

# Калибриране на MEMS Акселерометри

Курсов проект на:

**Никола Тотев**

по

Приложение на Математиката за  
Моделиране на Реални Процеси

# Съдържание

Резюме .....	3
Въведение .....	4
Акселерометри. MEMS акселерометри. Видове акселерометри.....	4
Видове грешки .....	5
<i>Постоянно отклонение.....</i>	5
<i>Отклонения в мерните единици .....</i>	6
<i>Грешки, които идват от неортогоналността на осите.....</i>	6
Калибриране на MEMS акселерометри.....	6
Постановка на математическата задача .....	6
Постановка на задачата .....	7
Математически модел.....	8
Използвани методи за минимизиране на (3) .....	10
<i>Метод на Нютон .....</i>	11
Числени резултати .....	12
Заклучение .....	14
Литература.....	15

## Резюме

В рамките на този проект се разглежда задачата за калибриране на MEMS акселерометри. За целта е използвана линейна връзка между калибрираните данни и некалибрираните данни, в която има 12 неизвестни параметъра. За да бъдат намерени тези параметри, е построена функция на грешките, която се минимизира, като се реши една система от 12 нелинейни уравнения.

В секция 1, читателят може да се запознае с различните видове акселерометри, по-подробно се разглежда начина на работа на MEMS акселерометрите, както и грешките, които се наблюдават при такъв вид сензори.

В секция 2 е представен алгоритъм за калибриране на MEMS акселерометри. В секцията е предоставено сравнение между резултатите, получени с вградените функции в СКА Mathematica и тези получени с имплементирания от нас алгоритъм.

# 1. Въведение

- Акселерометри. MEMS акселерометри. Видове акселерометри.

Акселерометрите са сензори, който измерват ускорение. Основните видове са следните:

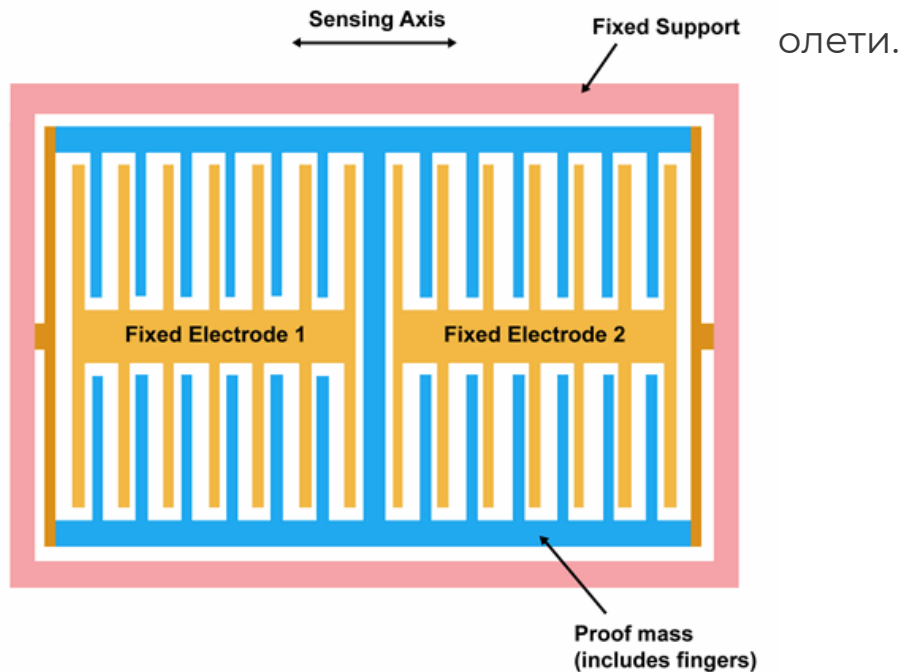
- Пиезоелектричени (*piezoelectric*)
- Пиезорезистивни (*piezoresistive*)
- Капацитивни акселерометри (*capacitive accelerometers*)
- MEMS Акселерометри (*MEMS Accelerometers*)

Сега ще разгледаме по-подробно MEMS акселерометрите.

MEMS е съкращение за **Microelectromechanical systems** и такъв вид акселерометри се изработва от силиций (виж *фигура 1*). При ускорение сините части се движат и се отдалечават/приближават до фиксираните електроди.

Едно от предимствата на MEMS акселерометрите са, че имат малки размери и лесно могат да бъдат използвани в проекти, където има ограничено място. Поради това акселерометрите намират много приложения в индустрията, както и в хоби роботиката и електрониката. Тук ще посоча 3 основни приложения:

- Използват се за диагностика на машини, като се следи за появата на вибрации.
- Служат за да се измерва ускорението на роботи, например мобилни роботи.



