2 Krumlinjet bevegelse

2.1

Vi finner tiden ved å se på bevegelsen i x-retning: $x = v_0 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0} = \frac{100 \text{ m}}{500 \text{ m/s}} = 0{,}20 \text{ s}$

Vi finner ut hvor langt kula har falt på denne tiden:

$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (0{,}2 \text{ s})^2 = 0{,}20 \text{ m} = \underline{\underline{20 \text{ cm}}}$

2.2

a Ballen når sitt høyeste punkt når farten i y-retning er lik null.

$v_y = v_{0y} - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{25 \text{ m/s}\cdot \sin 32^\circ}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = 1{,}3505 \text{ s} = \underline{\underline{1{,}4 \text{ s}}}$

På dette tidspunktet er høyden

$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = 25 \text{ m/s}\cdot \sin 32^\circ \cdot 1{,}3505 \text{ s} - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot (1{,}3505 \text{ s})^2 = \underline{\underline{8{,}9 \text{ m}}}$

b Siden farten i x-retning er konstant og farten i y retning er lik null, er farten i toppunktet:

$v = v_{x0} = 25 \text{ m/s}\cdot \cos 32^\circ = \underline{\underline{21 \text{ m/s}}}$.

Akselerasjonen gjennom hele bevegelsen er $a = 9{,}81 \text{ m/s}^2$ loddrett nedover.

c Vi finner tidspunktet når $y = 0$ m:

$y = v_{y0}t - \frac{1}{2}gt^2 = t\cdot\left(v_0 - \frac{1}{2}gt\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 - \frac{1}{2}gt = 0$

$\Rightarrow \quad t = \frac{2v_{y0}}{g} = \frac{2\cdot 25 \text{ m/s}\cdot \sin 32^\circ}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = 2{,}701 \text{ s} = \underline{\underline{2{,}7 \text{ s}}}$

Avstanden fra startpunktet er da $x = v_{x0}t = 25 \text{ m/s}\cdot\cos 32^\circ \cdot 2{,}701 \text{ s} = \underline{\underline{57 \text{ m}}}$

d Farten i x-retning er $v_x = v_{x0} = 25 \text{ m/s}\cdot \cos 32^\circ = 21{,}2012 \text{ m/s}$

Farten i y-retning er $v_y = v_{0y} - gt = 25 \text{ m/s}\cdot \sin 32^\circ - 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 2{,}701 \text{ s} = 13{,}2488 \text{ m/s}$.

Absoluttverdien av farten er $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(21{,}2012 \text{ m/s})^2 + (13{,}2488 \text{ m/s})^2} = \underline{\underline{25 \text{ m/s}}}$

Fartretningen danner en vinkel $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{13{,}2488 \text{ m/s}}{21{,}2012 \text{ m/s}}\right) = \underline{\underline{32^\circ}}$ med bakken.

Merk: Siden ballen bare er påvirket av tyngdekraften, er den i fritt fall og den mekaniske energien er bevart. Siden farten i x-retning er konstant, må farten i y-retning være den samme som den var i starten, og da må også vinkelen være det. Vi kan altså finne både absoluttverdien og vinkelen helt uten å regne.

2.3

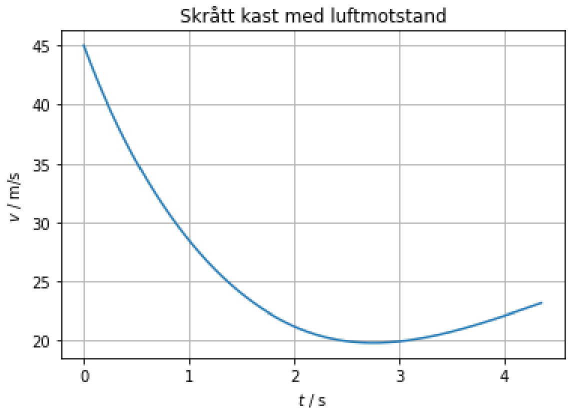
a

```
from pylab import *
# Konstanter
m = 0.145                    # massen til gjenstanden, kg
k = 1.31*10**(-3)            # luftmotstandstallet, kg/m
```

```
g = 9.81                     # tyngdeakselerasjon, m/s^2
v0 = 45.0                    # startfart, m/s
y0 = 1.20                    # starthøyde, m
theta = radians(36)          # konverterer vinkelen til radianer

# Konstante krefter
G = array([0, -m*g])         # tyngden i N

# Variable krefter, utregning av kraftsum og akselerasjon
def a(v):
    e_v = v/norm(v)
    L = -k*norm(v)**2*e_v    # luftmotstandsvektor, N
    sum_F = G + L            # vektorsum av kreftene, N
    aks = sum_F/m            # akselerasjonsvektoren, m/s^2
    return aks

# Startverdier for bevegelsen
r = array([0, y0])           # startposisjon, m
v = array([v0*cos(theta), v0*sin(theta)])   # startfart, m/s
t = 0                        # starttid, s

# Liste for lagring av verdier
r_liste = [r]
v_liste = [v]
vnorm_liste = [norm(v)]
t_liste = [t]

# Simulering av bevegelse
dt = 0.001                   # tidssteg i simulering, s
while r[1] >= 0:             # stopper når v_y = 0
    v = v+a(v)*dt            # regner ut neste fartsvektor
    r = r + v*dt             # regner ut neste posisjonsvektor
    t = t + dt               # går til neste tidspnkt
    # Lagring av 2D-verdier i lister
    r_liste = concatenate([r_liste, [r]])
    v_liste = concatenate([v_liste, [v]])
    vnorm_liste.append(norm(v))
    t_liste.append(t)

# Tegner graf
plot(t_liste, vnorm_liste)       # tegner graf
title("Skrått kast med luftmotstand")   # graftittel
xlabel("$t$ / s")                       # navn på x-akse
ylabel("$v$ / m/s")                     # navn på y-akse
grid()
show()
```

```
print("Ballen beveger seg", r[0], "m i horisontal retning før den
når bakken.")
```

Når programmet kjører, får vi denne grafen:



Vi ser tydelig fra grafen at farten ikke er lineær.

b Når programmet i a kjører, skriver det ut:

```
Ballen beveger seg 94.67777946176349 m i horisontal retning før den når
bakken.
```

2.4

a Farten peker mot venstre og øker, så figur 2 passer best.

b Farten peker rett nedover og øker. Samtidig må akselerasjonen ha en komponent inn mot sentrum av svingen, så figur 4 passer best.

c Farten peker på skrå opp mot høyre. Siden farten er konstant langs ei rett linje, er det ingen akselerasjon, så figur 5 passer best.

d Farten peker rett oppover. Absoluttverdien av farten er konstant, men det er en sentripetalakselerasjon inn mot sentrum av svingen. Figur 3 passer derfor best.

e Farten peker rett mot venstre. Siden den er konstant og rettlinjet er det ingen akselerasjon, så figur 1 passer best.

2.5

Banefarten er $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{t} = \frac{2\pi \cdot 3186 \cdot 10^3\ \text{m}}{24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{s}} = 231{,}69\ \text{m/s} = \underline{\underline{0{,}23\ \text{km/s}}}$.

Sentripetalakselerasjonen er $a = \frac{v^2}{r} = \frac{(231{,}69\ \text{m/s})^2}{3186 \cdot 10^3\ \text{m}} = \underline{\underline{0{,}017\ \text{m/s}^2}}$

2.6

a $R = \mu mg = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v^2}{\mu g} = \frac{(80/3{,}6\ \text{m/s})^2}{0{,}20 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 252\ \text{m} = \underline{\underline{0{,}25\ \text{km}}}$

b $R = \mu mg = \frac{mv^2}{r}$

$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\mu g r} = \sqrt{0{,}20 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 150\ \text{m}} = 17{,}155\ \text{m/s} = \underline{\underline{17\ \text{m/s}}} = \underline{\underline{62\ \text{km/s}}}$

2.7

a $v = \sqrt{a_s r} = \sqrt{g \tan\theta \cdot L \sin\theta} = \sqrt{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \tan 34^\circ \cdot 0{,}25\ \text{m} \cdot \sin 34^\circ} = 0{,}9618\ \text{m/s} = \underline{\underline{0{,}96\ \text{m/s}}}$

Merk: Siden farten bare er avhengig av vinkelen og lengden på snora, vil den være like stor som i eksempelet.

b $s = vt \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi L \sin\theta}{v} = \dfrac{2\pi \cdot 0{,}25\ \text{m} \cdot \sin 34^\circ}{0{,}9618\ \text{m/s}} = 0{,}9133\ \text{s} = \underline{\underline{0{,}91\ \text{s}}}$

c Banefarten er $v = \sqrt{g \tan\theta \cdot 2L \sin\theta} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{g \tan\theta \cdot L \sin\theta} = \sqrt{2} \cdot 0{,}9618\ \text{m/s} = \underline{\underline{1{,}4\ \text{m/s}}}$

Omløpstiden er $t = \dfrac{2\pi \cdot 2L \sin\theta}{\sqrt{2}v} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{2\pi L \sin\theta}{v} = \sqrt{2} \cdot 0{,}9133\ \text{s} = \underline{\underline{1{,}3\ \text{s}}}$

d $2v = 2 \cdot \sqrt{g \tan\theta \cdot L \sin\theta} = \sqrt{g \tan\theta \cdot 4L \cdot \sin\theta}$. Lengden må firedobles, altså være $4 \cdot 0{,}25\ \text{m} = 1{,}0\ \text{m}$ lang.

2.8

a Det virker to krefter på klossen: Normalkraften og tyngdekraften. Vi har samme situasjon som i eksempel 10. Her ser vi at

$$\Sigma F = mg \tan\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = mg \tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{rg \tan\theta} = \sqrt{0{,}50\ \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \tan 35^\circ} = \underline{\underline{1{,}9\ \text{m/s}}}$$

b Hvis farten er litt høyere, vil klossen skli utover og følge en litt større sirkelbane.

c Hvis farten er litt lavere, vil klossen skli innover og følge en litt mindre sirkelbane.

d Hvis farten er mye høyere eller lavere, vil den skli enten utover eller innover, ut av banen.

2.9

a Den mekaniske energien er bevart. Vi lar $h_0 = 0\ \text{m}$. Da er $h = L = 1{,}5\ \text{m}$, og $v = 0\ \text{m/s}$. Da er

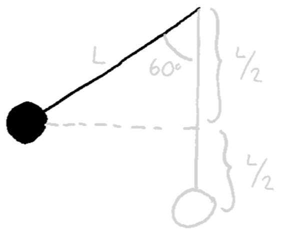
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gL} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}5\ \text{m}} = \underline{\underline{5{,}4\ \text{m/s}}}$$

b Radius i sirkelbanen er det samme som lengden på snora, så $r = L$. Da er

$$\Sigma F = S - G = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{mv^2}{r} + mg = \frac{m \cdot 2gL}{L} + mg = 3mg = 3 \cdot 0{,}25\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{7{,}4\ \text{N}}}$$

c Når svingeutslaget er 60°, er høydeforskjellen mellom laveste og høyeste punkt i banen *L*/2.



Da er $mgh = \dfrac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(L/2)} = \sqrt{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}5\ \text{m}} = \underline{\underline{3{,}8\ \text{m/s}}}$

2.10

a I eksempelet så vi at den minste farten kula kan ha i toppunktet er $v = \sqrt{gr}$. Den minste kinetiske energien er da

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgr = \frac{1}{2}\cdot 0{,}020\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2\cdot 0{,}10\text{ m} = 0{,}0098\text{ J} = \underline{\underline{9{,}8\text{ mJ}}}$$

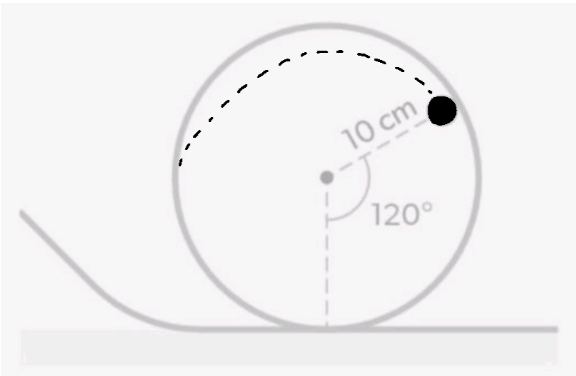
b Den mekaniske energien er bevart. Vi lar h_0 være høyden over bunnen av loopen. Kula starter fra ro, så $v_0 = 0$. I toppen av loopen er høyden $h = 2r$, og $v = \sqrt{gr}$. Vi har da:

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad 2gh + v^2 = 2gh_0$$

$$\Rightarrow \quad h_0 = h + \frac{v^2}{2g} = 2r + \frac{gr}{2g} = \frac{5r}{2}$$

Høyen på loopen er $2r = 2\cdot 10\text{ cm} = 20\text{ cm}$, så kula må starten en høyde $20\text{ cm} + 5\text{ cm} = \underline{\underline{25\text{ cm}}}$ over bakken.

c Når kula mister kontakt med underlaget er det bare tyngdekraften som virker på den, og den vil følge en parabelbane som ved skrått kast.



