \int_a^b y \Big|_{g_1(x)}^{g_2(x)} dx$$

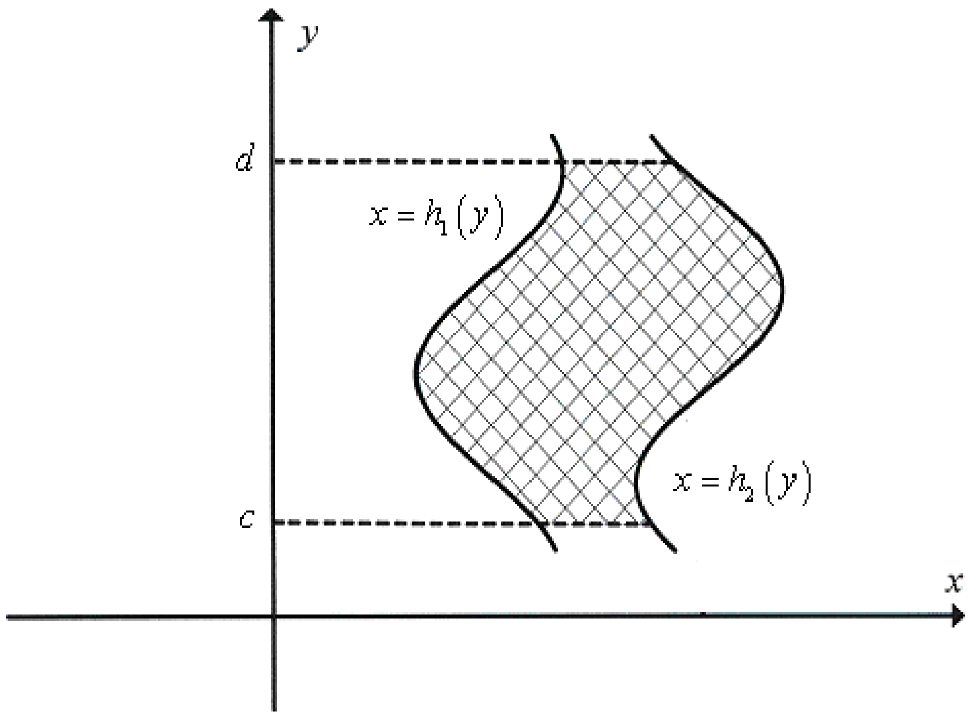
και έτσι

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1 dy dx = \int_a^b \left[g_2(x) - g_1(x) \right] dx . \qquad (3)$$

Κατά συνέπεια, αφού οι σχέσεις (1) και (3) είναι ίσες, συμπεραίνουμε ότι το διπλό ολοκλήρωμα (2) μας δίνει το εμβαδόν της επιφάνειας μεταξύ των καμπυλών $y = g_2(x)$ και $y = g_1(x)$ στο κλειστό διάστημα $[a, \ b]$.

Ακόμη, κατά όμοιο τρόπο, το εμβαδόν μεταξύ των "ομαλών" καμπυλών $x = h_2(y)$, $x = h_1(y)$ και των ευθειών $y = c$, $y = d$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω γράφημα, δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$A = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} 1 dxdy . \qquad (4)$$



Σχήμα 3

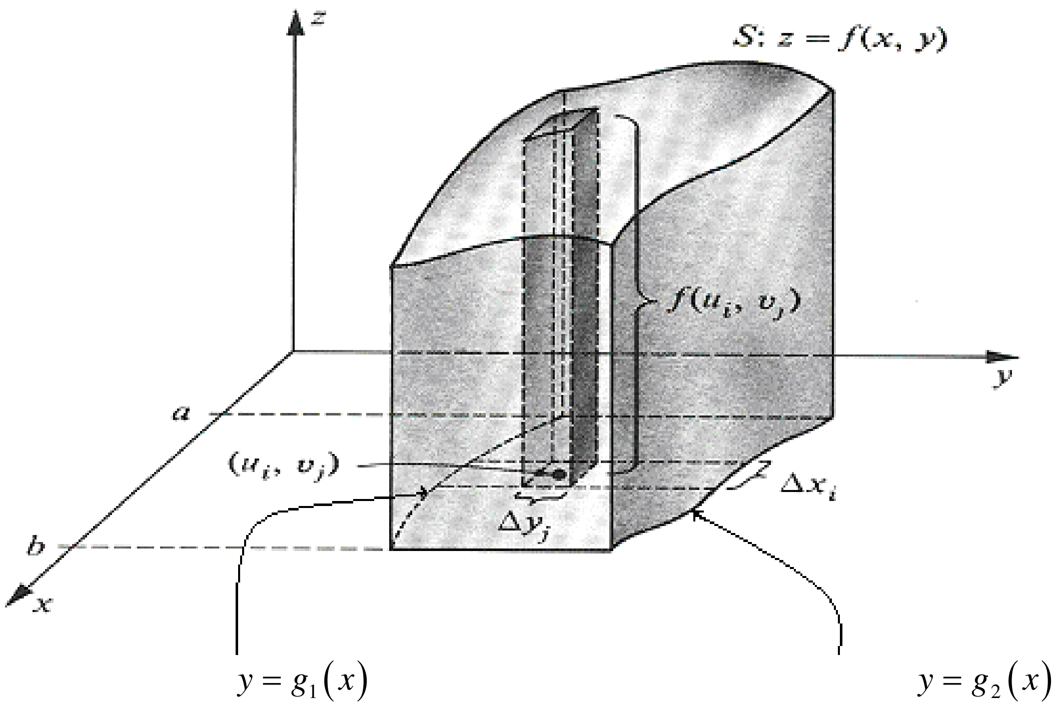
Με το διπλό ολοκλήρωμα μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε τον όγκο ενός στερεού σώματος που βρίσκεται μεταξύ του $xy-$επιπέδου και μιας επιφάνειας $S: z = f(x, y),\ z \geq 0$.

Στο παρακάτω σχήμα, το κατακόρυφο πρίσμα, στο εσωτερικό του στερεού, έχει ύψος $f(u_i,\ v_j)$ και εμβαδόν βάσης ίσο με $\Delta y_j \cdot \Delta x_i$. Έτσι ο όγκος του δίνεται από το γινόμενο $f(u_i,\ v_j) \cdot \Delta y_j \cdot \Delta x_i$.

Ένα διπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $z = f(x, y)$ αθροίζει τον όγκο όλων αυτών των πρισμάτων, για να δώσει έτσι τον όγκο ολόκληρου του στερεού, που βρίσκεται μεταξύ των ευθειών $x = a$, $x = b$ και των καμπυλών $y = g_1(x)$ και $y = g_2(x)$, όπως αυτές στο σχήμα 2 πιο πάνω .

Συνεπώς ο όγκος του στερεού που βλέπουμε στο σχήμα 4, δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$V = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\,dydx .$$



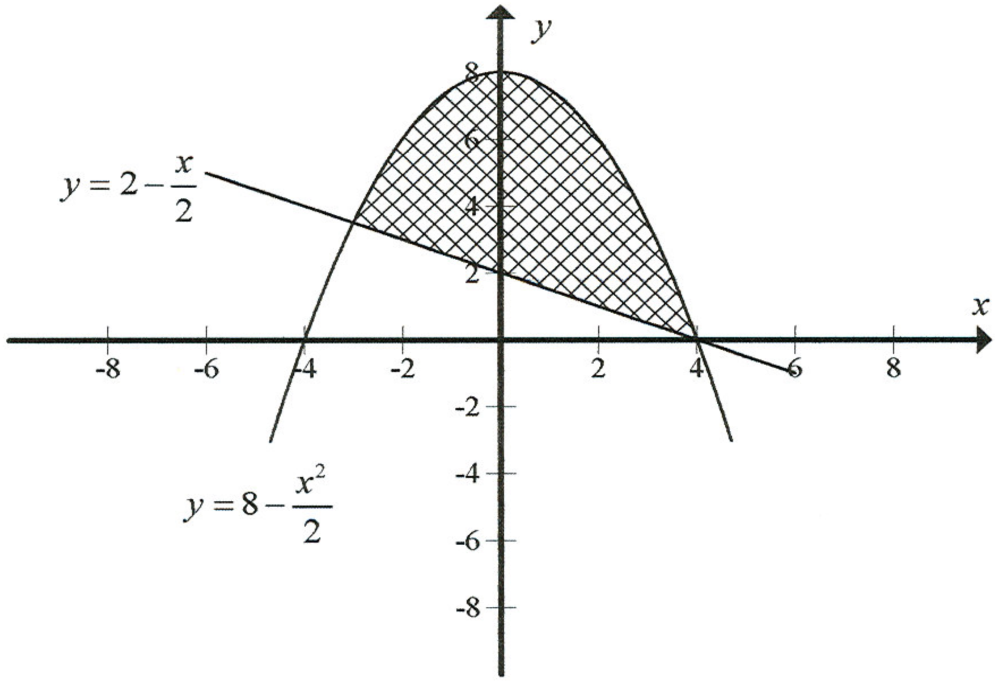
Σχήμα 4

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ των καμπυλών $2y = 16 - x^2$ και $x + 2y - 4 = 0$.

<u>Λύση</u>:

Η συγκεκριμένη περιοχή βρίσκεται κάτω από την παραβολή $y = 8 - \frac{x^2}{2}$ και πάνω από την ευθεία $y = 2 - \frac{x}{2}$, όπως βλέπουμε στο πιο κάτω γράφημα. Τα σημεία τομής των δυο αυτών γραμμών είναι οι λύσεις του συστήματος:

$$\left.\begin{array}{l} y = 8 - \dfrac{x^2}{2} \\ y = 2 - \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x^2 - x - 12 = 0 \\ y = 2 - \dfrac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x = -3 \text{, οπότε } \; y = \frac{7}{2} \;\text{ ή }\; x = 4 \text{, οπότε } \; y = 0 .$$



Σχήμα 5

Το εμβαδόν δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_{-3}^{4}\int_{2-\frac{x}{2}}^{8-\frac{x^2}{2}} dydx = \int_{-3}^{4}\left[\left(8 - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{x}{2}\right)\right]dx$$

$$= 6x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{4}\Bigg|_{-3}^{4}$$

$$= \left[6 \cdot 4 - \frac{4^3}{6} + \frac{4^2}{4}\right] - \left[6(-3) - \frac{(-3)^3}{6} + \frac{(3)^2}{4}\right]$$

$$= 24 - \frac{64}{6} + 4 + 18 - \frac{27}{6} - \frac{9}{4} = \frac{552}{12} - \frac{209}{12} = \frac{343}{12} .$$

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής του $xy-$επιπέδου μεταξύ των γραφημάτων των $x=y^3$, $x+y=2$ και $y=0$.

<u>Λύση</u>: Η συγκεκριμένη περιοχή, όπως φαίνεται και στο σχήμα 6 πιο κάτω, βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης γραμμής $x=y^3$, της ευθείας $x=2-y$ και του άξονα των x.

Το σημείο τομής των δυο γραμμών βρίσκεται αν λύσουμε τις δυο εξισώσεις ταυτόχρονα, δηλαδή,

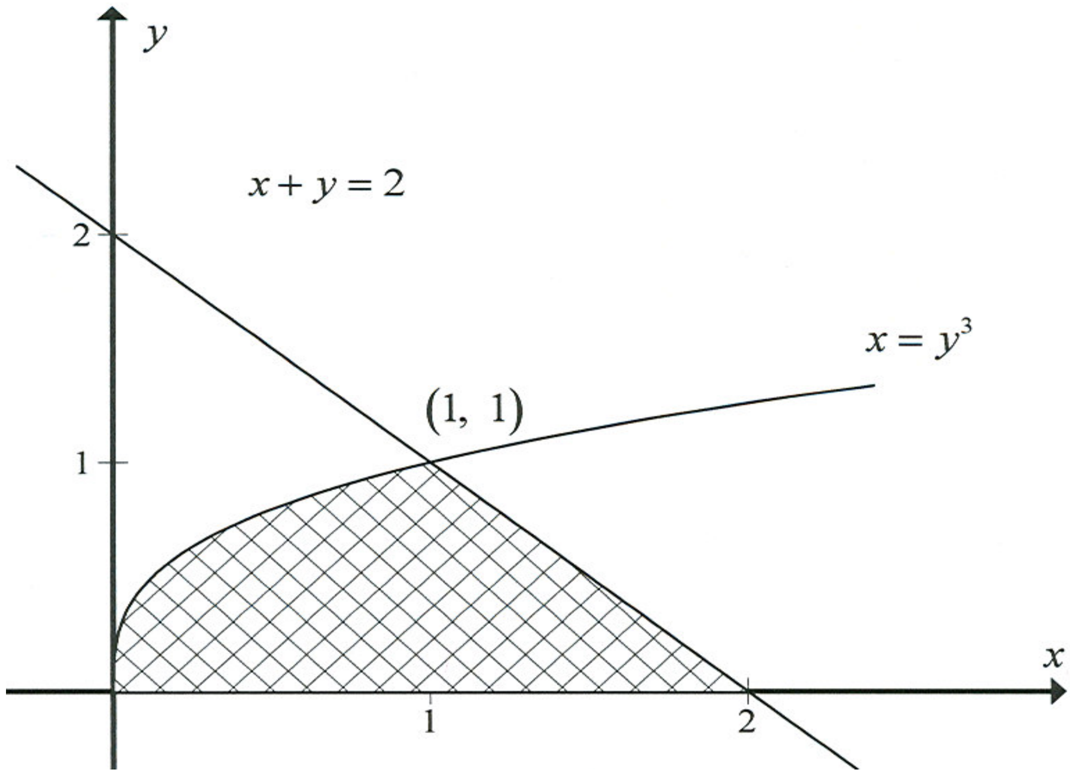
$$\left.\begin{array}{l} x=y^3 \\ x=2-y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^3+y-2=0 \\ x=2-y \end{array}\right\} \Rightarrow y=1,\quad x=1.$$

Έτσι το εμβαδόν δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα (4) παραπάνω, όπου

$$c=0,\quad d=1,\quad h_1(y)=y^3 \quad \text{και} \quad h_2(y)=2-y.$$

Οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} 1\,dxdy &= \int_0^1 \int_{y^3}^{2-y} 1\,dxdy \\
&= \int_0^1 x\Big|_{y^3}^{2-y} dy \\
&= \int_0^1 \left(2-y-y^3\right) dy \\
&= 2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^4}{4}\Bigg|_0^1 \\
&= 2\cdot 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.
\end{aligned}$$



Σχήμα 6

Παράδειγμα 3: Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού, στο πρώτο οκτημόριο, που περικλείεται μεταξύ των τριών επιπέδων και των γραφημάτων των εξισώσεων $z = x^2 + y^2 + 1$ και $2x + y = 2$.

Λύση: Όπως φαίνεται και στο γράφημα παρακάτω, (σχήμα 7) το στερεό βρίσκεται κάτω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2 + 1$ και πάνω από την τριγωνική περιοχή (σχήμα 8) στο $xy-$επίπεδο, μεταξύ των αξόνων και των γραμμών $y = 0$, $y = 2 - 2x$.