**Фигура 1** Показва начина на работа на MEMS акселерометър. При ускорение сините части се движат и се отдалечават/приближават до фиксираните електроди.

- Видове грешки

Като всяко измервателно устройство и при акселерометрите има различни видове грешки, които се наблюдават. Основните видове, които се получават при производството, са:

- Постоянно отклонение

Това е постоянно отклонение, което възниква при производство. В такъв случай в положение на покой сензорът може да показва ускорение, различно от земното ускорение.

- **Отклонения в мерните единици**  
Тази грешка означава, че данните, които идват от сензора, са в неизвестна за нас мерна единица, вместо  $m/s$  например.
- **Грешки, които идват от неортогоналността на осите**  
При производството на триосеви акселерометри, бихме искали осите да са ортогонални, но тъй като технологията за производство не е съвършена, между осите се наблюдават ъгли между  $86^\circ$  и  $94^\circ$ . Тези отклонения водят до нежелани грешки.

Освен тези грешки възникват други грешки. Например грешки, които се появяват заради условията, при които работи акселерометърът или електромагнитен шум.

## **2. Калибриране на MEMS акселерометри**

- **Постановка на математическата задача**  
Като входни данни използваме dataset от [1].  
Първоначалният план беше да се използват данни от собствен сензор, но това не се реализира, защото при по-задълбочено проучване на сензорите, които са достъпни, се калибрират от производителя.

В **таблица 1** е показан пример за некалибрирани данни, а в **таблица 2** са пресметнати нормите на тези данни.

Uncalibrated		
X	Y	Z
0.686143985	9.693013241	0.146230973
0.307313184	-9.555131822	0.121707371
10.20588166	0.146627372	0.293913142
-9.235730337	0.149835656	-0.153514714

**Таблица 1** Некалибрирани данни по осите X, Y и Z

Norms Before Calibration
9.71837
9.56085
10.2112
9.23822
9.72837

**Таблица 2** Нормите на векторите, зададени в данните в таблица 1.

## • Постановка на задачата

Когато сензорът се намира в покой и е успореден на земната повърхност, трябва да показва  $(X, Y, Z) = (0, 0, 9.8)$  или нормата на вектора да бъде 9.8. От таблиците **1** и **2** се вижда, че при сурови данни – данни директно от сензора, това условие не е изпълнено. Целта на този проект е да използва математически модел, който обработва данните по такъв начин, че да се стигне до

норма на калибрираните вектори 9.8 или да се калибрират данните.

- **Математически модел**

Както беше обяснено в предишната точка, ако един акселерометър е калибриран, то нормата на вектора трябва да е приблизително 9.8 или

$$|v| - 9.8 \approx 0.$$

Важно е да съобразим, че в реалния живот, при наличието на много данни е невъзможно да се получи резултат точно равен на нула. Поради тази причина се стремим да е възможно най-близко до нула.

За да се калибрират данните, използваме линейна връзка между калибрираните и суровите данни:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix}}_M \cdot \begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}}_B \quad (1)$$

където

- векторът  $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$  е векторът от калибрираните данни.
- Матрицата  $M$  – тази матрица се грижи за ортогоналността на осите  $X, Y, Z$ , както и за мащаба. Коефициентите по диагонала отговарят



за грешките от мерните единици, а останалите – за грешките от неортогоналността на осите.

- векторът  $\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix}$  представлява суровите данни от сензора.
- векторът  $B$  се грижи за коригирането на постоянното отместване.

След извършване на действията отдясно стигаме до следните уравнения:

$$\begin{aligned} X &= M_{xx}\hat{X} + M_{xy}\hat{Y} + M_{xz}\hat{Z} + B_x \\ Y &= M_{yx}\hat{X} + M_{yy}\hat{Y} + M_{yz}\hat{Z} + B_y \quad (2) \\ Z &= M_{zx}\hat{X} + M_{zy}\hat{Y} + M_{zz}\hat{Z} + B_z \end{aligned}$$

