

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ
Кафедра программного обеспечения информационных технологий

Факультет КСиС

Специальность ПОИТ

Лабораторная работа №3
по дисциплине «Методы оптимизации»
на тему «Приложения линейного программирования»

Выполнил студент: Верещагин Н.В.

группа 851006

Проверил: Филатченкова О. А.

Минск 2020

1. Формулировка задачи (Вариант 1)

Задание 1. Варианты 1-16

После нескольких лет эксплуатации промышленное оборудование оказывается в одном из следующих состояний:

- 1) оборудование может использоваться в очередном году после профилактического ремонта;
- 2) для безаварийной работы оборудования в дальнейшем следует заменить отдельные его детали и узлы;
- 3) оборудование требует капитального ремонта или замены.

В зависимости от сложившейся ситуации руководство предприятия в состоянии принять такие решения: 1) отремонтировать оборудование силами заводских специалистов, что потребует, в зависимости от обстановки, затрат, равных a_1 , a_2 или a_3 ден. ед.; 2) вызвать специальную бригаду ремонтников, расходы в этом случае составят b_1 , b_2 или b_3 ден. ед.; 3) заменить оборудование новым, реализовав устаревшее оборудование по его остаточной стоимости; совокупные затраты в результате этого мероприятия будут равны соответственно c_1 , c_2 или c_3 ден. ед. Указанные выше расходы предприятия включают кроме стоимости ремонта и заменяемых деталей и узлов убытки, вызванные ухудшением качества выпускаемой продукции, простоем неисправного оборудования, а также затраты на установку и отладку нового оборудования. Требуется:

1) придать описанной ситуации игровую схему, установить характер игры и выявить ее участников, указать возможные чистые стратегии сторон;

2) составить платежную матрицу;

3) выяснить, какое решение о работе оборудования в предстоящем году целесообразно рекомендовать руководству предприятия, чтобы минимизировать потери при следующих предположениях:

а) накопленный на предприятии опыт эксплуатации аналогичного оборудования показывает, что вероятности указанных выше состояний оборудования равны соответственно q_1 , q_2 , q_3 ;

б) имеющийся опыт свидетельствует о том, что все три возможных состояния оборудования равновероятны;

в) о вероятностях состояний оборудования ничего определенного сказать нельзя.

Указание. В п. 3 следует найти оптимальные чистые стратегии, пользуясь: в п. 3) а) — критерием Байеса, в п. 3) б) — критерием Лапласа, в п. 3) в) — критериями Вальда, Сэвиджа, Гурвица (значение параметра γ в критерии Гурвица задается).

4) Решить в смешанных стратегиях (сведением к задаче линейного программирования).

Задание 2

Проект представлен сетевым графиком. Для каждой работы известна ее продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij} . Пусть задан срок выполнения проекта t_0 , а расчетное $t_{кр} > t_0$. Продолжительность выполнения работы (i,j) линейно зависит от суммы дополнительно вложенных средств x_{ij} и выражается соотношением: $t'_{ij} = t_{ij} - k_{ij}x_{ij}$. Технологические коэффициенты k_{ij} известны.

Требуется найти: 1) критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график

2) построить линейный график (график Ганта),

3) такие t''_{ij} , t^0_{ij} , x_{ij} , чтобы:

- срок выполнения всего комплекса работ не превышал заданной величины t_0 ;
- суммарное количество дополнительно вложенных средств было минимальным;
- продолжительность выполнения каждой работы t'_{ij} была не меньше заданной величины d_{ij} .

4) по найденным данным найти новый критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график

5) построить линейный график,

6) сделать выводы

2. Практическая часть. Задание 1

Одним из участников игры является руководство предприятия, заинтересованное в минимизации потерь — игрок А. Вторым участником игры является «природа» (совокупность объективных неопределенных факторов) — игрок П, приводящий промышленное оборудование в то или иное состояние.

A1 - отремонтировать оборудование силами заводских специалистов,

A2 - пригласить специалистов со стороны,

A3 - заменить оборудование новым.

П1 - оборудование может использоваться в очередном году после профилактического ремонта,

П2 - для безаварийной работы оборудования в дальнейшем следует заменить отдельные его детали и узлы,

П3 - оборудование требует капитального ремонта или замены.