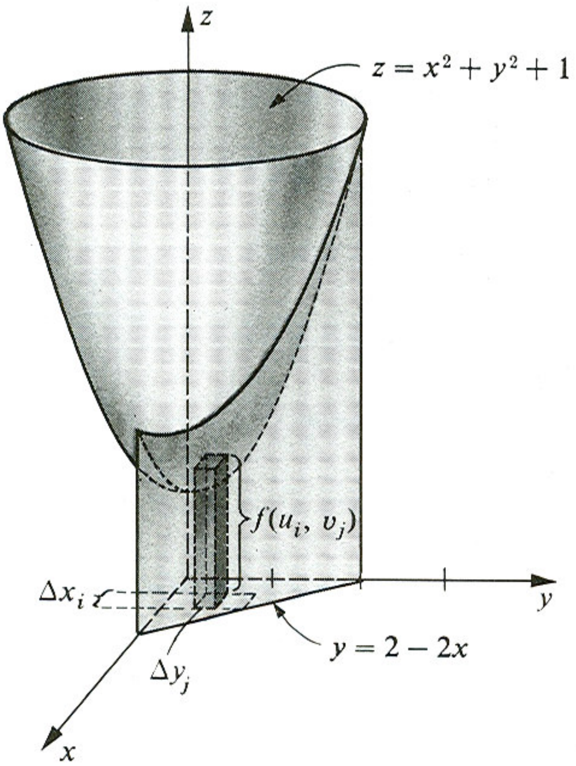
Το γινόμενο $f\left(u_i,\ v_j\right) \cdot \Delta y_j \cdot \Delta x_i$ αντιπροσωπεύει τον όγκο του πρίσματος, στο εσωτερικό του στερεού του σχήματος 7, οπότε ο ζητούμενος όγκος δίνεται από το άθροισμα όλων αυτών των πρισμάτων, δηλαδή από το διπλό ολοκλήρωμα:

$$V = \int_0^1 \int_0^{2-2x} \left(x^2 + y^2 + 1\right) dy dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + y \right]_0^{2-2x} dx$$

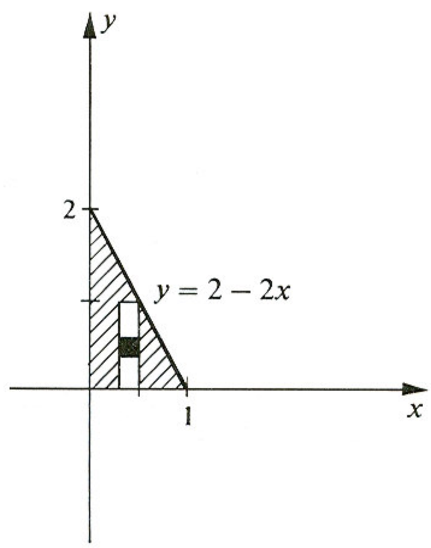
$$= \int_0^1 \left(-\frac{14}{3} x^3 + 10x^2 - 10x + \frac{14}{3} \right) dx$$

$$= -\frac{14}{12} x^4 + \frac{10}{3} x^3 - \frac{10}{2} x^2 + \frac{14}{3} x \Big|_0^1$$

$$= -\frac{7}{6} + \frac{10}{3} - \frac{10}{2} + \frac{14}{3} = \frac{11}{6}.$$



Σχήμα 7



Σχήμα 8

4.3 ΤΟ ΤΡΙΠΛΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

Όπως και για το διπλό ολοκλήρωμα, μπορούμε να ορίσουμε το <u>τριπλό</u> ολοκλήρωμα για μια συνάρτηση f, τριών μεταβλητών x, y και z. Η απλούστερη τέτοια περίπτωση προκύπτει όταν η συνάρτηση f είναι συνεχής εντός μιας περιοχής (παραλληλεπίπεδο) της μορφής:

$$Q = \{(x, y, z) : a \le x \le b,\ \ c \le y \le d,\ \ k \le z \le l\}.$$

Το τριπλό ολοκλήρωμα της f στην περιοχή αυτή δίνεται από το

$$\int_k^l \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)dxdydz, \tag{5}$$

όπου το πρώτο ολοκλήρωμα είναι ως προς x, (με τις y και z σταθερές), το δεύτερο ως προς y, (με τις x και z σταθερές) και το τρίτο ως προς z, (με τις x και y σταθερές).

Υπάρχουν πέντε ακόμη περιπτώσεις τριπλού ολοκληρώματος της f στην περιοχή Q, όπως π.χ. αν ολοκληρώσουμε με τη σειρά y, z, x, τότε έχουμε:

$$\int_a^b \int_k^l \int_c^d f(x, y, z)dydzdx. \tag{6}$$

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να υπολογιστεί το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y, z) = 3xy^3z^2$ στην $Q = \{(x, y, z) : -1 \le x \le 3,\ \ 1 \le y \le 4,\ \ 0 \le z \le 2\}$.

<u>Λύση</u>: Από τις έξι περιπτώσεις υπολογίζουμε τις εξής δυο:

(i) $$\int_0^2 \int_1^4 \int_{-1}^3 3xy^3z^2dxdydz = \frac{3}{2}\int_0^2 \int_1^4 x^2y^3z^2\Big|_{-1}^3 dydz$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^2 \int_1^4 8y^3z^2dydz$$

$$= 12\int_0^2 \int_1^4 y^3z^2dydz$$

$$= 3\int_0^2 y^4z^2\Big|_1^4 dz$$

$$= 765\int_0^2 z^2 dz$$

$$= 765 \cdot \left.\frac{z^3}{3}\right|_0^2 = 2040 .$$

(ii) $$\int_1^4 \int_{-1}^3 \int_0^2 3xy^3z^2 dzdxdy = \int_1^4 \int_{-1}^3 xy^3z^3\Big|_0^2 dxdy$$

$$= \int_1^4 \int_{-1}^3 8xy^3 dxdy$$

$$= \int_1^4 4x^2y^3\Big|_{-1}^3 dy$$

$$= \int_1^4 \left(36y^3 - 4y^3\right)dy$$

$$= 8y^4\Big|_1^4 = 2.040 .$$

Τα τριπλά ολοκληρώματα μπορούν να οριστούν και σε άλλες περιοχές εκτός από αυτές των παραλληλεπιπέδων. Έστω, για παράδειγμα ότι έχουμε μια περιοχή R στο $xy-$επίπεδο, η οποία μπορεί να χωριστεί σε επί μέρους περιοχές όπως αυτή στο σχήμα 2 παραπάνω και, ότι Q είναι η τρισδιάστατη περιοχή (στερεό σώμα) που ορίζεται από την

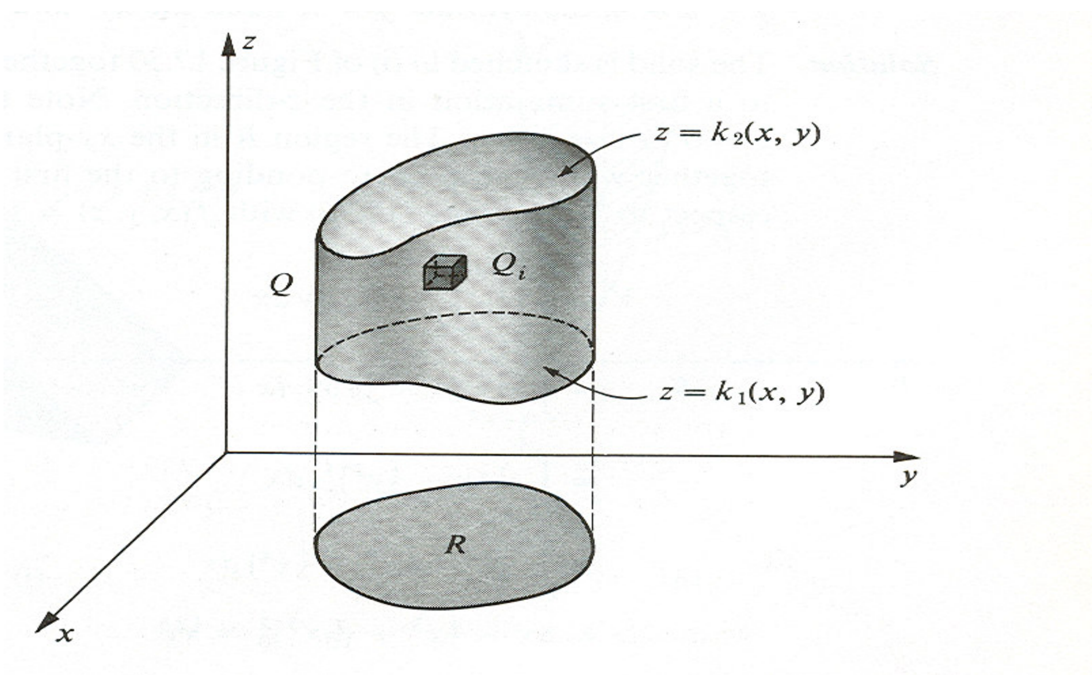
$$Q = \left\{(x, y, z) : (x, y) \in \mathbb{R},\ \ k_1(x, y) \le z \le k_2(x, y)\right\},$$

όπου οι συναρτήσεις $k_1(x, y)$ και $k_2(x, y)$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στην περιοχή R.

Γεωμετρικώς, η περιοχή Q βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων των $z = k_1(x, y)$ και $z = k_2(x, y)$ και πάνω ή κάτω από την R. Στο γράφημα πιο κάτω, σχήμα 9, βλέπουμε την περιοχή Q με ένα τυπικό της στοιχείο, την εσωτερική διαμέριση Q_i.

Το τριπλό ολοκλήρωμα μιας συνεχούς συνάρτησης f στην περιοχή Q, όταν η R είναι όπως στο σχήμα 2, δίνεται από τη σχέση:

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f\left(x, y, z\right) dzdydx, \tag{7}$$



Σχήμα 9

όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται με μερική ολοκλήρωση με τη σειρά z, y και x, αντικαθιστώντας κάθε φορά τα όρια της ολοκλήρωσης, όπως και πριν.

Κατ' όμοιο τρόπο, όταν η περιοχή του $xy-$επιπέδου, R, είναι όπως στο σχήμα 3 πιο πάνω, τότε το τριπλό ολοκλήρωμα δίνεται από τη σχέση:

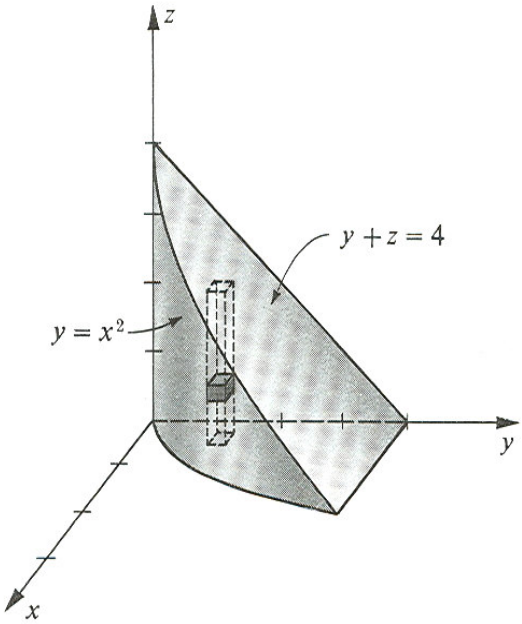
$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f\left(x, y, z\right) dzdxdy. \tag{8}$$

Στην περίπτωση που η συνάρτηση $f\left(x, y, z\right) = 1$, σ' όλο το Q, τότε το τριπλό ολοκλήρωμα της (7) και (8) πιο πάνω δίνει τον όγκο του στερεού αυτού.

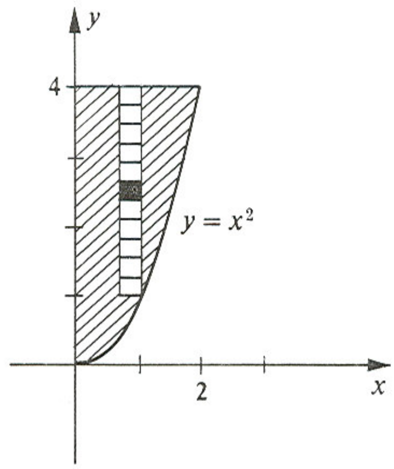
<u>Παράδειγμα 2</u>: Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού, στο πρώτο οκτημόριο που περικλείεται από το επίπεδο $y+z=4$, τον κύλινδρο $y=x^2$, το $xy-$ και $yz-$επίπεδα.

<u>Λύση</u>: Το στερεό σώμα της περιοχής Q και την περιοχή R στο $xy-$επίπεδο βλέπουμε στα γραφήματα πιο κάτω, σχήματα 10 και 11 αντίστοιχα.

Ο δε ζητούμενος όγκος, δίνεται από τη σχέση (7) πιο πάνω, όπου $f(x,y,z)=1$, $a=0$, $b=2$, $g_1(x)=y=x^2$, $g_2(x)=y=4$, $k_1(x,y)=z=0$ και $k_2(x,y)=z=4-y$.



Σχήμα 10



Σχήμα 11

Συνεπώς έχουμε:

$$V=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx=\int_0^2\int_{x^2}^4\int_0^{4-y}1dzdydx$$

$$=\int_0^2\int_{x^2}^4(4-y)dydx$$

$$= \int_0^2 \left(4y - \frac{y^2}{2} \right) \Bigg|_{x^2}^{4} dx$$

$$= \int_0^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx$$

$$= 8x - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^5}{10} \Bigg|_0^2$$

$$= 16 - \frac{32}{3} + \frac{32}{10} = \frac{128}{15}.$$

Αν κάναμε χρήση του τριπλού ολοκληρώματος της σχέσης (8) παραπάνω, τότε θα είχαμε:

$f(x, y, z) = 1$, $c = 0$, $d = 4$, $h_1(y) = x = 0$, $h_2(y) = x = \sqrt{y}$, $k_1(x, y) = z = 0$ και $k_2(x, y) = z = 4 - y$.

