Dato nam je **N** proizvođača određene robe. Pretpostavićemo da je sva roba istog kvaliteta. Svaki od tih N proizvođača bira količinu robe koju će plasirati na tržište. Količina robe koju *i*-ti igrač plasira na tržište biće označena sa $\boldsymbol{a_i}$. Troškovi plasiranja robe za *i*-tog igrača zavise od količine robe koju plasira tj. **troškovi proizvodnje =** $\mathbf{c_i}(\mathbf{a_i})$. **Jedinična cijena robe**, koja zavisi od **ukupne raspoložive količine** $(\sum_i \boldsymbol{a_i})$, biće obilježena sa $\mathbf{p}(\sum_i \boldsymbol{a_i})$.

1. Odrediti Nešov ekvilibrijum analitičkim putem u slučaju monopola, duopola i tripola. Takođe, ispitati dobit proizvođača u svakom od slučajeva, kao i jediničnu cijenu robe.

Riješenje:

Pretpostavimo da *i*-ti igrač zna strategije drugih igrača odnosno da su svi a_j $(j \neq i)$ poznati u trenutku kada a_i treba da donese odluku.

Funkciju dobiti za *i*-tog igrača definisaćemo kao jedinična_cijena * proizvedena_količina - troškovi_proizvodnje:

$$u_i(a_1, \ldots, a_N) = p(\sum_j a_j)a_i - c_i(a_i)$$

Optimalnu proizvedenu količinu odredićemo maksimizujući u_i po a_i, tj. tako što pronađemo parcijalni izvod u_i po a_i i izjednačimo ga sa nulom:

$$\frac{\partial u_i}{\partial a_i} = 0 \;\; => \;\; p'(\sum_j a_j)a_i + p(\sum_j a_j) - c_i'(a_i) = 0, \; za \; svako \; i.$$

Uzećemo u obzir sledeće funkcionalne zavisnosti:

$$c_i(a_i) = c a_i$$

$$\mathrm{p(a) = max}\left\{\mathrm{d} - \sum_{\mathrm{i}} \mathrm{a_i},\, 0\right\}$$

Napišimo funkciju p(a) na malo drugačiji način:

$$\mathrm{p(a) = p(a_1 + \ldots + a_n)}$$
$$= \begin{cases} \mathrm{d -\ (a_1 + \ldots + a_n),} & \mathrm{ukoliko\ je\ a_1 + \ldots + a_n\ <\ d} \\ \mathrm{0,} & \mathrm{u\ svim\ ostalim\ slučajevima} \end{cases}$$

Na osnovu ovoga, funkcija dobiti u opštem slučaju biće:

$$u_i(a_1, \ldots, a_N)$$
$$= \begin{cases} (d - \mathrm{a_1} - \ldots - \mathrm{a_n} - c)a_i, & ukoliko\ je\ \mathrm{a_1 + \ldots + a_n\ <\ d} \\ -a_i c, & u\ svim\ ostalim\ slučajevima \end{cases}$$

Monopol (N = 1):

$$u_1(a_1) = \begin{cases} (d - \mathrm{a}_1 - c)a_1, & ukoliko\ je\ \mathrm{a}_1 < \mathrm{d} \\ -a_1 c, & u\ svim\ ostalim\ slučajevima \end{cases}$$

Potrebno je pronaći izvod funkcije dobiti u_1 po a_1:

$$((d - \mathrm{a}_1 - c)a_1)' = 0$$

$$(d\mathrm{a}_1 - a_1^2 - c\mathrm{a}_1)' = 0$$

$$d * 1 - 2 * \mathrm{a}_1 - c * 1 = 0$$

$$d - c = 2 * \mathrm{a}_1$$

Nešov ekvilibrijum se za monopol dobija u sledećem obliku:

$$\mathrm{a}_1 = \frac{d - c}{2}$$

Dobit u ovom slučaju je:

$$u_1(a_1) = (d - \frac{d - c}{2} - c)\frac{d - c}{2}$$

Sređivanjem izraza dobijamo dobit u slučaju monopola:

$$u_1(a_1) = \frac{(d - c)^2}{4}$$

Duopol (N = 2):

$$u_i(a_1, a_2) = \begin{cases} (d - \mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2 - c)a_i, & ukoliko\ je\ \mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 < \mathrm{d} \\ -a_i c, & u\ svim\ ostalim\ slučajevima \end{cases}$$

