A logo of a globe

Description automatically generatedA blue circle with white text and a logo

Description automatically generatedUNIVERZITET U BANJOJ LUCI

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIKA I INFORMATIKA, INFORMATIKA

KRIPTOGRAFIJA I RAČUNARSKA ZAŠTITA

***METRIC DIMENSION PROBLEM***

Seminarski rad

Student: Predmetni profesor:

Nikola Đajić (7/19) doc. dr Marko Đukanović

Banja Luka, februar 2025

SADRZAJ

**UVOD**

Grafovi predstavljaju jedan od osnovnih modela za analizu i reprezentaciju kompleksnih sistema u raznim oblastima, uključujući računarstvo, biologiju, društvene mreže i telekomunikacije. Jedan od problema koje pronalazimo u teoriji grafova jeste **problem metričke dimenzije** (***Metric Dimension Problem*** *–* ***MDP***), koji se odnosi na određivanje minimalnog skupa čvorova, koji zovemo **rezolventni skup**, tako da se svi preostali čvorovi u grafu mogu jednoznačno identifikovati na osnovu svoje udaljenosti do čvorova tog skupa.

Problem metričke dimenzije je NP-težak, što znači da ne postoji efikasan algoritam koji ga može riješiti za sve instance u polinomijalnom vremenu. Zbog toga se koriste različite heurističke i optimizacione metode, kako bi se pronašla optimalna ili približna rješenja. Mi ćemo koristiti genetski algoritam (**GA**) i algoritam optimizacije kolonijom mrava (engl. Ant Colony Optimization,**ACO**), a rezultate ćemo porediti sa algoritmima za varijabilnu pretragu susjedstva (**VNS**) i cijelo-brojno linearno programiranje (**ILP**).

Sav kod se može pronaći na: <https://github.com/NikolaDjajic/MDP>

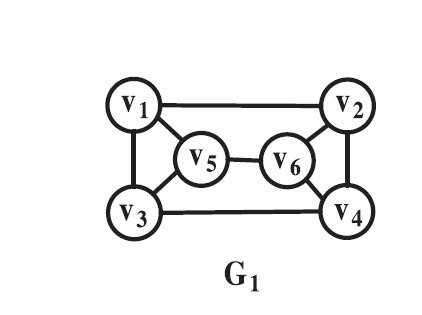
MDP

Metrička dimenzija grafova prvi put je formalno uvedena u radu Hararyja i Meltera (1976), a kasnije su je detaljnije analizirali Chartrand et al. (2000).

Neka je G = (V, E) neprazan, cikličan, povezan graf. Za skup čvorova W ⊆ V , kažemo da W riješava graf G ako za svaki par različitih čvorova u, v ∈ V postoji čvor w ∈ W tako da je rastojanje d(u, w) ≠ d(v, w). Odnosno, svaka dva čvora se mogu razlikovati na osnovu njihovih udaljenosti do nekog čvora iz skupa W.

Najmanji takav skup W naziva se **skup razrješenja** (engl. *resolving set*), a njegova kardinalnost je metrička dimenzija grafa G, označava se sa β(G).

Primjer:



Imamo 6 čvorova i 9 ivica. Rastojanje između 2 povezana čvora je uvijek jednako 1.

Skup S1 = {v1,v2,v3} je jedan od rješenja, zato što:

r(v1, S1) = **(0, 1, 1)**;

r(v2, S1) = **(1, 0, 2)**;

r(v3, S1) = **(1, 2, 0)**;

r(v4, S1) = **(2, 1, 1)**;

r(v5, S2) = **(1, 2, 1)**;

r(v6, S1) = **(2, 1, 2)**.

r(vi , S) je rastojanje od čvora vi do svakog od čvorova iz skupa S i isto je što i:

r(vi, {v1,v2,v3}).

Kao što možemo vidjeti nemamo 2 identična skupa što znači da pomoću S1 možemo jednoznačno identifikovati svaki čvor koji nije u S1 na osnovu njegove udaljenosti od čvorova S1.

Skup S1 sadrži 3 čvora pa je i kardinalnost skupa jednaka 3.

Međutim skup S1 nije minimalni skup razrješenja pošto imamo i S2 = {v1,v3} koji je takođe skup razrješenja.

r(v1, S2) = **(0, 1)**;

r(v2, S2) = **(1, 2)**;

r(v3, S2) = **(1, 0)**;

r(v4, S2) = **(2, 1)**;

r(v5, S2) = **(1, 1)**;

r(v6, S2) = **(2, 2)**.