Κατά συνέπεια, σε αυτή την περίπτωση, ο ζητούμενος όγκος δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα:

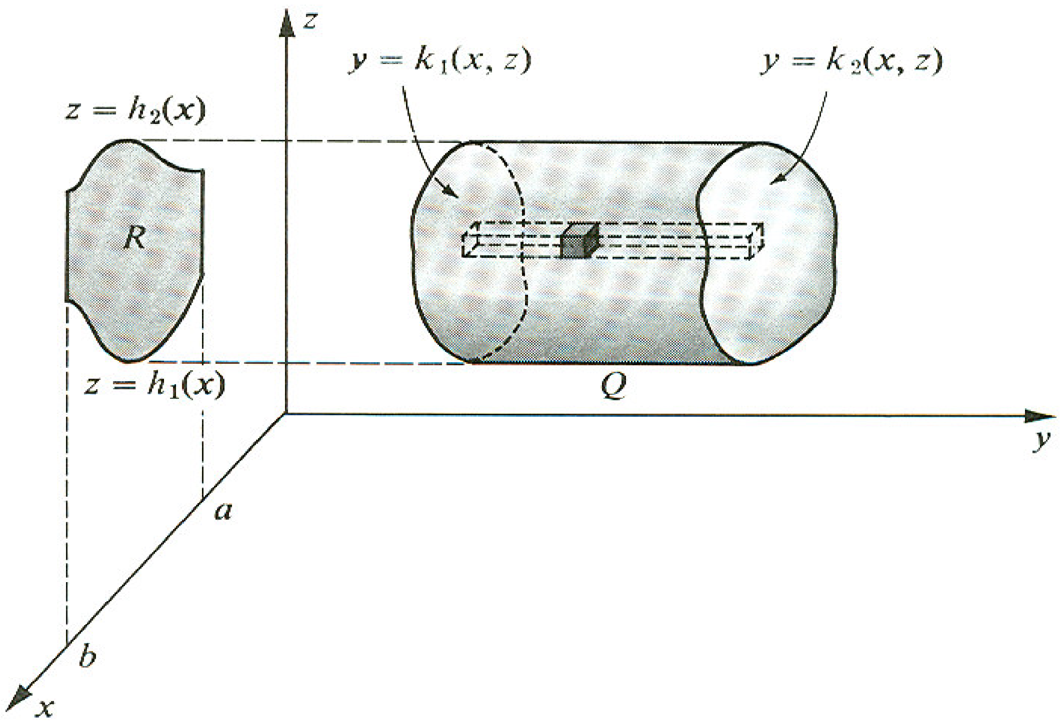
$$V = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{k_1(x,y)}^{k_2(x,y)} 1 dz dx dy = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} \int_0^{4-y} 1 dz dx dy.$$

(Να επαληθευτεί ότι το πιο πάνω τριπλό ολοκλήρωμα δίνει και αυτό όγκο ίσο με 128/15).

Σε ορισμένες περιπτώσεις περιοχών, το τριπλό ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί πρώτα ως προς y ή ως προς x. Έτσι, έστω ότι για την περιοχή Q έχουμε:

$$Q = \{ (x, y, z) : a \le x \le b,\ h_1(x) \le z \le h_2(x),\ k_1(x, z) \le y \le k_2(x, z) \}.$$

Στο σχήμα 12 πιο κάτω βλέπουμε το γράφημα μιας τέτοιας περιοχής.



Σχήμα 12

Στην περίπτωση αυτή το τριπλό ολοκλήρωμα στην περιοχή Q, δίνεται από το:

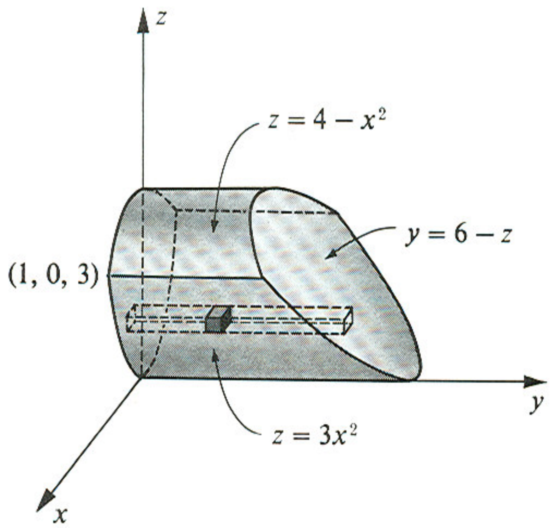
$$\int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)} f(x,y,z) dydzdx . \tag{9}$$

Για τον υπολογισμό του όγκου στερεού σώματος σε μια τέτοια περίπτωση, έχουμε $f(x,y,z)=1$.

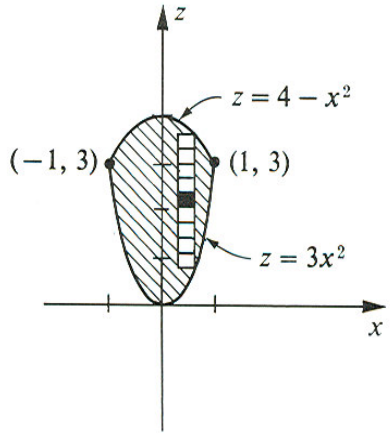
<u>Παράδειγμα 3</u>: Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού σώματος που βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων των $z=3x^2$, $z=4-x^2$, $y=0$ και $z+y=6$.

<u>Λύση</u>: Όπως μπορούμε να δούμε στο σχήμα 13, η περιοχή Q βρίσκεται κάτω από τον κύλινδρο $z=4-x^2$, πάνω από τον κύλινδρο $z=3x^2$, στα δεξιά του $xz-$ επιπέδου και στα αριστερά του επιπέδου $z+y=6$. Οπότε η περιοχή Q είναι όπως στο σχήμα 12 πιο πάνω με $k_1(x)=0$ και $k_2(x)=6-z$.

Επίσης, από το σχήμα 14, βλέπουμε ότι $a=-1$, $b=1$, $h_1(x,z)=3x^2$ και $h_2(x,z)=4-x^2$.



Σχήμα 13



Σχήμα 14

Εφαρμόζοντας τη σχέση (9) με $f(x,y,z)=1$ παίρνουμε:

$$V=\int_a^b\int_{h_1(x)}^{h_2(x)}\int_{k_1(x,z)}^{k_2(x,z)}1dydzdx=\int_{-1}^1\int_{3x^2}^{4-x^2}\int_0^{6-z}1dydzdx$$

$$=\int_{-1}^1\int_{3x^2}^{4-x^2}(6-z)dzdx$$

$$=\int_{-1}^1\left(6z-\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_{3x^2}^{4-x^2}dx$$

$$=\int_{-1}^1\left(16-20x^2+4x^4\right)dx$$

$$=16x-\frac{20}{3}x^3+\frac{4}{5}x^5\Big|_{-1}^{1}$$

$$=16-\frac{20}{3}+\frac{4}{5}+16-\frac{20}{3}+\frac{4}{5}=\frac{304}{15}.$$

4.4 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογιστούν τα διπλά ολοκληρώματα:

α) $\int_0^3\int_0^4 xdydx$, β) $\int_0^2\int_1^2 ydydx$,

γ) $\int_0^1\int_0^1 xydxdy$, δ) $\int_0^2\int_0^3 x^2dydx$,

ε) $\int_1^3\int_1^2 \left(x^2-y\right)dxdy$, στ) $\int_{-1}^2\int_1^4 \left(x^2-2xy\right)dydx$,

ζ) $\int_0^1\int_0^2 \left(x+y\right)dydx$, η) $\int_0^3\int_0^x \left(x^2+y^2\right)dydx$,

θ) $\int_0^6\int_0^{3x} ydydx$, ι) $\int_0^1\int_{3x}^{x^2} 2x^2ydydx$,

κ) $\int_0^1\int_0^y e^{x+y}dxdy$, λ) $\int_0^1\int_0^y e^{x+y}dxdy$,

μ) $\int_1^e\int_0^x lnxdydx$, ν) $\int_1^2\int_{x^3}^x e^{y/x}dydx$.

2. Να δειχθεί ότι:

$$\int_a^b\int_c^d f\left(x,y\right)dydx=\int_c^d\int_a^b f\left(x,y\right)dxdy$$

για α) $a=1,\ b=2,\ c=-1,\ d=2,\ f\left(x,y\right)=12xy^2-8x^3$,

β) $a=-2,\ b=-1,\ c=0,\ d=3,\ f\left(x,y\right)=4xy^3+y$.

3. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται μεταξύ των γραφημάτων των εξής καμπυλών:

α) $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad y = -x^2, \quad x = 1, \quad x = 2$.

β) $y = e^x, \quad y = sinx, \quad x = -\pi, \quad x = \pi$.

4. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται στο πρώτο οκτημόριο, μεταξύ των γραφημάτων των εξής:

α) $x^2 + z^2 = 9, \quad y = 2x, \quad y = 0, \quad x = 0$,

β) $2x + y + z = 4, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$.

5. Να υπολογιστούν τα τριπλά ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_{-1}^{0}\int_{-1}^{2}\int_{1}^{2} 6xy^2z^3 dxdydz$, β) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{x}\int_{0}^{x-y} xdzdydx$,

γ) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x}\int_{0}^{xy} dzdydx$, δ) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{y^2}^{3y}\int_{0}^{x} dzdxdy$,

ε) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{1+x}^{2x}\int_{z}^{x+z} xdydzdx$, στ) $\displaystyle\int_{-1}^{2}\int_{1}^{x^2}\int_{0}^{x+y} 2x^2 ydzdydx$.

6. Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού σώματος που βρίσκεται μεταξύ των γραφημάτων των:

α) $z + x^2 = 9, \quad y + z = 4, \quad y = 0, \quad z = 0$.

β) $y = 2 - z^2, \quad y = z^2, \quad x + z = 4, \quad x = 0$.

7. Να προσδιοριστεί η περιοχή Q που αντιπροσωπεύει τον όγκο του στερεού, τον οποίο δίνουν τα τριπλά ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{2x}\int_{0}^{x+y} dzdydx$,

β) $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dydxdz$

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο</u>

ΑΠΕΙΡΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ - ΣΕΙΡΕΣ – ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

5.1 ΑΠΕΙΡΕΣ ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Μια συνάρτηση, της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών, ονομάζεται **άπειρη ακολουθία** ή απλώς **ακολουθία** (χάριν συντομίας).

Αν f είναι μια άπειρη ακολουθία, τότε σε κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός $f(n)$. Οι αριθμοί αυτοί, στο πεδίο τιμών της f μπορεί να καταταχθούν ως ακολούθως:

$$f(1),\ f(2),\ f(3),\ ...,\ f(n),...,\tag{4}$$

όπου $f(1)$ ονομάζεται <u>πρώτος</u> <u>όρος</u> της ακολουθίας, $f(2)$ και, γενικά $f(n)$ ο <u>νιοστός</u> <u>όρος</u> αυτής. Συνηθίζεται δε, η σχέση (4) να γράφεται:

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ ...,\ a_n,...,\tag{5}$$

είναι, βέβαια, αυτονόητο ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n, το σύμβολο a_n αντιπροσωπεύει τον πραγματικό αριθμό $f(n)$. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε μια άπειρη <u>διατεταγμένη</u> συλλογή πραγματικών αριθμών, με την έννοια ότι υπάρχει ένα πρώτος αριθμός, ένας δεύτερος, …, ένας τριακοστός αριθμός κ.ο.κ. Αν και, όπως είπαμε, οι ακολουθίες είναι συναρτήσεις, μια συλλογή όπως η (5) πιο πάνω, θα είναι επίσης μια άπειρη ακολουθία και όταν θέλουμε να τη μετατρέψουμε σε μια συνάρτηση, f, αρκεί να θέσουμε. $f(n)=a_n$, για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n.

Η ακολουθία (5) μπορεί να γραφεί με συντομία ως $\{a_n\}$. Για παράδειγμα η ακολουθία $\{2^n\}$ έχει νιοστό όρο $a_n = 2^n$.

Για να προσδιοριστεί μια ακολουθία δεν αρκεί μόνον να καθοριστούν οι αριθμοί στο πεδίο τιμών. Η σειρά με την οποία εμφανίζονται οι αριθμοί αυτοί είναι πολύ σημαντικό, διότι, για παράδειγμα η ακολουθία, της οποίας οι πρώτοι πέντε αριθμοί είναι

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ ...$$

είναι διαφορετική από μια που αρχίζει με

$$1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots.$$

Γενικά μια ακολουθία, όπως η (5) θα λέμε ότι είναι ίση με την ακολουθία:

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ldots$$

αν και μόνον αν $a_i = b_i$ για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό i.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να γραφούν οι τέσσερις πρώτοι όροι και ο δέκατος όρος των ακολουθιών, των οποίων ο νιοστός όρος δίνεται από τη σχέση:

α) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$,

β) $a_n = 2 + (0{,}1)^n$,

γ) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{n^2}{3n-1}$,

δ) $a_n = 3$.

<u>Λύση</u>: Για να βρούμε τους πρώτους τέσσερις όρους αντικαθιστούμε στη θέση του n, διαδοχικά τους 1, 2, 3, 4. Ο δέκατος όρος θα βρεθεί αν στη θέση του n θέσουμε το 10.

α) $a_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$, $a_3 = \dfrac{3}{3+1} = \dfrac{3}{4}$, $a_4 = \dfrac{4}{4+1} = \dfrac{4}{5}$, …,

$$a_{10} = \frac{10}{10+1} = \frac{10}{11}.$$

β) $a_1 = 2 + (0{,}1)^1 = 2{,}1$, $a_2 = 2 + (0{,}1)^2 = 2{,}01$, $a_3 = 2 + (0{,}1)^3 = 2{,}001$,

$$a_4 = 2 + (0{,}1)^4 = 2{,}0001,\ \ldots,\ a_{10} = 2 + (0{,}1)^{10} = 2{,}0000000001.$$

γ) $a_1 = (-1)^{1+1} \cdot \dfrac{1^2}{3\cdot 1 - 1} = \dfrac{1}{2}$, $a_2 = (-1)^{2+1} \cdot \dfrac{2^2}{3\cdot 2 - 1} = -\dfrac{4}{5}$,

$$a_3 = (-1)^{3+1} \cdot \frac{3^2}{3 \cdot 3 - 1} = \frac{9}{8},\ \ a_4 = (-1)^{4+1} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 4 - 1} = -\frac{16}{11},\ \ldots,$$

$$a_{10} = (-1)^{10+1} \cdot \frac{10^2}{3 \cdot 10 - 1} = -\frac{100}{29}.$$

$$a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ a_3 = 3,\ a_4 = 3,\ \ldots,\ a_{10} = 3.$$

5.2 ΟΡΙΑ – ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΩΝ

Ορισμένες άπειρες ακολουθίες $\{a_n\}$ έχουν την ιδιότητα, καθώς το n αυξάνει, ο όρος a_n πλησιάζει προς κάποιον πραγματικό αριθμό Λ. Με άλλα λόγια η διαφορά $|\alpha_n - \Lambda|$ είναι σχεδόν μηδέν. Για παράδειγμα η ακολουθία:

$$a_n = 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

έχει όρους:

$$2 - \frac{1}{2},\ 2 + \frac{1}{4},\ 2 - \frac{1}{8},\ 2 + \frac{1}{16},\ 2 - \frac{1}{32}, \ldots,$$

και προφανώς οι όροι αυτοί πλησιάζουν το 2 καθώς το n αυξάνει. Για την ακρίβεια, για κάθε θετικό αριθμό n,

$$|\alpha_n - 2| = \left|2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n - 2\right| = \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}.$$

Ο αριθμός $\frac{1}{2^n}$, κατά συνέπεια και ο $|\alpha_n - 2|$, μπορούν να πλησιάσουν αυθαίρετα το μηδέν αν επιλέξουμε τον n αρκούντως μεγάλο.

Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε:

$$\lim_{n \to \infty} \left[2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right] = 2.$$

Η κατάσταση εδώ είναι σχεδόν παρόμοια με αυτήν που έχουμε για μια συνάρτηση f, όπου έχουμε το όριο, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \Lambda$, με τη διαφορά ότι αν

$f(n)=a_n$, τότε το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο των θετικών αριθμών και όχι ένα άπειρο διάστημα πραγματικών αριθμών.

Έχουμε έτσι το εξής ορισμό.

