4 Relativitetsteori

4.1

a I klasserommet er vi sannsynligvis interessert i bevegelse relativt til rommet. Det er naturlig å bruke et referansesystem som er i ro relativt til klasserommet, og dermed i ro relativt til jordoverflaten (med mindre klasserommet f.eks. befinner seg på et skoleskip).

b Om bord i et fly vil det være naturlig å bruke et referansesystem som er i ro relativt til flyet.

c Relativt til bussen er farten din 1,5 m/s. Relativt til bakken er farten din $18\ \text{m/s} + 1{,}5\ \text{m/s} = 19{,}5\ \text{m/s}$.

4.2

a Kula vil følge en rettlinjet bevegelse relativt til bakken, mens din fot følger togets bevegelse rundt svingen. Kula vil derfor ikke treffe foten din.

b Bilen er bare tilnærmet et treghetssystem når den står i ro før den har startet, når den kjører med konstant fart, og etter at den har stanset helt.

4.3

For at et referansesystem skal oppleves som et treghetssystem, må vi oppleve at Newtons 1. lov gjelder. Vi kan f.eks. se på hvordan en pendelkule eller en kule som i utgangspunktet ligger i ro beveger seg. Vi konkluderer med at situasjon a, e og f ikke kan være treghetssystemer, men at situasjon b, c og d tilnærmet er treghetssystemer.

4.4

a For å kunne si at to hendelser virkelig skjer samtidig i alle referansesystemer, må hendelsene skje samtidig på samme sted. I alle andre tilfeller kan vi bare snakke om at det for oss, i vårt referansesystem, ser ut som om hendelsene skjer samtidig.

b Både Nora og Sadia har rett. Begge beskriver hendelsene slik de oppfatter dem.

4.5

a $$v = 0{,}01c \quad\Rightarrow\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}01c)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}01^2}} = \underline{\underline{1{,}00005}}$$

$$v = 0{,}10c \quad\Rightarrow\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}10^2}} = \underline{\underline{1{,}005}}$$

$$v = 0{,}50c \quad\Rightarrow\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}50^2}} = \underline{\underline{1{,}155}}$$

$$v = 0{,}80c \quad\Rightarrow\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}80^2}} = \underline{\underline{1{,}667}}$$

b En vanlig tommelfingerregel er at vi må ta hensyn til relativistiske effekter når $v \geq 0{,}10c$.

c $$v = 0{,}01c \quad\Rightarrow\quad t = \gamma t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}01^2}} \cdot 60\ \text{min} = 60{,}0003\ \text{min} = \underline{\underline{60\ \text{min og}\ 0{,}18\ \text{s}}}$$

$$v = 0{,}10c \quad\Rightarrow\quad t = \gamma t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}10^2}} \cdot 60\ \text{min} = 60{,}030\ \text{min} = \underline{\underline{60\ \text{min og}\ 18\ \text{s}}}$$

$$v = 0{,}50c \quad \Rightarrow \quad t = \gamma t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}50^2}} \cdot 60 \text{ min} = 69{,}2820 \text{ min} = \underline{\underline{69 \text{ min og } 17 \text{ s}}}$$

$$v = 0{,}80c \quad \Rightarrow \quad t = \gamma t_0 = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}80^2}} \cdot 60 \text{ min} = \underline{\underline{100 \text{ min}}}$$

4.6

a $t = \gamma t_0 = 2 \cdot 60 \text{ s} = \underline{\underline{120 \text{ s}}}$

b Vi skriver opp uttrykket for lorentzfaktoren, og løser for forholdstallet v/c:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}} = \sqrt{\frac{2^2-1}{2^2}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}87$$

En fart på 87 % av lyshastigheten gir en lorentzfaktor på 2. Dette tilsvarer en fart på

$$v = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot c = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2{,}6 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

4.7

a Lengdekontraksjon skjer bare i bevegelsesretningen. Vennen din vil derfor se like høy ut som hun vanligvis gjør. I bevegelsesretningen vil hun forkortes med en faktor

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}95^2}} = 3{,}2$$

For deg vil det se ut som om vennen din har en bredde på omtrent 1/3 av sin vanlige bredde.

b Lorentzfaktoren vil være den samme som i oppgave a, så vennen din vi se at du er omtrent 1/3 så lang som vanlig.

4.8

a Når farten er 1,0 % av lysfarten er bevegelsesmengden:

$$p = \gamma m v = \frac{9{,}1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0{,}01 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{1-0{,}01^2}} = 2{,}7330 \cdot 10^{-24} \text{ kg m/s} = \underline{\underline{2{,}7 \cdot 10^{-24} \text{ kg m/s}}}$$

Når farten er 99 % av lysfarten er bevegelsesmengden:

$$p = \gamma m v = \frac{9{,}1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0{,}99 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{1-0{,}99^2}} = 1{,}9179 \cdot 10^{-21} \text{ kg m/s} = \underline{\underline{1{,}9 \cdot 10^{-21} \text{ kg m/s}}}$$

b Vi vet at impulsen er gitt ved $I = F \cdot t$ er lik endringen i bevegelsesmengde.

$$F \cdot t = \Delta p$$

$$\Rightarrow \quad F = \frac{\Delta p}{t} = \frac{1{,}9179 \cdot 10^{-21} \text{ kg m/s} - 2{,}7330 \cdot 10^{-24} \text{ kg m/s}}{1 \text{ s}} = 1{,}9152 \cdot 10^{-21} \text{ N} = \underline{\underline{1{,}9 \cdot 10^{-21} \text{ N}}}$$

c Når farten er 99,99 % av lysfarten, er bevegelsesmengden:

$$p = \gamma m v = \frac{9{,}1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0{,}9999 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{1-0{,}9999^2}} = 1{,}9323 \cdot 10^{-20} \text{ kg m/s}$$

Vi finner kraften som kreves for å aksellerere elektronet fra 99 % av lysfarten opp til 99,99 % av lysfarten på samme måte som i oppgave c:

$$F = \frac{\Delta p}{t} = \frac{1{,}9323\cdot 10^{-20}\ \text{kg m/s} - 1{,}9179\cdot 10^{-21}\ \text{kg m/s}}{1\ \text{s}} = 1{,}7405\cdot 10^{-20}\ \text{N} = \underline{\underline{1{,}7\cdot 10^{-20}\ \text{N}}}$$

d Vi finner størrelsesforholdet mellom kreftene vi fant i oppgave b og c:

$$\frac{1{,}7405\cdot 10^{-20}\ \text{N}}{1{,}9152\cdot 10^{-21}\ \text{N}} = 9{,}1$$

Kraften vi fant i oppgave c er omtrent 9 ganger større enn kraften vi fant i oppgave b.

4.9

a $$E_k = (\gamma - 1)mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}20^2}} - 1\right)\cdot 9{,}1094\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{1{,}7\cdot 10^{-15}\ \text{J}}} = \underline{\underline{1{,}7\ \text{fJ}}}$$

b $$E = \gamma mc^2 = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}20^2}}\cdot 9{,}1094\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{8{,}4\cdot 10^{-14}\ \text{J}}} = \underline{\underline{84\ \text{fJ}}}$$

4.10

Vi finner et uttrykk for bevegelsesmengden:

$$E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \quad\Rightarrow\quad p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - \left(mc^2\right)^2} = \frac{1}{c}\sqrt{\left(\gamma mc^2\right)^2 - \left(mc^2\right)^2} = mc\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

Når vi setter inn tall, blir dette:

$$p = mc\sqrt{\gamma^2 - 1} = 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot 3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s}\cdot\sqrt{3{,}0^2 - 1} = \underline{\underline{1{,}4\cdot 10^{-18}\ \text{kgm/s}}}$$

Hvileenergi: $E_0 = mc^2 = 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{1{,}5\cdot 10^{-10}\ \text{J}}}$

Kinetisk energi: $E_k = (\gamma - 1)mc^2 = (3-1)\cdot 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{3{,}0\cdot 10^{-10}\ \text{J}}}$

Totalenergi: $E = \gamma mc^2 = 3\cdot 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{4{,}5\cdot 10^{-10}\ \text{J}}}$

4.11

Siden avstanden til jordas sentrum er litt mindre hvis du bor i første etasje enn om du bor høyere opp, vil tiden gå ørlite grann saktere her. Siden du uansett vil måle din egen hviletid på alt som skjer, vil du ikke ha glede av denne ekstra tiden.