S2 predstavlja bolje rješenje u odnosu na S1, zato što je kardinalnost skupa jednaka 2. Takođe S2 nije jedinstveno minimalno rješenje pošto imamo i skup S3 = {v2,v4} kojem je kardinalnost jednaka isto 2 kao i skupu S2.

Pregled literature

Genetski algoritam

Genetski algoritam pripada heurističkim metodama (metode koje ne garantuju optimalno rješenje). Inspiracija za ovaj algoritam leži u Teoriji evolucije Čarlsa Darvina.

Neki od pojmova koje bi trebalo da definišemo kada pričamo o genetskom algoritmu:

* Jedinka = svaka jedinka je moguće rješenje problema.
* Populacija = skup jedinki koji predstavlja podskup prostora pretrage.
* Prilagođenost (eng. fitness) = ocjena kvaliteta date jedinke.
* Genetski kod = način na koji se predstavlja jedna jedinka.
* Geni = dijelovi genetskog koda.

Takođe, postoje i genetski operatori, a to su:

* Selekcija

Ovim procesom se biraju jedinke nad kojima će se poslije vršiti ukrštanje i mutacija. Jedinke se biraju na osnovu individualne prilagođenosti, one sa većom prilagođenošću su u prednosti da budu odabrane za nastavak.

Neke od načina selekcije su ruletska, turnirska, eliminaciona i druge.

* Ukrštanje

Slično kao i u samoj evoluciji, ukrštanje predstavlja miješanje gena jedinki. Kao rezultat ove operacije dobijamo novu jedinku koja nosi potencijalno dobre gene svojih roditelja.

* Mutacija

Ovaj proces predstavlja mijenjanje gena. Time se omogućava vraćanje dobrih gena koji su se izgubili prilikom prethodnih radnji.

Posljedica izvršavanja prethodno definisanih radnji jeste nastanak nove generacije.

**ACO – Optimizacija kolonije mrava**

ACO (Ant Colony Optimization) je heuristički optimizacioni algoritam inspirisan ponašanjem stvarnih mrava u prirodi, posebno njihovom sposobnošću da pronalaze najkraći put između izvora hrane i mravinjaka. Algoritam je prvi put predstavio Marco Dorigo 1992. godine u okviru svoje doktorske disertacije.

**Osnovne ideje i pojmovi:**

* **Mrav** = predstavlja pojedinačno rješenje problema.
* **Kolonija** = skup svih mrava (rješenja) koji se kreću kroz prostor pretrage.
* **Feromoni** = vještačka “hemijska” oznaka koja se koristi za memorisanje prethodnih dobrih rješenja. Mravi više preferiraju puteve s većom koncentracijom feromona.
* **Heuristička informacija** = dodatna informacija o kvalitetu rješenja, npr. inverzna udaljenost kod problema najkraće putanje.

**Glavni procesi u ACO algoritmu:**

* **Kretanje mrava kroz prostor rješenja**

Svaki mrav gradi rješenje korak po korak, birajući naredni korak na osnovu kombinacije količine feromona i heurističke vrijednosti (npr. kratkoće puta). Ova selekcija je probabilistička, što znači da bolje opcije imaju veću šansu da budu izabrane, ali i lošije se povremeno istražuju – radi očuvanja raznolikosti.

* **Ažuriranje feromona**

Nakon što svi mravi završe konstruisanje svojih rješenja, feromoni se ažuriraju. Dobri putevi (bolja rješenja) dobijaju više feromona, dok se stari feromoni postepeno isparavaju. Ova ravnoteža između **ojačavanja** dobrih puteva i **isparavanja** loših sprečava preuranjenu konvergenciju.

* **Isparavanje feromona**

Ova operacija smanjuje vrijednosti feromona na svim putevima kako bi se stari, neefikasni putevi vremenom zaboravili. Time se podstiče istraživanje novih rješenja.

**Prednosti ACO algoritma:**

* Pogodan za **kombinatorne probleme** poput problema trgovačkog putnika (TSP), raspoređivanja, rutiranja itd.
* Prilagodljiv i sposoban da balansira između **eksploatacije** (korištenje poznatih dobrih rješenja) i **istraživanja** (pronalazak novih, boljih puteva).