2.11

a Hvis vi akkurat så vidt mister kontakt med veibanene på toppen, er

$$\Sigma F = G \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{r} = mg \quad \Rightarrow v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}81\text{ m/s}^2\cdot 20\text{ m}} = \underline{\underline{14\text{ m/s}}} = \underline{\underline{50\text{ km/s}}}.$$

b I oppgave a fant vi at en fartshump med radius 20 m vil føre til at vi mister kontakt med veien hvis vi kjører i 50 km/h. Dette ville være ubehagelig og føre til stor slitasje på bil og vei.

c Her kan vi tenke på flere måter. Vi velger her å finne den radien som gir samme sentripetalakselerasjon når man kjører i 50 km/h som en radius på 20 m gir når vi kjører i 30 km/h.

$$a_{30} = a_{50} \quad \Rightarrow \quad \frac{(30)^2}{20\text{ m}} = \frac{(50)^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{(50)^2}{(30)^2}\cdot 20\text{ m} = 56\text{ m}$$

Merk: Her droppet vi både benevning og faktoren 3,6 da vi satte inn farten. Disse ville uansett blitt kansellert mot hverandre, og det forenkler uttrykket en de. Merk også at dette ikke er tenkt som en absolutt fasit, men som et forslag til hvordan oppgaven kan løses.

2.12

a Vi finner tiden kula bruker på å falle: $y=\frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; t=\sqrt{\frac{2y}{g}}=\sqrt{\frac{2\cdot 0{,}95\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}}=0{,}4401\ \text{s}$.

Vi setter tiden vi fant inn i uttrykket for x, og løser for farten:

$$x=v_0t \;\Rightarrow\; v_0=\frac{x}{t}=\frac{1{,}10\ \text{m}}{0{,}4401\ \text{s}}=2{,}4995\ \text{m/s}=\underline{\underline{2{,}5\ \text{m/s}}}$$

b Kula har konstant fart i x-retning: $v_x=2{,}4995\ \text{m/s}$.

Det er en akselerasjon i y-retning. Når kula treffer bakken vil den ha en fart på

$v_y=gt=9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}4401\ \text{s}=4{,}3174\ \text{m/s}$

Absoluttverdien av farten er da: $v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{(2{,}4995\ \text{m/s})^2+(4{,}3174\ \text{m/s})^2}=\underline{\underline{5{,}0\ \text{m/s}}}$.

Farten danner en retning på $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{4{,}3174\ \text{m/s}}{2{,}4995\ \text{m/s}}\right)=\underline{\underline{60^\circ}}$ med gulvet.

2.13

a Fra figuren ser vi at ballen beveger seg en avstand $r=0{,}021\ \text{m}$ i y-retning og $d-r=0{,}108\ \text{m}-0{,}021\ \text{m}=0{,}087\ \text{m}$ i x-retning.

Vi bruker posisjonsformel 2 for y-retning til å finne et uttrykk for tiden det tar for ballen å bevege seg fra posisjon A til posisjon B:

$$y=\frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; t=\sqrt{\frac{2y}{g}}=\sqrt{\frac{2r}{g}}$$

Vi finner startfarten ved å se på bevegelsen i x-retning:

$$v_0=\frac{x}{t}=\frac{x}{\sqrt{\frac{2r}{g}}}=\sqrt{\frac{gx^2}{2r}}=\sqrt{\frac{g(d-r)^2}{2r}}=\sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot(0{,}087\ \text{m/s})^2}{2\cdot 0{,}021\ \text{m}}}=\underline{\underline{1{,}3\ \text{m/s}}}$$

b –

2.14

a Vi bruker posisjonsformel 2 i x-retning til å finne startfarten i x-retning:

$$x=v_{0x}t \;\Rightarrow\; v_{0x}=\frac{x}{t}=\frac{11{,}0\ \text{m}}{0{,}65\ \text{s}}=16{,}923\ \text{m/s}=\underline{\underline{17\ \text{m/s}}}$$

Vi bruker posisjonsformel 2 i y-retning til å finne startfarten i y-retning:

$$y=v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2 \;\Rightarrow\; v_{0y}=\frac{y}{t}+\frac{1}{2}gt=\frac{2{,}45\ \text{m}}{0{,}65\ \text{s}}+\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}65\ \text{s}=6{,}957\ \text{m/s}=\underline{\underline{7{,}0\ \text{m/s}}}$$

b $v=\sqrt{v_{0x}^2+v_{0y}^2}=\sqrt{(6{,}957\ \text{m/s})^2+(16{,}923\ \text{m/s})^2}=18{,}297\ \text{m/s}=\underline{\underline{18\ \text{m/s}}}$

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{6{,}957\ \text{m/s}}{16{,}923\ \text{m/s}}\right)=22^\circ$ over den horisontale bakken.

2.15

Vi finner ut hvor lang tid heltinnen bruker på å bevege seg 60 m i vannrett retning:

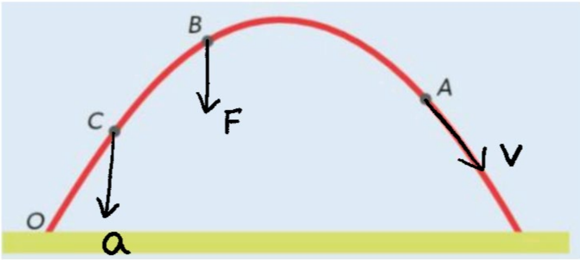
$$x=v\cos\theta\cdot t \;\Rightarrow\; t=\frac{x}{v\cos\theta}=\frac{60\ \text{m}}{(70/3{,}6)\ \text{m/s}\cdot\cos 30^\circ}=3{,}5631\ \text{s}$$

Vi finner ut hvor langt hun beveger seg i loddrett retning på denne tiden:

$$y = v_0 \sin\theta t + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{70}{3,6}\ \text{m/s} \cdot \sin 30^\circ \cdot 3,5631\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot 9,81\ \text{m/s}^2 \cdot (3,5631\ \text{s})^2 = 97\ \text{m}$$

Heltinnen faller 97 m i løpet av tiden det tar å bevege seg over stupet, så hun klarer akkurat så vidt å nå den andre siden.

2.16



Merk: Det er bare pilen på punkt F som er en kraftpil. De to andre er akselerasjon og fart.

2.17

Vi finner tiden det tar før steinen treffer bakken:

$$x = v_{0x}t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_{0x}} = \frac{5,3\ \text{m}}{12\ \text{m/s}} = 0,4417\ \text{s}$$

Vi setter tiden inn i posisjonsformel 2 for y-retning og finner høyden:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,81\ \text{m/s}^2 \cdot (0,4417\ \text{s})^2 = 0,9568\ \text{m} = \underline{\underline{96\ \text{cm}}}$$

2.18

Vi finner tiden stupet varer ved å se på bevegelse i y-retning:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 26,7\ \text{m}}{9,81\ \text{m/s}^2}} = 2,3331\ \text{s} = \underline{\underline{2,33\ \text{s}}}$$

Vi finner startfarten ved å se på bevegelse i x-retning:

$$x = v_0 t \quad \Rightarrow \quad v_0 = \frac{x}{t} = \frac{8,22\ \text{m}}{2,3331\ \text{s}} = \underline{\underline{3,52\ \text{m/s}}}$$

2.19

a Vi finner tiden ved å se på bevegelse i y-retning:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 150\ \text{m}}{9,81\ \text{m/s}^2}} = \underline{\underline{5,53\ \text{s}}}$$

b Farten i x-retning er $v_x = \frac{180}{3,6}\ \text{m/s} = 50\ \text{m/s}$.

Vi finner avstanden fra slippstedet ved å se på bevegelse i x-retning:

$$x = v_0 t = 50,0\ \text{m/s} \cdot 5,53\ \text{s} = 276,5\ \text{m} = \underline{\underline{277\ \text{m}}}$$

c Farten i x-retning er konstant lik 50 m/s. Vi finner farten i y-retning:

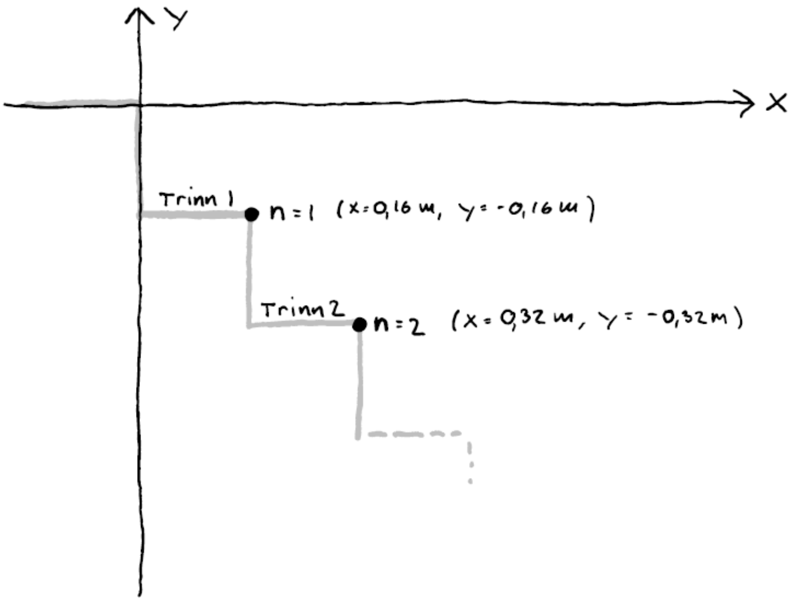
$$v_y = gt = 9,81\ \text{m/s}^2 \cdot 5,53\ \text{s} = 54,35\ \text{m/s}$$

Absoluttverdien av farten er $v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{(50,0\ \text{m/s})^2 + (54,35\ \text{m/s})^2} = \underline{\underline{73,8\ \text{m/s}}}$.

Retningen er $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{54{,}25\ \text{m/s}}{50{,}0\ \text{m/s}}\right) = \underline{\underline{47{,}3^\circ}}$ med bakken.

2.20

Vi ser på bevegelsen i x-retning, og finner tiden ballen bruker på å nå fram til hjørne n (se figuren):



$$x = vt \quad \Rightarrow \quad 0{,}16n = vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{0{,}16n}{v}.$$

På denne tiden har den beveget seg en distanse $y = \dfrac{1}{2}gt^2 = \dfrac{1}{2}g\left(\dfrac{0{,}16n}{v}\right)^2$ i y-retning.

Ballen treffer trinn n hvis $y > x$ ved hjørnet av trinnet.

$$y > x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}g\left(\frac{0{,}16\ \text{m}\cdot n}{v}\right)^2 > 0{,}16n \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}16\ \text{m}\cdot ng}{2v^2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}08\ \text{m}\cdot ng}{v^2} > 1$$

$$\Rightarrow \quad n > \frac{v^2}{0{,}08\ \text{m}\cdot g} \quad \Rightarrow \quad n > \frac{(1{,}5\ \text{m/s})^2}{0{,}08\ \text{m}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} \quad \Rightarrow \quad n > 2{,}9$$

Vi ser at ballen passerer trinn 2, og treffer trinn 3. Da har den falt $3\cdot 16\ \text{cm} = 48\ \text{cm}$.

2.21

a Farten i x-retning er konstant. Vi teller punkter, og finner at kula bruker en tid $t = 20\cdot 0{,}040\ \text{s} = 0{,}80\ \text{s}$ på å tilbakelegge en avstand på 100 cm i x-retning. Dette gir en fart på

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{1{,}00\ \text{m}}{0{,}80\ \text{s}} = 1{,}25\ \text{m/s} = \underline{\underline{1{,}3\ \text{m/s}}}$$

b Vi leser av grafen og teller punkter. Kula er 60 cm over horisontalplanet ved $t = 5 \cdot 0{,}040\ \text{s} = \underline{\underline{0{,}20\ \text{s}}}$ og $t = 15 \cdot 0{,}040\ \text{s} = \underline{\underline{0{,}60\ \text{s}}}$.

c Fra oppgave a vet vi at farten i x-retning er konstant lik 1,25 m/s.
I det øverste punktet er farten i y-retning lik null. Vi har da:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{0y}^2 = 2gy$$

Absoluttverdien av farten er

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{(1{,}25\ \text{m/s})^2 + 2gy} \\ &= \sqrt{(1{,}25\ \text{m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}80\ \text{m}} = 4{,}154\ \text{m/s} = \underline{\underline{4{,}2\ \text{m/s}}} \end{aligned}$$

Retningen er $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{v_{0y}}{v_{0x}}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}80\ \text{m}}}{1{,}25\ \text{m/s}}\right) = \underline{\underline{72^\circ}}$ med bakken.