4.12

Vi setter den mekaniske energien lik null ved hendelseshorisonten, og løser for radius:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma\frac{Mm}{r} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}v_0^2 = \gamma\frac{M}{r} \quad\Rightarrow\quad r = \frac{2\gamma M}{v_0^2}$$

Når vi setter inn lysfarten og tallene fra oppgaven, får vi:

$$r = \frac{2\gamma M}{c^2} = \frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2\cdot 8\cdot 10^{36}\ \text{kg}}{\left(3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2} = \underline{\underline{1{,}2\cdot 10^{10}\ \text{m}}}$$

4.13

a I oppgave 3.36, så vi at omløpstiden til jorda er

$$23\ \text{h} + 56\ \text{min} + 4\ \text{s} = (23\cdot 3600\ \text{s}) + (56\cdot 60\ \text{s}) + 4\ \text{s} = 86\,164\ \text{s}.$$

Vi slår opp ekvatorradien til jorda, og finner at den er 6378 km. Farten er da:

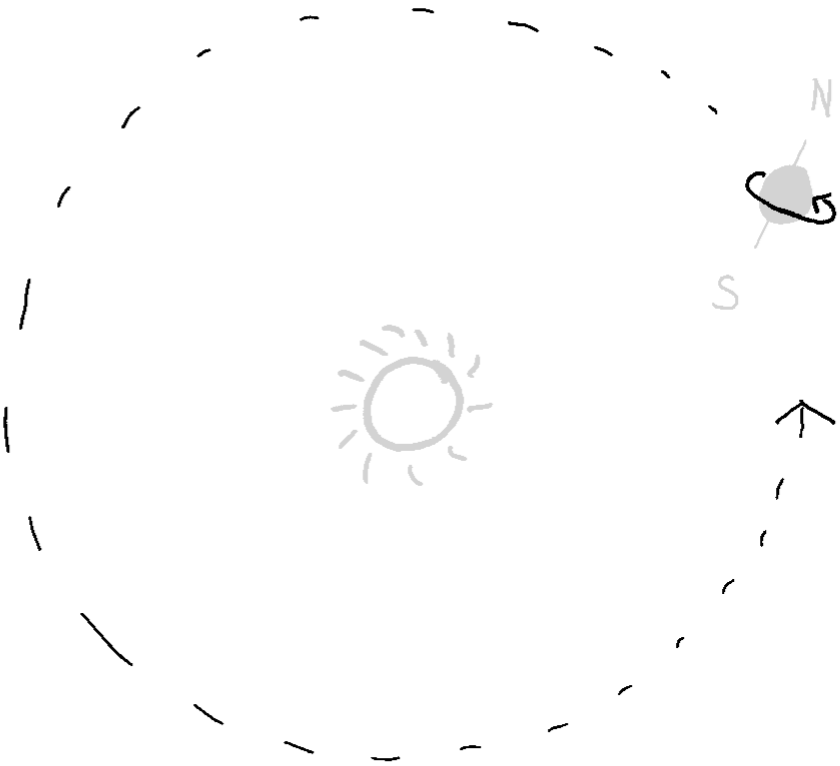
$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 6378 \cdot 10^3\ \text{m}}{86\,164\ \text{s}} = \underline{\underline{465\ \text{m/s}}}$$

b Siden omløpstiden er et døgn enten du er i Equador eller i Norge og du beveger deg i en større sirkelbane når du er i Equador, vil du bevege deg fortere her.

c Jorda bruker omtrent 365 døgn på et omløp rundt sola. Dette gir farten:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{s}} = 2{,}98 \cdot 10^4\ \text{m/s} = \underline{\underline{3{,}0\ \text{km/s}}}$$

d Vi tegner en figur som viser jordas bane rundt sola og jordas rotasjon rundt sitt eget sentrum. Først en figur sett «ovenfra», omtrent nordfra sett i jordas referansesystem (Nord er omtrent rett opp fra papirplanet.):



Deretter viser vi banen sett i jordas rotasjonsplan:

Vi ser at vår fart relativt til sola er størst dersom vi er på natt-siden av jorda, og løper omtrent østover.

4.14

a $\Delta v = 40\ \text{km/h} - 30\ \text{km/h} = \underline{\underline{10\ \text{km/h}}}$

b $\Delta v = 40\ \text{km/h} - (-30\ \text{km/h}) = \underline{\underline{70\ \text{km/h}}}$

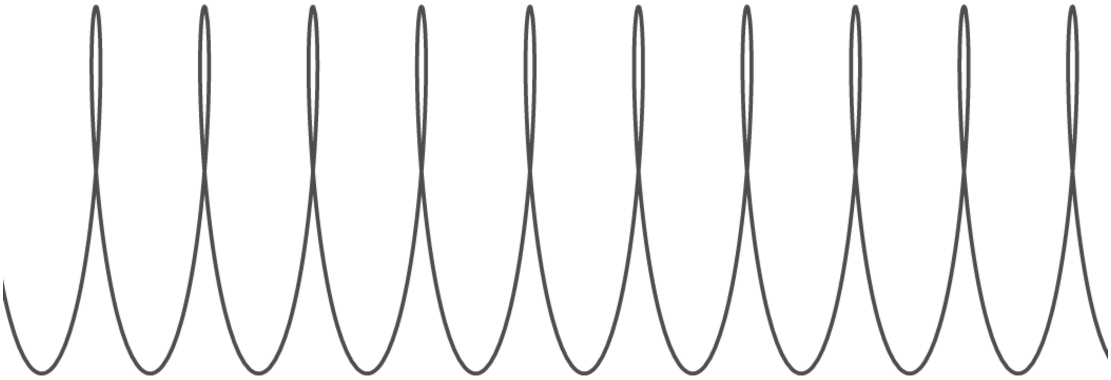
4.15

Du er i et referansesystem som tilnærmet er et treghetsssystem dersom du befinner deg i ro eller har konstant fart relativt til jordoverflaten (f.eks. når du sitter på en stol og lager løsningsforslag til oppgaver i Ergo fysikk 2, eller når du er i et kjøretøy som beveger seg med konstant fart langs en rett vei).