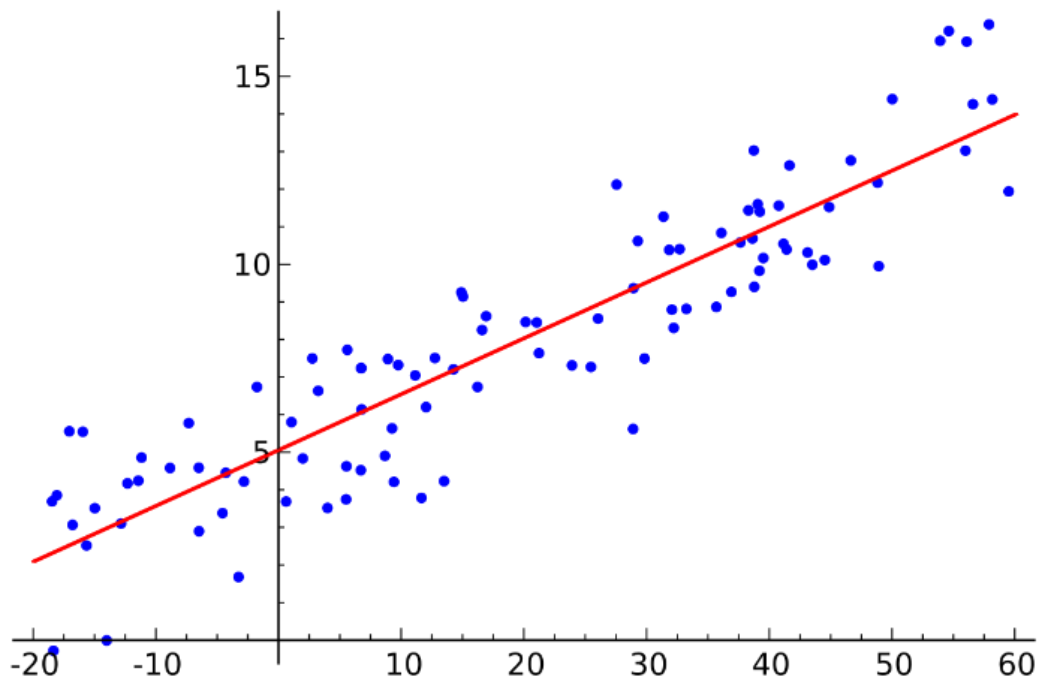
За да калибрираме един акселерометър, е необходимо да намерим матрицата  $M$  и вектора  $b$ , което означава, че имаме 12 неизвестни параметъра. За да ги намерим, ще минимизираме функцията:

$$\begin{aligned} Err(M, B) &= \sum_{i=1}^n (M_{xx}x_i + M_{xy}y_i + M_{xz}z_i + B_x)^2 + \\ & (M_{yx}x_i + M_{yy}y_i + M_{yz}z_i + B_y)^2 + (M_{zx}x_i + M_{zy}y_i + \\ & M_{zz}z_i + B_z)^2 - g^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Така задачата добива вида  $\min Err(M, B)$ .

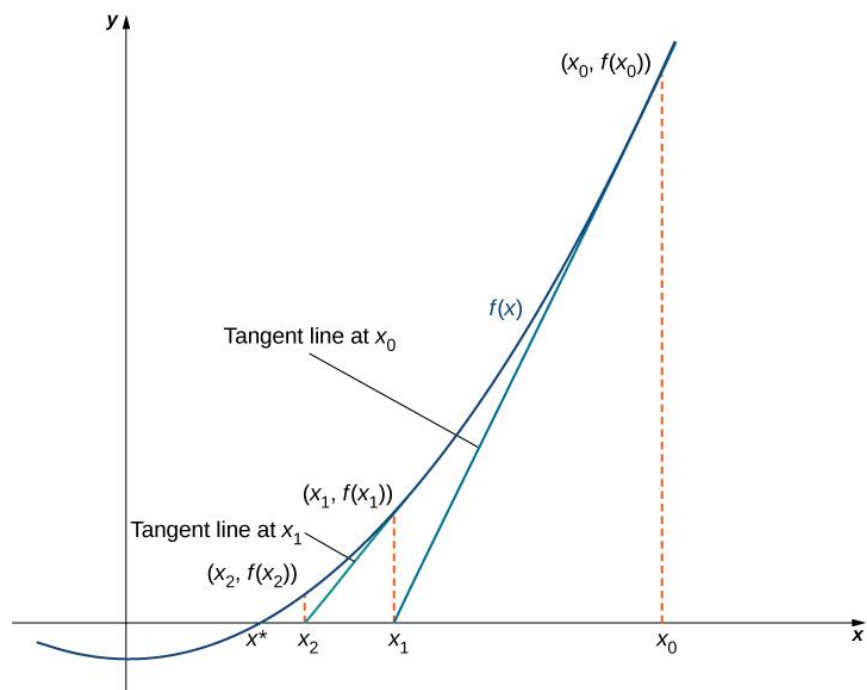
- Използвани методи за решаване на минимизационната задача (3)

За да може да намерим минимума на (3), трябва да намерим частните производни спрямо 12-те неизвестни параметри. След като сме получили, всичките производни ги приравняваме на нула, което означава, че трябва да решим нелинейна система с 12 уравнения и 12 неизвестни. За решаването на тази система използваме метода на Нютон.