2.22

Vi ser på bevegelse i x-retning, og finner hvor lang tid det tar før ballen treffer veggen:

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\theta \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} = \frac{10\ \text{m}}{12\ \text{m/s} \cdot \cos 56^\circ} = 1{,}4902\ \text{s}$$

Vi ser på bevegelse i y-retning for å finne hvor ballen treffer veggen:

$$\begin{aligned} y &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0 \\ &= 12\ \text{m/s} \cdot \sin 56^\circ \cdot 1{,}4902\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (1{,}4902\ \text{s})^2 + 1{,}70\ \text{m} = \underline{\underline{5{,}6\ \text{m}}} \end{aligned}$$

Farten i x-retning er konstant lik $v_x = 12\ \text{m/s} \cdot \cos 56^\circ = 6{,}7103\ \text{m/s}$.
Farten i y-retning når ballen treffer veggen er

$$v_y = v_{0y} - gt = 12\ \text{m/s} \cdot \sin 56^\circ - 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}4902\ \text{s} = -4{,}6704\ \text{m/s}$$

Størrelsen på farten når ballen treffer veggen er da

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(6{,}7103\ \text{m/s})^2 + (4{,}6704\ \text{m/s})^2} = \underline{\underline{8{,}2\ \text{m/s}}}$$

2.23

a Vi finner et uttrykk for tiden bevegelsen må vare ved å se på bevegelsen i x-retning:

$$x = v_0 \cos\theta \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

Vi setter starthøyden lik null.

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt\right)t = 0$$

På slutten av bevegelsen må vi ha

$$v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt = v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right) = 0$$

Når vi løser for slutthøyden finner vi:

$$v_0 \sin\theta = \frac{gx}{2v_0 \cos\theta}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{gx}{2\sin\theta\cos\theta}} = \sqrt{\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 130\ \text{m}}{2\sin 25^\circ \cos 25^\circ}} = 40{,}8018\ \text{m/s} = \underline{\underline{41\ \text{m/s}}}$$

b I toppunktet er $v_y = v_0 \sin\theta - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g}$.

Vi bruker den tidløse formelen i y-retning til å finne den største høyden:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{(40{,}0818\ \text{m/s})^2 \sin^2 25^\circ}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 14{,}62\ \text{m} = \underline{\underline{15\ \text{m}}}$$

2.24

Siden farten i x-retning er konstant, er $x = v_{0x}t = v_0 \cos\theta \cdot t$. Tiden det tar før kula treffer blinken, er da $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$.

Vi regner med at sentrum av blinken er i samme høyde som utgangshøyden, og bruker dette sammen med posisjonsformelen for y-retning til å finne enda et uttrykk for tiden:

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt\right)t = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}.$$

De to uttrykkene for tid kan settes lik hverandre, og vi får:

$$\frac{x}{v_0 \cos\theta} = \frac{2v_0 \sin\theta}{g} \quad \Rightarrow \quad \frac{300\ \text{m}}{700\ \text{m/s} \cdot \cos\theta} = \frac{2 \cdot 700\ \text{m/s} \cdot \sin\theta}{9{,}81\ \text{m/s}^2}.$$

Vi bruker CAS til å løse likningssettet:

1 $\dfrac{300}{700\ \cos(x)} = \dfrac{2 \cdot 700\ \sin(x)}{9.81}$

$\rightarrow\ \dfrac{3}{7\ \cos(x)} = \dfrac{140000}{981}\ \sin(x)$

2 vinkel := Løs$\left(\$1, 0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\rightarrow$ **vinkel := {x = 0.003, x = 1.568}**

3 vinkel $\dfrac{360}{2\,\pi}$

$\approx$ **{57.296 x = 0.172, 57.296 x = 89.828}**

Selv om vi i teorien får to løsninger: 0,172° og 89,8°, virker det urimelig å sikte nesten loddrett oppover. Vi velger derfor å forkaste den siste løsningen. Vi må altså sikte 0,172° over blinken.

Dette svarer til å sikte mot et punkt som er en avstand y over blinken, der

$$\frac{y}{300\ \text{m}} = \tan 0{,}172^\circ \quad \Rightarrow \quad y = 300\ \text{m} \cdot \tan 0{,}172^\circ = 0{,}90\ \text{m} = \underline{\underline{90\ \text{cm}}}.$$

2.25

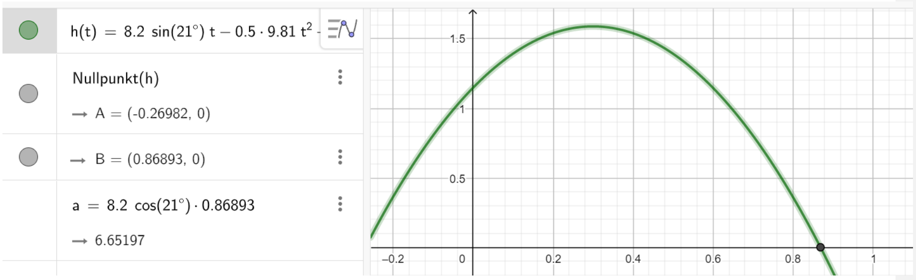
a I toppunktet er farten i y-retning lik null. Vi bruker den tidløse formelen til å finne avstanden over startpunktet:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(v_0 \cdot \sin\theta)^2}{2g} = \frac{\left(8{,}2\ \text{m/s} \cdot \sin 21^\circ\right)^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}44\ \text{m}$$

Avstanden over bakken er da $1{,}15\ \text{m} + 0{,}44\ \text{m} = 1{,}59\ \text{m} = \underline{\underline{1{,}6\ \text{m}}}$

b Når hopperen treffer bakken, er $y = 8{,}2 \cdot \sin 21^\circ \cdot t - \dfrac{1}{2} \cdot 9{,}81\ t^2 + 1{,}15 = 0$.

Vi velger å løse likningen grafisk ved hjelp av GeoGebra, og finner at hopperen treffer bakken etter 0,8693 s.



I siste linje under har vi satt tiden vi fant inn i uttrykket for x. Vi finner at avstanden er $x = v_0 \cos\theta \cdot t = 8{,}2\ \text{m/s} \cdot \cos 21^\circ \cdot 0{,}8689\ \text{s} = \underline{\underline{6{,}7\ \text{m}}}$.

2.26

a Vi bruker bevegelse i x-retning til å finne tiden flyturen varte:

$$x = v_{0x} t = v_0 \cos\theta \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} = \frac{1500\ \text{m}}{121\ \text{m/s} \cdot \cos 45{,}0^\circ} = 17{,}532\ \text{s} = \underline{\underline{18\ \text{s}}}$$

b –

c $$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{(v_0 \cdot \sin\theta)^2}{2g} = \frac{(121\ \text{m/s} \cdot \sin 45{,}0^\circ)^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = \underline{\underline{373\ \text{m}}}$$

2.27

a Avstanden langs bakken er $x = v_{0x} t = v_0 \cos\theta \cdot t$.

Vi løser for tiden, og får $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$.

Vi setter dette uttrykket inn uttrykket for y:

$$y = v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin\theta \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right) - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta}\right)^2$$

Når vi rydder opp, får vi

$$y = \frac{x \cdot v_0 \sin\theta}{v_0 \cos\theta} - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta} = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \tan\theta \cdot x$$

Som var det som skulle vises.

b Når gjenstanden treffer bakken, er $y = 0$ m. Vi løser for x og får:

$$y = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \tan\theta \cdot x = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2 = \tan\theta \cdot x$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2 v_0^2 \cos^2\theta \cdot \tan\theta}{g} = \frac{2 v_0^2 \cos\theta \cdot \sin\theta}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

(I siste linje brukte vi først at $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, deretter at $\sin 2\theta = 2\cos\theta \sin\theta$).

c Vi lar vinkelen være variabel, og deriverer uttrykket vi fant i b for å finne toppunktet:

$$x'(\theta) = \frac{v_0^2}{g} (\sin 2\theta)' = \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos 2\theta \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos 2\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\theta = 45^\circ}}.$$

2.28

a Vi ser bort fra luftmotstanden, og bruker bevaring av mekanisk energi. Vi setter nullpunktet for høyden ved hoppkanten, og lar startfarten være lik null. Dette gir:

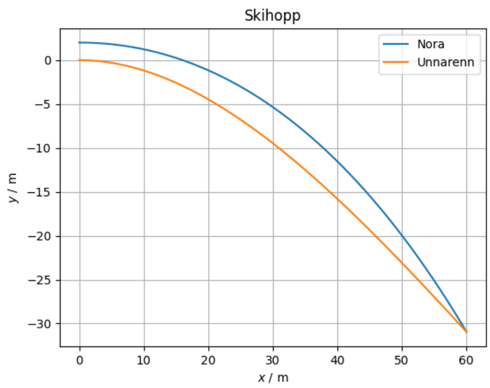
$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 34\ \text{m}} = 25{,}828\ \text{m/s} = \underline{\underline{26\ \text{m/s}}}$$

b Vi lager et program i Python, og legger først inn verdiene for Noras masse og luftmotstand:

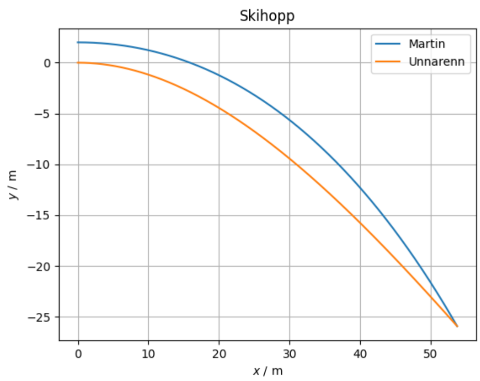
```
from pylab import *
# Konstanter
m = 62                        # massen til hopperen, kg
k = 0.30                      # luftmotstandstallet, kg/m
g = 9.81                      # tyngdeakselerasjon, m/s^2
v0 = 25.828                   # startfart, m/s
y0 = 2                        # starthøyde, m
y_unnarenn = 0
theta = radians(0)            # konverterer vinkelen til radianer

# Konstante krefter
G = array([0, -m*g])          # tyngden i N

# Variable krefter, utregning av kraftsum og akselerasjon
def a(v):
    e_v = v/norm(v)
    L = -k*norm(v)**2*e_v     # luftmotstandsvektor, N
    sum_F = G + L             # vektorsum av kreftene, N
    aks = sum_F/m             # akselerasjonsvektoren, m/s^2
    return aks

# Startverdier for bevegelsen
r = array([0, y0])            # startposisjon, m
v = array([v0*cos(theta), v0*sin(theta)])    # startfart, m/s
t = 0                         # starttid, s

# Liste for lagring av verdier
r_liste = [r]
v_liste = [v]
y_liste = [y_unnarenn]

# Simulering av bevegelse
dt = 0.001                    # tidssteg i simulering, s
while r[1] > y_unnarenn:
    v = v+a(v)*dt             # regner ut neste fartsvektor
    r = r + v*dt              # regner ut neste posisjonsvektor
    t = t + dt                # går til neste tidspnkt

    # Lagring av 2D-verdier i lister
    r_liste = concatenate([r_liste, [r]])
    v_liste = concatenate([v_liste, [v]])
```

```
    # Liste med y-verdier for ovarenn
    y_unnarenn = 6.37*10**(-5)*r[0]**3-0.0124*r[0]**2
    y_liste.append(y_unnarenn)

# Tegner graf
plot(r_liste[:, 0], r_liste[:, 1], label="Nora")     # tegner graf
plot(r_liste[:, 0], y_liste, label="Unnarenn")
title("Skihopp")                      # graftittel
xlabel("$x$ / m")                     # navn på x-akse
ylabel("$y$ / m")                     # navn på y-akse
legend()
grid()
show()
```

Når programmet kjører, får vi denne grafen:



Vi endrer verdiene i linje 3 og 4 i programmet så de stemmer med Martins verdier. Når vi kjører programmet igjen, får vi denne grafen:



c I slutten av programmet fra oppgave b legger vi inn denne linja:

```
print("lengden på hoppet er", round(r[0]), "m.")
```

Når vi legger inn Noras verdier, skriver programmet ut:

```
lengden på hoppet er 60.0 m.
```

Når vi legger inn Martins verdier, skriver programmet ut:

```
lengden på hoppet er 54.0 m.
```

d Vi gjør noen endringer i programmet slik at det nå summerer opp avstanden fra én posisjon til den neste gjennom hele hoppet.

```
from pylab import *
# Konstanter
m = 88                      # massen til gjenstanden, kg
k = 0.60                    # luftmotstandstallet, kg/m
g = 9.81                    # tyngdeakselerasjon, m/s^2
v0 = 25.828                 # startfart, m/s
y0 = 2                      # starthøyde, m
y_unnarenn = 0
lengde = 0
theta = radians(0)          # konverterer vinkelen til radianer

# Konstante krefter
G = array([0, -m*g])        # tyngden i N

# Variable krefter, utregning av kraftsum og akselerasjon
def a(v):
    e_v = v/norm(v)
    L = -k*norm(v)**2*e_v   # luftmotstandsvektor, N
    sum_F = G + L           # vektorsum av kreftene, N
    aks = sum_F/m           # akselerasjonsvektoren, m/s^2
    return aks

# Startverdier for bevegelsen
r = array([0, y0])          # startposisjon, m
v = array([v0*cos(theta), v0*sin(theta)])   # startfart, m/s
t = 0                       # starttid, s

# Liste for lagring av verdier
r_liste = [r]
v_liste = [v]
y_liste = [y_unnarenn]

# Simulering av bevegelse
dt = 0.001                  # tidssteg i simulering, s
while r[1] > y_unnarenn:
    v = v+a(v)*dt           # regner ut neste fartsvektor
    r = r + v*dt            # regner ut neste posisjonsvektor
    t = t + dt              # går til neste tidspnkt

    # Lagring av 2D-verdier i lister
    r_liste = concatenate([r_liste, [r]])
    v_liste = concatenate([v_liste, [v]])
```

```
    # Liste med verdier for ovarenn
    dy_unnarenn = 6.37*10**(-5)*r[0]**3-0.0124*r[0]**2 - y_unnarenn
    y_unnarenn = 6.37*10**(-5)*r[0]**3-0.0124*r[0]**2
    y_liste.append(y_unnarenn)
    lengde = lengde + sqrt((v[0]*dt)**2+dy_unnarenn**2)

# Tegner graf
plot(r_liste[:, 0], r_liste[:, 1])      # tegner graf
plot(r_liste[:, 0], y_liste)
title("Skihopp")                        # graftittel
xlabel("$x$ / m")                       # navn på x-akse
ylabel("$y$ / m")                       # navn på y-akse
grid()
show()

print("lengden på hoppet målt langs unnarennet er", round(lengde), "m.")
```

Når vi legger inn Noras verdier, skriver programmet ut:

```
lengden på hoppet målt langs unnarennet er 69.0 m.
```

Når vi legger inn Martins verdier, skriver programmet ut:

```
lengden på hoppet målt langs unnarennet er 61.0 m.
```

2.29

Vi velger å løse oppgaven ved først å finne likningene for begge banene. Vi kaller kanonen til venstre på figuren (med startfart 10 m/s) for kanon A, og den andre for kanon B.

