Randomizovani algoritam za uparivanje u bipartitnom grafu

Seminarski rad u okviru kursa
Konstrukcija i analiza algoritama
Matematički fakultet

Nikola Belaković 1023/2023

8. februar 2024.

Sažetak

U okviru ovog rada, detaljno će biti opisan randomizovani algoritam za pronalaženje savršenog uparivanja u bipartitnom grafu. Glavna karakteristika ovog algoritma je njegova efikasnost, s obzirom da se računski složen korak svodi na jednostavnija izračunavanja. Kroz implementaciju ovog algoritma, biće analizirane njegove performanse, kao i vreme izvršavanja na odabranim test instancama. Cilj ovog rada je pružiti dublje razumevanje algoritma, istražiti njegove primene i doprineti razumevanju problema uparivanja u bipartitnom grafu.

Sadržaj

1 Uvod

U radu [1] predstavljen je revolucionarni algoritam za pronalaženje maksimalnog uparivanja u opštem grafu, kao i algoritam za pronalaženje savršenog uparivanja u bipartitnom grafu. Ključna karakteristika ovog algoritma je njegova jednostavnost, budući da se računski zahtevan korak svodi samo na invertovanje jedne celobrojne matrice.

Fokus rada usmeren je ka izolacionoj lemi, randomizovanom pristupu koji se primenjuje u paralelnom izračunavanju i randomizovanim redukcijama. Proučava se primena izolacione leme na rešavanje problema uparivanja u grafu.

U radu se takođe razmatra istorija problema maksimalnog uparivanja, s posebnim naglaskom na algebarski pristup koji je proistekao iz rada pionira poput Tuttea i Edmondsa. Autori istražuju paralelne metode za rešavanje problema uparivanja, koristeći teoreme o nesingularnosti matrica i koncepte randomizacije [1].

Implementacija algoritma koji je predstavljen u radu [1], kao i analiza njegove efikasnosti, predstavljaju važan korak ka razumevanju ovog novog pristupa u rešavanju problema savršenog uparivanja u bipartitnom grafu i oni će biti prikazani u daljem tekstu.

2 Opis problema

Savršeno uparivanje u bipartitnom grafu predstavlja ključan koncept u teoriji grafova. Da bismo razumeli ovaj problem, prvo je važno definisati osnovne pojmove:

Bipartitni graf: Bipartitni graf $G = (U, V, E)$ je graf čiji se čvorovi mogu podeliti na dva disjunktna podskupa, obično označene sa U i V, tako da u grafu postoje samo grane između čvorova iz različitih podskupova i one su označene sa E.

Uparivanje: Uparivanje u grafu predstavlja skup disjunktnih grana (grana bez zajedničkih čvorova). Ovo ime potiče od činjenice da se grane mogu shvatiti kao parovi čvorova. Bitno je da svaki čvor pripada najviše jednoj grani.

Savršeno uparivanje: Savršeno uparivanje je uparivanje u kome su svi čvorovi upareni.

Maksimalno uparivanje: Maksimalno uparivanje je uparivanje koje se ne može proširiti dodavanjem nove grane [2].

Savršeno uparivanje u bipartitnom grafu predstavlja poseban slučaj uparivanja gde svaki čvor iz skupa U ima tačno jednog partner u skupu V i obrnuto. Da bi graf imao savršeno uparivanje, neophodno je da važi uslov $|U| = |V|$, gde $|U|$ predstavlja broj čvorova u skupu U i $|V|$ predstavlja broj čvorova u skupu V.

Problem pronalaženja savršenog uparivanja u bipartitnom grafu svodi se na traženje skupa disjunktnih grana koji povezuje čvorove na način da nema nespojenih čvorova. Ovaj problem ima značajne primene u različitim oblastima, uključujući teoriju mreža, teoriju igara i optimizaciju.

3 Izolaciona lema

Definiše se familija skupova (S, F) koji se sastoji od konačnog skupa elemenata $S = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ i familije F podskupova skupa S, gdje je $F = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$, $S_j \subset S$, pri čemu važi $1 \leq j \leq k$.

Neka svakom elementu $X_i \in S$ bude dodeljena težina w_i. Težina skupa S_j definisana je kao $\sum_{x_i \in S_j} w_i$.

Izolaciona lema tvrdi da, ukoliko težine elemenata biramo uniformno i nezavisno iz skupa $[1, 2n]$ tada sa verovatnoćom većom od $\frac{1}{2}$ u familiji F postoji jedinstven skup minimalne težine.