Платёжная матрица.

	П1	П2	П3	Min	max
A1	-10	-8	-13	-13	-8
A2	-18	-14	-10	-18	-10
A3	-25	-12	-9	-25	-9
Max	-10	-8	-9		

Критерий Байеса

$$\Sigma(a_{1j}q_j) = (-10) * 0.35 + (-8) * 0.45 + (-13) * 0.2 = -9.7$$

$$\Sigma(a_{2j}q_j) = (-18) * 0.35 + (-14) * 0.45 + (-10) * 0.2 = -12.8$$

$$\Sigma(a_{3j}q_j) = (-25) * 0.35 + (-8) * 0.45 + (-9) * 0.2 = -14.15$$

Выбираем из $(-9.7; -12.8; -14.15)$ максимальный элемент $Max = -9.7$

Вывод: выбираем первую стратегию.

Критерий Лапласа

$$q_1 = q_2 = q_3 = 0.33.$$

$$\Sigma(a_{1j}q_j) = (-10) * 0.33 + (-8) * 0.33 + (-13) * 0.33 = -10.23$$

$$\Sigma(a_{2j}q_j) = (-18) * 0.33 + (-14) * 0.33 + (-10) * 0.33 = -13.86$$

$$\Sigma(a_{3j}q_j) = (-25) * 0.33 + (-8) * 0.33 + (-9) * 0.33 = -13.86$$

Выбираем из $(-10.23; -13.86; -13.86)$ максимальный элемент $Max = -10.23$

Вывод: выбираем первую стратегию.

Критерий Вальда

По критерию Вальда за оптимальную принимается чистая стратегия, для которой $a = \max(\min a_{ij})$.

$$\min a_{1j} = -13$$

$$\min a_{2j} = -18$$

$$\min a_{3j} = -25$$

Выбираем из $(-13; -18; -25)$ максимальный элемент $\max = -13$

Вывод: выбираем первую стратегию.

Критерий Сэвиджа

Находим матрицу рисков.

	П1	П2	П3
A1	0	0	4
A2	8	6	1
A3	15	4	0

$$\max a_{1j} = 4$$

$$\max a_{2j} = 8$$

$$\max a_{3j} = 15$$

Выбираем из $(4; 8; 15)$ минимальный элемент $\min = 4$

Вывод: выбираем первую стратегию.

Критерий Гурвица ($\gamma = 0.8$)

За оптимальную принимается та стратегия, для которой выполняется соотношение: $\max(s_i)$, где $s_i = \gamma \min(a_{ij}) + (1 - \gamma)\max(a_{ij})$.

$$s_1 = 0.8 * (-13) + (1 - 0.8) * (-8) = -12$$

$$s_2 = 0.8 * (-18) + (1 - 0.8) * (-10) = -16,4$$

$$s_3 = 0.8 * (-25) + (1 - 0.8) * (-9) = -21,8$$

Выбираем из $(-12; -16,4; -21,8)$ максимальный $\max = -12$

Вывод: выбираем первую стратегию.

Так как цены игр меньше нуля, то прибавляем ко всем элементам платёжной матрицы некоторую константу. Пусть $const = 30$.

	П1	П2	П3	Min	Max
A1	20	22	17	17	22
A2	12	16	20	12	20
A3	5	18	21	5	21
Max	20	22	21		

Математическая задача для игрока А:

$$z(x) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 12x_2 + 5x_3 \geq 1, \\ 22x_1 + 16x_2 + 18x_3 \geq 1, \\ 17x_1 + 20x_2 + 21x_3 \geq 1, \end{cases} \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Математическая задача для игрока П:

$$f(y) = y_1 + y_2 + y_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 20y_1 + 22y_2 + 17y_3 \leq 1, \\ 12y_1 + 16y_2 + 20y_3 \leq 1, \\ 5y_1 + 18y_2 + 21y_3 \leq 1, \end{cases} \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Оптимальный план:

$$x_1 = 2/49, x_2 = 3/196, x_3 = 0$$

$$y_1 = 3/196, y_2 = 0, y_3 = 2/49$$

$$z(x) = 1 * 2/49 + 1 * 3/196 + 1 * 0 = 11/196$$

$$f(y) = 1 * 3/196 + 1 * 0 + 1 * 2/49 = 11/196$$

$$\text{Цена игры: } \vartheta = \frac{1}{z(x)} = \frac{196}{11} = 17.82$$

$17.82 - 30 = -12.18$ – значит цена игры, лежащая в промежутке $[-13; -12]$.