Kanonen til venstre:

Vi bruker posisjonen i x-retning til å finne et uttrykk for tid: $x = v_{0\mathrm{A}} \cdot \cos\alpha \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{x}{v_{0\mathrm{A}} \cos\alpha}$

Vi setter dette uttrykket inn i posisjonslikning 2 for y-retning:

$$y_A(x) = v_{0\mathrm{A}} \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0\mathrm{A}} \sin\alpha \cdot \left(\frac{x}{v_{0\mathrm{A}} \cos\alpha}\right) - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{v_{0\mathrm{A}} \cos\alpha}\right)^2 = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2v_{0\mathrm{A}}^2 \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

Kanonen til høyre:

Vi bruker posisjonen i x-retning til å finne et uttrykk for tid:

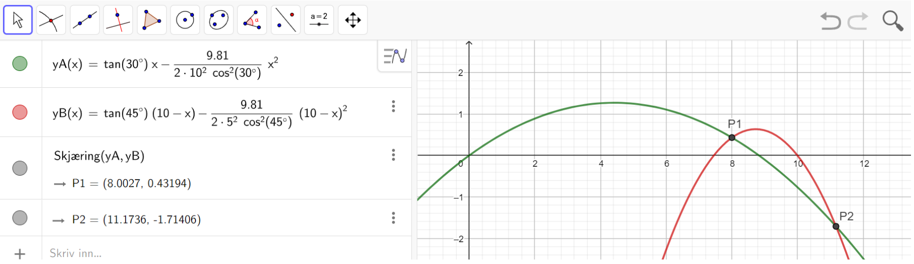
$$x = 10 - v_{0\mathrm{B}} \cdot \cos\beta \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{10 - x}{v_{0\mathrm{B}} \cos\beta}$$

Vi setter dette uttrykket inn i posisjonslikning 2 for y-retning:

$$y_\mathrm{B}(x) = v_{0\mathrm{B}} \sin\beta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0\mathrm{B}} \sin\beta \cdot \left(\frac{10 - x}{v_{0\mathrm{B}} \cos\beta}\right) - \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{10 - x}{v_{0\mathrm{B}} \cos\beta}\right)^2$$

$$= \tan\beta \cdot (10 - x) - \frac{g}{2v_{0\mathrm{B}}^2 \cos^2\beta} \cdot (10 - x)^2$$

Vi velger å bruke GeoGebra til å tegne de to banene, og bruker «skjæring» til å finne ut hvor kulene treffer hverandre:



Kulene treffer hverandre i punktet P1, der $x = 8{,}0027\ \text{m}$.

Tiden det tar for kule A å komme til punkt P1 er: $t_A = \dfrac{x}{v_{0A}\cos\alpha} = \dfrac{8{,}0027\ \text{m}}{10\ \text{m/s}\cdot\cos 30^\circ} = 0{,}9241\ \text{s}$

Tiden det tar for kule B å komme til punkt P2 er: $t_B = \dfrac{10 - 8{,}0027\ \text{m}}{5{,}0\ \text{m/s}\cdot\cos 45^\circ} = 0{,}5649\ \text{s}$

Kule B må derfor skytes ut $0{,}9241\ \text{s} - 0{,}5649\ \text{s} = 0{,}3592\ \text{s} = \underline{\underline{0{,}36\ \text{s}}}$ etter kule A.

2.30

a Vi setter opp likningene for posisjonen i x- og y-retning:

$$x = v_0\cos\theta\cdot t$$

$$y = h + v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

Vi finner tiden som funksjon av x, og setter inn i likningen for y:

$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta}$$

$$\Rightarrow\quad y = h + v_0\sin\theta\cdot\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2 = h + \tan\theta\cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\cdot x^2$$

Når steinen treffer bakken, er $y = 0$, så vi har

$$h + \tan\theta\cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\cdot x^2 = ax^2 + bx + c = 0$$

der $a = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}$, $b = \tan\theta$ og $c = h$.

Vi bruker formelen for annengradslikninger, og får at

$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

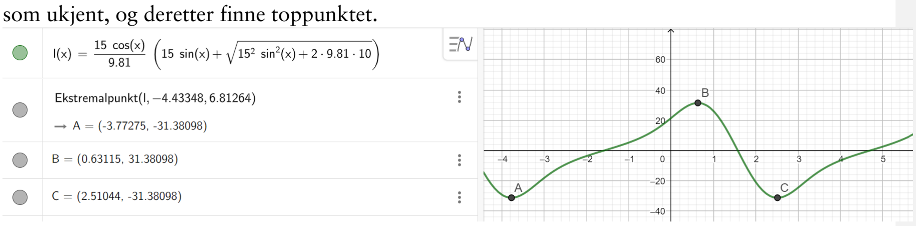
$$= \frac{-\tan\theta\pm\sqrt{\tan^2\theta + \left(\dfrac{2g}{v_0^2\cos^2\theta}\right)\cdot h}}{-\dfrac{g}{v_0^2\cos^2\theta}} = -\left(-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\pm\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\theta}}\right)\cdot\frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$$

Vi rydder opp i uttrykket og velger den negative løsningen slik at sluttsvaret blir positivt:

$$x = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sqrt{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{2gh}{v_0^2\cos^2\theta}}\right)\cdot\frac{v_0^2\cos^2\theta}{g} = \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{v_0\cos\theta}\sqrt{v_0^2\sin^2\theta + 2gh}\right)\cdot\frac{v_0^2\cos^2\theta}{g}$$

$$= \frac{v_0\cos\theta}{g}\cdot\left(v_0\sin\theta + \sqrt{v_0^2\sin^2\theta + 2gh}\right)$$

b Vi velger å løse oppgaven ved å tegne grafen til funksjonen vi fant i oppgave a, med vinkelen som ukjent, og deretter finne toppunktet.

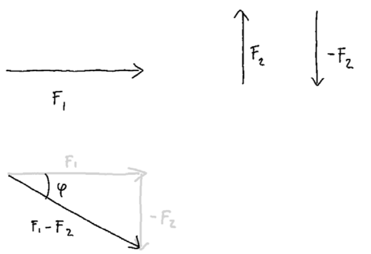


GeoGebra gir vinkelen i radianer. Vinkelen (x-verdien) til toppunktet omgjort til grader er:

$$0{,}63115 \text{ rad} = 0{,}63115 \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = \underline{\underline{36^\circ}}$$

2.31

Vi snur $\vec{F}_2$ og regner ut størrelsen og retningen til $\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_2)$ (se figuren).



Størrelsen til den nye vektoren er $|\vec{F}_1 - \vec{F}_2| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(20{,}0\text{ N})^2 + (10{,}0\text{ N})^2} = \underline{\underline{22{,}4\text{ N}}}$.

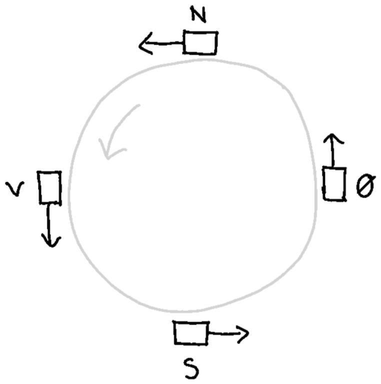
Retningen er $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{F_2}{F_1}\right) = \underline{\underline{26{,}6^\circ}}$.

2.32

Når snøballen er ved punktet P har den fartsretning rett mot høyre på figuren. Hvis den da plutselig løsner, vil den fortsette rett framover mot person C.

2.33

a I en rundkjøring kjører man mot klokka. Vi tegner en figur:



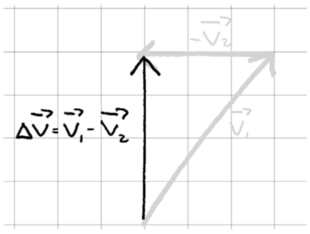
Vi ser at farsvektoren har retning

1 Mot vest når bilen er i det nordligste punktet
2 Mot sør når bilen er i det vestligste punktet
3 Mot øst når bilen er i det sørligste punktet
4 Mot nord når bilen er i det østligste punktet.

b $s = vt \quad \Rightarrow \quad 2\pi r = vt \quad \Rightarrow \quad r = \frac{vt}{2\pi} = \frac{(30/3{,}6\ \text{m/s}) \cdot 4{,}5\ \text{s}}{2\pi} = 5{,}968\ \text{m} = \underline{\underline{6{,}0\ \text{m}}}$

2.34

a Vi tegner en figur som viser vektorene:



b Fra figuren i boka ser vi at én rute tilsvarer 5,0 m/s. Vi ser at Δv har en lengde på tre ruter, så, $\Delta v = 3 \cdot 5{,}0\ \text{m/s} = \underline{\underline{15\ \text{m/s}}}$.

2.35

Akselerasjon endrer enten størrelsen eller retningen til fartsvektoren. Bilen svinger med konstant banefart.

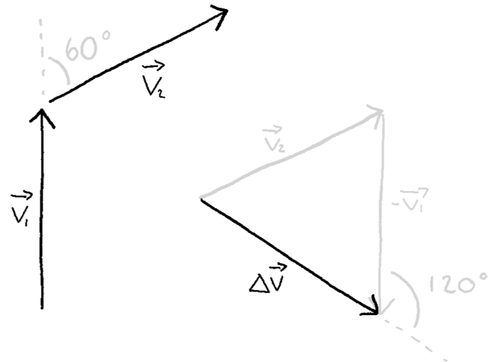
2.36

Hvis en gjenstand er akselerert endres enten størrelsen eller retningen (eller begge deler) til farten. En gjenstand kan ikke endre retning uten å være akselerert.

2.37

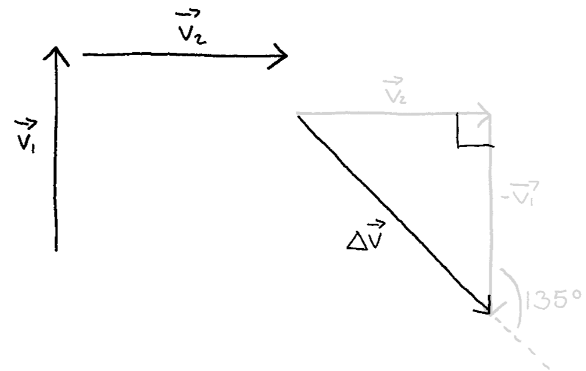
a $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \left(-\vec{v}_1\right)$. Vi tegner en figur, og ser at $\Delta\vec{v}$, $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ danner en likesidet trekant.

Da må $\Delta v = 54\ \text{km/h} = 15\ \text{m/s}$, og danne en vinkel på 120° med den opprinnelige fartsretningen.



b Vi tegner figur, og ser at $\Delta v = \sqrt{v_2^2 + v_1^2} = \sqrt{(15\ \text{m/s})^2 + (15\ \text{m/s})^2} = \underline{\underline{21\ \text{m/s}}}$

Vinkelen mellom Δv og den opprinnelige fartsretningen er 90° + 45° = 135°.



2.38

Det virker bare to krefter på kula: Tyngdekraften og snorkraften. Hvis kula skal få samme akselerasjon som toget, må kraftsummen ha en komponent innover i svingen. For at dette skal være tilfelle, må snora henge på skrå.

2.39

a *Fra 1,0 s til 2,0 s:*

$$\Delta\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{(4{,}0\ \text{m}, 1{,}0\ \text{m}) - (1{,}5\ \text{m}, 1{,}0\ \text{m})}{2{,}0\ \text{s} - 1{,}0\ \text{s}} = (2{,}5\ \text{m/s}, 0\ \text{m/s})$$

Gjennomsnittsfarten har da størrelse $\underline{\underline{2{,}5\ \text{m/s}}}$ og retning langs positiv x-akse.