Za i = 1,2 nalazimo parcijalne izvode u_i po a_i i izjednačavamo sa nulom:

$$\frac{\partial u_1}{\partial a_1} = ((d - \mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2 - c)a_1)' = 0\ za\ i = 1$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial a_2} = ((d - \mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2 - c)a_2)' = 0\ za\ i = 2$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial a_1} = (d\mathrm{a}_1 - a_1^2 - \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2 - ca_1)' = 0$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial a_2} = (d\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1\mathrm{a}_2 - a_2^2 - ca_2)' = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial a_1} = d - 2\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2 - c = 0$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial a_2} = d - 2\mathrm{a}_2 - \mathrm{a}_1 - c = 0$$

Izražavanjem gornje dvije jednačine po a_1 i a_2 dobijamo Nešov ekvilibrijum u slučaju duopola:

$$a_1 = \frac{d - a_2 - c}{2}$$
$$a_2 = \frac{d - a_1 - c}{2}$$

Riješavanjem ovog sistema po a_1 i a_2 dobijamo:

$$a_1 = a_2 = \frac{d - c}{3}$$

Kako je $a_1 = a_2$, dobiti će biti iste za oba proizvođača:

$$u_1(a_1, a_2) = u_2(a_1, a_2) = (d - a_1 - a_2 - c)a_1$$
$$= (d - \frac{d - c}{3} - \frac{d - c}{3} - c) * \frac{d - c}{3}$$
$$= \frac{d - c}{3} * \frac{d - c}{3}$$

Sređivanjem ovog izraza dobijamo dobiti u slučaju duopola:

$$u_1(a_1, a_2) = u_2(a_1, a_2) = \frac{(d - c)^2}{9}$$

Tripol (N = 3):

$$u_i(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} (d - a_1 - a_2 - a_3 - c)a_i, & ukoliko\ je\ a_1 + a_2 + a_3 < d \\ -a_i c, & u\ svim\ ostalim\ slučajevima \end{cases}$$

Za i = 1,2,3 nalazimo parcijalne izvode u_i po a_i i izjednačavamo sa nulom:

$$\frac{\partial u_1}{\partial a_1} = ((d - a_1 - a_2 - a_3 - c)a_1)' = 0\ za\ i = 1$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial a_2} = ((d - a_1 - a_2 - a_3 - c)a_2)' = 0\ za\ i = 2$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial a_3} = ((d - a_1 - a_2 - a_3 - c)a_3)' = 0\ za\ i = 3$$

Nakon derivacije, dobijamo:

$$\frac{\partial u_1}{\partial a_1} = d - 2a_1 - a_2 - a_3 - c = 0$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial a_2} = d - a_1 - 2a_2 - a_3 - c = 0$$
$$\frac{\partial u_3}{\partial a_3} = d - a_1 - a_2 - 2a_3 - c = 0$$

Izražavanjem gornje tri jednačine po a_1, a_2 i a_3 dobijamo Nešov ekvilibrijum u slučaju tripola:

$$a_1 = \frac{d - a_2 - a_3 - c}{2}$$

$$a_2 = \frac{d - a_1 - a_3 - c}{2}$$

$$a_3 = \frac{d - a_1 - a_2 - c}{2}$$

Riješavanjem ovog sistema po a_1, a_2 i a_3 dobijamo:

$$a_1 = a_2 = a_3 = \frac{d - c}{4}$$

Kako je $a_1 = a_2 = a_3$, dobiti će biti iste za sva tri proizvođača:

$$u_1(a_1, a_2, a_3) = u_2(a_1, a_2, a_3) = (d - a_1 - a_2 - a_3 - c)a_1$$

$$= (d - c \; - 3 * \frac{d - c}{4}) * \frac{d - c}{4}$$

$$= \frac{(d - c)^2}{16}$$

2. Uopštenje riješenja na slučaj proizvoljnog broja proizvođača.

Riješenje:

Za N proizvođača Nešov ekvilibrijum se dobija u obliku:

$$a_k = \frac{d - (\sum_{i \neq k} a_i) - c}{2}, \; gdje \; je \; k \in [1, N]$$

Dok je funkcija dobiti za N proizvođača u sledećem obliku:

$$u_i(a_1, \ldots, a_N) = \frac{(d - c)^2}{(N + 1)^2}, \; gdje \; je \; i \in [1, N]$$