<u>Ορισμός</u>: Αν $\{a_n\}$ είναι μια άπειρη ακολουθία, τότε το όριό της είναι ο αριθμός Λ και γράφουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = \Lambda$, αν σε κάθε $\varepsilon \succ 0$ αντιστοιχεί ένας αριθμός M, τέτοιος ώστε $|a_n - \Lambda| \prec \varepsilon$, όταν $n \succ M$.

Οι ιδιότητες των ορίων για τις άπειρες ακολουθίες είναι ανάλογες με αυτές για τις συναρτήσεις, δηλαδή αν $\lim_{n\to\infty} a_n = \Lambda_1$ και $\lim_{n\to\infty} b_n = \Lambda_2$, τότε

- $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \Lambda_1 \pm \Lambda_2$.
- $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \Lambda_1 \cdot \Lambda_2$.
- $\lim_{n\to\infty}(a_n / b_n) = \Lambda_1 / \Lambda_2$, $\Lambda_2 \neq 0$.

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{5n-3}$.

<u>Λύση</u>: Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή δια n και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{5n-3} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{5-(3/n)}$$

$$= \frac{\lim_{n\to\infty} 2}{\lim_{n\to\infty}\left[5-(3/n)\right]}$$

$$= \frac{2}{\lim_{n\to\infty} 5 - \lim_{n\to\infty}(3/n)}$$

$$= \frac{2}{5-0} = \frac{2}{5}.$$

<u>Θεώρημα 1</u>: Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ και $\{c_n\}$ είναι άπειρες ακολουθίες τέτοιες ώστε $a_n \le b_n \le c_n$ για κάθε n και αν $\lim_{n\to\infty} a_n = \Lambda = \lim_{n\to\infty} c_n$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \Lambda .$$

<u>Παράδειγμα 3</u>: Να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

<u>Λύση</u>: Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n εύκολα μπορούμε να δούμε ότι $0 \prec \frac{1}{2^n} \prec \frac{1}{n}$. Αφού τα όρια $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ και $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ έπεται ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$.

<u>Θεώρημα 2</u>: Αν $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Παράδειγμα 4</u>: Αν $a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n}\right)$, να δειχθεί ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Λύση</u>: Οι όροι της δοθείσας ακολουθίας εναλλάσσουν πρόσημο. Για παράδειγμα οι πέντε πρώτοι όροι είναι 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{5}$.

Τώρα $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left[\left|(-1)^{n+1}\right| \cdot \frac{1}{n} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Άρα $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Αν για τους διαδοχικούς όρους μιας ακολουθίας $\{a_n\}$ ισχύει:

$$a_1 \le a_2 \le \cdots a_n \le \cdots \quad \text{ή} \quad a_1 \ge a_2 \ge \cdots a_n \ge \cdots,$$

τότε η ακολουθία ονομάζεται **μονότονη**.

Μια ακολουθία $\{a_n\}$ είναι **φραγμένη** αν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $|a_k| \le M$ για όλα τα k.

<u>Θεώρημα 3</u>: Μια φραγμένη, μονότονη άπειρη ακολουθία έχει όριο.

5.3 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν οι τέσσερις πρώτοι όροι, καθώς και το $\lim_{n\to\infty} a_n$, αν υπάρχει, για τις ακολουθίες:

α) $a_n = \dfrac{n}{3n+2}$, β) $a_n = \dfrac{6n-5}{5n+1}$,

γ) $a_n = \dfrac{7-4n^2}{3+2n^2}$, δ) $a_n = \dfrac{(2n-1)(3n+1)}{n^3+1}$,

ε) $a_n = (-1)^{n+1}\dfrac{3n}{n^2+4n+5}$, στ) $a_n = 1+(-1)^{n+1}$.

5.4 ΑΠΕΙΡΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Αν $\{a_n\}$, είναι μια άπειρη ακολουθία, τότε μια έκφραση της μορφής:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

ονομάζεται **άπειρη σειρά**, ή απλώς **σειρά**.

Κάθε αριθμός a_i ονομάζεται <u>όρος</u> της σειράς και ο a_n είναι ο νιοστός όρος αυτής.

Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n το νιοστό <u>μερικό άθροισμα</u> S_n της σειράς είναι το ακόλουθο:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ S_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \quad \text{κ.ο.κ.} \end{aligned}$$

Η άπειρη ακολουθία

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,...,$$

Ονομάζεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων συσχετιζόμενη με την άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

5.5 ΣΥΓΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΚΛΙΝΟΥΣΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Ορισμός: Μια άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ με ακολουθία μερικών αθροισμάτων $S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4,...,$ λέμε ότι συγκλίνει (ή ότι είναι συγκλίνουσα), αν το όριο $\lim_{n\to\infty} S_n$ υπάρχει. Λέμε δε ότι η σειρά αποκλίνει (ή ότι είναι αποκλίνουσα), αν το όριο αυτό δεν υπάρχει.

Αν τώρα $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι μια συγκλίνουσα άπειρη σειρά και $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, τότε ο αριθμός S ονομάζεται το άθροισμα της σειράς και γράφουμε:

$$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots .$$

Μια αποκλίνουσα σειρά δεν έχει άθροισμα.

Παράδειγμα 1: Να δειχθεί ότι η άπειρη σειρά:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

συγκλίνει και να βρεθεί το άθροισμά της.

Λύση: Ο νιοστός όρος της σειράς a_n μπορεί να γραφεί ως

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

και το νιοστό μερικό άθροισμα αυτής μπορεί να γραφεί ως

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

Αφού $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+1/n}\right)=\frac{1}{1+0}=1$, η σειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα 1.

Ορισμένα είδη σειρών που είναι πολύ σημαντικά σε διάφορες εφαρμογές, έχουν ορισμένες ιδιότητες, όπως, για παράδειγμα οι **γεωμετρικές σειρές**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+\cdots,$$

όπου οι a και r είναι πραγματικοί αριθμοί.

Για μια γεωμετρική σειρά μπορούμε, εύκολα να δούμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει, αφού

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$$

ή

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n,$$

απ’ όπου, αφαιρώντας κατά μέλη, παίρνουμε:

$$(1-r)S_n=a-ar^n.$$

Κατά συνέπεια, αν $r\neq 1$ έχουμε:

$$S_n=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

Έτσι, για $|r|\prec 1$, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$ και από την πιο πάνω σχέση:

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{a}{1-r},$$

δηλαδή, από τον ορισμό της σύγκλισης μιας άπειρης σειράς,

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}.$$

Από τα παραπάνω έχουμε το ακόλουθο θεώρημα για τις γεωμετρικές σειρές.

<u>**Θεώρημα 3**</u>**:** Για τη γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ ισχύουν τα ακόλουθα:

- Συγκλίνει και έχει άθροισμα $\frac{a}{1-r}$, αν $|r| \prec 1$.
- Αποκλίνει αν $|r| \geq 1$.

<u>**Παράδειγμα 2**</u>**:** Να δειχθεί ότι η άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$ συγκλίνει και να βρεθεί το άθροισμά της.

<u>**Λύση**</u>**:** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$, η σειρά αυτή είναι γεωμετρική με $r = \frac{1}{3} \prec 1$, οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα συγκλίνει και έχει άθροισμα:

$\frac{a}{1-r} = \frac{2}{1-1/3} = 3$.

Ο νιοστός όρος μιας άπειρης σειράς μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S.$$

Αν $\lim_{n \to \infty} S_n = S$, τότε και το $\lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S$, οπότε

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n - \lim_{n \to \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Συνεπώς έχουμε το ακόλουθο.

<u>**Θεώρημα 4**</u>**:** Αν μια άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Από το θεώρημα αυτό έχουμε και το εξής πόρισμα:

<u>Πόρισμα</u>: Αν $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, τότε η άπειρη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

<u>Παράδειγμα 3</u>: Να προσδιοριστεί αν η άπειρη σειρά:

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\cdots+\frac{n}{2n+1}+\cdots$$

συγκλίνει ή αποκλίνει.

<u>Λύση</u>: Έχουμε ότι $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Συνεπώς, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η δοθείσα σειρά αποκλίνει.

<u>Θεώρημα 5</u>: Αν μια άπειρη σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε σε κάθε $\varepsilon \succ 0$, αντιστοιχεί ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε $\left|S_m - S_n\right| \prec \varepsilon$, όταν $m,n \succ N$.

<u>Παράδειγμα 4</u>: Να δειχθεί ότι η άπειρη σειρά: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ αποκλίνει.

<u>Λύση</u>: Για $n \succ 1$ έχουμε

$$S_{2n} - S_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}-1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}$$

$$\succ \frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Τώρα, αν η δοθείσα σειρά συγκλίνει, πρέπει, με $\varepsilon = \frac{1}{2}$, για αρκούντως μεγάλο n, να έχουμε $\left|S_{2n} - S_n\right| \prec \frac{1}{2}$ που όμως δεν ισχύει.

Συνεπώς, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η δοθείσα σειρά αποκλίνει.

Η άπειρη σειρά του τελευταίου παραδείγματος ονομάζεται **αρμονική σειρά** και είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα άπειρης, αποκλίνουσας σειράς, για την οποία έχουμε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Αυτό δείχνει ότι το αντίστροφο του θεωρήματος 4 δεν ισχύει. Δηλαδή, με άλλα λόγια, για να αποδειχθεί η σύγκλιση μιας άπειρης σειράς, δεν αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>Θεώρημα 6</u>: Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι άπειρες σειρές τέτοιες ώστε $a_i = b_i$, για κάθε $i \succ k$, όπου k είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, τότε και οι δύο αυτές σειρές συγκλίνουν ή και οι δυο αποκλίνουν.

Το θεώρημα 6 μας λέει ότι αν αλλάξουμε έναν πεπερασμένο αριθμό όρων μιας άπειρης σειράς, τότε αυτό δεν επηρεάζει τη σύγκλιση ή μη της σειράς, αν και η αλλαγή αυτή θα έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή στο άθροισμά της.

Έτσι, αν σε μια άπειρη σειρά αντικαταστήσουμε τους πρώτους k όρους της με μηδενικά, τότε η σειρά

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_n + a_{n+1} + \cdots$$

συγκλίνει ή αποκλίνει, σύμφωνα με το τι κάνει η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

<u>Παράδειγμα 5</u>: Να δειχθεί ότι η άπειρη σειρά: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ συγκλίνει.

<u>Λύση</u>:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots.$$

Η σειρά αυτή προκύπτει αν από τη σειρά του παραδείγματος 1, δηλαδή της $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$, αντικαταστήσουμε τους δυο πρώτους όρους με μηδενικά. Κατά συνέπεια, αφού αυτή συγκλίνει, πρέπει να συγκλίνει και η δοθείσα σειρά.

<u>Θεώρημα 7</u>: Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, τότε ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$.

- Αν c είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$.

5.6 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ποιες από τις ακόλουθες γεωμετρικές σειρές συγκλίνουν και ποιες αποκλίνουν; Για τις συγκλίνουσες να υπολογιστεί το άθροισμα.

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{4^{n-1}}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(-4)^{n-1}}$,

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)^{n-1}$, δ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{37}{100^n}$.

2. Ποιες από τις παρακάτω σειρές συγκλίνουν και ποιες αποκλίνουν;

α) $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\cdots+\frac{1}{(n+3)(n+4)}+\cdots$, β) $3+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{3}{n}+\cdots$,

γ) $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{5}{n(n+1)}+\cdots$, δ) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{4}{n+1}+\cdots$,

ε) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{5n-1}$, στ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$.

5.7 ΣΕΙΡΕΣ ΜΕ ΘΕΤΙΚΟΥΣ ΟΡΟΥΣ

Αν $\{S_n\}$ είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων μιας σειράς, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, η οποία περιέχει μόνον θετικούς όρους, τότε

$$S_1 \prec S_2 \prec \cdots \prec S_n \prec \cdots$$

και συνεπώς η $\{S_n\}$ είναι μονότονη. Αν υπάρχει ένας αριθμός M τέτοιος ώστε $S_n \prec M$ για κάθε n, τότε $\lim_{n\to\infty} S_n = S \le M$ για κάποιο S. Οπότε η σειρά συγκλίνει. Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός M, τότε η σειρά αποκλίνει.

Έτσι έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 8: Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι μια σειρά θετικών όρων και αν υπάρχει ένας αριθμός M τέτοιος ώστε $S_n \prec M$ για κάθε n, τότε η σειρά συγκλίνει και έχει άθροισμα $S \leq M$. Αν δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός, τότε η σειρά αποκλίνει.

Αν μια συνάρτηση f ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό $x \geq 1$, τότε μπορούμε να πάρουμε την άπειρη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) + \cdots.$$

Για παράδειγμα, αν $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots.$$

Σειρές τέτοιας μορφής μπορούν να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση ή μη, με το ακόλουθο:

1ο τεστ σύγκλισης: Αν μια συνάρτηση f παίρνει θετικές τιμές, είναι συνεχής και φθίνουσα για κάθε $x \geq 1$, τότε η άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, συγκλίνει όταν το $\lim_{t \to \infty} \int_1^t f(x)dx$ υπάρχει και αποκλίνει όταν το όριο αυτό δεν υπάρχει.

Σειρές της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ ονομάζονται $p-$σειρές και για αυτές έχουμε:

Θεώρημα 9: Αν $p \succ 1$ η σειρά, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, συγκλίνει, ενώ αν $p \leq 1$ η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 1: Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$.

Λύση: Έστω ότι $f(x) = xe^{-x^2}$, τότε η δοθείσα σειρά γίνεται $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$, η οποία παίρνει θετικές τιμές για $x \geq 1$ και ακόμη

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right) \prec 0,$$

που σημαίνει ότι η f είναι φθίνουσα στο διάστημα $[1, \ \infty)$.

Τώρα $\lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t xe^{-x^2}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right)\Bigg|_1^t$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e^{t^2}}-\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{2e}.$$

Άρα, σύμφωνα με το παραπάνω, η δοθείσα σειρά συγκλίνει.

<u>2^ο τεστ σύγκλισης</u>: Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι σειρές θετικών όρων,

1. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει και $a_n \le b_n$, για κάθε θετικό ακέραιο n,

   τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει.

2. Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει και $a_n \ge b_n$, για κάθε θετικό ακέραιο n,

   τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2+5^n}$.

<u>Λύση</u>: Για κάθε $n \ge 1$ έχουμε ότι $\frac{1}{2+5^n} \prec \frac{1}{5^n} = \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

Η $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ είναι μια συγκλίνουσα γεωμετρική σειρά οπότε, από το πιο πάνω, η δοθείσα σειρά συγκλίνει επίσης.

<u>3^ο τεστ σύγκλισης</u>: Έστω ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ είναι σειρές θετικών όρων, αν $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = k \succ 0$, τότε ή και οι δυο σειρές συγκλίνουν ή και οι δυο αποκλίνουν.

<u>Παράδειγμα 3</u>: Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ αποκλίνει.

<u>Λύση</u>: Έστω ότι $b_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}=\frac{1}{n^{2/3}}$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ είναι μια $p-$σειρά με $p=\frac{2}{3}\prec 1$ και κατά συνέπεια αποκλίνει.

Τώρα $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+1}}=1\succ 0$. Άρα και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ αποκλίνει.

5.8 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n}{2^n\left(n^2+1\right)}$ συγκλίνει.

2. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(3+2n\right)^2}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+7}$,

γ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4+n^2+1}$, δ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+n^2}{n^3+1}$,

ε) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Arctann}{1+n^2}$, στ) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+cosn}{n^2}$.

5.9 ΕΝΑΛΛΑΣΣΟΜΕΝΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

Μια άπειρη σειρά της οποίας οι όροι είναι εναλλάξ θετικοί και αρνητικοί ονομάζεται **εναλλασσόμενη**. Αυτές, συνήθως έχουν τη μορφή:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+\left(-1\right)^{n-1}a_n+\cdots$$

ή

$$-a_1+a_2-a_3+a_4-\cdots+\left(-1\right)^{n}a_n+\cdots,$$

όπου κάθε $a_i \succ 0$. Για τέτοιες σειρές έχουμε.

<u>Θεώρημα 10</u>: Αν $a_k \geq a_{k+1}$ για κάθε θετικό ακέραιο k και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, τότε η εναλλασσόμενη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ συγκλίνει.

<u>Παράδειγμα</u>: Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n^2-3}$ συγκλίνει.

<u>Λύση</u>: Έστω ότι $f(x)=\frac{2x}{4x^2-3}$, τότε $f'(x)=\frac{-8x^2-6}{\left(4x^2-3\right)^2}\prec 0$ και έτσι η συνάρτηση f είναι φθίνουσα για κάθε $x \geq 1$. Ο νιοστός όρος της σειράς είναι $a_n = f(n)$ και κατά συνέπεια $a_k \geq a_{k+1}$ για κάθε θετικό ακέραιο k. Επίσης,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n^2-3}=0$. Οπότε, από το θεώρημα 10 πιο πάνω, η δοθείσα σειρά συγκλίνει.

5.10 ΑΠΟΛΥΤΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΠΕΙΡΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

Μια άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ λέμε ότι **συγκλίνει απόλυτα** αν συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| = |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|+\cdots$. Μια συγκλίνουσα σειρά, η οποία δεν συγκλίνει απόλυτα, λέμε ότι **συγκλίνει υπό συνθήκη**.

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι μια σειρά θετικών όρων, τότε $|a_n| = a_n$ και έτσι η απόλυτη σύγκλιση είναι ίδια με τη συνήθη σύγκλιση.

<u>Παράδειγμα</u>: Να ελεγχθούν ως προς την απόλυτη σύγκλιση οι σειρές:

α) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\cdots$.

β) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$.

<u>Λύση</u>: α) Παίρνοντας την απόλυτη τιμή των όρων της σειράς έχουμε:

$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$, η οποία είναι μια $p-$σειρά, με $p=2\succ 1$. Άρα συγκλίνει και έτσι η δοθείσα, εναλλασσόμενη σειρά, συγκλίνει απόλυτα.

β) Η σειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ είναι η αποκλίνουσα αρμονική σειρά. Κατά συνέπεια, η δοθείσα σειρά, δεν συγκλίνει απόλυτα. Παρόλα αυτά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ είναι εναλλασσόμενη με $a_k \geq a_{k+1}$ για κάθε θετικό ακέραιο k και $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, έτσι, από το θεώρημα 10, συγκλίνει. Συνεπώς η σειρά αυτή συγκλίνει υπό συνθήκη.

<u>**Θεώρημα 11**</u>**:** Αν μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα, τότε η σειρά αυτή είναι συγκλίνουσα και

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

<u>**Παράδειγμα**</u>**:** Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sin(n)}{n^2}$ συγκλίνει.

<u>**Λύση**</u>**:** Η δοθείσα σειρά δεν είναι εναλλασσόμενη, περιέχει όμως θετικούς και αρνητικούς όρους.

Αφού $\left|\frac{sin(n)}{n^2}\right| = \frac{|sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, η σειρά των απολύτων τιμών $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{sin(n)}{n^2}\right|$ $\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ που είναι μια συγκλίνουσα σειρά. Συνεπώς η δοθείσα συγκλίνει απόλυτα και σύμφωνα με το θεώρημα 11 είναι συγκλίνουσα.

<u>**Θεώρημα 12**</u>**:** Μια άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, μη μηδενικών όρων έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Συγκλίνει απόλυτα αν $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \Lambda \prec 1$.

2. Αποκλίνει αν $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \Lambda \succ 1$ ή $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty$.

<u>Παράδειγμα</u>: Να δειχθεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2}$ αποκλίνει.

<u>Λύση</u>:
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{3^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2+2n+1} = 3 \succ 1.$$

Άρα, από το θεώρημα 12, η δοθείσα σειρά αποκλίνει.

5.11 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να δειχθεί ότι η άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n-3}$ αποκλίνει.

2. Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι σειρές:

α) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{ln(n+1)}$,

γ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2+1}{n^3+1}$, δ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{e^n}{n^4}$,

3. Να προσδιοριστεί αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν απόλυτα, υπό συνθήκη ή αποκλίνουν.

α) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+1}{2^n}$, β) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-100)^n}{n!}$,

γ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, δ) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{n^3+e^n}$.

5.12 ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Μέχρι τώρα οι άπειρες σειρές που εξετάσαμε περιείχαν μόνον σταθερούς όρους. Σημαντικό ρόλο, όμως σε εφαρμογές, έχουν σειρές που περιέχουν μεταβλητές. Για την ακρίβεια αν x είναι μια μεταβλητή, τότε μια σειρά της μορφής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ονομάζεται **δυναμοσειρά** της μεταβλητής x.

Αυτό που μας απασχολεί εδώ είναι η εύρεση όλων των τιμών της x, για τις οποίες η πιο πάνω σειρά συγκλίνει. Προφανώς η δυναμοσειρά συγκλίνει για $x=0$ και για να βρούμε όλες τις άλλες τιμές, συνήθως, κάνουμε χρήση του θεωρήματος 12 παραπάνω.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να βρεθούν όλες οι τιμές της x για τις οποίες η δυναμοσειρά $1 + \frac{1}{5}x + \frac{2}{5^2}x^2 + \cdots + \frac{n}{5^n}x^n + \cdots$ συγκλίνει. απόλυτα.

<u>Λύση</u>: Έστω $u_n = \frac{n}{5^n}x^n$ και έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{5^{n+1}}\cdot\frac{5^n}{nx^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x}{5n}\right| = \frac{1}{5}|x|.$$

Από το θεώρημα 12, η δοθείσα σειρά συγκλίνει απόλυτα όταν $\frac{1}{5}|x| \prec 1$, δηλαδή όταν $-5 \prec x \prec 5$. Επίσης η σειρά αποκλίνει αν $x \succ 5$ ή $x \prec -5$. Για τις τιμές $x=-5$ και $x=5$ πρέπει να εξετάσουμε την ίδια τη σειρά, δηλαδή να τις αντικαταστήσουμε στη θέση της x.

Έτσι για $x=5$ παίρνουμε: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}5^n = \sum_{n=0}^{\infty} n = 0+1+2+3+\cdots$, η οποία αποκλίνει. Το ίδιο συμβαίνει και για $x=-5$. Συνεπώς η δοθείσα δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα στο διάστημα $(-5,\ 5)$ και αποκλίνει έξω από αυτό.

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να βρεθούν όλες οι τιμές της x για τις οποίες η δυναμοσειρά $1+\frac{1}{1!}x+\frac{2}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$ συγκλίνει. απόλυτα.

<u>Λύση</u>: Όπως και στο παράδειγμα 1 έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right|=0\prec 1.$$

Άρα, η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

<u>Θεώρημα 13</u>: (i) Αν μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ συγκλίνει για ένα αριθμό $c\neq 0$, τότε συγκλίνει απόλυτα όταν $|x|\prec|c|$.

(ii) Αν μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ αποκλίνει για ένα αριθμό $c\neq 0$, τότε αποκλίνει όταν $|x|\succ|c|$.

<u>Θεώρημα 14</u>: Αν $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ είναι μια δυναμοσειρά, τότε αληθεύει ένα από τα ακόλουθα:

1. Η σειρά συγκλίνει μόνον όταν $x=0$.
2. Η σειρά συγκλίνει απόλυτα για κάθε x.
3. Υπάρχει θετικός αριθμός c, τέτοιος ώστε η σειρά συγκλίνει απόλυτα αν $|x|\prec|c|$ και αποκλίνει αν $|x|\succ|c|$.

<u>Παράδειγμα 3</u>: Να βρεθεί το διάστημα εντός του οποίου η δυναμοσειρά

$1-\frac{1}{2}(x-3)+\frac{1}{3}(x-3)^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}(x-3)^n+\cdots$ συγκλίνει.

<u>Λύση</u>: Έστω $u_n=(-1)^n\frac{(x-3)^n}{n+1}$ και έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-3)^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{(x-3)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}(x-3)\right| = |x-3|.$$

Οπότε η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα αν $|x-3| \prec 1$, δηλαδή στο διάστημα $-1 \prec x-3 \prec 1 \;\Rightarrow\; 2 \prec x \prec 4$ και αποκλίνει για $x \prec 2$ και $x \succ 4$. Για τις τιμές $x = 2$ και $x = 4$ έχουμε αντίστοιχα:

$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots$ που είναι η γνωστή αποκλίνουσα αρμονική σειρά.

$1-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}+\cdots$, η οποία, από το θεώρημα 10 για μια εναλλασσόμενη σειρά, συγκλίνει.

Συνεπώς η δοθείσα σειρά έχει διάστημα σύγκλισης το $(2,\ 4]$.

5.13 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί το διάστημα σύγκλισης των παρακάτω δυναμοσειρών:

α) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+4}$, β) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2x^n}{2^n}$,

γ) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$, γ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!x^n}{100^n}$,

ε) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(-4)^n}$, στ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^{2n}(x-2)^n}{n+1}$,

ζ) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2(x+4)^n}{2^{3n}}$, η) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2x-1)^n}{n6^n}$.

5.14 ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΩΝ

Μπορούμε να κάνουμε χρήση μιας δυναμοσειράς $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ για να ορίσουμε μια συνάρτηση f, της οποίας το πεδίο ορισμού $D(f)$ είναι το διάστημα σύγκλισης της σειράς. Ειδικότερα, για κάθε $x \in D(f)$, εξισώνουμε την f με τη σειρά, δηλαδή

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ είναι μια αναπαράσταση δυναμοσειράς της συνάρτησης f. Για παράδειγμα, αν $|x| \prec 1$, τότε

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

και τούτο διότι, από το θεώρημα 3, η γεωμετρική σειρά στο δεξί μέλος συγκλίνει και έχει άθροισμα ίσο με $\frac{1}{x+1}$.

Συνεπώς, η $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ είναι μια αναπαράσταση δυναμοσειράς της $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

Μια συνάρτηση f, όπως πιο πάνω, έχει πολλές ιδιότητες παρόμοιες με αυτές ενός πολυωνύμου, δηλαδή είναι συνεχής, παραγωγίσιμη και της οποίας η αναπαράσταση δυναμοσειράς βρίσκεται αν παραγωγίσουμε κάθε όρο της δοθείσας σειράς. Επίσης ορισμένα ολοκληρώματα της f βρίσκονται αν ολοκληρώσουμε κάθε όρο της σειράς της. Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 15: Αν μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ έχει διάστημα σύγκλισης $(-r,\ r)$ διάφορο του μηδενός και αν μια συνάρτηση f ορίζεται από την

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

τότε για κάθε $x \in (-r,\ r)$,

1. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x.

2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x και
$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$.

3. $\int_0^x f(t)\,dt = a_0 x + \frac{1}{2} a_1 x^2 + \frac{1}{3} a_2 x^3 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} + \cdots$.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να βρεθεί μια αναπαράσταση δυναμοσειράς για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

<u>Λύση</u>: Παραγωγίζουμε κάθε όρο της σχέσης:

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

και παίρνουμε:

$$-\frac{1}{(x+1)^2} = -1 + 2x - 3x^2 - \cdots + (-1)^n n x^{n-1} + \cdots,$$

με την προϋπόθεση ότι $x \in (-1,\ 1)$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{(x+1)^2} = 1 - 2x + 3x^2 + \cdots + (-1)^{n+1} n x^{n-1} + \cdots.$$

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να βρεθεί μια αναπαράσταση δυναμοσειράς για τη συνάρτηση $Arctanx$.

<u>Λύση</u>: Γνωρίζουμε ότι $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = Arctanx$ και για $x \in (-1,\ 1)$, από το θεώρημα 3 έχουμε:

$$\frac{1}{x^2+1} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots.$$

Τώρα από το θεώρημα 15, ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή παίρνουμε:

$$Arctanx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots .$$

Η σειρά αυτή είναι γνωστή ως **σειρά του Gregory**[2].

5.15 ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR ΚΑΙ MACLAURIN

Έστω ότι μια συνάρτηση f δίνεται από τη σχέση:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n ,$$

όπου το πεδίο ορισμού $D(f)$ της f είναι ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το c. Παραγωγίζοντας διαδοχικά τους όρους της παραπάνω σειράς παίρνουμε:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n (x-c)^{n-2}$$

$$f'''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (x-c)^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n (x-c)^{n-k} ,$$

όπου k είναι θετικός ακέραιος αριθμός.

Κάθε μια από τις παραπάνω σειρές των παραγώγων έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με αυτήν της f. Αντικαθιστώντας το c στη θέση του x παίρνουμε:

$$f(c) = a_0, \quad f'(c) = a_1, \quad f''(c) = 2a_2 \quad ,..., \quad f^{(k)}(c) = k! a_k \quad \text{ή}$$

[2] Gregory, James (1638 – 1675) Σκωτσέζος αστρονόμος και μαθηματικός

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Κατά συνέπεια έχουμε:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + \cdots .$$

Η σειρά αυτή ονομάζεται **σειρά Taylor**[3] για τη συνάρτηση f στο c.

Η ειδική περίπτωση όπου $c = 0$ δίνει:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

ονομάζεται **σειρά Maclaurin**[4] για τη συνάρτηση f.

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να βρεθεί η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = sinx$.

<u>Λύση</u>: $f(x) = sinx$, $f(0) = 0$

Παραγωγίζουμε διαδοχικά και έχουμε:

$$f'(x) = cosx, \quad f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -sinx, \quad f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -cosx, \quad f'''(0) = -1,$$

$$f^{(4)}(x) = sinx, \quad f^{(4)}(0) = 0,$$

κ.ο.κ.

Αντικαθιστώντας στην πιο πάνω σειρά παίρνουμε:

$$f(x) = sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots .$$

---

[3] Taylor, Brooke (1685 – 1731) Άγγλος μαθηματικός και φιλόσοφος.
[4] Maclaurin, Colin (1698 – 1746) Σκωτσέζος φυσικομαθηματικός.

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να βρεθεί η σειρά Maclaurin για τη συνάρτηση $f(x) = cosx$.