Fra 2,0 s til 3,0 s:

$$\Delta\vec{v} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = \frac{(7{,}5\ \text{m}, 2{,}0\ \text{m}) - (4{,}0\ \text{m}, 1{,}0\ \text{m})}{3{,}0\ \text{s} - 2{,}0\ \text{s}} = (3{,}5\ \text{m/s}, 1{,}0\ \text{m/s})$$

Gjennomsnittsfarten har da størrelse $v = \sqrt{(3{,}5\ \text{m/s})^2 + (1{,}0\ \text{m/s})^2} = \underline{\underline{3{,}6\ \text{m/s}}}$.

Retningen er $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1,0}{3,5}\right) = \underline{\underline{16^\circ}}$ med positiv x-akse.

b Vi måler på figuren for å finne tangentene til grafen. Det ser ut til at momentanfarten etter 1,0 s danner en vinkel på omtrent $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1}{6}\right) \approx 10^\circ$ med x-aksen, og at den etter 3,0 s danner en vinkel på omtrent $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{6}\right) \approx 30^\circ$ med x-aksen.

c I utregningen under bruker vi at farten har retning 10° fra x-aksen etter 1,0 s og 2,0 s, og at den har retning 30° fra x-aksen etter 3,0 **s.**

Fra 1,0 s til 2,0 s:
Retningen ser ut til å være omtrent uendret. Da er gjennomsnittsakselerasjonen

$$\Delta a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{3,0\ \text{m/s} - 2,0\ \text{m/s}}{2,0\ \text{s} - 1,0\ \text{s}} = \underline{\underline{1,0\ \text{m/s}}}$$ i fartsretningen (ca 10° fra x-aksen)

Fra 2,0 s til 3,0 s:
Vi regner hver komponent for seg for å holde utregningen oversiktlig.

$$\Delta a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{4,5 \cdot \cos 30^\circ\ \text{m/s} - 3,0 \cdot \cos 10^\circ\ \text{m/s}}{3,0\ \text{s} - 2,0\ \text{s}} = 0,9427\ \text{m/s}^2$$

$$\Delta a_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{4,5 \cdot \sin 30^\circ\ \text{m/s} - 3,0 \cdot \sin 10^\circ\ \text{m/s}}{3,0\ \text{s} - 2,0\ \text{s}} = 1,7291\ \text{m/s}^2$$

Da er gjennomsnittsakselerasjonen $\Delta a = \sqrt{\left(0,9427\ \text{m/s}^2\right)^2 + \left(1,7291\ \text{m/s}^2\right)^2} = \underline{\underline{2,0\ \text{m/s}^2}}$.

Retningen til gjennomsnittsakselerasjonen er $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{0,9427\ \text{m/s}^2}{1,7291\ \text{m/s}^2}\right) \approx 29^\circ$ fra x-aksen.

2.40

a Det øverste og nederste punktet har samme banefart. Det nederste punktet er i ro relativt til bakken, og må ha farten $-8,0$ m/s relativt til sykkelen. Det øverste punktet må derfor ha farten $8,0$ m/s relativt til sykkelen.

b Vi gjør utregningen i referansesystemet der sykkelen er i ro (mer om referansesystemer i kap. 4). Steinen har startfart $v_{0y} = 0$ i y-retningen. Vi finner et uttrykk for tiden steinen bruker på å nå bakken:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Vi finner ut hvor langt steinen beveger seg i x-retning relativt til sykkelen i løpet av denne tiden:

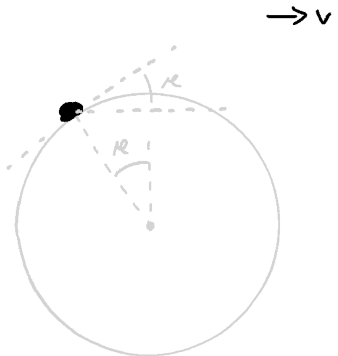
$$x = v_0 t = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = 8,0\ \text{m} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 26 \cdot 0,0254\ \text{m}}{9,81\ \text{m/s}^2}} = \underline{\underline{2,9\ \text{m}}}$$

c Vi antar at steinen ikke kolliderer med noen del av sykkelen etter at den forlater hjulet. I oppgave 2.30 fant vi et uttrykk for lengden på et kast:

$$x = \frac{v_0 \cos\ \theta}{g} \cdot \left(v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}\right)$$

der v_0 er startfarten, θ er vinkelen farten danner med horisontallinjen og h er starthøyden.

Siden steinen beveger seg rundt med hjulet, vil høyden der den glipper være lik $h = r + r \cdot \cos\theta = (1+\cos\theta)r$, der r er radius til sykkelhjulet. For at steinen skal bevege seg lengst mulig, bør den være på vei oppover og framover i det den løsner.



Vi setter inn tall, og finner likningen ved hjelp av CAS (merk at vi har valgt å kalle avstanden for d(x) og vinkelen for x).

1 $r := 13 \cdot 0.0254$

$\rightarrow$ $r := \frac{1651}{5000}$

2 $v_0 := 8$

$\rightarrow$ $v_0 := 8$

3 $g := 9.81$

$\rightarrow$ $g := \frac{981}{100}$

4 $h := (1 + \cos(x))\ r$

$\rightarrow$ $h := \frac{1651}{5000}\ (\cos(x) + 1)$

5 $d(x) := \frac{v_0\ \cos(x)}{g} \left(v_0\ \sin(x) + \sqrt{v_0^2\ \sin^2(x) + 2\ g\ h}\right)$

$\rightarrow$ $d(x) := \frac{800}{981} \cos(x) \left(8\ \sin(x) + \sqrt{\frac{1}{250000}} \sqrt{1619631\ (\cos(x) + 1) + 16000000\ \sin^2(x)}\right)$

6 Ekstremalpunkt$\left(d, 0, \frac{pi}{2}\right)$

$\rightarrow$ $(0.7363, 7.0746)$

Vi finner at det eneste toppunktet i riktig intervall har koordinatene $(0{,}7363, 7{,}0746)$.

Førstekoordinaten gir vinkelen: $0{,}7363 \cdot \frac{360^\circ}{2\pi} = 42^\circ$.

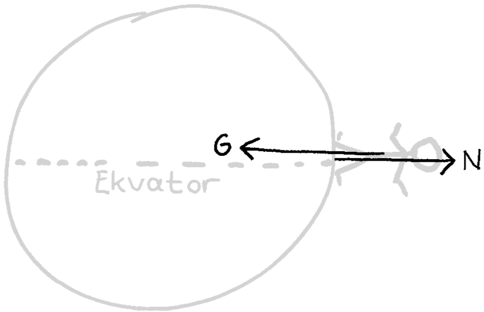
Andrekoordinaten forteller oss at steinen treffer 7,1 m foran sykkelen.

2.41

Fartsretningen tangerer sirkelbanen og peker rett mot høyre. Akselerasjonen peker innover mot sentrum av dreieskiva.

2.42

a Tyngdekraften må være litt større enn normalkraften for å gi Elias en sentripetalakselerasjon.



b På ekvator har Elias farten $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 6371\,000 \text{ m}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}} = 463 \text{ m/s}$.

Vi finner et uttrykk for normalkraften:

$$\Sigma F = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad G - N = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad N = G - \frac{mv^2}{r} = mg - \frac{mv^2}{r} = \frac{m\left(gr - v^2\right)}{r}$$

Forholdstallet mellom tyngdekraften og normalkraften er da

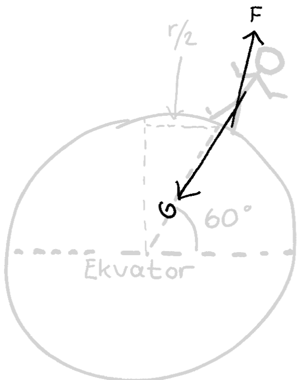
$$\frac{G}{N} = \frac{mg}{\frac{m\left(gr - v^2\right)}{r}} = \frac{gr}{gr - v^2} = \frac{9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 6371\,000 \text{ m}}{9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 6371\,000 \text{ m} - (463 \text{ m/s})^2} = 1{,}0034$$

Tyngdekraften er 0,34 % større enn normalkraften.

c I en 30-60-90-trekant er den korteste kateten halvparten så lang som hypotenusen, så radius i sirkelbanen som Elias nå følger, er lik halvparten av jordradien (se også figur i oppgave d).

Dette gir $r = \frac{6371 \text{ km}}{2} = 3186 \text{ km}$.

d Kraftsummen må peke inn mot sentrum av sirkelbanen Elias følger. Hvis kraften fra bakken virket nøyaktig vinkelrett fra bakken, ville kraftsummen peke langs samme akse som kreftene.



2.43

$$a=\frac{v^2}{r}=\frac{(s/t)^2}{r}=\frac{(2\pi r/2t)^2}{r}=\frac{(\pi r/t)^2}{r}=\frac{\pi^2 r}{t^2}=\frac{\pi^2\cdot 29{,}50\text{ m}}{(7{,}0\text{ s})^2}=\underline{\underline{5{,}9\text{ m/s}^2}}$$

2.44

Når banefarten er konstant, er også den kinetiske energien det, så $\Delta E_\text{k}=0$. Vi lar θ være vinkelen mellom kraften og fartsretningen. Da er $W_{\Sigma F}=F\cdot s\cdot\cos\theta$, og vi har at:

$$W_{\Sigma F}=\Delta E_\text{k}\quad\Rightarrow\quad W_{\Sigma F}=0\quad\Rightarrow\quad F\cdot s\cdot\cos\theta=0\quad\Rightarrow\quad\cos\theta=0\quad\Rightarrow F\perp s$$

2.45

Gjennom hele oppgaven lar vi a_t være den tangentielle akselerasjonen, og a_s være sentripetalakselerasjonen.

a Vi finner farten når $a_\text{s}=a_\text{t}$:

$$a_\text{s}=\frac{v^2}{r}\quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{a_\text{s}r}=\sqrt{0{,}20\text{ m/s}^2\cdot 1{,}0\text{ m}}=\sqrt{0{,}20}\text{ m/s}.$$

Vi bruker den tidløse formelen med $v_0=0$ til å finne strekningen:

$$v^2=v_0^2+2a_\text{t}s=2a_\text{t}s\quad\Rightarrow\quad s=\frac{v^2}{2a_\text{t}}=\frac{\left(\sqrt{0{,}20}\text{ m/s}\right)^2}{2\cdot 0{,}20\text{ m/s}^2}=\underline{\underline{0{,}5\text{ m}}}$$

Vi finner hvor stor del dette er av sirkelen:

$$\frac{s}{2\pi r}=\frac{0{,}5\text{ m}}{2\pi\cdot 1{,}0\text{ m}}=\frac{1}{4\pi}$$

b Vi finner farten når $a_\text{s}=a_\text{t}$:

$$a_\text{s}=\frac{v^2}{r}\quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{a_\text{s}r}=\sqrt{0{,}20\text{ m/s}^2\cdot 2{,}0\text{ m}}=\sqrt{0{,}40}\text{ m/s}.$$

Vi bruker den tidløse formelen med $v_0=0$ til å finne strekningen:

$$v^2=v_0^2+2a_\text{t}s=2a_\text{t}s\quad\Rightarrow\quad s=\frac{v^2}{2a_\text{t}}=\frac{\left(\sqrt{0{,}40}\text{ m/s}\right)^2}{2\cdot 0{,}20\text{ m/s}^2}=\underline{\underline{1{,}0\text{ m}}}$$

Vi finner hvor stor del dette er av sirkelen:

$$\frac{s}{2\pi r}=\frac{1{,}0\text{ m}}{2\pi\cdot 2{,}0\text{ m}}=\frac{1}{4\pi}$$

c Vi gjør det samme som i oppgave a og b, men løser oppgavene rent symbolsk.

Vi finner først et uttrykk for farten: $a_\text{s}=\dfrac{v^2}{r}\quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{a_\text{s}r}=\sqrt{a_\text{t}r}$

Vi setter deretter dette uttrykket inn i den tidløse formelen og løser for avstanden:

$v^2=v_0^2+2a_\text{t}s\quad\Rightarrow\quad v^2=2a_\text{t}s\quad\Rightarrow\quad\left(\sqrt{a_\text{t}r}\right)^2=2a_\text{t}s\quad\Rightarrow\quad a_\text{t}r=2a_\text{t}s\quad\Rightarrow\quad s=\dfrac{r}{2}$, som var det vi skulle vise.

Legg merke til at forholdstallet mellom denne avstanden og omkretsen til sirkelen er

$\dfrac{s}{2\pi r}=\dfrac{r/2}{2\pi r}=\dfrac{1}{4\pi}$, som var det vi fant i oppgave a og b.