При этом стратегия, оптимальная для игрока, определяется как:

$$p_1 = 0.727, p_2 = 0.273, p_3 = 0$$

$$q_1 = 0.273, q_2 = 0, q_3 = 0.727$$

3. Практическая часть. Задание 2

Постановка задачи

Проект представлен сетевым графиком. Для каждой работы известна её продолжительность t_{ij} и минимально возможное время выполнения d_{ij} . Пусть задан срок выполнения проекта t_0 , а расчетное время $t_{кр} > t_0$. Продолжительность выполнения работы (i,j) линейно зависит от суммы дополнительно вложенных средств x_{ij} и выражается соотношением $t_{ij} = t_{ij}^0 - k_{ij}x_{ij}$. Технологические коэффициенты k_{ij} известны.

Требуется найти:

- 1) Критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график
- 2) Построить линейный график (график Ганта)
- 3) Такие t_{ij}^n , t_{ij}^0 , x_{ij} , чтобы:
 - Срок выполнения всего комплекса работ не превышал заданной величины t_0 ;
 - Суммарное количество дополнительно вложенных средств было минимальным;
 - Продолжительность выполнения каждой t'_{ij} была не меньше заданной величины d_{ij} .
- 4) По найденным данным найти новый критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график
- 5) Построить линейный график
- 6) Сделать выводы

Условие индивидуального задания

Параметры	Работы										Срок выполнения проекта t_0
	1,2	1,3	1,4	2,4	2,5	3,4	3,6	4,5	4,6	5,6	
t_{ij}	6	15	26	7	11	10	11	12	13	17	50
d_{ij}	5	13	20	5	9	7	8	9	12	15	
k_{ij}	0,07	0,2	0,3	0,1	0,05	0,1	0,04	0,05	0,15	0,5	

Где:

t_{ij} – продолжительность выполнения работы;

d_{ij} – минимально возможное время выполнения;

k_{ij} – технологический коэффициент работы.

Критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени, построить сетевой график

$t_p(i)$ – **ранний срок свершения события i** . Самый ранний момент времени к которому завершаются все предшествующие этому событию работы. Так как может быть несколько путей, предшествующих данному событию, то ранний срок свершения события определяется продолжительностью максимального предшествующего пути $t_p(i) = t[L_1(i)]$, где $L_1(i)$ – **максимальный предшествующий путь**.

$t_n(i)$ – **поздний срок свершения события i** . Самый поздний момент, после которого остается ровно столько времени, сколько необходимо для завершения всех работ, следующих за этим событием, без превышения критического времени $t_{кр}$. $t_n(i) = t_{кр} - t[L_2(i)]$ где $L_2(i)$ – **длина максимального из последующих путей**.

Резерв времени события $R(i)$ равен Разности между поздним и ранним сроками свершения события: $R(i) = t_n(i) - t_p(i)$.

Ранний срок начала работы (i,j) равен раннему сроку свершения события i : $t_{рн}(i,j) = t_p(i)$.

Ранний срок окончания работы (i,j) равен сумме раннего срока свершения начального события работы и ее продолжительности: $t_{ро}(i,j) = t_p(j) + t_{ij}$.

Поздний срок окончания работы (i,j) совпадает с поздним сроком свершения ее конечного события: $t_{по}(i,j) = t_n(j)$.

Поздний срок начала работы (i,j) равен разности между поздним сроком свершения $t_{пн}(i,j) = t_n(j) - t_{ij}$.