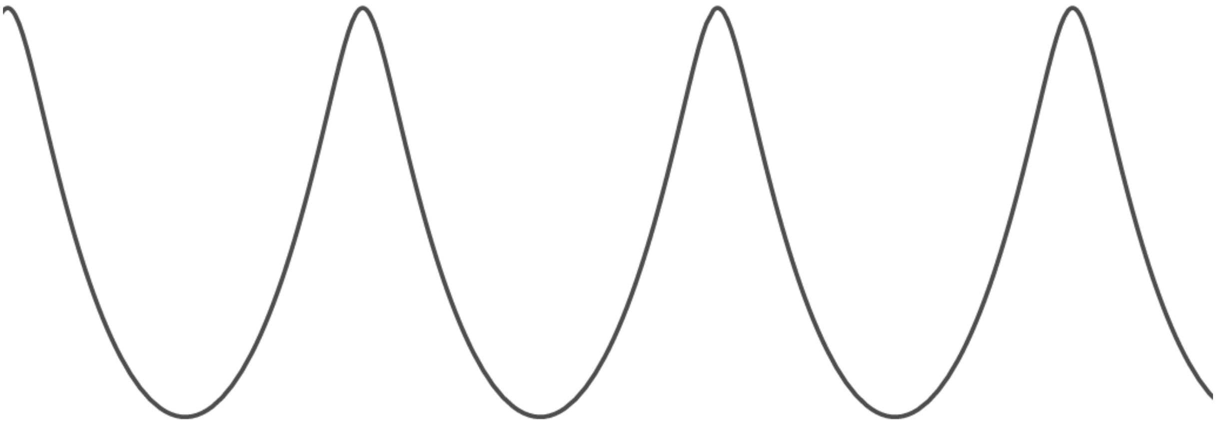
I alle andre tilfeller er du i et referansesystem som ikke er et treghetssystem (f.eks. når du er i et kjøretøy som svinger, hvis du står på en karusell, eller hvis du er på en buss som bråbremser).

4.16

Akkurat hvordan kurven blir seende ut, avhenger av farten på toget. Hvis farten er nokså lav, kan den se slik ut:



Hvis farten er høyere, kan den se slik ut:



4.17

a Hvis svømmerne skal bevege seg rett over en elv med strøm, må de svømme delvis mot strømmen. Fra figuren under ser vi at for at svømmerne skal ende opp midt i elva (ved punktet P på figuren), må de svømme en avstand 1,0t på skrå. Vi bruker Pytagoras' setning til å finne tiden t.

$$(1{,}0t)^2 = 10^2 + (0{,}50t)^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 0{,}50^2 t^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{100}{1-0{,}50^2}} = 11{,}547\,.$$

Svømmerne bruker altså 11,5 s til å komme halvveis over elva.

b Begge bruker like lang tid på de strekningene de har felles (halvveis over elva, og tilbake samme vei). Vi må se på hvem av de to som bruker lengst tid på resten av strekningen.

Svømmer A:

Svømmer først 10 m mot strømmen, med fart $1{,}0\ \text{m/s} - 0{,}50\ \text{m/s} = 0{,}50\ \text{m/s}$. Da er

$$s = vt_{\text{A1}} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{A1}} = \frac{s}{v} = \frac{10\ \text{m}}{0{,}50\ \text{m/s}} = 20\ \text{s}$$

Svømmer deretter 10 m med strømmen, med fart $1{,}0\ \text{m/s} + 0{,}50\ \text{m/s} = 1{,}50\ \text{m/s}$.

Da er $s = vt_{\text{A2}} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{A2}} = \dfrac{s}{v} = \dfrac{10\ \text{m}}{1{,}50\ \text{m/s}} = 6{,}7\ \text{s}$

Svømmer A bruker tiden $t_{\text{A}} = t_{\text{A1}} + t_{\text{A2}} = 20\ \text{s} + 6{,}7\ \text{s} = 26{,}7\ \text{s}$ på den delen av turen de to svømmerne ikke har felles.

Svømmer B:

Bruker like lang tid fra midtpunktet til den andre bredden og fra bredden tilbake til midtpunktet. Begge tidene er like tiden vi fant i oppgave a.

Svømmer B bruker tiden $t_{\text{B}} = 2t = 2 \cdot 11{,}547 = 23{,}1\ \text{s}$ på den delen av turen de to ikke har felles.

Svømmer B kommer derfor tilbake til utgangspunktet raskere enn svømmer A.

c Siden de to svømmerne svømmer første og siste del av turen like raskt, trenger vi bare ta hensyn til de delene de to ikke svømmer felles. Tidsforskjellen blir $t_{\text{B}} - t_{\text{A}} = 26{,}7\ \text{s} - 23{,}1\ \text{s} = \underline{\underline{3{,}6\ \text{s}}}$

d Fra oppgave b ser vi at svømmer A brukte tiden: $t_{\text{A}} = \dfrac{a}{c+v} + \dfrac{a}{c-v}$.

Fra oppgave a og b ser vi at svømmer B brukte tiden: $t_{\text{B}} = 2 \cdot \sqrt{\dfrac{a^2}{c^2 - v^2}}$

Forskjellen er

$$\begin{aligned}\Delta t &= t_{\text{A}} - t_{\text{B}} \\ &= \left(\frac{a}{c+v} + \frac{a}{c-v}\right) - 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2}{c^2 - v^2}}\end{aligned}$$

Vi lager felles nevner for de tre leddene:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{a \cdot (c-v)}{(c+v) \cdot (c-v)} + \frac{a \cdot (c+v)}{(c-v) \cdot (c+v)} - 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2}{c^2 - v^2}} \cdot \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{\sqrt{c^2 - v^2}} \\ &= \frac{a \cdot (c-v)}{c^2 - v^2} + \frac{a \cdot (c+v)}{c^2 - v^2} - 2a \cdot \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2}\end{aligned}$$

Når vi rydder opp, blir dette:

$$\begin{aligned}\Delta t &= \frac{ac + av - av + ac}{c^2 - v^2} - 2a \cdot \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2} \\ &= \frac{2ac - 2a\sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2} \\ &= 2a \cdot \frac{c - \sqrt{c^2 - v^2}}{c^2 - v^2}\end{aligned}$$

Som var det vi skulle vise.

4.18

Einsteins to postulater sier at:

1) Fysikkens lover har samme form i alle treghetssystemer
2) Lysfarten i vakuum har samme verdi i alle treghetssystemer.

4.19

Michelson og Morley brukt et interferometer til å måle lysfarten langs en akse parallelt med og en akse på tvers av jordbanen. De fant ingen forskjell uansett når på året de gjennomførte forsøket. Lyshastigheten må da være konstant uavhengig av referansesystem, noe som (svært overraskende!) brøt med det klassiske relativitetsprinsippet.

4.20

La oss tenke oss at spissen sender en lyspuls bakover når hun passerer forsvarsrekka. Når midtbanespilleren ser lyspulsen, sender hun ballen fraomver. Lyshastigheten er c relativt til de to spillerne. Den er også c relativt til dommeren. Dommeren vil se midtbanespilleren løpe mot lyspulsen. Hvis midtbanespilleren oppfatter at hun sparker ballen akkurat i det spissen passerer forsvarsrekka, vil dommeren oppfatte at hun sparket den *før* spissen passerte forsvarsrekka. Siden dommeren oppfatter offside vil det være enda mer offside i spillernes referansesystem.

Merk: Spissen sender selvfølgelig ikke ut noen lyspuls, men argumentet holder også for det lyset som reflekteres. Situasjonen over er analog til tankeeksperimentet med samtidighet i tog.

4.21

a I Elias' referansesystem, vil lyset bruke like lang tid på å nå fram til de to røde lampene. Disse vil tennes samtidig, og det røde lyset fra hver lampe vil bruke like lang tid til å nå fram til Elias. Elias ser altså at de to røde lampene blir tent samtidig.

b Nora er enig i at Elias ser de to lampene bli tent samtidig. Hun selv ser at lyspulsen bruker kortere tid til den bakerste enn til den fremste lampa, men at dette veies opp ved at lyset fra den bakerste lampa bruker lengre tid tilbake til Elias.

c I Noras referansesystem bruker lyspulsen kortere tid til den bakerste lampa, fordi den kjører mot lyspulsen. Hun mener derfor at den bakerste lampa tennes først.

d Elias er enig i at Nora ser den bakerste lampa tennes først. Han mener dette skyldes at det røde lyset på den fremre vogna må bevege seg en større avstand.