**Фигура 3** Метода на най-малките квадрати. [2]

- Метод на Нютон



**Фигура 4** Графично представяне на метода на Нютон [3]

Формулите за метода на Нютон за едно уравнение  $f(x) = 0$  са следните:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \quad (4)$$

В текущата работа е направена собствена имплементация на този метод в СКА Wolfram Mathematica.

Този метод се използва за решаване на едно уравнение, като може да се приложи и за решаване на система от нелинейни уравнения. Например можем да решим системата

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} ,$$

като използваме формулата

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - [J(x_0, y_0)]^{-1} \begin{pmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (5)$$

, където  $J$  е матрицата на Якоби, т.е.

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} .$$

Аналогично се правят сметките за решаване на система с 12 уравнения.

### 3. Числени резултати

Norms After Calibration (LSM)
9.79577
9.7911
9.80487
9.79417
9.7825

**Таблица 3** Показва нормата от калибрираните данни, получени при използване на вградените функции.

Norms After Calibration (NM)
9.79577
9.7911
9.80487
9.79417
9.7825

**Таблица 4** Показва нормата от калибрираните данни, получени при използване на имплементирания от нас метод на Нютон

Таблиците 3 и 4 показват нормите след калибрацията на векторите. Както се вижда имплементацията на Метода на Нютон (МН), която съм направил, извежда еднакви резултати като Метода на Най-Малките Квадрати (МНМК), който използва вградени функции за минимизация.

M Matrix Values (LSM)		
1.00432	-0.0247	-0.0738
0.01773	1.01322	-0.0892
0.07967	0.08645	0.99275

**Таблица 5** Показва матрицата М при използване на вградените функции.

M Matrix Values (NM)		
0.22671	0.07337	0.97174
0.60662	0.7872	-0.1967
-0.772	0.64003	0.12634

**Таблица 6** Показва матрицата М при използване на имплементирания от нас метод на Нютон

Таблиците 5 и 6 показват стойностите на матрицата М. Както описах по-горе това са коефициентите, при които грешката (3) е минимална. Тази разлика се дължи на това, че не се взима предвид ориентацията на сензора в пространството.

B Matrix Values (LSM)
-0.488037
-0.0814727
0.0155627

**Таблица 7** Показва стойностите на вектора *B*, получени при използване на вградените функции.

B Matrix Values (NM)
-0.0558736
-0.35741
0.337929

**Таблица 8** Показва стойностите на вектора *B*, получени при използване на имплементирания от нас метод на Нютон

Таблиците 7 и 8 показват стойностите на вектора *B*, като отново, както при матрицата *M* и тук има разминаване между стойностите получени с МНМК и МН.

Calibrated (LSM)		
<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
-0.0487887	9.73885	1.05333
0.0473013	-9.76837	-0.665145
9.73665	0.22181	1.13312
-9.75604	-0.0796934	-0.859694

**Таблица 9** Показва калибрираните вектори при използване на вградените функции.

Calibrated (NM)		
<i>X</i>	<i>Y</i>	<i>Z</i>
0.952926	7.66039	6.03053
-0.568964	-7.71673	-5.9995
2.55426	5.89126	-7.40974
-2.28789	-5.81181	7.54415

**Таблица 10** Показва калибрираните вектори, получени при използване на имплементирания от нас метод на Нютон

Таблиците 9 и 10 показват данните след калибрация, съответно с МНМК и МН. Отново се виждат разлики между двата метода.

## Заклучение

В рамките на този проект се разглежда задачата за калибриране на MEMS акселерометри. За целта е използвана линейна връзка между калибрираните данни и некалибрираните данни. В тази релация има 12 неизвестни параметъра, които са намерени, като е решена една нелинейна система от 12 уравнения, чрез метода на Нютон.

От получените резултати се вижда ясно, че успешно е решена задачата за калибриране на MEMS акселерометри, тъй като резултатите от вградените функции и имплементираната в рамките на този проект функция са сходни.

## Литература:

[1] MM Solutions AD, Laboratory calibration of a MEMS accelerometer sensor, 95<sup>th</sup>- Euroean Study Group with Industry (ESGI'95), стр. 21

[2]

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3a/Linear\\_regression.svg/1200px-Linear\\_regression.svg.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/3/3a/Linear_regression.svg/1200px-Linear_regression.svg.png)

[3] <https://openstax.org/books/calculus-volume-1/pages/4-9-newtons-method>