<u>Λύση</u>: Αφού $\dfrac{d}{dx}(sinx) = cosx$ αντί να κάνουμε όπως στο παράδειγμα 1 παραπάνω, παραγωγίζουμε κάθε όρο της σειρά του ημίτονου και παίρνουμε:

$$f(x) = cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots.$$

5.16 Η ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΣΕΙΡΑ

Το Διωνυμικό Θεώρημα λέει ότι αν k είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, τότε για κάθε a και b πραγματικούς αριθμούς, ισχύει:

$$(a+b)^k =$$

$$= a^k + ka^{k-1}b + \frac{k(k-1)}{2!}a^{k-2}b^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}a^{k-n}b^n + \cdots + b^k.$$

Αν τώρα, θέσουμε $a = 1$ και $b = x$ παίρνουμε:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots + x^k.$$

Σε περίπτωση που $k \in \mathbb{R}$ και $|x| \prec 1$, για $n \geq 0$ έχουμε τη **διωνυμική σειρά**

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{k(k-1)\cdots(k-n+1)}{n!}x^n + \cdots.$$

<u>Παράδειγμα 1</u>: Να βρεθεί μια αναπαράσταση σειράς για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$.

<u>Λύση</u>: Έχουμε $f(x) = (1+x)^{1/3}$, οπότε από το παραπάνω παίρνουμε:

$$(1+x)^{1/3} =$$

$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}{n!}x^n+\cdots$$

ή

$$(1+x)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x-\frac{2}{3^2\cdot 2!}x^2+\frac{1\cdot 2\cdot 5}{3^3\cdot 3!}x^3+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdots(3n-4)}{3^n\cdot n!}x^n+\cdots,$$

όπου $|x|\prec 1$.

<u>Παράδειγμα 2</u>: Να βρεθεί μια αναπαράσταση σειράς για τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt[3]{1+x^4}$.

<u>Λύση</u>: Θέτουμε όπου x το x^4 στη σειρά του παραπάνω παραδείγματος και παίρνουμε:

$$\left(1+x^4\right)^{1/3}=1+\frac{1}{3}x^4-\frac{2}{3^2\cdot 2!}x^8+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 2\cdots(3n-4)}{3^n\cdot n!}x^{4n}+\cdots.$$

5.17 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να γίνει αναπαράσταση δυναμοσειράς των παρακάτω:

α) $\frac{1}{1-x}$, β) $\frac{1}{(1-x)^2}$,

γ) $\frac{x^2}{1-x^2}$, δ) $\frac{x^2+1}{x-1}$.

2. Να δειχθεί ότι $ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-x^n}{n},\ |x|\prec 1$.

3. Να βρεθούν οι σειρές Maclaurin για τις εξής συναρτήσεις:

α) $f(x) = ln(1+x)$, β) $f(x) = e^x$,

γ) $f(x) = e^{2x}$, δ) $f(x) = e^{-x}$,

ε) $f(x) = cos^2 x$, στ) $f(x) = xsin3x$.

4. Να βρεθεί η αναπαράσταση δυναμοσειράς, καθώς και η ακτίνα σύγκλισης αυτών, των παρακάτω:

α) $\sqrt{1+x}$, β) $\sqrt{1-x^3}$,

γ) $(1+x)^{-3}$, δ) $\sqrt[3]{8+x}$.

5. Κάνοντας χρήση του $sin^{-1}x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$, να βρεθεί η αναπαράσταση δυναμοσειράς για το $sin^{-1}x$. Ποια είναι η ακτίνα σύγκλισης αυτής της σειράς;

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6^o</u>

ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

6.1 ΑΡΤΙΕΣ ΚΑΙ ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύει η σχέση,

$$f(-x) = f(x) \tag{1}$$

ονομάζονται ***άρτιες συναρτήσεις.*** Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι άρτια. Επίσης οι συναρτήσεις $sinx$ (ημίτονο μιας γωνίας x) και η $tan3x$ (εφαπτομένη μιας γωνίας) είναι περιττές συναρτήσεις.

Αν ισχύει η σχέση:

$$f(-x) = -f(x), \tag{2}$$

ονομάζονται ***περιττές συναρτήσεις.*** Μια τέτοια συνάρτηση είναι η $f(x) = x^3$. Επίσης οι συναρτήσεις $cosx$ (συνημίτονο μιας γωνίας x) και η $e^x + e^{-x}$ είναι άρτιες συναρτήσεις.

6.2 ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω μια συνάρτηση $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού $D(f)$, για την οποία υπάρχει ακέραιος αριθμός ρ τέτοιος ώστε για κάθε $x \in D(f)$, $x + \rho \in D(f)$ και ισχύει:

$$f(x+\rho) = f(x), \;\; \forall x \in D(f), \tag{3}$$

ονομάζεται <u>περιοδική</u>, περιόδου ρ. (Το σύμβολο $\forall$ σημαίνει "για κάθε").

Ο μικρότερος θετικός αριθμός ρ για τον οποίο ισχύει η πιο πάνω σχέση ονομάζεται <u>κύρια περίοδος</u> της f.

<u>Παραδείγματα</u>: α) Η συνάρτηση $y = f(x) = sinx$ είναι μια περιοδική συνάρτηση, με κύρια περίοδο $\rho = 2\pi$, αφού

$$f(x+2\pi) = sin(x+2\pi) = sinx.$$

Γενικά, η συνάρτηση "ημίτονο" μιας γωνίας είναι περιοδική με περίοδο $2k\pi$, όπου $k = \ldots \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

β) Το ίδιο ισχύει και για τη συνάρτηση $y = f(x) = cosx$ (συνημίτονο μιας γωνίας x).

γ) Η περίοδος της συνάρτησης $y = f(x) = tanx$ είναι π.

δ) Μια οποιαδήποτε σταθερή συνάρτηση, $f(x) = c$, μπορεί να θεωρηθεί περιοδική, περιόδου ρ, έναν οποιονδήποτε θετικό αριθμό.

6.3 ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού $D(f)$ και πεδίο τιμών $R(f)$. Θα λέμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα υποσύνολο A του $D(f)$ όταν, για κάθε x_1, $x_2 \in A$ με $x_1 \prec x_2$, ισχύει:

$$f(x_1) \prec f(x_2).$$

Δηλαδή, καθώς αυξάνουν οι τιμές του $x \in A$, αυξάνουν οι αντίστοιχες τιμές στο πεδίο τιμών της f.

Στην περίπτωση που ισχύει $f(x_1) \leq f(x_2)$ παραπάνω, λέμε ότι η f είναι απλά αύξουσα.

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση $y = f(x)$ με πεδίο ορισμού $D(f)$ και πεδίο τιμών $R(f)$. Θα λέμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα υποσύνολο A του $D(f)$ όταν, για κάθε x_1, $x_2 \in A$ με $x_1 \prec x_2$, ισχύει:

$$f(x_1) \succ f(x_2).$$

Δηλαδή, καθώς αυξάνουν οι τιμές του $x \in A$, ελαττώνονται οι αντίστοιχες τιμές στο πεδίο τιμών της f.

Στην περίπτωση που ισχύει $f(x_1) \geq f(x_2)$ παραπάνω, λέμε ότι η f είναι απλά φθίνουσα.

Γνησίως μονότονη ονομάζεται μια συνάρτηση όταν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα, ενώ στην περίπτωση που μια συνάρτηση είναι απλά αύξουσα ή φθίνουσα, τότε ονομάζεται απλά μονότονη.

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ ονομάζεται τμηματικά γνησίως μονότονη, (αντίστοιχα τμηματικά μονότονη) σε κάποιο διάστημα του πεδίου ορισμού της, όταν το γράφημά της δύναται να χωριστεί σε επί μέρους τμήματα πεπερασμένου πλήθους, όπου η f είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα (αντίστοιχα αύξουσα ή φθίνουσα) σε κάθε ένα από αυτά.

Για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$ είναι τμηματικά γνησίως μονότονη, γιατί είναι γνησίως φθίνουσα για όλα τα $x \in (-\infty,\ 0]$ και γνησίως αύξουσα για όλα τα $x \in [0,\ +\infty)$.

6.4 ΤΜΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Μια συνάρτηση $y = f(x)$ ονομάζεται τμηματικά συνεχής ή συνεχής κατά τμήματα σε ένα διάστημα I, αν

(i) Το διάστημα I μπορεί να διαιρεθεί σε πεπερασμένο αριθμό μικρότερων διαστημάτων, σε κάθε ένα εκ των οποίων η f είναι συνεχής.

(ii) Τα όρια της $f(x)$, καθώς το x τείνει από τα δεξιά ή από τα αριστερά στα άκρα κάθε διαστήματος, υπάρχουν και είναι πεπερασμένα.

Με άλλα λόγια μια συνάρτηση είναι τμηματικά συνεχής σε ένα διάστημα όταν έχει το πολύ ένα πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών στο διάστημα αυτό.

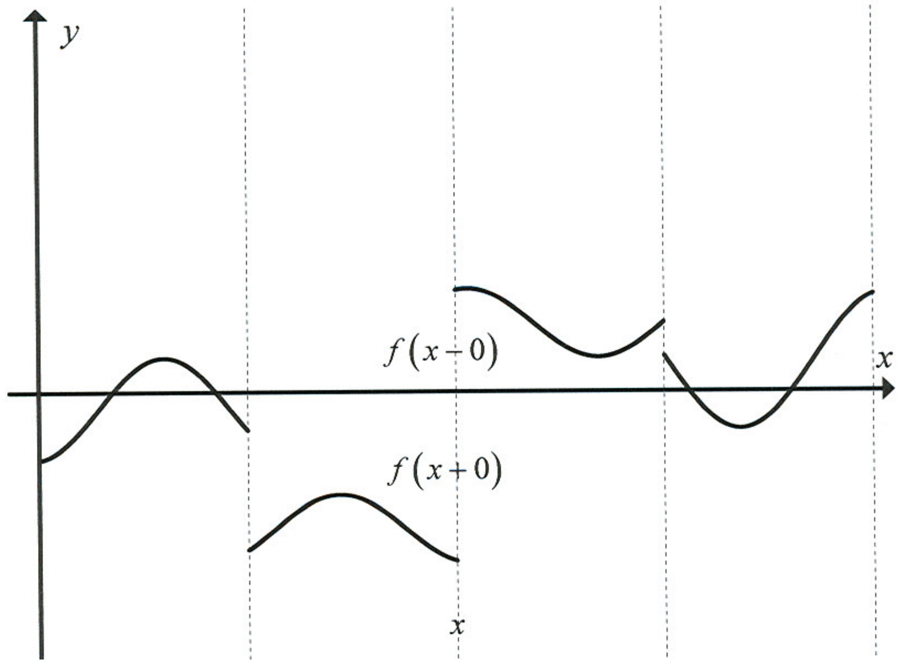
Το όριο της συνάρτησης $f(x)$, καθώς το x τείνει από τα δεξιά στο άκρο ενός διαστήματος συμβολίζεται με

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(x + \varepsilon) = f(x + 0), \quad \varepsilon \succ 0.$$

Και το όριο της συνάρτησης $f(x)$, καθώς το x τείνει από τα αριστερά στο άκρο ενός διαστήματος συμβολίζεται με

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(x - \varepsilon) = f(x - 0), \quad \varepsilon \succ 0.$$

Στο σχήμα 1 παρακάτω βλέπουμε μια τμηματικά συνεχή συνάρτηση, καθώς και τις τιμές $f(x+0)$ και $f(x-0)$ στο σημείο x.



Σχήμα 1

Το ότι $\varepsilon \to 0$ και $\varepsilon \succ 0$, μπορούμε, χάριν συντομίας να το συμβολίζουμε με $\varepsilon \to 0+$, οπότε για τα πιο πάνω όρια έχουμε:

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} f(x+\varepsilon) = f(x+0),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} f(x-\varepsilon) = f(x-0).$$

6.5 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER

Ορισμός: Έστω ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ ορίζεται σε ένα διάστημα $(-L,\ L)$ και ότι έξω από το διάστημα αυτό ορίζεται από τη σχέση $f(x+2L) = f(x)$, είναι δηλαδή η f περιοδική, περιόδου $2L$. Τότε, το **ανάπτυγμα Fourier**[5] ή η **σειρά Fourier** που αντιστοιχεί στη συνάρτηση f δίνεται από την:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sin\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{4}$$

[5] Fourier Jean B. (1768 – 1830), Γάλλος μαθηματικός.

όπου οι a_n και b_n ονομάζονται συντελεστές Fourier και δίνονται από τις σχέσεις:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\left(x\right) cos\frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0,1,2,... \tag{5}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f\left(x\right) sin\frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0,1,2,.... \tag{6}$$

Αν μια συνάρτηση f είναι περιοδική, περιόδου $2L$, τότε οι συντελεστές της προσδιορίζονται και από τις σχέσεις:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f\left(x\right) cos\frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0,1,2,... \tag{7}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{c}^{c+2L} f\left(x\right) sin\frac{n\pi x}{L} dx, \quad n = 0,1,2,... , \tag{8}$$

όπου c είναι ένας πραγματικός αριθμός και στην περίπτωση που $c = -L$ οι σχέσεις (7) και (8) μας δίνουν τις (5) και (6) αντίστοιχα.

Επίσης, ο σταθερός όρος της σειράς (4) πιο πάνω δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f\left(x\right) dx, \tag{9}$$

η οποία είναι η <u>μέση</u> <u>τιμή</u> της f στο διάστημα μιας περιόδου της.

Αν τώρα $L = \pi$, τόσο η σειρά (4), όσο και οι συντελεστές της (5) και (6) είναι απλές και η συνάρτηση f έχει περίοδο 2π.

Τέλος, η (4) είναι μόνο μια σειρά που αντιστοιχεί στη συνάρτηση f, χωρίς να είναι γνωστό αν αυτή συγκλίνει ή όχι και, σε περίπτωση που συγκλίνει δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνει στην f.

Συνθήκες που εξασφαλίζουν τη σύγκλιση μια σειράς Fourier δόθηκαν από τον Dirichlet[6] και είναι οι ακόλουθες:

---

[6] Dirichlet P.G.L. (1805 – 1859), Γερμανός μαθηματικός

6.6 ΣΥΝΘΗΚΕΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER

Θεώρημα 1 (Dirichlet): Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν:

(i) η f ορίζεται και είναι μονότονη σε ένα διάστημα $\left(-L,\ L\right)$, εκτός ίσως από ένα πεπερασμένο πλήθος σημείων αυτού

(ii) είναι περιοδική, περιόδου $2L$

(iii) η f και η παράγωγός της f' είναι τμηματικά συνεχείς στο $\left(-L,\ L\right)$, τότε η σειρά (4) με τους συντελεστές (5) και (6) συγκλίνει

- στην $f\left(x\right)$, αν το σημείο x είναι σημείο συνέχειας,
- στην $\dfrac{f\left(x+0\right)+f\left(x-0\right)}{2}$, αν το σημείο x είναι σημείο ασυνέχειας, όπου $f\left(x+0\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f\left(x+\varepsilon\right)$ και $f\left(x-0\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} f\left(x-\varepsilon\right)$.

Οι συνθήκες (i), (ii) και (iii) είναι ικανές, όχι όμως και αναγκαίες, δηλαδή, αν ικανοποιούνται, τότε συγκλίνει η σειρά Fourier, ενώ αν δεν ικανοποιούνται δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν η σειρά συγκλίνει ή όχι.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Dirichlet, μπορούμε να γράψουμε:

$$f\left(x\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L}+b_n sin\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{10}$$

σε κάθε σημείο που η f είναι συνεχής και σε κάθε σημείο ασυνέχειας x, αντικαθιστούμε το αριστερό μέλος της (10) με την $\dfrac{f\left(x+0\right)+f\left(x-0\right)}{2}$ και έτσι η σειρά Fourier συγκλίνει στη μέση τιμή των $f\left(x+0\right)$ και $f\left(x-0\right)$.

Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή, τότε η σειρά Fourier που αντιστοιχεί σε αυτήν περιέχει μόνον όρους με ημίτονα, ενώ αν η f είναι άρτια, τότε η αντίστοιχη σειρά περιέχει μόνο συνημίτονα και ίσως μια σταθερά ποσότητα, η οποία και πάλι μπορεί να θεωρηθεί ως όρος συνημίτονου.

6.7 ΣΕΙΡΕΣ FOURIER ΗΜΙΤΟΝΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Μια σειρά ημίτονων ή ημιτονική σειρά Fourier είναι μια σειρά που περιέχει μόνον όρους ημίτονων, ενώ μια σειρά συνημίτονων ή συνημιτονική σειρά Fourier είναι μια σειρά που περιέχει μόνον όρους συνημίτονων.

Όταν για μια συνάρτηση f θέλουμε την αντίστοιχη ημιτονική ή συνημιτονική σειρά Fourier, ορίζουμε την f στο μισό του διαστήματος $(-L,\ L)$, δηλαδή στο $(0,\ L)$ και μετά την ορίζουμε έξω από αυτό με τρόπο ώστε να είναι περιττή ή άρτια αντίστοιχα. Έτσι ορίζεται, προφανώς, και στο υπόλοιπο μισό διάστημα $(-L,\ 0)$. Σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε:

1) Για σειρά ημίτονων: $a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) sin\frac{n\pi x}{L}dx$.

2) Για σειρά συνημίτονων: $b_n = 0,\ a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) cos\frac{n\pi x}{L}dx$.

Η σχέση

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}\left[f(x)\right]^2 dx = \frac{a_0^{\ 2}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^{\ 2} + b_n^{\ 2}\right), \tag{11}$$

όπου a_n και b_n είναι οι συντελεστές Fourier για την $f(x)$ και, επί πλέον η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet, θεώρημα 1 παραπάνω, ονομάζεται **ταυτότητα του Parseval**[7].

6.9 ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΣΕΙΡΩΝ ΚΑΙ ΣΕΙΡΩΝ FOURIER

Έστω μια άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ και το άθροισμα των k πρώτων όρων αυτής,

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} u_n(x).$$

[7] Parseval Des Chênes M.A. (1755 – 1836), Γάλλος μαθηματικός.

Η σειρά αυτή συγκλίνει **ομοιόμορφα** στη συνάρτηση $f(x)$ σε ένα διάστημα I, αν για οποιονδήποτε αριθμό $\varepsilon \succ 0$, υπάρχει θετικός αριθμός M τέτοιος ώστε, για κάθε $x \in I$,

$$\left|S_k(x) - f(x)\right| \prec \varepsilon, \text{ για } k \succ M$$

και ο αριθμός M εξαρτάται μόνον από το ε και όχι από το x.

<u>Θεώρημα 2</u>: Αν μια άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ αποτελείται από παραγωγίσιμους όρους και η σειρά των παραγώγων συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε η δοθείσα αρχική σειρά μπορεί να παραγωγιστεί κατά όρους, δηλαδή

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x). \tag{12}$$

<u>Θεώρημα 3</u>: Αν κάθε όρος μιας άπειρης σειράς, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα $(a,\ b)$ και η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f(x)$, στο διάστημα αυτό, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

1. Η $f(x)$ είναι και αυτή συνεχής στο $(a,\ b)$.

2. Η δοθείσα σειρά μπορεί να ολοκληρωθεί κατά όρους, δηλαδή

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\, dx. \tag{13}$$

Για να δείξουμε ότι μια άπειρη σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα προς μια συνάρτηση $f(x)$ σε ένα διάστημα, κάνουμε χρήση ενός γνωστού και χρήσιμου αποτελέσματος, γνωστού ως **κριτήριο του Weierstrass**[8].

<u>Θεώρημα 4 (Weierstrass)</u>: Αν υπάρχει ένα σύνολο σταθερών C_n, $n = 1, 2, \ldots$, τέτοιο ώστε, για κάθε x σε ένα διάστημα I, να ισχύει $\left|u_n(x)\right| \le C_n$ και αν,

[8] Weierstrass, Karl T.W. (1815 – 1897) Γερμανός μαθηματικός.

επί πλέον, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ συγκλίνει, τότε η άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα I.

Υπό τις ίδιες συνθήκες η $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ συγκλίνει επίσης και απόλυτα, δηλαδή συγκλίνει η $\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n(x)\right|$.

<u>Παράδειγμα</u>: Η άπειρη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $(0,\ 2\pi)$, αφού υπάρχει ένα σύνολο σταθερών, το οποίο είναι το ακόλουθο: $C_n = \frac{1}{n^2},\ n = 1,2,...$, τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{cos(nx)}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \quad \text{και η σειρά} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{είναι συγκλίνουσα.}$$

Από τα θεωρήματα 2 και 3 πιο πάνω έχουμε ικανές, όχι όμως αναγκαίες συνθήκες, οι οποίες μας επιτρέπουν να παραγωγίζουμε και να ολοκληρώνουμε σειρές Fourier.

Ιδιαίτερα, για την ολοκλήρωση μιας σειράς Fourier, ένα χρήσιμο αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο.

<u>Θεώρημα 5</u>: Αν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής στο κλειστό διάστημα $-L \le x \le L$ και τα σημεία $a, x \in [-L,\ L]$, τότε η σειρά Fourier που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να ολοκληρωθεί κατά όρους από το a έως το x και, η σειρά που θα προκύψει από την ολοκλήρωση συγκλίνει στην

$$\int_a^x f(t)\,dt.$$

Οι σειρές Fourier μπορούν να γραφούν και σε μιγαδική μορφή, μέσω των τύπων του Euler[9]:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta, \quad e^{-i\theta} = cos\theta - isin\theta,$$

[9] Euler, Leonhard (1707 – 1783) Ελβετός μαθηματικός.

όπου $i^2=-1$. Έτσι, η σειρά Fourier για τη συνάρτηση $f(x)$, σε μιγαδική μορφή δίνεται από τη σχέση:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}\,, \tag{14}$$

όπου

$$c_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-in\pi x/L}dx\,. \tag{15}$$

<u>Παραδείγματα</u>: α) Να δειχθεί ότι για $k=1,2,...$

$$\int_{-L}^{L} sin\frac{k\pi x}{L}dx=0=\int_{-L}^{L} cos\frac{k\pi x}{L}dx\,.$$

<u>Λύση</u>: Ολοκληρώνοντας το αριστερό μέλος της δοθείσας σχέσης έχουμε:

$$\int_{-L}^{L} sin\frac{k\pi x}{L}dx=-\frac{L}{k\pi}cos\frac{k\pi x}{L}\Bigg|_{-L}^{L}$$

$$=-\frac{L}{k\pi}cos(k\pi)+\frac{L}{k\pi}cos(-k\pi)=0\,,$$

Ομοίως $\displaystyle\int_{-L}^{L} cos\frac{k\pi x}{L}dx=\frac{L}{k\pi}sin\frac{k\pi x}{L}\Bigg|_{-L}^{L}$

$$=\frac{L}{k\pi}sin(k\pi)-\frac{L}{k\pi}sin(-k\pi)=0\,.$$

β) Για την περιοδική συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}3, & 0\prec x\prec 5\\ 0, & -5\prec x\prec 0\end{cases}$, περιόδου 10, να υπολογιστούν οι συντελεστές Fourier και να γραφεί η αντίστοιχη σειρά. Να γίνει το γράφημα της συνάρτησης.

<u>Λύση</u>: Αφού η συνάρτηση έχει περίοδο 10, έχουμε $2L=10\Rightarrow L=5$. Άρα έχουμε:

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)cos\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)cos\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$=\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}dx+\int_{0}^{5}(3)\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right]$$

$$=\frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$=\frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_{0}^{5}$$

$$=\frac{3}{5}(0-0)=0,\ \ (n\neq 0).$$

Για $n=0$, $a_n=a_0=\frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\frac{0\pi x}{5}dx$

$$=\frac{3}{5}\int_{0}^{5}dx=\frac{3}{5}(5-0)=3.$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)\sin\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$=\frac{1}{5}\left[\int_{-5}^{0}(0)\sin\frac{n\pi x}{5}dx+\int_{0}^{5}(3)\sin\frac{n\pi x}{5}dx\right]$$

$$=\frac{3}{5}\int_{0}^{5}\sin\frac{n\pi x}{5}dx$$

$$=\frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\Bigg|_{0}^{5}$$

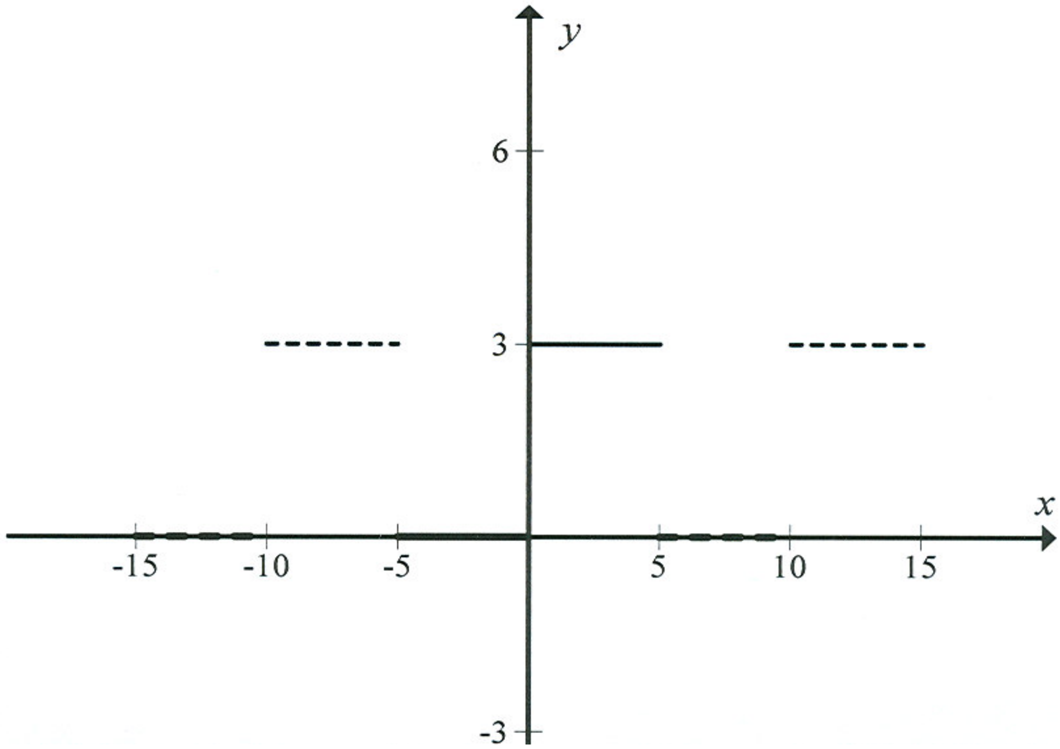
$$=\frac{3\left[1-\cos(n\pi)\right]}{n\pi}.$$

Τώρα η ζητούμενη σειρά Fourier είναι:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{3\left[1-\cos(n\pi)\right]}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{5}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{5}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5}+\cdots\right].$$

Στο σχήμα 2 πιο κάτω βλέπουμε τη γραφική παράσταση της δοθείσας συνάρτησης.



Σχήμα 2

γ) Να αναπτυχθεί η συνάρτηση $f(x) = x^2,\ 0 \prec x \prec 2\pi$, σε σειρά Fourier, περιόδου 2π και να γίνει το γράφημά της.

<u>Λύση</u>: Αφού η περίοδος είναι 2π, έχουμε $2L = 2\pi \Rightarrow L = \pi$. Άρα έχουμε:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x) cos\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 cos(nx) dx, \text{ (για } c = 0\text{)}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες παίρνουμε:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\left(x^2\right)\left[\frac{sin(nx)}{n}\right] - (2x)\left[-\frac{cos(nx)}{n^2}\right] + 2\left[-\frac{sin(nx)}{n^3}\right]\right\}\Bigg|_0^{2\pi} \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\left(4\pi^2\right)\cdot\frac{0}{n} - (4\pi)\left(-\frac{1}{n^2}\right) + 2\cdot\frac{0}{n^3} - 2\cdot\frac{0}{n^3}\right] = \frac{4}{n^2},\ n \neq 0.$$

Για $n=0$, $\quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2dx$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{8\pi^2}{3}.$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_c^{c+2L}f\left(x\right)sin\frac{n\pi x}{L}dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2sin\left(nx\right)dx$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες παίρνουμε:

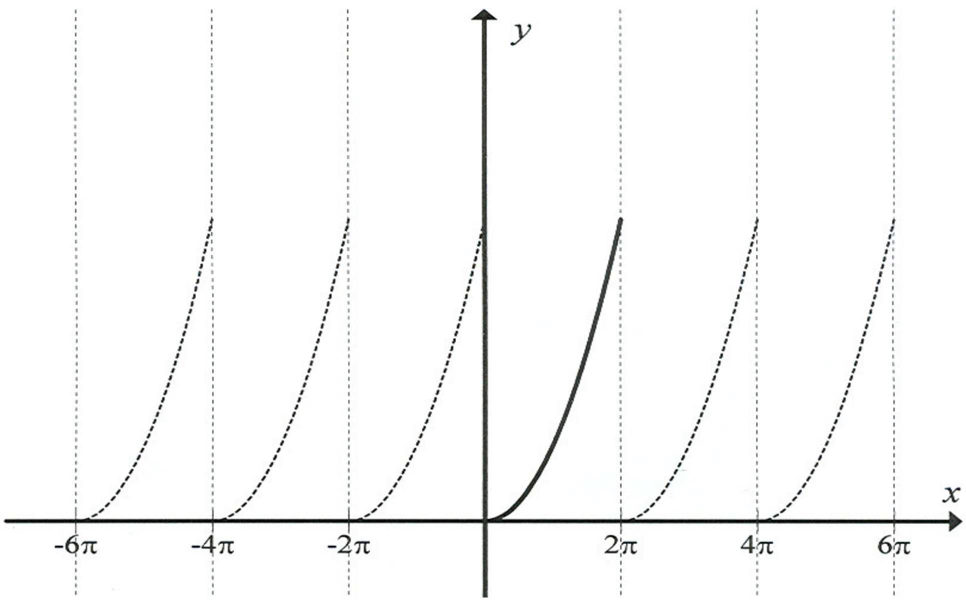
$$b_n=\frac{1}{\pi}\left\{\left(x^2\right)\left[-\frac{cos\left(nx\right)}{n}\right]-\left(2x\right)\left[-\frac{sin\left(nx\right)}{n^2}\right]+2\left[\frac{cos\left(nx\right)}{n^3}\right]\right\}\Bigg|_0^{2\pi}\quad\Rightarrow$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\left[\left(4\pi^2\right)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)-\left(4\pi\right)\left(-\frac{0}{n^2}\right)+2\cdot\left(\frac{1}{n^3}\right)-2\cdot\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]=-\frac{4\pi}{n}.$$

Συνεπώς η ζητούμενη σειρά Fourier είναι:

$$f\left(x\right)=x^2=\frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2}cos\left(nx\right)-\frac{4\pi}{n}sin\left(nx\right)\right],\ \ 0\prec x\prec 2\pi.$$

Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε τη γραφική παράσταση της $f\left(x\right)=x^2$, $0\prec x\prec 2\pi$, περιόδου 2π.