Полный резерв времени работы

$$R_{п}(i,j) = t_{п}(j) - t_{п}(i) - t_{ij}$$

Независимый (свободный) резерв времени работы

$$R_{н}(i,j) = t_{п}(j) - t_{п}(i) - t_{ij}$$

Частный резерв времени работы первого вида

$$R'(i,j) = t_{п}(j) - t_{п}(i) - t_{ij}$$

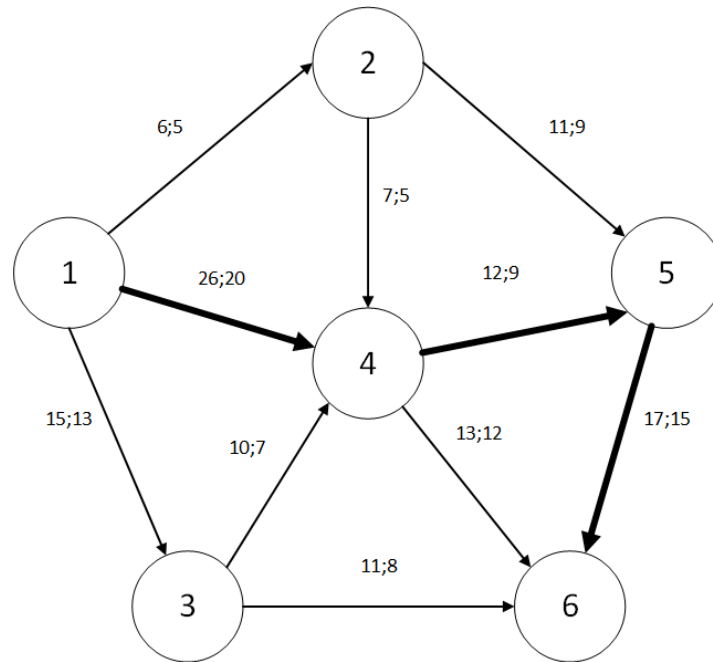
Частный резерв времени работы второго вида

$$R''(i,j) = t_{п}(j) - t_{п}(i) - t_{ij}$$

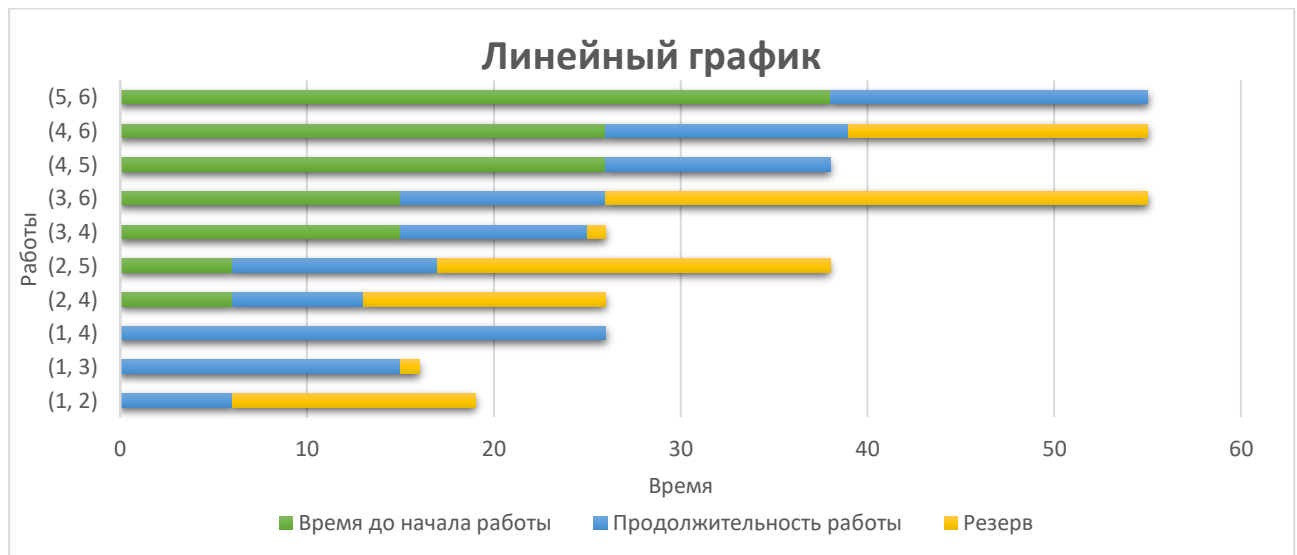
События	$t_p(i)$	$t_n(i)$	$R_n(i)$
1	0	0	0
2	6	19	13
3	15	16	1
4	26	26	0
5	38	38	0
6	55	55	0