4.22

a Lorentzfaktoren er gitt ved $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, der v er farten objektet har relativt til den som observerer det, og c er lysfarten i vakuum.

b Vi bruker uttrykket fra oppgave a. Da finner vi:

$$v = 0{,}01c \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}01^2}} = \underline{\underline{1{,}00005}}$$

$$v = 0{,}10c \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}10^2}} = \underline{\underline{1{,}005}}$$

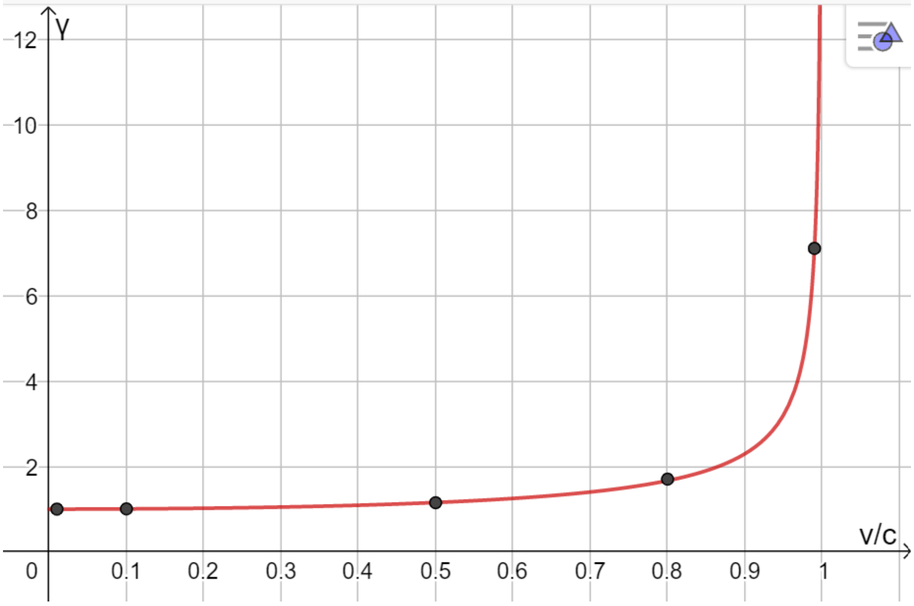
$$v = 0{,}50c \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}50^2}} = \underline{\underline{1{,}15}}$$

$$v = 0{,}80c \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}80^2}} = \underline{\underline{1{,}7}}$$

$$v = 0{,}99c \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}99^2}} = \underline{\underline{7{,}1}}$$

c Vi bruker her Geogebra til å gjøre regresjon med farten (med lysfarten c som enhet) på x-aksen, og lorentzfaktoren på y-aksen. Vi kan utforske sammenhengen ved å prøve med forskjellige typer funksjoner.

d Når farten nærmer seg lyshastigheten, går lorentzfaktoren mot uendelig. Vi har brukte funksjonen $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ til å tegne funksjonen, der $x = v/c$.



4.23

Vi finner lorentzfaktoren: $t = \gamma t_0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = \dfrac{t}{t_0} = \dfrac{8 \text{ år}}{2 \text{ år}} = 4$.

Vi finner farten:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{c^2} = 1-\frac{1}{\gamma^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}} \cdot c$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{1-\frac{1}{4^2}} \cdot c = \sqrt{\frac{15}{16}} \cdot c = 0{,}9682c = 0{,}97c$$

Farten til romskipet er 0,97 c, altså 97 % av lysfarten.

Dette tilsvarer $0{,}9682 \cdot 3{,}00 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2{,}9 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

4.24

$$t = \gamma t_0 = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2{,}60 \cdot 10^{-8} \text{ s}}{\sqrt{1-0{,}999^2}} = \underline{\underline{5{,}82 \cdot 10^{-7} \text{ s}}}$$

4.25

a Vi bruker formelen for lengdekontraksjon:

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot L_0$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{1 - \left(\frac{L}{L_0}\right)^2} \cdot c = \sqrt{1 - \left(\frac{15}{20}\right)^2} \cdot c = 0{,}6614c = 1{,}9843 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 2{,}0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Farten må være 66 % av lyshastigheten, eller $2{,}0 \cdot 10^8$ m/s.

b $s = vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} = \frac{15 \text{ m}}{1{,}9843 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \underline{\underline{7{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ s}}} = \underline{\underline{76 \text{ ns}}}$

c $s = vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} = \frac{20 \text{ m}}{1{,}9843 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = \underline{\underline{1{,}0 \cdot 10^{-7} \text{ s}}}$, dette tilsvarer ca 100 ns.

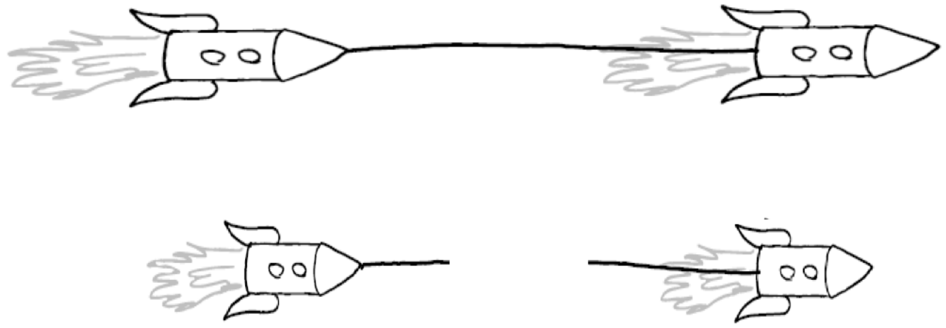
d Låven forkortes med samme faktor som stanga, så lengden på denne er

$\frac{L_{\text{låve}}}{15 \text{ m}} = \frac{15}{20} \quad \Rightarrow \quad L_{\text{låve}} = \frac{15^2}{20} \text{ m} = \underline{\underline{11 \text{ m}}}$. Stanga kan ikke få plass i låven.

4.26

a «Bell's spaceship paradox» handler om hvorvidt en snor utspent mellom to romskip med samme akselerasjon vil ryke eller ikke.

b Referansesystem 1: Vi ser romskipene akselerere samtidig og med samme akselerasjon.



Referansesystem 2: Romskipene er i ro før akselerasjonen

Tråden ryker i begge referansesystemene.

c I referansesystem 1 (romskipene får samme akselerasjon samtidig), vil både romskipene og tråden bli kortere på grunn av relativistisk lengdekontraksjon. Siden vi har definert referansesystemet som «det referansesystemet der romskipene hele tiden får samme akselerasjon», vil avstanden mellom dem være konstant. Siden tråden blir kortere enn avstanden, må den ryke.

I referansesystem 2 (der romskipene opprinnelig er i ro), vil det se ut som om det fremste romskipet begynner akselerasjonen før det bakerste. Avstanden mellom romskipene vil derfor øke, og tråden ryker.