2.46

a $a_s = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{(s/T)^2}{r} = \dfrac{(2\pi r/T)^2}{r} = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{r}{a_s}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{900\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}} = 60{,}182\ \text{s} = \underline{\underline{60{,}2\ \text{s}}}$

b Det er Normalkraften fra gulvet som gir innbyggerne sentripetalakselerasjonen innover. Gulvet må være slik plassert at normalkraften peker inn mot sentrum av romstasjonen.

c Perioden vi fant i oppgave a er den samme uansett hvor astronautene befinner seg. Når radius blir mindre, blir sentripetalakselerasjonen $a_s = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$ også mindre. Astronautene vil oppleve dette som om tyngdekraften ble mindre, og det blir lettere å klatre.

d Siden $a_s = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$, ser vi at en dobling av avstand fra sentrum gir en dobling av sentripetalakselerasjon. Da må føttene være dobbelt så langt unna sentrum som hodet er, så hodet må ha avstanden 1,80 m fra midten av romstasjonen.

Vi kan også løse dette symbolsk:

$$a_f = 2a_h \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2 (r + 1{,}80\ \text{m})}{T^2} = 2 \cdot \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad \Rightarrow \quad r + 1{,}80\ \text{m} = 2r \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{r = 1{,}80\ \text{m}}}$$

e Hvis astronauten jogger med fartsretningen, vil hennes fart relativt til sentrum være litt større enn hvis hun sto stille, og hun vil oppleve en større sentripetalakselerasjon. Hvis astronauten jogger mot fartsretningen, vil hun oppleve en noe mindre sentripetalakselerasjon. Hun opplever større eller mindre sentripetalakselerasjon som større eller mindre tyngdekraft.

2.47

a $\Sigma F = ma_s = \dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{70 \cdot (17{,}5\ \text{m/s})^2}{150\ \text{m}} = 143\ \text{N} = \underline{\underline{0{,}14\ \text{kN}}}$. Siden personen har konstant fart gjennom svingen, peker akselerasjonen rett inn mot sentrum av svingen.

b Fra uttrykket $\Sigma F = \dfrac{mv^2}{r}$ ser vi at

1: Kraftsummen blir større hvis massen blir større
2: Kraftsummen blir mindre hvis radien blir større
3: Kraftsummen blir større hvis massen til personen er større

2.48

a Siden flyet har konstant banefart gjennom en vannrett sving, må kraftsummen peke inn mot sentrum av sirkelbanen svingen er en del av. Dette betyr at kraftsummen må peke rett mot venstre på figuren.

b Kraftsummen er lik x-komponenten av oppdriften: $\Sigma F = K\sin\theta$
Tyngden er lik y-komponenten av oppdriften: $mg = K\cos\theta$
Vi deler de to likningene på hverandre, og løser for kraftsummen:

$$\frac{\Sigma F}{mg} = \frac{K\sin\theta}{K\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma F = mg\tan\theta = 70\,000\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \tan 27^\circ = 349\,891\ \text{N} = \underline{\underline{0{,}35\ \text{MN}}}$$

c Farten er $360 / 3{,}6\ \text{m/s} = 100\ \text{m/s}$. Vi bruker Newtons andre lov, og finner:

$$\Sigma F = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{mv^2}{\Sigma F} = \frac{70\,000\ \text{kg} \cdot (100\ \text{m/s})^2}{349\,891\ \text{N}} = 2001\ \text{m} = \underline{\underline{2{,}0\ \text{km}}}$$

d Summen av kreftene i y-retning er lik null, så

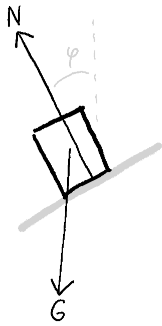
$$K\cos\theta = mg \quad\Rightarrow\quad K = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{70\,000\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\cos 27^\circ} = 77\,070\ \text{N} = \underline{\underline{77\ \text{MN}}}$$

2.49

a Banefarten er $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 6{,}0\ \text{m}}{4{,}5\ \text{s}} = 8{,}3776\ \text{m/s} = \underline{\underline{8{,}4\ \text{m/s}}}$.

Sentripetalakselerasjonen er $a_s = \frac{v^2}{r} = \frac{(8{,}3886\ \text{m/s})^2}{6{,}0\ \text{m}} = 11{,}697\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{12\ \text{m/s}^2}}$.

b Det virker en tyngdekraft og en Normalkraft (fra stolen) på Nora



c Kraftsummen er lik x-komponenten til normakraften: $N\sin\phi = ma_s$

Tyngden er lik y-komponenten til normalkraften: $N\cos\phi = mg$.

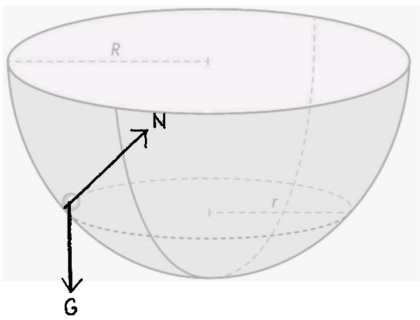
Vi deler de to likningene på hverandre for å finne vinkelen ϕ:

$$\frac{N\sin\phi}{N\cos\phi} = \frac{ma_s}{mg} \quad\Rightarrow\quad \tan\phi = \frac{a_s}{g} \quad\Rightarrow\quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{a_s}{g}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{11{,}697\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2}\right) = 50{,}01^\circ = \underline{\underline{50^\circ}}$$

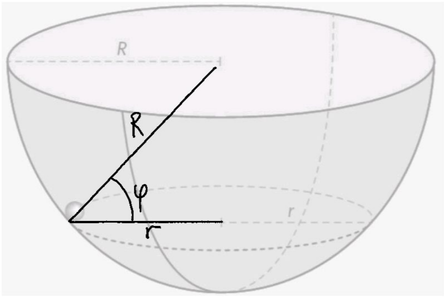
Vi setter dette inn i en av formlene over for å finne normalkraften. Vi velger her å bruke formelen for y-retning: $N\cos\phi = mg \quad\Rightarrow\quad N = \frac{mg}{\cos\phi} = \frac{40\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{\cos 50{,}01^\circ} = 611\ \text{N} = \underline{\underline{0{,}61\ \text{kN}}}$.

2.50

a Det virker en tyngdekraft og en normalkraft på kula:



b Avstanden fra den lille kula til sentrum av banen er *r*, og avstanden fra den lille kula til sentrum av toppen av bollen er *R*.



Vi har da $\cos\phi = \frac{r}{R} \quad\Rightarrow\quad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{r}{R}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{0,30}{0,50}\right) = 53,13^{\circ} = \underline{\underline{53^{\circ}}}$

c Kreftene i x-retning gir sentripetalakselerasjon: $\Sigma F_x = N\cos\phi = \frac{mv^2}{r}$

Kraftsummen i y-retning er lik null: $\Sigma F_y = 0 \quad\Rightarrow\quad N\sin\phi = mg$

Vi deler den siste likningen på den første, og får $\frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{mg}{\frac{mv^2}{r}} = \frac{rg}{v^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{N\sin\phi}{N\cos\phi} = \tan\phi = \frac{rg}{v^2}$

Når vi løser for farten, får vi

$$v = \sqrt{\frac{rg}{\tan\phi}} = \sqrt{\frac{0,30\text{ m}\cdot 9,81\text{ m/s}^2}{\tan 53,13^{\circ}}} = 1,4857\text{ m/s} = \underline{\underline{1,5\text{ m/s}}}$$

d Kula har høyden $h = R - \sqrt{R^2 - r^2} = 0,50\text{ m} - \sqrt{(0,50\text{ m})^2 - (0,30\text{ m})^2} = 0,10\text{ m}$ over bunnen av bollen. Den mekaniske energien er da

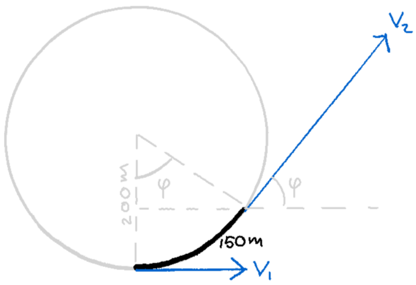
$$E_\text{m} = E_\text{k} + E_\text{p} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 0,010\text{ kg}\cdot(1,4857\text{ m/s})^2 + 0,010\text{ kg}\cdot 9,81\text{ m/s}^2\cdot 0,10\text{ m} = \underline{\underline{0,021\text{ J}}} = \underline{\underline{21\text{ mJ}}}$$

e Hvis kula har radius R, vil normalkraften virket vannrett og ikke ha noen loddrett komponent som kan gjøre kraftsummen i y-retning lik null. Kraftsummen kan da ikke virke inn mot sentrum av sirkelbanen.

2.51

a Vi legger koordinatsystemet slik at bilen starter med fart langs positiv x-akse.



Vi finner vinkelen ved å se på forholdstallet mellom banen og omkretsen til sirkelen:

$$\frac{\phi}{360^\circ} = \frac{150\ \text{m}}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{150\ \text{m}}{2\pi r}\cdot 360^\circ = \frac{150\ \text{m}}{2\pi \cdot 200\ \text{m}}\cdot 360^\circ = 42{,}97^\circ$$

Vi kan da finne start- og sluttfarten i x- og y-retning:

$$v_{1x} = 10\ \text{m/s}$$

$$v_{1y} = 0\ \text{m/s}$$

$$v_{2x} = 20\ \text{m/s}\cdot\cos 42{,}97^\circ = 14{,}63\ \text{m/s}$$

$$v_{2y} = 20\ \text{m/s}\cdot\sin 42{,}97^\circ = 13{,}63\ \text{m/s}$$

Vi bruker bevegelsesformlene til å finne tiden fartsendringen tar:

$$s = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)\Delta t \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{2s}{v_1 + v_2} = \frac{2\cdot 150}{10\ \text{m/s} + 20\ \text{m/s}} = 10\ \text{s}$$

Vi finner akselerasjonen i x- og y-retning:

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{14{,}63\ \text{m/s} - 10\ \text{m/s}}{10\ \text{s}} = 0{,}463\ \text{m/s}^2$$

$$\bar{a}_y = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = \frac{13{,}63\ \text{m/s} - 0\ \text{m/s}}{10\ \text{s}} = 1{,}363\ \text{m/s}^2$$

Gjennomsnittsakselerasjonen er da

$$\bar{a} = \sqrt{\bar{a}_x^2 + \bar{a}_y^2} = \sqrt{\left(0{,}463\ \text{m/s}^2\right)^2 + \left(1{,}363\ \text{m/s}^2\right)^2} = 1{,}4\ \text{m/s}^2$$

Retningen på akselerasjonen er

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\bar{a}_y}{\bar{a}_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1{,}363\ \text{m/s}^2}{0{,}463\ \text{m/s}^2}\right) = \underline{\underline{71^\circ}}\ \text{fra den opprinnelige fartsretningen.}$$

b Vi bruker den tidløse formelen til å finne akselerasjonen i fartsretningen:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2a_f s \quad \Rightarrow \quad a_f = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} = \frac{(20\ \text{m/s})^2 - (10\ \text{m/s})^2}{2\cdot 150\ \text{m}} = \underline{\underline{1{,}0\ \text{m/s}^2}}$$

c Vi finner sentripetalakselerasjonen på starten og slutten av svingen:

$$a_{s1} = \frac{v_1^2}{r} = \frac{(10\ \text{m/s})^2}{200\ \text{m}} = \underline{\underline{0{,}50\ \text{m/s}^2}}$$

$$a_{s2} = \frac{v_2^2}{r} = \frac{(20\ \text{m/s})^2}{200\ \text{m}} = \underline{\underline{2{,}0\ \text{m/s}^2}}$$

d Sentripetalakselerasjonen og akselerasjonen i fartsretningen virker vinkelrett på hverandre. Vi bruker Pytagoras' setning til å finne momentanakselerasjonen i starten og slutten av svingen:

$$a_1 = \sqrt{a_f^2 + a_{s1}^2} = \sqrt{\left(1{,}0\ \text{m/s}^2\right)^2 + \left(0{,}50\ \text{m/s}^2\right)^2} = \underline{\underline{1{,}1\ \text{m/s}^2}}$$

$$a_2 = \sqrt{a_f^2 + a_{s2}^2} = \sqrt{\left(1{,}0\ \text{m/s}^2\right)^2 + \left(2{,}0\ \text{m/s}^2\right)^2} = \underline{\underline{2{,}2\ \text{m/s}^2}}$$

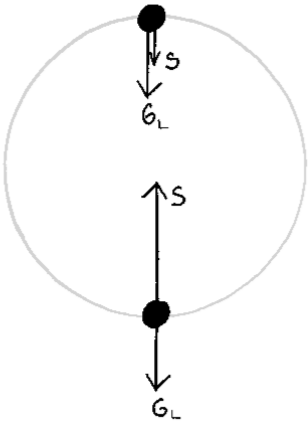
Vi finner retningen akselerasjonen danner med fartsretningen:

$$\alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{a_{s1}}{a_f}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}50\ \text{m/s}^2}{1{,}0\ \text{m/s}^2}\right) = \underline{\underline{27^\circ}}$$

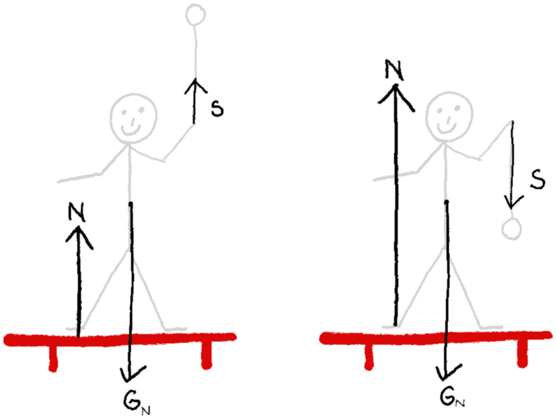
$$\alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{a_{s2}}{a_f}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}0\ \text{m/s}^2}{1{,}0\ \text{m/s}^2}\right) = \underline{\underline{63^\circ}}$$

2.52

a Vi tegner kreftene som virker på loddet når det er i toppen og bunnen av banen:



Vi tegner også kreftene som virker på Nora når loddet er i toppen og bunnen av banen (størrelsesforskjellene er sterkt overdrevet).