Работы	Продолж. работ	$t_{pn}(i,j)$	$t_{po}(i,j)$	$t_{no}(i,j)$	$t_{nn}(i,j)$	$R_n(i,j)$	R_n	$R'(i,j)$	$R''(i,j)$
(1, 2)	6	0	6	19	13	13	0	13	0
(1, 3)	15	0	15	16	1	1	0	1	0
(1, 4)	26	0	26	26	0	0	0	0	0
(2, 4)	7	6	13	26	19	13	0	0	13
(2, 5)	11	6	17	38	27	21	8	8	21
(3, 4)	10	15	25	26	16	1	0	0	1
(3, 6)	11	15	26	55	44	29	28	28	29
(4, 5)	12	26	38	38	26	0	0	0	0
(4, 6)	13	26	39	55	42	16	16	16	16
(5, 6)	17	38	55	55	38	0	0	0	0

Критический путь: (1, 4) → (4, 5) → (5, 6)



Линейный график (график Ганта)



Оптимизация

$$f = x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{24} + x_{25} + x_{34} + x_{36} + x_{45} + x_{46} + x_{56} \rightarrow \min$$

Ограничения:

Срок выполнения проекта не должен превышать $t_0 = 50$:

$$t_{36}^0 \leq 50; t_{46}^0 \leq 50; t_{56}^0 \leq 50;$$

Продолжительность выполнения каждой работы должна быть не меньше минимально возможного времени:

$$\begin{aligned} t_{12}^0 - t_{12}^H &\geq 5; \\ t_{13}^0 - t_{13}^H &\geq 13; \\ t_{14}^0 - t_{14}^H &\geq 20; \\ t_{24}^0 - t_{24}^H &\geq 5; \\ t_{25}^0 - t_{25}^H &\geq 9; \\ t_{34}^0 - t_{34}^H &\geq 7; \\ t_{36}^0 - t_{36}^H &\geq 8; \\ t_{45}^0 - t_{45}^H &\geq 9; \\ t_{46}^0 - t_{46}^H &\geq 12; \\ t_{56}^0 - t_{56}^H &\geq 15 \end{aligned}$$

Зависимость продолжительности работ от вложенных средств:

$$\begin{aligned} t_{12}^0 - t_{12}^H &= 6 - 0.07x_{12} \\ t_{13}^0 - t_{13}^H &= 15 - 0.2x_{13} \\ t_{14}^0 - t_{14}^H &= 26 - 0.3x_{14} \\ t_{24}^0 - t_{24}^H &= 7 - 0.1x_{24} \\ t_{25}^0 - t_{25}^H &= 11 - 0.05x_{25} \\ t_{34}^0 - t_{34}^H &= 10 - 0.1x_{34} \\ t_{36}^0 - t_{36}^H &= 11 - 0.04x_{36} \\ t_{45}^0 - t_{45}^H &= 12 - 0.05x_{45} \\ t_{46}^0 - t_{46}^H &= 13 - 0.15x_{46} \\ t_{56}^0 - t_{56}^H &= 17 - 0.5x_{56} \end{aligned}$$

Время начала выполнения каждой работы должно быть не меньше времени окончания непосредственно предшествующей ей работы:

$$\begin{aligned} t_{12}^H &= 0; \\ t_{13}^H &= 0; \\ t_{14}^H &= 0; \\ t_{24}^H &\geq t_{12}^0; \\ t_{25}^H &\geq t_{12}^0; \\ t_{34}^H &\geq t_{13}^0; \\ t_{36}^H &\geq t_{13}^0; \\ t_{45}^H &\geq t_{14}^0; \\ t_{45}^H &\geq t_{24}^0; \\ t_{45}^H &\geq t_{34}^0; \\ t_{46}^H &\geq t_{14}^0; \\ t_{46}^H &\geq t_{24}^0; \\ t_{46}^H &\geq t_{34}^0; \end{aligned}$$

$$t_{56}^H \geq t_{25}^0;$$

$$t_{56}^H \geq t_{45}^0;$$

Результат:

$$x_{12} = 0; x_{13} = 10; x_{14} = 10; x_{24} = 0; x_{25} = 0;$$

$$x_{34} = 0; x_{36} = 0; x_{45} = 0; x_{46} = 0; x_{56} = 4.$$

$$t_{12}^H = 0; t_{13}^H = 0; t_{14}^H = 0; t_{24}^H = 6; t_{25}^H = 6;$$

$$t_{34}^H = 13; t_{36}^H = 13; t_{45}^H = 23; t_{46}^H = 23; t_{56}^H = 35.$$

$$t_{12}^0 = 6; t_{13}^0 = 13; t_{14}^0 = 23; t_{24}^0 = 13; t_{25}^0 = 17;$$

$$t_{34}^0 = 23; t_{36}^0 = 24; t_{45}^0 = 35; t_{46}^0 = 36; t_{56}^0 = 50.$$

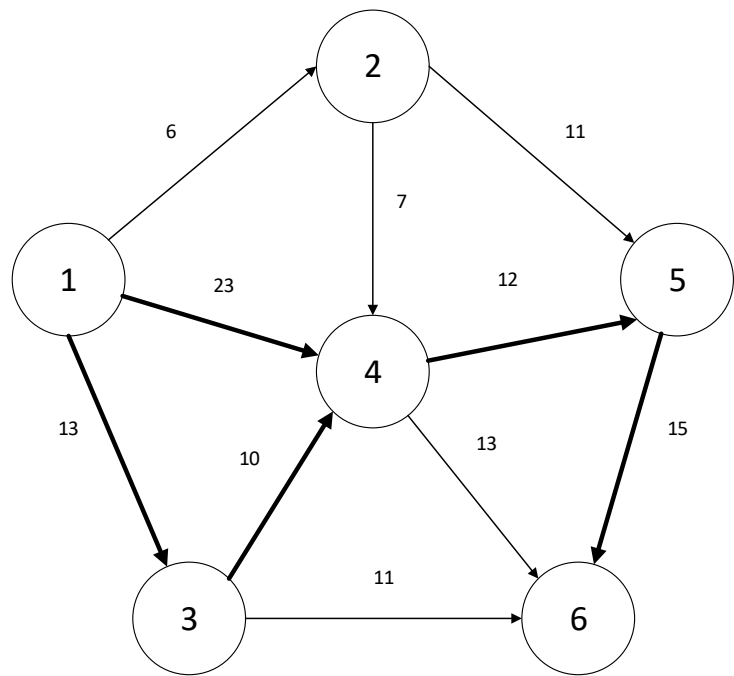
Новый критический путь, ранние и поздние сроки начала и окончания работ, резервы времени.

События	$t_p(i)$	$t_n(i)$	$R_n(i)$
1	0	0	0
2	6	6	0
3	13	13	0
4	23	23	0
5	35	35	0
6	50	50	0

Работы	Продолж. работ	$t_{pn}(i,j)$	$t_{po}(i,j)$	$t_{no}(i,j)$	$t_{nn}(i,j)$	$R_n(i,j)$	R_n	$R'(i,j)$	$R''(i,j)$
(1, 2)	6	0	6	6	0	0	0	0	0
(1, 3)	13	0	13	13	0	0	0	0	0
(1, 4)	23	0	23	23	0	0	0	0	0
(2, 4)	7	6	13	23	16	10	10	10	10
(2, 5)	11	6	17	35	24	18	18	18	18
(3, 4)	10	13	23	23	13	0	0	0	0
(3, 6)	11	13	24	50	39	26	26	26	26
(4, 5)	12	23	35	35	23	0	0	0	0

(4, 6)	13	23	36	50	37	14	14	14	14
(5, 6)	15	35	50	50	35	0	0	0	0

Критические пути:
 (1, 4) → (4, 5) → (5, 6)
 (1, 3) → (3, 4) → (4, 5) → (5, 6)



Новый линейный график (график Ганта)



Выводы

Чтобы выполнить работы проекта за директивное время $t_0 = 50$, необходимо дополнительно вложить 24 ден. ед. При этом средства распределятся следующим образом: 10 ден. ед. – в работу (1,3), 10 ден. ед. – в работу (1,4) и 4 ден. ед. – в работу (5,6), что приведет к сокращению продолжительности работы (1,3) на 2 дня, работы (1,4) – на 3 дня, и работы (5,6) – на 2 дня. Сокращение срока реализации проекта за счет вложения дополнительных средств составит 5 ед. времени.