1. Za određenu replikatorsku jednačinu u igri Sokola i Goluba analizirati stabilnost dobijenih radnih tačaka ($x = 0$, $x = 1$ i $x = \frac{C-V}{C}$).

Riješenje:
Dobijena je sledeća replikatorska jednačina gdje je preko nje zapravo predstavljena brzina promjene udijela strategije G u populaciji:

$$\dot{x} = x(u_G(x) - \overline{u}(x))$$

Takođe, dobili smo da važi:

$$\overline{u}(x) = u_G(x)x + u_S(x)(1-x)$$

$$G: u_G(x) = \frac{V}{2}x$$

$$S: u_S(x) = Vx + \frac{V-C}{2}(1-x)$$

Označimo radnu tačku sa x_0 (uzima vrijednosti $0, 1$ i $\frac{C-V}{C}$). Vršimo linearizaciju u okolini radne tačke i dobijamo linearni sistem. Ukoliko je taj sistem stabilan, stabilna je i radna tačka u okolini koje je vršena linearizacija.

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$\dot{x} = x(u_G(x) - \overline{u}(x))$$

Uzimajući u obzir ovu supstituciju i sve navedeno gore, dobijamo:

$$(x_0 \dot{+} \Delta x) = (x_0 + \Delta x)(\frac{V}{2}(x_0 + \Delta x) - \frac{V}{2}(x_0 + \Delta x)(x_0 + \Delta x) - (V(x_0 + \Delta x) + \frac{V-C}{2}(1 - x_0 - \Delta x))(1 - x_0 - \Delta x))$$

$$\frac{d}{dt}\Delta x = (x_0 + \Delta x)(\frac{V}{2}(x_0 + \Delta x) - \frac{V}{2}(x_0 + \Delta x)^2 - (V(x_0 + \Delta x) + \frac{V-C}{2}(1 - x_0 - \Delta x))(1 - x_0 - \Delta x))$$

Proširivanjem ovog izraza (množenjem svega) dobijamo:

$$\frac{d}{dt}\Delta x = \frac{Cx_0^3}{2} + \frac{3}{2}Cx_0^2\Delta x - Cx_0^2 + \frac{3}{2}Cx_0(\Delta x)^2 - 2Cx_0\Delta x + \frac{Cx_0}{2} + \frac{C(\Delta x)^3}{2} - C(\Delta x)^2 + \frac{C\Delta x}{2} + \frac{Vx_0^2}{2} + Vx_0\Delta x - \frac{Vx_0}{2} + \frac{V(\Delta x)^2}{2} - \frac{V\Delta x}{2}$$

Sada možemo zanemariti sve podizraze kod kojih je Δx stepena većeg od 1 zato što vršimo linearizaciju:

$$\frac{d}{dt}\Delta x = \frac{Cx_0^3}{2} + \frac{3}{2}Cx_0^2\Delta x - Cx_0^2 - 2Cx_0\Delta x + \frac{Cx_0}{2} + \frac{C\Delta x}{2} + \frac{Vx_0^2}{2} + Vx_0\Delta x - \frac{Vx_0}{2} - \frac{V\Delta x}{2}$$

Sada ćemo uvrštavanjem konkretnih vrijednosti za radne tačke ispitati stabilnost.

$x_0 = 0$:

$$\dot{\Delta x} = \frac{C*0^3}{2} + \frac{3}{2}C*0^2\Delta x - C*0^2 - 2C*0\Delta x + \frac{C*0}{2} + \frac{C\Delta x}{2} + \frac{V*0^2}{2} + V*0*\Delta x - \frac{V*0}{2} - \frac{V\Delta x}{2}$$

$$\dot{\Delta x} = \frac{C\Delta x}{2} - \frac{V\Delta x}{2}$$

$$\dot{\Delta x} = \frac{(C-V)}{2}\Delta x$$

Sistem je stabilan u slučaju kada je V>C.

x_0 =1:

$$\dot{\Delta x} = \frac{1}{2}V\Delta x$$

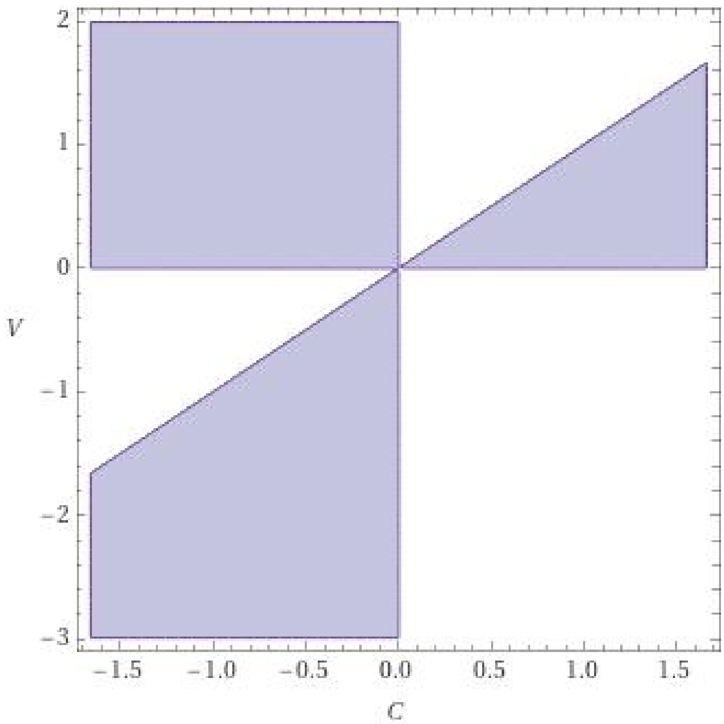
Sistem je stabilan u slučaju kada je V < 0.