4.27

a Vi leser av grafen. Bevegelsesmengden er omtrent $\underline{\underline{2{,}2\cdot 10^{-19}\ \text{kgm/s}}}$ når $v = 1{,}2\cdot 10^{8}\ \text{m/s}$.

b Vi leser av grafen. Farten er omtrent $2{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}$ når $p = 4{,}4\cdot 10^{-19}\ \text{kgm/s}$

c Vi leser av grafen. Bevegelsesmengden er omtrent $\underline{\underline{6{,}7\cdot 10^{-19}\ \text{kgm/s}}}$ når $v = 2{,}4\cdot 10^{8}\ \text{m/s}$.

d Hvis vi regner klassisk, ville vi fått:

Oppgave a: $p_{kl} = mv = 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot 1{,}2\cdot 10^{8}\ \text{m/s} = \underline{\underline{2{,}0\cdot 10^{-19}\ \text{kgm/s}}}$

Oppgave b: $p_{kl} = mv \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{p_{kl}}{m} = \dfrac{2\cdot 2{,}0\cdot 10^{-19}\ \text{kgm/s}}{1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = \underline{\underline{2{,}4\cdot 10^{8}\ \text{m/s}}}$

Oppgave c: $p_{kl} = mv = 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot 2{,}4\cdot 10^{8}\ \text{m/s} = \underline{\underline{4{,}0\cdot 10^{-19}\ \text{kgm/s}}}$

4.28

a $E_0 = m_p c^2 = 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2 = 1{,}50534\cdot 10^{-10}\ \text{J} = \underline{\underline{1{,}5\cdot 10^{-10}\ \text{J}}}$

$$E = \gamma m_p c^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-0{,}85^2}}\cdot 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2 = 2{,}85761\cdot 10^{-10}\ \text{J} = \underline{\underline{2{,}9\cdot 10^{-10}\ \text{J}}}$$

$$E_\text{k} = (\gamma - 1)m_p c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}85^2}} - 1\right)\cdot 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{1{,}4\cdot 10^{-10}\ \text{J}}}$$

$$p = \gamma m_p v = \frac{m_p v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_p\cdot 0{,}85c}{\sqrt{1-\frac{(0{,}85c)^2}{c^2}}}$$

$$= \frac{1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot 0{,}85\cdot 3{,}00\cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{\sqrt{1-0{,}85^2}} = \underline{\underline{8{,}1\cdot 10^{-19}\ \text{kgm/s}}}$$

Vi kan også velge å bruke tallene vi fant for hvileenergi og totalenergi:

$$E^2 = (pc)^2 + E_0^{\,2} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2}$$

$$\Rightarrow \quad p = \frac{1}{3{,}00\cdot 10^{8}\ \text{m/s}}\sqrt{\left(2{,}85761\cdot 10^{-10}\ \text{J}\right)^2 - \left(1{,}50534\cdot 10^{-10}\ \text{J}\right)^2} = \underline{\underline{8{,}1\cdot 10^{-19}\ \text{kgm/s}}}$$

b $E_0 = m_e c^2 = 9{,}1094\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{8{,}2\cdot 10^{-14}\ \text{J}}} = \underline{\underline{82\ \text{fJ}}}$

$$E = \gamma m_e c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}85^2}}\cdot 9{,}1094\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{1{,}6\cdot 10^{-13}\ \text{J}}} = \underline{\underline{0{,}16\ \text{pJ}}}$$

$$E_\text{k} = (\gamma - 1)m_e c^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}85^2}} - 1\right)\cdot 9{,}1094\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{7{,}4\cdot 10^{-14}\ \text{J}}} = \underline{\underline{74\ \text{fJ}}}$$

$$p = \gamma m_e v = \frac{9{,}1094\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot 0{,}85\cdot 3{,}00\cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{\sqrt{1-0{,}85^2}} = \underline{\underline{4{,}4\cdot 10^{-22}\ \text{kgm/s}}}$$

c Vi kan bruke tallene vi fant i oppgave a og b, men sammenhengen blir tydeligere dersom vi regner symbolsk.

Hvileenergi: $\dfrac{m_p c^2}{m_e c^2} = \dfrac{m_p}{m_e}$

Totalenergi: $\dfrac{\gamma m_p c^2}{\gamma m_e c^2} = \dfrac{m_p}{m_e}$

Kinetisk energi: $\dfrac{(\gamma-1) m_p c^2}{(\gamma-1) m_e c^2} = \dfrac{m_p}{m_e}$

Bevegelsesmengde: $\dfrac{\gamma m_p v}{\gamma m_e v} = \dfrac{m_p}{m_e}$

Vi ser at de fire forholdstallene er like, alle er : $\dfrac{m_p}{m_e} = \dfrac{1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{9{,}1094\cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = \underline{\underline{1{,}8\cdot 10^{3}}}$

4.29

a Elektronet og positronet har like stor masse. Hvis begge har svært liten fart, vil hvert foton få en energi lik hvileenergien til et elektron:

$$E_\gamma = m_e c^2 = 9{,}1094\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{8{,}2\cdot 10^{-14}\ \text{J}}} = \underline{\underline{82\ \text{fJ}}}$$

b Hvert foton vil kunne få en energi tilsvarende totalenergien til hver av partiklene:

$$E_\gamma = \gamma m_e c^2 = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}50^2}}\cdot 9{,}1094\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{9{,}5\cdot 10^{-14}\ \text{J}}} = \underline{\underline{95\ \text{fJ}}}$$

4.30

a $E_0 = mc^2 = 70\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{6{,}3\cdot 10^{18}\ \text{J}}}$

b 1 TWh tilsvarer $10^{12}\ \text{W}\cdot 3600\ \text{s} = 3{,}6\cdot 10^{15}\ \text{J}$. Forholdstallet mellom Elias' hvileenergi og Norges forbruk er $\dfrac{6{,}3\cdot 10^{18}\ \text{J}}{132{,}0\ \text{TWh}} = \dfrac{6{,}3\cdot 10^{18}\ \text{J}}{132{,}0\cdot 3{,}6\cdot 10^{15}\ \text{J}} = 13$. Elias' hvileenergi er omtrent 13 ganger større enn Norges årlige energiforbruk.

c $P = \dfrac{W}{t} \quad\Rightarrow\quad t = \dfrac{W}{P} = \dfrac{6{,}3\cdot 10^{18}\ \text{J}}{30\ \text{W}} = \underline{\underline{2{,}1\cdot 10^{17}\ \text{s}}} = \underline{\underline{6{,}7\cdot 10^{9}\ \text{år}}}$

4.31

a $E_\text{k} = (\gamma-1)mc^2 = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}60^2}}-1\right)\cdot 50\,000\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2 = 1{,}125\cdot 10^{21}\ \text{J} = \underline{\underline{1{,}1\cdot 10^{21}}}$

b Den kinetiske energien til et romskip med fart 0,90*c* er:

$$E_\text{k} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}90^2}}-1\right)\cdot 50\,000\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2 = 5{,}824\cdot 10^{21}\ \text{J}.$$

Energien som må tilføres romskipet er:

$$\Delta E_\text{k} = 5{,}824\cdot 10^{21}\ \text{J} - 1{,}125\cdot 10^{21}\ \text{J} = 4{,}699\cdot 10^{21}\ \text{J} = \underline{\underline{4{,}7\cdot 10^{21}\ \text{J}}}$$

c $132,9 \text{ TWh} = 132,9 \cdot 10^{12} \text{ W} \cdot 3600 \text{ s} = 4,7844 \cdot 10^{17} \text{ J}$.

$$v = 0,60c \quad \Rightarrow \quad \frac{1,125 \cdot 10^{21} \text{ J}}{4,7844 \cdot 10^{17} \text{ J}} = 2351$$

$$v = 0,90c \quad \Rightarrow \quad \frac{5,8237 \cdot 10^{21} \text{ J}}{4,7844 \cdot 10^{17} \text{ J}} = 12\,172$$

Vi finner at svarene i oppgave a og b er rundt 2350 og 12 000 ganger større enn Norges årlige energiforbruk.

d Svarene vi fant i oppgave c viser at energien som kreves for å gi romskipet nødvendig fart er så stor at romfart med relativistiske hastigheter neppe blir realitet i nærmeste framtid.