Kraftsummen på Nora må være lik null siden hun står i ro. Vi ser at normalkraften er størst når loddet er nederst, og minst når loddet er øverst. Loddet må derfor være på toppen ved tidspunktene 0,25 s og 1,25 s, og på bunnen ved 0,75 s og 1,75 s.

b *Vi finner tyngden til Nora:*
Vi leser av grafen, og ser at den har en midtlinje ved 700 N. Dette må tilsvare vekten av Nora og loddet. Vi bruker dette til å finne Noras tyngde:

$G_N + G_L = 700\text{ N} \Rightarrow G_N = 700\text{ N} - G_L = 700\text{ N} - 5{,}0\text{ kg} \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 = \underline{\underline{651\text{ N}}}$.

Vi finner radius i sirkelbanen:
Når loddet er i bunnen av sirkelbanen er normalkraften omtrent lik $N = 840\text{ N}$. Da er
$N = G_N + S \Rightarrow S = N - G_N = 840\text{ N} - 651\text{ N} = 189\text{ N}$

Kraftsummen på loddet blir $\Sigma F_L = S - G_L = 189\text{N} - 5 \cdot 9{,}81\text{ N} = 140\text{ N}$

Siden loddet beveger seg i sirkelbane, har vi $\Sigma F_L = \dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{m}{r} \cdot \left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2 = \dfrac{4\pi^2 mr}{T^2}$. Vi lese av grafen at $T = 1{,}00\text{ s}$ og løser for radius. Da får vi:

$$r = \frac{T^2 \cdot \Sigma F_L}{4\pi^2 m} = \frac{(1{,}00\text{ s})^2 \cdot 140\text{ N}}{4\pi^2 \cdot 5{,}0\text{ kg}} = \underline{\underline{0{,}7\text{ m}}} = \underline{\underline{70\text{ cm}}}$$

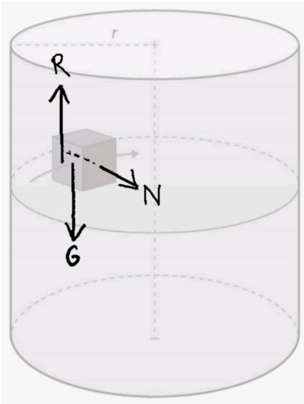
Vi finner banefarten til loddet:

Siden loddet beveger seg i sirkelbane, er $v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 0{,}7\text{ m}}{1{,}00\text{ s}} = \underline{\underline{4{,}4\text{ m/s}}}$

Merk: Siden det er vanskelig å lese av topp- og bunnpunktene til grafen presist kan du ha fått noe ulike svar for banefart og radius.

2.53

a Det virker en tyngdekraft, en friksjonskraft og normalkraft på boksen.



b Vi må minst ha en fart som gjør at normalkraften blir stor nok til at $R = G$.
Vi vet at friksjonskraften er lik $R = \mu N$. Normalkraften gir sentripetalakselerasjonen, slik at

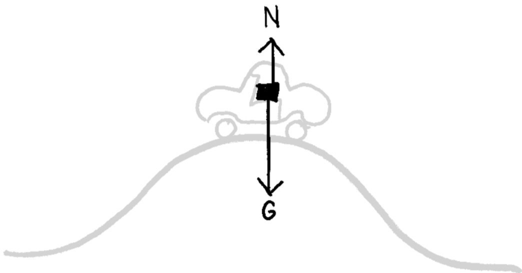
$$N = \frac{mv^2}{r} = \frac{m}{r} \cdot \left(\frac{s}{t}\right)^2 = \frac{m}{r} \cdot \left(\frac{2\pi r}{t}\right)^2 = \frac{4\pi^2 rm}{t^2}.$$

Vi har da $R = G \quad \Rightarrow \quad \mu N = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu \cdot 4\pi rm}{t^2} = mg$

Når vi løser for tiden får vi $t = \sqrt{\frac{\mu \cdot 4\pi^2 rm}{mg}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\mu r}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}10 \cdot 0{,}25\text{ m}}{9{,}81\text{ m/s}^2}} = \underline{\underline{0{,}32\text{ s}}}$

2.54

a Det virker en tyngdekraft og en normalkraft på bilen.



b $G = mg = 2{,}55\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 25{,}0155\ \text{N} = \underline{\underline{25{,}0\ \text{N}}}$

$$\Sigma F = G - N = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad N = G - \frac{mv^2}{r} = 25{,}0155\ \text{N} - \frac{2{,}55\ \text{kg} \cdot (12\ \text{m/s})^2}{80\ \text{m}} = 20{,}4255\ \text{N} = \underline{\underline{20\ \text{N}}}$$

c Hvis pakken akkurat letter fra setet, er normalkraften lik null, og vi har

$$\Sigma F = G = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad mg = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{rg} = \sqrt{80\ \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = \underline{\underline{28\ \text{m/s}}}.$$

Dette tilsvarer omtrent $28 \cdot 3{,}6\ \text{km/h} \approx 100\ \text{km/h}$

2.55

a Den mekaniske energien er bevart i svingebevegelsen. Vi legger nullnivået for høyden i det laveste punktet i banen. Siden snora er vannrett når vi slipper kula, er høyden i startpunktet lik L. Kula har startfart lik null, så vi har at $mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2gL}$, som var det vi skulle vise.

b I det laveste punktet peker snorkrafta rett oppover, mens tyngden alltid peker rett nedover. Da er $\Sigma F = S - G = \frac{mv^2}{r}$. Vi løser for S og setter inn farten fra oppgave a. Vi bruker også at radius i sirkelbanen er lik lengden på snora, L. Da får vi at

$$S = \frac{mv^2}{r} + G = \frac{mv^2}{r} + mg = \frac{m \cdot 2gL}{L} + mg = 3mg$$

2.56

Nederste punkt i banen: Tyngdekraften peker nedover, normalkraften oppover. Da er:

$$N - G = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{mv^2}{r} + G = \frac{mv^2}{r} + mg = \frac{56\ \text{kg} \cdot (80\ \text{m/s})^2}{400\ \text{m}} + 56\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 1445\ \text{N} = \underline{\underline{1{,}4\ \text{kN}}} = \underline{\underline{2{,}6G}}$$

Øverste punkt i banen: Både tyngdekraften og normalkraften peker nedover. Da er:

$$N + G = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{mv^2}{r} - G = \frac{mv^2}{r} - mg = \frac{56\ \text{kg} \cdot (80\ \text{m/s})^2}{400\ \text{m}} - 56\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 347\ \text{N} = \underline{\underline{0{,}35\ \text{kN}}} = \underline{\underline{0{,}63G}}$$

Piloten føler seg tyngre enn normalt nederst i banen og lettere enn normalt øverst.

2.57

a Vi finner grensen for farten ved å sette normalkraften lik null. Da er

$$G = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad mg = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}1\ \text{m}} = 7{,}7357\ \text{m/s} = \underline{\underline{7{,}7\ \text{m/s}}}.$$

Dette er det samme som $7{,}7357 \cdot 3{,}6\ \text{km/h} = \underline{\underline{28\ \text{km/h}}}$

b Hvis motoren er av og vi ser bort fra luftmotstand, er den mekaniske energien bevart.

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 \quad \Rightarrow \quad v^2 + 2gh = v_0^2 + 2gh_0$$

Vi legger nullpunktet for høyden i bunnen av loopen. Da er $h_0 = 0\ \text{m}$, $h = 2r = 2 \cdot 6{,}1\ \text{m}$ og $v = 7{,}7357\ \text{m/s}$. Vi ønsker å finne v_0.

$$v^2 + 2gh = v_0^2$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{v^2 + 2gh} = \sqrt{(7{,}7357\ \text{m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 2 \cdot 6{,}1\ \text{m}} = 17{,}2975\ \text{m/s} = \underline{\underline{17\ \text{m/s}}}$$

Dette er det samme som $17{,}2975 \cdot 3{,}6\ \text{km/h} = \underline{\underline{62\ \text{km/h}}}$

c Normalkraften er størst i bunnen av loopen. da er

$$N - G = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad N = \frac{mv^2}{r} + mg$$

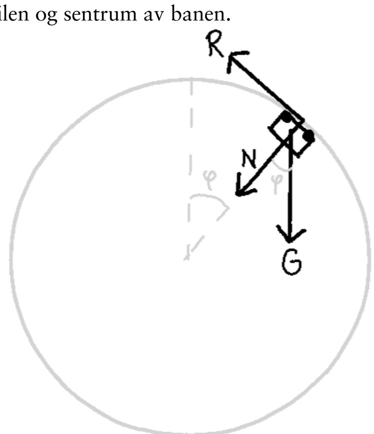
Vi finner forholdstallet mellom normalkraften og tyngdekraften:

$$\frac{N}{G} = \frac{\frac{mv^2}{r} + mg}{mg} = \frac{v^2}{gr} + 1 = \frac{(17{,}2975\ \text{m/s})^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}1\ \text{m}} + 1 = 6{,}0 \quad \Rightarrow \quad N = \underline{\underline{6{,}0G}}$$

d Normalkraften er størst i bunnen av loopen. Formelen blir den samme som i oppgave c:

$$\frac{N}{G} = \frac{v^2}{gr} + 1 = \frac{(35/3{,}6\ \text{m/s})^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}1\ \text{m}} + 1 = 2{,}5795 = 2{,}6 \quad \Rightarrow \quad N = \underline{\underline{2{,}6G}}$$

e Vi tegner en figur som viser kreftene som virker på bilen. Vi lar ϕ være vinkelen mellom loddlinja og linja mellom bilen og sentrum av banen.



Kraftsummen er lik null langs tangenten til banen: $R = G \quad \Rightarrow \quad \mu N = mg\sin\phi$

Sentripetalakselerasjon gir oss at $N + G\cos\phi = \dfrac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad N = \dfrac{mv^2}{r} - mg\cos\phi$

Vi eliminerer N fra likningssettet og løser for friksjonstallet μ:

$$\mu N = mg\sin\phi \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{mg\sin\phi}{N} = \frac{mg\sin\phi}{\frac{mv^2}{r} - mg\cos\phi} = \frac{g\sin\phi}{\frac{v^2}{r} - g\cos\phi}$$

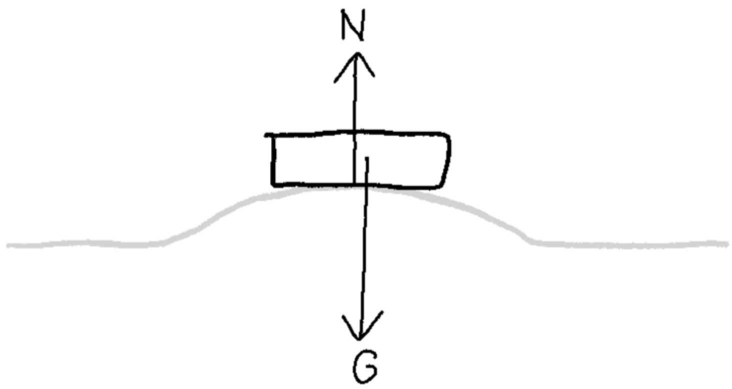
Vi har nå et uttrykk for friksjonstallet som funksjon av vinkelen ϕ.
Vi bruker CAS til å finne den største verdien μ har i løpet av en runde:

1	$g := 9.81$ $\rightarrow\ \mathbf{g := \frac{981}{100}}$
2	$r := 6.1$ $\rightarrow\ \mathbf{r := \frac{61}{10}}$
3	$v := \frac{35}{3.6}$ $\rightarrow\ \mathbf{v := \frac{175}{18}}$
4	$mu(x) := \frac{g\ \sin(x)}{\frac{v^2}{r} - g\ \cos(x)}$ $\rightarrow\ \mathbf{mu(x) := -4847121 \cdot \frac{\sin(x)}{4847121\ \cos(x) - 7656250}}$
5	Ekstremalpunkt(mu, 0, 2 · pi) $\rightarrow\ \mathbf{(0.89, 0.82)}$

Vi ser at friksjonstallet minste må være 0,82 for at bilen skal kunne kjøre gjennom loopen i en hastighet på 35 km/h.