$x_0 = \frac{C-V}{C}$:

$$\dot{\Delta x} = \frac{1}{2}V\Delta x\frac{V-C}{C}$$

Sistem je stabilan u slučaju kada je $\dot{\Delta x} < 0$ tj. pod sledećim ograničenjima:

1. C < 0 i V<C
2. C < 0 i V > 0
3. C > 0 i 0 < V < C



2. Formiranje replikatorskih jednačina, određivanje stacionarnih stanja i ispitivanje stabilnosti za igru “Papir-Bunar-Makaze”.

Riješenje:
Sve varijante igre “Papir-Bunar-Makaze” opisuju ko-evolutivnu dinamiku tri vrste koje se takmiče u krug. Prema tome, vrsta A mogu biti oni koji igraju bunar, vrsta B oni koji igraju makaze, a vrsta C oni koji igraju papir.

Prvo ćemo formirati matricu za ovu igru:

	Bunar	Papir	Makaze
Bunar	δ	-1	+1
Papir	+1	δ	-1
Makaze	-1	+1	δ

U matrici je prikazano šta vrsta koja se nalazi u redu dobija kada igra sa drugom vrstom koja se nalazi u koloni. U slučajevima kada i u redu i u koloni imamo iste vrste, ishod igre će biti blizak nuli u prosjeku (označimo to sa δ), a kada neka vrsta iz reda igra sa vrstom iz kolone, ukoliko vrsta iz reda pobijedi u igri dobija +1, a ukoliko izgubi dobija -1.

Modelujemo dinamiku prvog igrača kada igra čistu strategiju protiv miješane označene sa M. Igrač 1 ne može izmijeniti svoju strategiju (koja je genetički predodređena) osim u slučaju dobro definisanog procesa koji odgovara biološkoj reprodukciji. Njegov protivnik (igrač 2) predstavlja kompletnu populaciju koja se mijenja tokom vremena.

Udio igrača koji igraju strategiju bunar se može označiti sa *x*, udio igrača koji igraju strategiju papir sa *y*, dok se udio igrača koji igraju strategiju makaze može označiti sa *z*.

Formirajmo sada funkcije za prvog igrača kada igra protiv neke populacije koristeći gore navedene tri strategije, vodeći se gornjom tabelom:

$$u_1(x, M) = \delta\mathrm{x} - \mathrm{y} + \mathrm{z}$$
$$u_1(y, M) = \mathrm{x} + \delta\mathrm{y} - \mathrm{z}$$
$$u_1(z, M) = -\mathrm{x} + \mathrm{y} + \delta\mathrm{z}.$$

Funkcija dobiti za strategiju populacije koja igra sama protiv sebe:

$$u_1(M, M) = u_1(x, M)\mathrm{x} + u_1(y, M)\mathrm{y} + u_1(z, M)\mathrm{z}$$

Uopšteno, replikatorska jednačina izgleda ovako:

$$\dot{p}_i = (u_1(neka\_strategija_i, M) - u_1(M, M))p_i,\ i = 1, \ldots, n$$

Dobijamo sledeći sistem replikatorskih jednačina:

$$\dot{x} = (z - y)x$$
$$\dot{y} = (x - z)y$$
$$\dot{z} = (y - x)z$$

Pošto znamo da se udijeli populacije koji igraju neku strategiju sumiraju i da ta suma iznosi 1, jasno je da važi: $\mathrm{x} + \mathrm{y} + \mathrm{z} = 1$.

Zbog toga, možemo se riješiti jedne jednačine čime dobijamo:

$$\dot{x} = (1 - x - 2y)x$$
$$\dot{y} = (2x + y - 1)y$$

,što je sistem drugog reda.

Postavljajući $\dot{x} = 0\ i\ \dot{y} = 0$, te riješavanjem tog sistema jednačina dobijamo sledeće tačke:

- (0, 0)
- (0, 1)
- (1, 0)
- (1/3, 1/3)

Sad je potrebno za ove tačke ispitati stabilnost sistema drugog reda.

$$(x_0 \dot{+} \Delta x) = (1 - x_0 - \Delta x - 2y_0 \; - \; 2\Delta y)(x_0 + \Delta x)$$
$$(y_0 \dot{+} \Delta y) = (2x_0 + 2\Delta x + y_0 + \Delta y - 1)(y_0 + \Delta y)$$

Što se tiče lijeve strane jednakosti, izvodi za konstante su jednaki nuli ($x_0 = 0 \; i \; y_0 = 0$). Što se tiče desne strane jednakosti, uzimajući u obzir da smo u radnoj tački, važiće da je $(1 - x - 2y)x = 0 \; i \; (2x + y - 1)y = 0$, te će unakrsni proizvodi koji uključuju Δ otpasti zbog linearizacije jer su približno jednaki nuli:

$$(\dot{\Delta x}) = \Delta x(1 - 2x_0 - 2y_0) - 2x_0\Delta y$$
$$(\dot{\Delta y}) = \Delta x(2y_0) + \Delta y(2x_0 + 2y_0 - 1)$$

Dobijamo matricu:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 - 2x_0 - 2y_0 & -2x_0 \\ 2y_0 & 2x_0 + 2y_0 - 1 \end{bmatrix}$$

Tačka je stabilna kada je a * d - b *c > 0.

Sada idemo redom ispitivati.

(0, 0):

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a * d - b * c = 1 * (-1) - 0 * 0 = -1 < 0

Nestabilna tačka.

(0, 1):

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nestabilna tačka.

(1, 0):

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nestabilna tačka.

(1/3, 1/3):

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Ovo je jedina stabilna tačka.