4.32

Einstein hevdet at hans lykkeligste tanke var da han forsto at en person i fritt fall ikke ville merke sin egen vekt. Tanken førte til ekvivalensprinsippet, som sier at et tyngdefelt er ekvivalent med et akselerert referansesystem.

4.33

a I et treghetssystem beveger lyset seg i en rett linje.

b I romskipets akselererte referansesystem, vil lyset avbøyes nedover.

c Vi finner tiden lyset bruker på å nå den andre veggen. Her er d avstanden til veggen.

$$d = ct \quad \Rightarrow \quad t = \frac{d}{c} = \frac{6,0 \text{ m}}{3,00 \cdot 10^{8} \text{ m/s}} = 2,0 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

I løpet av denne tiden, har romskipet beveget seg en avstand

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2 \cdot \left(2,0 \cdot 10^{-8} \text{ s}\right)^2 = 0,10 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

Lyset treffer 10 cm under høyden lampa henger i.

d Ekvivalensprinsippet sier at et tyngdefelt er ekvivalent med et akselerert gravitasjonsfelt. Vi har sett at lys avbøyes i et akselerert gravitasjonsfelt, så da må det også avbøyes i et tyngdefelt.

4.34

a Einsteins generelle relativitetsteori fikk sitt endelige gjennombrudd da Arthur Eddington klarte å fotografere avbøyning av lys i tyngdefeltet under en solformørkelse i 1919.

b En svært kort versjon: Newtons gravitasjonsteori beskriver gravitasjon som den kraften to gjenstander trekker på hverandre med, på grunn av sin masse. Einsteins teori beskriver gravitasjon som et fenomen som skyldes at tidrommet bøyes av masse.

4.35

Klokka vil få en sentripetalakselerasjon, og vil dermed være i et akselerert referansesystem. Dette akselererte referansesystemet er ekvivalent med et tyngdefelt, og i dette systemet vil klokka gå saktere enn den ellers ville gjort.

4.36

a Geodetiske kurver vil følge krumningen til rommet.

b Ifølge generell relativitetsteori, vil enhver masse krumme tidrommet. Hvis en gjenstand følger korteste og «retteste» vei i dette tidrommet, vil den bevege seg inn mot eller i bane rundt massen som krummer rommet.

4.37

a Vi velger å bruke CAS til å løse oppgaven.

Vi definerer først størrelsene som inngår:

1 $g := 6.67 \cdot 10^{-11}$

$\rightarrow \ g := \frac{667}{10000000000000}$

2 $c := 3 \cdot 10^{8}$

$\rightarrow \ c := 300000000$

3 $M := 5.97 \cdot 10^{24}$

$\rightarrow \ M := 5972000000000000000000000$

4 $r_0 := 6371000$

$\rightarrow \ r_0 := 6371000$

5 $h := 408000$

$\rightarrow \ h := 408000$

Vi regner så ut den gravitasjonelle tidsforlengelsen ved ISS og ved havoverflaten. Vi har her valgt å sette $t_0 = 1$.

6 $t_i := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2gM}{(r_0+h)c^2}}}$

$\rightarrow \ t_i := \frac{1}{\frac{1}{5084250000}\sqrt{25849598028746308255}}$

7 $t_h := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2gM}{r_0 c^2}}}$

$\rightarrow \ t_h := \frac{1}{\frac{1}{207750000}\sqrt{43160062440033655}}$

Vi tar differansen delt på tiden ved havoverflaten, og finner at den gravitasjonelle tidsforlengelsen er:

8 $tf_g := \frac{t_h - t_i}{t_h}$

$\approx \ tf_g := 4.1808 \cdot 10^{-11}$

Vi finner til slutt svaret i prosent: $4{,}18 \cdot 10^{-11} \cdot 100\ \% = \underline{\underline{4{,}18 \cdot 10^{-9}\ \%}}$

b Vi fortsetter fra oppgave a, og definerer nå også farten og lorentzfaktoren

9 $v := 6900$

$\rightarrow \ v := 6900$

10 $lf := \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$\rightarrow \ lf := \frac{1}{\frac{1}{1000000}\sqrt{999999999471}}$

Vi setter $t_0 = 1$ på bakken. Da er $t = \gamma t_0 = \gamma$, og differansen delt på tiden på bakken blir $\frac{t - t_0}{t_0} = \gamma - 1$. Vi fortsetter med CAS, og finner at tidsforlengelsen på grunn av fart er:

11	$tf_v := lf - 1$
	$\approx$ **$tf_v := 2.6451 \cdot 10^{-10}$**

Vi finner til slutt svaret i prosent: $2{,}6 \cdot 10^{-10} \cdot 100\ \% = \underline{\underline{2{,}6 \cdot 10^{-8}\ \%}}$

c Vi finner ut hvor mange sekunder eldre tvillingen på jorda og tvillingen på ISS blir på et år:

12	$T_j := 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$
	$\approx$ **$T_j := 31536000$**
13	$T_i := T_j \cdot (1 + tf_g) \cdot (1 - tf_v)$
	$\approx$ **$T_i := 31535999.993$**
14	$T_j - T_i$
	$\approx$ **0.007**

Tvillingen på jorda blir omtrent 0,007 s eldre enn tvillingen på romstasjonen.

4.38

a Jo mindre radius blir, jo mindre vil verdien av kvadratrota $\sqrt{1-\frac{2\gamma M}{rc^2}}$ være. Da vil verdiene til både lengde og tid bli større jo nærmere vi kommer det svarte hullet. Romskipet vil strekkes ut, og vi vil se klokka begynne å gå saktere.

b Personene i romskipet vil oppleve at våre klokker går raskere og raskere når de selv beveger seg inn mot det svarte hullet.

c Lyssignalet som blir sendt ut har en bestemt frekvens, $f = \frac{1}{T}$, der T er perioden. Siden tiden går fortere når lyset beveger seg ut av tyngdefeltet, blir perioden lengre, frekvensen blir da lavere, og bølgelengden $\lambda = \frac{c}{f}$ blir mindre.

4.39

Vi bruker CAS til å løse oppgaven:

1 $g := 6.67 \cdot 10^{-11}$

$\rightarrow$ $\mathbf{g := \frac{667}{10000000000000}}$

2 $M := 4 \cdot 1.99 \cdot 10^{30}$

$\rightarrow$ $\mathbf{M := 7960000000000000000000000000000}$

3 $c := 3 \cdot 10^{8}$

$\rightarrow$ $\mathbf{c := 300000000}$

4 $r_0 := \frac{2\,g\,M}{c^2}$

$\rightarrow$ $\mathbf{r_0 := \frac{530932}{45}}$

5 $\int_{r_0}^{0} -\sqrt{\frac{r}{2\,g\,M}}\,dr$

$\approx$ $\mathbf{0.0000262189}$

Vi finner at det tar $2{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{s} = 2{,}6\ \mu\text{s}$ før romskipet kollapser i sentrum av det svarte hullet.

4.40

a Forskjellen i gravitasjonsfeltstyrke mellom beina og hodet til guttene er:

$$\Delta g_{\text{M}} = g_{\text{bein}} - g_{\text{hode}} = \gamma \frac{M}{r^2} - \gamma \frac{M}{(r + 2{,}0\ \text{m})^2} = \gamma M \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r + 2{,}0\ \text{m})^2} \right)$$

I oppgave 4.39 så vi at radius ved hendelseshorisonten til et sort hull er $r = \frac{2\gamma M}{c^2}$.