Σχήμα 3

6.9 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί η σειρά Fourier και να γίνει το γράφημα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=4x,\ \ 0 \prec x \prec 10$, περίοδος 10.

β) $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x \le 4 \\ -x, & -4 \le x \le 0 \end{cases}$, περίοδος 8.

2. Να αναπτυχθεί η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \prec x \prec 4 \\ 8-x, & 4 \prec x \prec 8 \end{cases}$ σε

α) σειρά συνημίτονων,

β) σειρά ημίτονων.

3. Να γίνει η γραφική παράσταση των πιο κάτω συναρτήσεων και να βρεθεί η αντίστοιχη σειρά Fourier.

α) $f(x)=\begin{cases} 8, & 0 \prec x \prec 2 \\ -8, & 2 \prec x \prec 4 \end{cases}$, περίοδος 4.

β) $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & -3 \prec x \prec 0 \end{cases}$, περίοδος 6.

3. α) Να βρεθεί η σειρά Fourier για τη συνάρτηση $f(x)=x^2,\ \ 0 \prec x \prec 2$, με ολοκλήρωση της σειράς:

$$x=\frac{4}{\pi}\left(sin\frac{\pi x}{2}-\frac{1}{2}sin\frac{2\pi x}{2}+\frac{1}{3}sin\frac{3\pi x}{2}-\cdots \right).$$

β) Να υπολογιστεί η σειρά: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΧΡΗΣΙΜΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

- **Μορφές που περιέχουν** $(a+bu)$

1. $\int u^n du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.$

2. $\int \dfrac{du}{a+bu} = \dfrac{1}{b} ln|a+bu| + C.$

3. $\int \dfrac{udu}{a+bu} = \dfrac{u}{b} - \dfrac{a}{b^2} ln|a+bu| + C.$

4. $\int \dfrac{u^2du}{a+bu} = \dfrac{u^2}{2b} - \dfrac{au}{b^2} ln|a+bu| + C.$

5. $\int \dfrac{du}{u(a+bu)} = \dfrac{1}{a} ln\left|\dfrac{u}{a+bu}\right| + C.$

6. $\int \dfrac{du}{u^2(a+bu)} = -\dfrac{1}{au} + \dfrac{b}{a^2} ln\left|\dfrac{a+bu}{u}\right| + C.$

7. $\int \dfrac{udu}{(a+bu)^2} = \dfrac{1}{b^2}\left(ln|a+bu| + \dfrac{a}{a+bu}\right) + C.$

8. $\int \dfrac{u^2du}{(a+bu)^2} = \dfrac{u}{b^2} - \dfrac{a^2}{b^3(a+bu)} - \dfrac{2a}{b^3} ln|a+bu| + C.$

9. $\int \dfrac{du}{u(a+bu)^2} = \dfrac{1}{a(a+bu)} + \dfrac{1}{a^2} ln\left|\dfrac{u}{a+bu}\right| + C.$

10. $\int \dfrac{du}{u^2(a+bu)^2} = -\dfrac{a+2bu}{a^2u(a+bu)} + \dfrac{2b}{a^3} ln\left|\dfrac{a+bu}{u}\right| + C.$

11. $\int \dfrac{du}{(a+bu)(c+ku)} = \dfrac{1}{bc-ak} + ln\left|\dfrac{a+bu}{c+ku}\right| + C.$

12. $\int \dfrac{udu}{(a+bu)(c+ku)} = \dfrac{1}{bc-ak}\left[\dfrac{c}{k} ln|c+ku| - \dfrac{a}{b} ln|a+bu|\right] + C.$

- **Μορφές που περιέχουν** $\sqrt{a+bu}$

13. $\int u\sqrt{a+bu}\,du = \dfrac{2(3bu-2a)(a+bu)^{3/2}}{15b^2} + C$.

14. $\int u^2\sqrt{a+bu}\,du = \dfrac{2\left(8a^2-12abu+15b^2u^2\right)(a+bu)^{3/2}}{105b^3} + C$.

15. $\int \dfrac{u\,du}{\sqrt{a+bu}} = \dfrac{2(bu-2a)\sqrt{a+bu}}{3b^2} + C$.

16. $\int \dfrac{u^2du}{\sqrt{a+bu}} = \dfrac{2\left(3b^2u^2-4abu+8a^2\right)\sqrt{a+bu}}{15b^3} + C$.

17. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a+bu}} = \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a+bu}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bu}+\sqrt{a}}\right| + C,\ a \succ 0$.

18. $\int \dfrac{\sqrt{a+bu}\,du}{u} = 2\sqrt{a+bu} + a\int \dfrac{du}{u\sqrt{a+bu}}$.

- **Μορφές που περιέχουν** $\sqrt{a^2-u^2}$

19. $\int \dfrac{du}{\left(a^2-u^2\right)^{3/2}} = \dfrac{u}{a^2\sqrt{a^2-u^2}} + C$.

20. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C$.

21. $\int \dfrac{du}{u^2\sqrt{a^2-u^2}} = -\dfrac{\sqrt{a^2-u^2}}{a^2u} + C$.

22. $\int \dfrac{\sqrt{a^2-u^2}\,du}{u} = \sqrt{a^2-u^2} - a\ln\left|\dfrac{a+\sqrt{a^2-u^2}}{u}\right| + C,\ a \succ 0$.

- **Μορφές που περιέχουν** $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

23. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| \right) + C$.

24. $\int u^2 \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{8}\left(2u^2 \pm a^2\right)\sqrt{u^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$.

25. $\int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}\, du}{u} = \sqrt{u^2 + a^2} - a\ln\left| \frac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u} \right| + C$.

26. $\int \frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}\, du}{u^2} = -\frac{\sqrt{u^2 \pm a^2}}{u} + \ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$.

27. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$.

28. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = \frac{1}{a}\ln\left| \frac{\sqrt{u^2 + a^2} - a}{u} \right| + C$.

29. $\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} \mp a^2 \ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| \right) + C$.

30. $\int \frac{du}{u^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} = -\frac{\mp\sqrt{u^2 \pm a^2}}{a^2 u} + C$.

31. $\int \left(u^2 \pm a^2\right)^{3/2} du = \frac{u}{8}\left(2u^2 \pm 5a^2\right)\sqrt{u^2 \pm a^2} + \frac{3a^4}{8}\ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$.

32. $\int \frac{du}{\left(u^2 \pm a^2\right)^{3/2}} = \frac{\pm u}{a^2\sqrt{u^2 \pm a^2}} + C$.

33. $\int \frac{u^2\, du}{\left(u^2 \pm a^2\right)^{3/2}} = \frac{-u}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} + \ln\left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C$.

- **Μορφές που περιέχουν** $\left(a^2-u^2\right)$ και $\left(u^2-a^2\right)$

34. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2-u^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right|+C$.

35. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+C$.

- **Εκθετικές και λογαριθμικές μορφές**

36. $\displaystyle\int e^u du=e^u+C$.

37. $\displaystyle\int a^u du=\frac{a^u}{\ln a}+C,\ a\succ 0,\ a\neq 1$.

38. $\displaystyle\int ue^{au}du=\frac{e^{au}}{a^2}(au-1)+C$.

39. $\displaystyle\int u^n e^{au}du=\frac{u^n e^{au}}{a}-\frac{n}{a}\int u^{n-1}e^{au}du$.

40. $\displaystyle\int \frac{e^{au}du}{u^n}=-\frac{e^{au}}{(n-1)u^{n-1}}+\frac{a}{n-1}\int\frac{e^{au}du}{u^{n-1}}$.

41. $\displaystyle\int \ln u\,du=u\ln u-u+C$.

42. $\displaystyle\int u^n\ln u\,du=\frac{u^{n+1}\ln u}{n+1}-\frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}+C,\ n\neq -1$.

43. $\displaystyle\int u^n\ln^m u\,du=\frac{u^{n+1}\ln^m u}{n+1}-\frac{m}{n+1}\int u^n\ln^{m-1}u\,du,\ m,n\neq -1$.

44. $\int \frac{du}{u \ln u} = \ln\left|\ln u\right| + C$.

45. $\int \frac{du}{a + be^{cu}} = \frac{1}{ac}\left(cu - \ln\left|a + be^{cu}\right|\right) + C$.

- **Διάφορες μορφές**

46. $\int \sqrt{\frac{a+u}{b+u}}\,du = \sqrt{(a+u)(b+u)} + (a-b)\ln\left(\sqrt{a+u} + \sqrt{b+u}\right) + C$.

47. $\int \frac{du}{\sqrt{(a+u)(b+u)}} = \ln\left|\frac{a+b}{2} + u + \sqrt{(a+u)(b+u)}\right| + C$.

48. $\int \sqrt{a + bu + cu^2}\,du = \frac{2cu+b}{4c}\sqrt{a+bu+cu^2} -$

$-\frac{b^2 - 4ac}{8c^{3/2}}\ln\left|2cu + b + 2\sqrt{c}\sqrt{a+bu+cu^2}\right| + C,\ c \succ 0$.

49. $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$.

50. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$.

51. $\int x \sin x dx = -x\cos x + \sin x + C$.

52. $\int \csc x dx = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$.

53. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc\sin x + C$.

54. $\int \frac{dx}{1+x^2} = Arc\tan x + C$.

55. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = Arc\sec x + C$.

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = Arc\sin\frac{x}{2} + C$.

57. $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} Arc\tan\frac{x}{3} + C$.

58. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{2} Arc\cos\frac{1}{x^2} + C$.

59. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = Arc\sin x + C$.

60. $\int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{6} Arc\tan\frac{2x}{3} + C$.

61. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

62. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$.

63. $\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$.

64. $\int \frac{dx}{9-x^2} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right| + C$.

65. $\int \frac{dx}{4x-x^2} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + C$.

66. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$

67. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$.

68. $\int x\cos x dx = -x\sin x + \cos x + C$.

69. $\int \sin^2 x dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$.

70. $\int \sec x dx = \ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$.

71. $\int \frac{dx}{x^2+6x+8} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+2}{x+4}\right| + C$.

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = Arc\sin\frac{x\sqrt{5}}{5} + C$.

73. $\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{\sqrt{5}}{5} Arc\tan\frac{x\sqrt{5}}{5} + C$.

74. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}} = Arc\sin e^x + C$.

75. $\int \frac{e^{2x} dx}{1+e^{4x}} = \frac{1}{2} Arc\tan e^{2x} + C$.

76. $\int Arc\tan x dx = xArc\tan x - \ln\sqrt{1+x^2} + C$.

77. $\int Arc\cos 2x dx = xArc\cos 2x - \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2} + C$.

78. $\int xArc\tan x dx = \frac{\left(x^2+1\right)}{2} Arc\tan x - \frac{x}{2} + C$.

79. $\int e^{ax}\sin bx dx = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C$.

80. $\int e^{ax}\cos bx dx = \frac{e^{ax}\left(b\sin bx + a\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C$.

81. $\int x^2 \sin x dx = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.

82. $\int \sqrt{4-x^2} dx = 2Arc\sin\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$.

83. $\int \sin^3 x dx = -\frac{2}{3}\cos^3 x - \sin^2 x\cos x + C$.

84. $\int x^3 \sin x dx = -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C$.

85. $\int \sin x \sin 3x dx = \frac{1}{8}\sin 3x\cos x - \frac{3}{8}\sin x\cos 3x + C$.

86. $\int e^{2x}\cos 3x dx = Ae^{2x}\sin 3x + Be^{2x}\cos 3x + C$.

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

1. **ΓΕΩΡΓΟΥΔΗΣ Ι., ΜΑΚΡΥΓΙΑΝΝΗΣ ΑΡ., ΣΑΣΣΑΛΟΣ ΣΠ.,** *Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών,* Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1995.

2. **ΖΑΓΟΥΡΑΣ Χ. Γ. - ΓΕΩΡΓΙΟΥ Δ. Ν.,** *Γενικά Μαθηματικά Ι,* Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα, 2003.

3. **ΚΑΤΩΠΟΔΗΣ Ε., ΜΑΚΡΥΓΙΑΝΝΗΣ ΑΡ., ΣΑΣΑΛΛΟΣ ΣΠ.,** *Άλγεβρα - Αναλυτική Γεωμετρία,* (Τόμος Α), Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1994.

4. **ΚΑΤΩΠΟΔΗΣ Ε., ΜΑΚΡΥΓΙΑΝΝΗΣ ΑΡ., ΣΑΣΑΛΛΟΣ ΣΠ.,** *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,* (Τόμος Β), Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1994.

5. **ΚΑΠΠΟΥ Δ.,** *Απειροστικός Λογισμός,* Αθήνα, 1962.

6. **ΛΕΓΑΤΟΣ ΓΕΡ.,** *Ανάλυση (Μαθηματικά Ι - τόμος 2),* Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1990.

7. **ΝΤΟΥΓΙΑ Σ.,** *Απειροστικός Λογισμός 1,* Ιωάννινα, 1984.

8. **ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Ε., ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Ι., ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Α.,** *Μαθήματα Γενικών Μαθηματικών,* Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1995.

9. **ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Ε., ΠΑΠΑΪΩΑΝΝΟΥ Ι.,** *Θέματα Μαθηματικής Ανάλυσης Γενικών,* Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1998.

10. **ΧΑΤΖΗΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ.,** *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,* Σύγχρονη Εκδοτική, Αθήνα, 1990.

11. **ΦΡΑΓΚΟΣ Χ.,** *Ανώτερα Μαθηματικά,* Εκδόσεις Αθαν. Σταμούλης, Αθήνα, 1999.

12. **APOSTOL T. M.,** *Calulus,* 2nd Ed., John Wiley and Sons, Vol. 1,2, New York 1990.

13. **AYRES F. JR.,** *Differential and Integral Calculus,* 2nd Edition, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company.

14. **GOLDSTEIN L., LAY D., SCHNEIDER D.,** *Calculus and its Applications,* Prentice Hall International Editions, 1993.

15. **HOLDER L. I., DEFRANZA J., PARACHOFF J. M.,** *Calculus,* 2^{nd} Edition, Brooks-Cole Publishing Company.

16. **LARSON R. E., HOSTETLER R. P., EDWARDS B. H.,** *Calculus with Analytic Geometry,* 5^{th} Edition, D.C. Heath and Co., 1994.

17. **PARZYNSKI W.,** *Introduction to Mathematical Analysis,* London, 1992.

18. **PROTTER M., MORREY CH.,** *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός με Αναλυτική Γεωμετρία,* (Τόμοι Α & Β), Εκδόσεις Παπαζήση.

19. **SPIEGEL M. R.,** *Advanced Calculus,* Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1963.

20. **STEIN S. K., BARCELLOS A.,** *Calculus and Analytic Geometry,* 5^{th} Edition, McGraw-Hill, Inc., 1992.

21. **STEWART J.,** *Calculus,* 3^{rd} Edition, Brooks-Cole Publishing Company, 1995.