Lema se dokazuje fiksiranjem težina elemenata, definisanjem praga za element X_i kao broj a_i, tako da ako je težina w_i manja ili jednaka a_i, onda je X_i sadržan u nekom podskupu minimalne težine S_i, inače nije. Element X_i je singularan ako je težina tačno jednaka pragu a_i. Prag a_i je nezavisan od težine w_i, a verovatnoća da je X_i singularan je $\leq \frac{1}{2n}$. Pošto S sadrži n elemenata sledi da je verovatnoća da postoji singularan element $\leq \frac{1}{2}$. Time se garantuje da, sa verovatnoćom većom od $\frac{1}{2}$, ne postoji nijedan singularan element, što znači da postoji jedinstven skup minimalne težine. Ova lema ima značajnu primenu u analizi paralelnih algoritama i randomizovanih redukcija [1].

4 Algoritam za traženje savršenog uparivanja u bipartitnom grafu

Notacija: Element na (i, j)-tom mestu matrice A predstavićemo kao a_{ij}, podmatricu koja se dobija uklanjanjem i-te vrste i j-te kolone kao A_{ij}, determinantu matrice označićemo sa $|A|$, a adjungovanu matricu sa $\mathrm{adj}(A)$.

Problem: Pronaći savršeno uparivanje u grafu $G = (U, V, E)$.

Ulaz: Graf koji sadrži savršeno uparivanje.

Algoritam:

1. Izračunati $|B|$ i težinu w.

2. Izračunati adjungovanu matricu $\mathrm{adj}(B)$, njen (j, i)-ti element će biti minor $|B_{ij}|$.

3. Za svaku granu (u_i, v_j) uraditi paralelno:

Izračunati vrednost $\frac{|B_{ij}| \cdot 2^{w_{ij}}}{2^w}$ i ako je ta vrednost neparna, dodati granu (u_i, v_j) u uparivanje.

Razmotrimo skup grana E grafa G i familiju podskupova skupa grana od kojih svako predstavlja savrseno uparivanje u G. Svakoj od grana grafa se pridruzuje tezina kao jedna od vrednosti iz skupa $[1, 2m]$, gde je $m = |E|$. Svaka od vrednosti je jednako verovatna i tezina jedne grane se bira nezavisno od tezina ostalih grana. Prema Izolacionoj lemi, minimalno savršeno uparivanje u G će biti jedinstveno sa verovatnoćom barem $\frac{1}{2}$.

Označimo čvorove grafa G sa $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ i $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, a matricu povezanosti grafa G, dimenzije $n \times n$ sa D. Vrste matrice povezanosti odgovaraju čvorovima skupa U, a kolone čvorovima skupa V. Zamena jedinica u matrici D brojevima $2^{w_{ij}}$, gde je w_{ij} težina dodeljena grani (u_i, v_j), daje matricu B.

Lema 1: Pretpostavimo da je minimalno savršeno uparivanje u G jedinstveno. Neka je to uparivanje M, a njegova težina w. Tada važi $|B| \neq 0$, i najveći eksponent broja 2 koji deli $|B|$ je 2^w.

Dakle, evalacijom $|B|$, možemo odrediti težinu minimalnog uparivanja. Sledeća lema će nam omogućiti da pronađemo to uparivanje.

Lema 2: Neka je M jedinstveno minimalno uparivanje u G, a w njegova težina. Grana (u_i, v_j) pripada M ako i samo ako je $\frac{|B_{ij}| \cdot 2^{w_{ij}}}{2^w}$ neparno [1].

5 Implementacija algoritma

Implementacija je napisana u programskom jeziku C++ i koristi GMP biblioteku za aritmetiku proizvoljne preciznosti. Program koristi biblioteku GLFW za kreiranje jednostavnog grafičkog prikaza bipartitnog grafa.

Učitavanje grafa: Implementirana je funkcija `readBipartiteGraphFromFile` koja omogućava čitanje bipartitnog grafa iz datoteke. Ako nije navedena datoteka, korisnik može uneti graf sa tastature koji se učitava funkcijom `readBipartiteGraphFromStdin`.

Generisanje slučajnih težina grana: Koristi se funkcija `generateRandomWeights` za generisanje slučajnih težina grana u grafu.

Rad sa binarnom matricom: Binarna matrica D se koristi za kodiranje grana. Ova matrica se inicijalizuje i ažurira kako bi odražavala strukturu bipartitnog grafa i na osnovu nje se računa matrica B, prema opisu algoritma.

Izračunavanje determinante i adjungovane matrice: Implementirane su funkcije `determinant` za izračunavanje determinante matrice i `adjointMatrix` za izračunavanje adjungovane matrice.

Savršeno uparivanje: Algoritam za savršeno uparivanje se koristi kako bi se odredile grane koje čine savršeno uparivanje u bipartitnom grafu. Za svaku granu se prvo izračunava vrednost $\frac{|B_{ij}| \cdot 2^{w_{ij}}}{2^w}$ i ukoliko je ta vrednost neparna, grana se dodaje u savršeno uparivanje.

Vizualizacija grafa: Korišćena je biblioteka `GLFW` za vizualizaciju bipartitnog grafa. Čvorovi su predstavljeni tačkama, a grane su prikazane dužima. Crvenom bojom su obojene grane koje su deo savršenog uparivanja.