Martin (lite sort hull):

$$r = \frac{2\gamma M}{c^2} = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 8 \cdot 10^{30}\ \text{kg}}{(3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} = 11\,858\ \text{m}$$

$$\Delta g_{\text{M}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 8 \cdot 10^{30} \cdot \left(\frac{1}{(11\,858\ \text{m})^2} - \frac{1}{(11\,858\ \text{m} + 2{,}0\ \text{m})^2} \right) = \underline{\underline{1{,}3 \cdot 10^{9}\ \text{N/kg}}}$$

Nitram (stort svart hull):

$$r = \frac{2\gamma M}{c^2} = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 8 \cdot 10^{36}\ \text{kg}}{(3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} = 1{,}1858 \cdot 10^{10}\ \text{m}$$

$$\Delta g_{\text{N}} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 8 \cdot 10^{36} \cdot \left(\frac{1}{(1{,}1858 \cdot 10^{10}\ \text{m})^2} - \frac{1}{(1{,}1858 \cdot 10^{10}\ \text{m} + 2{,}0\ \text{m})^2} \right)$$

$$= \underline{\underline{1{,}3 \cdot 10^{-3}\ \text{N/kg}}}$$

b Vi ser at forskjellen i gravitasjonsfeltstyrke mellom føttene og hodet er mye større dersom du faller inn mot et «lite» svart hull enn mot et stort. Dette må man regne med at medfører et visst ubehag.

4.41

a Tidrommet rundt en planet:

b Tidrommet rundt en stjerne (mer massiv enn en planet):

c Tidrommet rundt et svart hull (uendelig tiltrekkende):

d Tidrommet rundt et hvitt hull (uendelig frastøtende):

4.42

a 1. postulat: Fysikkens lover har samme form i alle treghetssytemer, og
2. postulat: Lysfarten i vakuum har samme verdi i alle treghetssystemer.

Vi kaller det spesiell relativitesteori fordi resultatene bare gjelder de spesielle tilfellene der referansesystemet er et treghetssystem.

b $E_0 = mc^2$. Hvileenergi er den energien en gjenstand har i kraft av å ha masse. Totalenergi er alltid bevart. Hvis masse «forsvinner» vil den i realiteten være gått over til andre typer energi.

c I alle treghetssystemer er $s = vt$. Strekningen lys beveger seg i ett treghetssystem, kan være lengre dersom vi ser på samme situasjon i et annet treghetssystem. Siden lyshastigheten er den samme i alle treghetssystemer, må tiden være ulik i de to treghetssystemen. Jfr. tankeeksperiementet der en lyspuls sendes fra gulv til tak i et tog som beveger seg med konstant fart.

d Ekvivalsensprinsippet i generell relativitetsteori: Et gravitasjonsfelt er ekvivalent med et akselerert referansesystem.

e Her er det flere mulig svar, men to viktige eksempler er hvordan lyset avbøyes i nærheten av en stor masse (f.eks. lys fra fjerne stjerner under en solformørkelse) og hvordan tiden endres i nærheten av store masser (f.eks. i nærheten av svarte hull).

4.43

a Formlene for relativistisk bevegelsesmengde og energi er:

$$p = \gamma mv = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{og} \qquad E = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Dersom farten går mot lyshastigheten, går $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ mot null, og både bevegelsesmengden og energien går mot uendelig.

b Endringen i totalenergi vil være lik endringen i kinetisk energi, siden vennen din har samme masse før og etter akselerasjonen. Den kinetiske energien i starten er lik null, så

$$E_\mathrm{k} = (\gamma - 1)mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}99^2}} - 1\right) \cdot 70\ \mathrm{kg} \cdot \left(3{,}0 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}\right)^2 = \underline{\underline{3{,}8 \cdot 10^{19}\ \mathrm{J}}}$$

c Fra impulsloven vet vi at

$$\Delta p = Ft \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\Delta p}{t} = \frac{mv}{t \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{70\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}99 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}}{1\ \mathrm{s} \cdot \sqrt{1-0{,}99^2}} = \underline{\underline{1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N}}}$$

4.44

a I løpet av tiden *t* beveger lyset seg en strekning *ct*, og toget beveger seg en strekning *0,80ct*. Lyset kan reflekteres framover så lenge komponenten av strekningen som er parallell med fartretningen er mindre enn *0,80ct*. Dette betyr at lyset kan reflekteres med en vinkel ϕ slik at en lysstråle akkurat ikke treffer hjørnet til toget etter tiden *t*, se figuren:

b $\sin\phi = \dfrac{0{,}80c}{c} = 0{,}80 \quad \Rightarrow \quad \phi = \sin^{-1} 0{,}80 = \underline{\underline{53^\circ}}$

c Vi ser lys som reflekteres fra togsiden som er nærmest oss og fra baksiden av toget. Vi vil derfor se et bilde av disse to sidene, men svært forvridd siden posisjonen til toget har endret seg mye i løpet av tidsrommet lyset ble reflektert fra de forskjellige delene av toget.

4.45

a Vi begynner med impulsloven, og finner at

$$F\Delta t = \gamma_2 m v_2 - \gamma_1 m v_1$$

$$\Rightarrow \quad \gamma_2 v_2 = \frac{F\Delta t + \gamma_1 m v_1}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_2}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}} = \frac{F\Delta t + \gamma_1 m v_1}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_2^2}{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} = \frac{v_2^2 c^2}{c^2 - v_2^2} = \left(\frac{F\Delta t + \gamma_1 m v_1}{m}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad v_2^2 = \left(\frac{F\Delta t + \gamma_1 m v_1}{mc}\right)^2 \cdot \left(c^2 - v_2^2\right) = kc^2 - kv_2^2$$

I siste linje har vi for å forenkle notasjonen definert en størrelse $k = \left(\dfrac{F\Delta t + \gamma_1 m v_1}{mc}\right)^2$.

Dette gir videre:

$$v_2^2 = kc^2 - kv_2^2 \quad \Rightarrow \quad kv_2^2 + v_2^2 = kc^2 \quad \Rightarrow \quad (k+1)v_2^2 = kc^2 \quad \Rightarrow \quad v_2^2 = \frac{kc^2}{k+1}$$

$$\Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{kc^2}{k+1}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{1}{k}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{F\Delta t + \gamma_1 m v_1}{mc}\right)^2}}} = \frac{c}{\sqrt{1 + \left(\frac{mc}{F\Delta t + \gamma_1 m v_1}\right)^2}}$$

b

```
from pylab import *
from math import sqrt

# Startbetingelser og konstanter
```

```python
m = 10000                    # masse, kg (OBS! ikke oppgitt i oppgaven)
c = 3*10**8                  # lysfarten, m/s
F = 1000000                  # kraft, N

v = 0.1*c                    # startfart
t_jorden = 0                 # starttid, s
t_romskip = 0
t_slutt = 24*60*60           # slutter etter ett døgn
dt = 0.1                     # tidssteg på jorden, s

# Regner ut og returnerer lorentzfaktoren
def lf(v):
    lf = 1/sqrt(1-(v/c)**2)
    return lf

# Regner ut tiden på jorda og i romskipet.
while t_jorden <= t_slutt:
    v = sqrt(1/(m**2/((F*dt + m*lf(v)*v)**2)+(1/c**2)))
    t_romskip = t_romskip + dt/lf(v)
    t_jorden = t_jorden + dt

# Skriver ut tiden på jorda og i romskipet
print("Når det har gått", round(t_jorden/3600, 2), "h på jorden,")
print("har det gått", round(t_romskip/3600, 2), "h på romskipet.")
```

Når programmet kjører, skriver det ut:

```
Når det har gått 24.0 h på jorden,
har det gått 23.84 h på romskipet.
```

Kapitteltest

Oppgave 1

a Du kan bruke f.eks. Newtons første lov og undersøke om den gjelder. Hvis den gjør det, har båten konstant fart.

b Siden fysikkens lover har samme form i alle treghetssystemer, vil du ikke kunne gjøre noe forsøk som viser deg akkurat hvor stor fart båten har.

c Et treghetssystem er et referansesystem der Newtons første lov gjelder. Alle treghetssystemer beveger seg med konstant fart i forhold til hverandre. I et referansesystem som ikke er et treghetssystem, gjelder ikke Newtons første lov.