Efikasnost i brojenje iteracija: Prati se vreme izvršavanja i broj iteracija kako bi se analizirala efikasnost algoritma.

Kontrole tastature: Implementirane su kontrole tastature pomoću `GLFW`-a. Pritiskom na taster 'S', izračunava se novo savršeno uparivanje. Pritiskom na taster 'Escape', prozor se zatvara.

6 Rezultati

U nastavku će biti prikazani rezultati rada algoritma na 4 različita bipartitna grafa. Alogritam je pokrenut po 5 puta za svaki graf i u tabeli su upisana vremena izvršavanja algoritma, kao i ukupno i prosečno vreme.

6.1 Graf 1

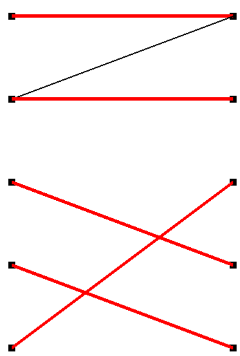
Podaci o grafu se nalaze u datoteci 'ulaz.txt'. Broj cvorova u podskupu U i V je 5, a ukupan broj grana je 6.

6.1.1 Vreme izvršavanja

Iteracija	**Vreme izvršavanja (mikrosekunde)**
1	482
2	560
3	681
4	479
5	474
Ukupno vreme	2676
Prosečno vreme	535

Tabela 1: Vreme izvršavanja i statistike.

6.1.2 Prikaz grafa



Slika 1: Graf dobijen algoritmom za savršeno uparivanje za Graf 1.

6.2 Graf 2

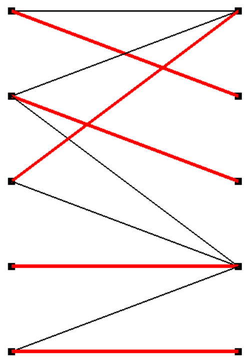
Podaci o grafu se nalaze u datoteci 'ulaz2.txt'. Broj cvorova u podskupu U i V je 5, a ukupan broj grana je 10.

6.2.1 Vreme izvršavanja

Iteracija	**Vreme izvršavanja (mikrosekunde)**
1	428
2	397
3	506
4	561
5	698
Ukupno vreme	2590
Prosečno vreme	518

Tabela 2: Vreme izvršavanja i statistike.

6.2.2 Prikaz grafa



Slika 2: Graf dobijen algoritmom za savršeno uparivanje za Graf 2.

6.3 Graf 3

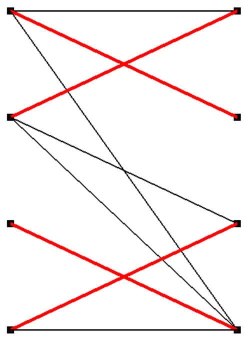
Podaci o grafu se nalaze u datoteci 'ulaz3.txt'. Broj cvorova u podskupu U i V je 4, a ukupan broj grana je 9.

6.3.1 Vreme izvršavanja

Iteracija	**Vreme izvršavanja (mikrosekunde)**
1	240
2	185
3	169
4	186
5	299
Ukupno vreme	1079
Prosečno vreme	215

Tabela 3: Vreme izvršavanja i statistike.

6.3.2 Prikaz grafa



Slika 3: Graf dobijen algoritmom za savršeno uparivanje za Graf 3.

6.4 Graf 4

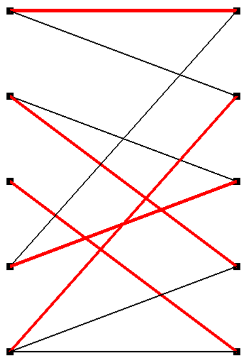
Podaci o grafu se nalaze u datoteci 'ulaz4.txt'. Broj cvorova u podskupu U i V je 5, a ukupan broj grana je 10.

6.4.1 Vreme izvršavanja

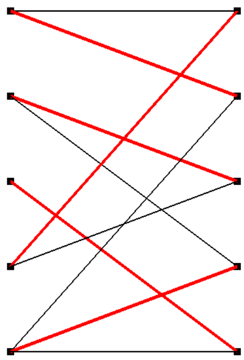
Iteracija	**Vreme izvršavanja (mikrosekunde)**
1	473
2	714
3	551
4	543
5	547
Ukupno vreme	2828
Prosečno vreme	565

Tabela 4: Vreme izvršavanja i statistike.

6.4.2 Prikaz grafa



Slika 4: Uparivanje 1



Slika 5: Uparivanje 2

Literatura

[1] Vijay V. Vazirani Ketan Mulmuley, Umesh V. Vazirani. Matching is as easy as matrix inversion. *Combinatorica 7*, 1987.

[2] Vesna Marinković. Grafovski algoritmi.