Oppgave 2

a $t = \gamma t_0 = \dfrac{t_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, der t_0 er hviletiden, v er farten til gjenstanden og c er lyshastighet.

b Hviletiden t_0 er tiden som måles med ei klokke som er i ro i forhold til gjenstanden. Tiden t er tiden som måles med ei klokke i et referansesystem der gjenstanden har farten v.

c Merk: Her er det helt sikkert mulig å tolke situasjonene annerledes enn vi har gjort, så dette er bare et forslag til hvordan oppgaven kan løses.
1: Klokka er sannsynligvis i ro relativt til tilskuerne og tidtageren. Den er ikke i ro relativt til løperne. Den vil derfor ikke vise løpenes hviletid.
2: Klokka er i ro relativt til jagerflyet, og viser derfor hviletiden til jagerflyet.
3: Atomene er i ro relativt til vikingskipet, og viser derfor vikingskipets hviletid.
4: Uret er i ro relativt til deg, og vil derfor vise din hviletid.
5: Uret er ikke i ro relativt til deg, så det vil ikke vise din hviletid.

Oppgave 3

a $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0{,}999^2}} = 22{,}366 = \underline{\underline{22{,}4}}$

b $t = \gamma t_0 = 22{,}366 \cdot 2{,}9 \cdot 10^{-13}\ \text{s} = 6{,}4862 \cdot 10^{-12}\ \text{s} = \underline{\underline{6{,}5 \cdot 10^{-12}\ \text{s}}}$

c $s = vt = 0{,}999 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s} \cdot 6{,}4862 \cdot 10^{-12}\ \text{s} = 1{,}9439 \cdot 10^{-3}\ \text{m} = \underline{\underline{1{,}9\ \text{mm}}}$ **(sett fra jorda)**

d Tauonet opplever at avstanden blir forkortet med en faktor $1/\gamma$. Det vil da komme fram til det samme sluttpunktet selv om avstanden mellom start- og sluttpunkt ikke er den samme som i vårt treghetssystem.

Oppgave 4

a **Situasjon 1:**

$$p_{\text{kl}} = mv = 1{,}50 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \frac{100}{3{,}6}\ \text{m/s} = \underline{\underline{4{,}17 \cdot 10^4\ \text{kgm/s}}}'$$

$$p_{\text{rel}} = \gamma mv = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{(100/3{,}6\ \text{m/s})^2}{(3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2}}} \cdot 1{,}50 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot \frac{100}{3{,}6}\ \text{m/s} = \underline{\underline{4{,}17 \cdot 10^4\ \text{kgm/s}}}$$

Situasjon 2:

$$p_{\text{kl}} = mv = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 0{,}999 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s} = \underline{\underline{5{,}01 \cdot 10^{-19}\ \text{kgm/s}}}$$

$$p_{\text{rel}} = \gamma mv = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}999^2}} \cdot 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 0{,}999 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s} = \underline{\underline{1{,}12 \cdot 10^{-17}\ \text{kgm/s}}}$$

Situasjon 3:

$$p_{\text{kl}} = mv = 9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 0{,}10 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s} = \underline{\underline{2{,}73 \cdot 10^{-23}\ \text{kgm/s}}}$$

$$p_{\text{rel}} = \gamma mv = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}10^2}} \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 0{,}10 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s} = \underline{\underline{2{,}75 \cdot 10^{-23}\ \text{kgm/s}}}$$

b Forholdstallet mellom klassisk og relativistisk bevegelsesmengde er

$$\frac{p_{\text{kl}}}{p_{\text{rel}}} = \frac{mv}{\gamma mv} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ .$$

Situasjon 1: $\dfrac{p_{\text{kl}}}{p_{\text{rel}}} = \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-\dfrac{(100/3{,}6\ \text{m/s})^2}{(3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2}} = 1$

Situasjon 2: $\dfrac{p_{\text{kl}}}{p_{\text{rel}}} = \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-0{,}999^2} = 0{,}0447$

Situasjon 3: $\dfrac{p_{\text{kl}}}{p_{\text{rel}}} = \sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1-0{,}10^2} = 0{,}995$

Vi ser fra svarene i oppgave a og b at det ikke er nødvendig å regne relativistisk i situasjon 1, at vi må gjøre det i situasjon 2, og at forskjellen ikke blir veldig stor i situasjon 3. Vi bør regne relativistisk i situasjon 3 dersom vi ønsker stor nøyaktighet i svarene.

c Vi regner ut energien som skal til for å akselerere ett proton:

$$\Delta E = \gamma_2 mc^2 - \gamma_1 mc^2 = (\gamma_2 - \gamma_1)\cdot mc^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}999\,99^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0{,}999^2}}\right)\cdot 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}00\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2$$
$$= \underline{\underline{3{,}03\cdot 10^{-8}\ \text{J}}}$$

Dette virker ikke veldig mye, men la oss se på hvor mye energi som skal til for å akselerere ett gram masse:

$$\Delta E = \gamma_2 mc^2 - \gamma_1 mc^2 = (\gamma_2 - \gamma_1)\cdot mc^2 =$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}999\,99^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-0{,}999^2}}\right)\cdot 1\cdot 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}00\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2$$
$$= 1{,}81\cdot 10^{16}\ \text{J}$$

Vi ser at det kreves enormt mye energi å øke farten til bare ett gram masse når vi nærmer oss lyshastigheten. Vi ser også fra lorentzfaktoren at det krever uendelig mye energi å akselerere en liten masse opp til lyshastigheten.

Oppgave 5

a Se Einsteins to postulater på s. 169, og diskusjonen av tidsforlengelse på s. 172 og 173.

b En svært kort oppsummering av ulikhetene:
Newton: Gravitasjon er kraft, og størrelsen på gravitasjonskraften forteller hvor mye en masse trekker på en annen.
Einstein: Gravitasjon skyldes at masser krummer tidrommet og påvirker gjenstanders bevegelse gjennom rommet.

c Se diskusjon på s. 184-185 i boka.

d Særlig viktige er avbøyning av lys fra fjerne stjerner under solformørkelser, og det at tiden går saktere i et gravitasjonsfelt.

Oppgave 6

1: Hvis noe beveger seg med en hastighet v, er lengden i fartsretningen lik $L = L_0 / \gamma$, der L_0 er lengden gjenstanden ville hatt dersom den var i ro relativt til deg.

2: Dramatiske hendelser i universet kan gi opphav til målbare bølgebevegelser i tidrommet. Disse kalles gravitasjonsbølger.

3: En tvilling som reiser ut i verdensrommet med høy hastighet vil være yngre enn sin tvilling når han eller hun returnerer til jorda. Hvis vi bare tar hensyn til spesiell relativitetsteori, vil dette gi opphav til et paradoks, fordi begge tvillingene tilsynelatende ville være yngre enn den andre. Paradokset løses hvis vi tar hensyn til generell relativitetsteori, fordi tvillingen på reise vil ha tilbragt tid i et kraftig akselerert referansesystem.

4: Siden lys avbøyes i et akselerert referansesystem, og et akselerert referansesystem er ekvivalent med et gravitasjonsfelt, må lys også avbøyes i gravitasjonsfelt.

5: Tid går saktere i et gravitasjonsfelt. En konsekvens av dette er at det blir «plass» til flere bølgelengder per tidsenhet, og frekvensen til lyset blir derfor større i gravitasjonsfeltet.