2.58

a Figur av krefter. Vi ser at tyngdekraften må være større enn normalkraften for at bilen skal få «sirkelbevegelsen» over fartshumpen.



b Hvis bilen mister kontakten med underlaget, er normalkraften lik null. Da er

$$G = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad mg = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v^2}{g} = \frac{(40/3{,}6\text{ m/s})^2}{9{,}81\text{ m/s}^2} = \underline{\underline{13\text{ m}}}.$$

2.59

Nøkkelen til å lage smultringer med bil, er la forhjulene spinne mens man tilpasser bremsingen av bakhjulene slik at de får en kraftkomponent innover mot sentrum av smultringen. Man må samtidig ikke bremse hardere enn at bevegelsen kan opprettholdes. Detaljene om hvordan man utfører trikset kan internett gi et bedre svar på enn vi får gjort her.

2.60

a Vi legger nullpunktet for høyde ved startpunktet. Høyden på toppen av fjerde loop er da $h = 5r$. Vi bruker bevaring av mekanisk energi til å finne farten:

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad 2gh + v^2 = v_0^2$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = \sqrt{v_0^2 - 10gr} = \sqrt{(4{,}1\text{ m/s})^2 - 10 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 0{,}085\text{ m}} = \underline{\underline{2{,}9\text{ m/s}}}$$

b Vi setter N = 0 for å finne den minste farten bilen kan ha i toppen av en loop. Da er

$$G = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad mg = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 0{,}085\text{ m}} = 0{,}9132\text{ m/s}.$$

Vi bruker bevaring av mekaniske energi med $v_0 = 4{,}1$ m/s og $v = 0{,}91$ m/s, og finner hvilken høyde dette tilsvarer. Vi legger som før nullpunktet ved bunnen av første loop.

$$2gh + v^2 = v_0^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{(4{,}1\text{ m/s})^2 - (0{,}91\text{ m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2} = 0{,}81\text{ m}.$$

Da er $\frac{h}{r} = \frac{0{,}81\text{ m}}{0{,}085\text{ m}} = 9{,}6 \quad \Rightarrow \quad h \le 9r$.

Siden toppen av første loop har en høyde $2r$, toppen av andre loop har en høyde $3r$, og så videre, ser vi at en høyde på $9r$ gir at det maksimale antall looper etter hverandre er 8.

c I oppgave b så vi at den maksimale høyden for toppunktet er $h = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{v_0^2 - \left(\sqrt{gr}\right)^2}{2g}$.

Toppen av loop nummer n er en høyde $h = (n+1)r$ over startpunktet. Dette gir oss at

$$(n+1)r \le \frac{v_0^2 - gr}{2g} \quad \Rightarrow \quad n + 1 \le \frac{v_0^2 - gr}{2gr} \quad \Rightarrow \quad n \le \frac{v_0^2 - gr}{2gr} - 1$$

$$\Rightarrow \quad n \le \frac{v_0^2}{2gr} - \frac{gr}{2gr} - 1 \quad \Rightarrow \quad n \le \frac{v_0^2}{2gr} - \frac{3}{2}$$

2.61

a Arbeidet som gjøres av andre krefter enn tyngden, er lik endringen i mekanisk energi. Siden det ikke er noen høydeforskjell, vil dette være lik endringen i kinetisk energi. Vi har da

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{7{,}25\text{ kg}}{2}\left((22{,}0\text{ m/s})^2 - (10{,}0\text{ m/s})^2\right) = 1392\text{ J} = \underline{\underline{1{,}39\text{ kJ}}}$$

b Siden det bare er tyngden som virker på kula etter at den har forlatt kasteren, vil den mekaniske energien være bevart. Vi legger nullpunktet for høyden i bakkeplanet. Dette gir:

$$mgh + \frac{1}{2}mv^2 = mgh_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gh_0 + v_0^2$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0} = \sqrt{(22{,}0\text{ m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 \cdot 1{,}10\text{ m}} = 22{,}48515\text{ m/s} = \underline{\underline{22{,}5\text{ m/s}}}$$

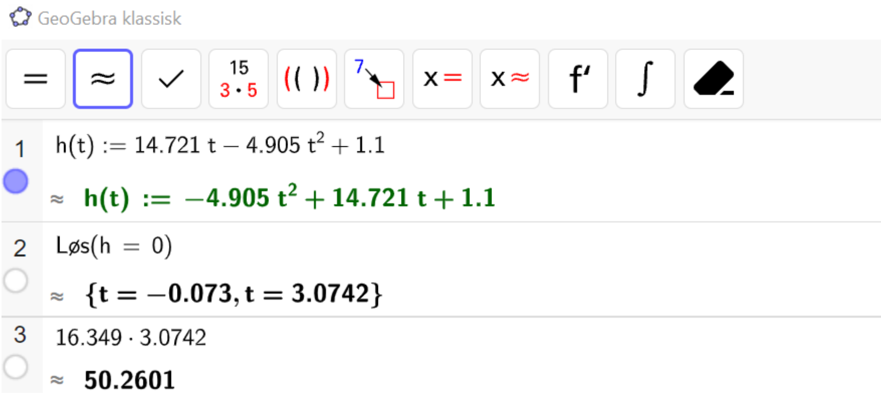
c Siden farten er konstant i x-retning, er posisjonen i x-retning ved tiden t:

$x = v_{x0}t = 22{,}0 \cdot \cos 42{,}0^\circ t = 16{,}349 \text{ m/s}$.

Posisjonen i y-retning ved tiden t er gitt ved

$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0 = 22{,}0 \cdot \sin 42{,}0^\circ \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2 + 1{,}10 = 14{,}721 \cdot t - 4{,}905 \cdot t^2 + 1{,}10$.

Vi velger å bruke CAS til å finne tiden når kula treffer bakken (linje 1 og 2 under), og setter dette inn i utrykket for x (linje 3).



Vi ser at sleggekastet blir 50,3 m målt langs bakken.

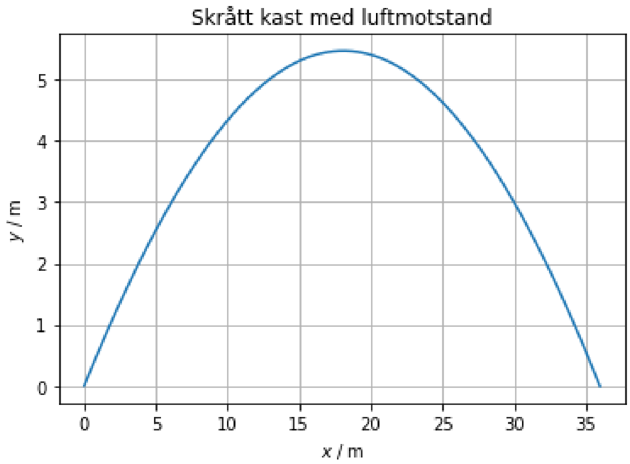
2.62

a Vi skriver programmet under:

```
from pylab import *

# Konstanter
m = 0.430                               # massen til gjenstanden, kg
k = 3.32*10**(-4)                       # luftmotstandstallet, kg/m
g = 9.81                                # tyngdeakselerasjon, m/s^2
v0 = 65/3.6                             # startfart, m/s
y0 = 0                                  # starthøyde, m
theta = radians(30)                     # konverterer vinkelen til
radianer
n = 1.40                                # antall rotasjoner per
sekund

# Konstante krefter
G = array([0, -m*g])                    # tyngden i N

# Variable krefter, utregning av kraftsum og akselerasjon
def a(v):
    e_v = v/norm(v)
    e_M = array([-e_v[1], e_v[0]])
    L = -k*norm(v)**2*e_v             # luftmotstandsvektor, N
    F_M = 0.0497*n*norm(v)*e_M
    sum_F = G + L + F_M               # vektorsum av kreftene, N
```

```
    aks = sum_F/m                          # akselerasjonsvektoren, m/s^2
    return aks

# Startverdier for bevegelsen
r = array([0, y0])                        # startposisjon, m
v = array([v0*cos(theta), v0*sin(theta)])   # startfart, m/s
t = 0                                     # starttid, s

# Liste for lagring av verdier
r_liste = [r]
v_liste = [v]

# Simulering av bevegelse
dt = 0.001                                # tidssteg i simulering, s
while r[1] >= 0:                          # stopper når v_y = 0
    v = v+a(v)*dt                         # regner ut neste 
fartsvektor
    r = r + v*dt                          # regner ut neste 
posisjonsvektor
    t = t + dt                            # går til neste tidspunkt
    # Lagring av 2D-verdier i lister
    r_liste = concatenate([r_liste, [r]])
    v_liste = concatenate([v_liste, [v]])

# Tegner graf
plot(r_liste[:, 0], r_liste[:, 1])        # tegner graf
title("Skrått kast med luftmotstand")     # graftittel
xlabel("$x$ / m")                         # navn på x-akse
ylabel("$y$ / m")                         # navn på y-akse
grid()
show()
```

Når programmet kjører, tegner det posisjonsgrafen. Vi får denne grafen:



b Når vi kjører programmet fra oppgave a, skriver det ut: `Lengden langs bakken er 36.0 m.`

Vi fjerner eller kommenterer ut størrelsen «+ F_M» i funksjonen `a(v)` i programmet i a.

```
# Variable krefter, utregning av kraftsum og akselerasjon
def a(v):
    e_v = v/norm(v)
    e_M = array([-e_v[1], e_v[0]])
    L = -k*norm(v)**2*e_v            # luftmotstandsvektor, N
    F_M = 0.0497*n*norm(v)*e_M
    sum_F = G + L #+ F_M             # vektorsum av kreftene, N
    aks = sum_F/m                    # akselerasjonsvektoren, m/s^2
    return aks
```

Vi legger også til denne linjen nederst i programmet:

```
# Skriver ut lengden
print("Lengden langs bakken er", round(r[0], 1), "m.")
```

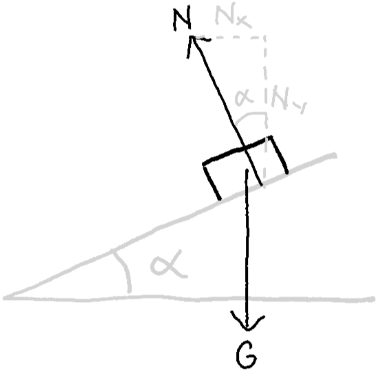
Da skriver det ut: `Lengden langs bakken er 28.3 m.`

Vi ser at forskjellen på sparket med og uten Magnuseffekten er 36,0 m – 28,3 m = 7,7 m.
Det betyr at sparket blir $\frac{7{,}7\ \text{m}}{28{,}3\ \text{m}} \cdot \mathbf{100}\ \% = \mathbf{27{,}2}\ \%$ lengre hvis vi tar hensyn til Magnuseffekten.

c Vi legger følgende linje inn i **`while`**-løkka: `n = n - 0.05*n*dt`
Vi må ta hensyn til denne nye verdien for antall rotasjoner når vi regner ut akselerasjonen.
Dette gjør vi ved å endre funksjonen `a(v)` i programmet til: `def a(v, n):`
Når programmet nå kjører, skriver det ut: `Lengden langs bakken er 35.6 m.`

2.63

a Vi tegner en figur som viser situasjonen:



Bare normalkraften har en x-komponent, så $N_x = N\sin\alpha = \dfrac{mv^2}{r}$

Kraftsummen i y-retning er lik null, så $N_y = G \quad\Rightarrow\quad N\cos\alpha = mg$.

Vi deler likningen for x-retningen på likningen for y-retningen, og løser for fart:

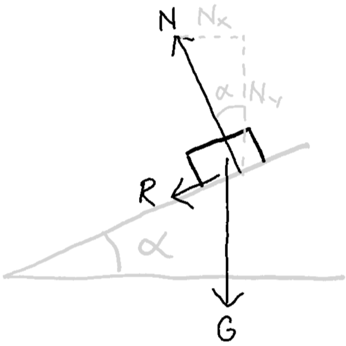
$$\frac{N\sin\alpha}{N\cos\alpha} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} \quad\Rightarrow\quad \tan\alpha = \frac{v^2}{gr}$$

$$\Rightarrow\quad v = \sqrt{gr\tan\alpha} = \sqrt{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 120\ \text{m} \cdot \tan 5{,}0^\circ} = 10{,}148\ \text{m/s} = \underline{\underline{10\ \text{m/s}}}$$

Dette er det samme som $10{,}148 \cdot 3{,}6\ \text{km/h} = \underline{\underline{37\ \text{km/h}}}$

b Hvis farten er for stor, vil bilen ikke klare å holde svingen og kjøre ut veien på utsiden av svingen. Hvis farten er for liten, vil bilen begynne å skli sidelengs innover mot sentrum av svingen.

c Friksjonskraften vil peke langs bakken innover i svingen som vist i figuren



Nå vil kreftene i x- og y-retning oppfylle følgende likningssett:

(1) $R_x + N_x = R\cos\alpha + N\sin\alpha = \mu N\cos\alpha + N\sin\alpha = \dfrac{mv^2}{r}$

(2) $G + R_y = N_y \quad\Rightarrow\quad N_y - R_y = G \quad\Rightarrow\quad N\cos\alpha - R\sin\alpha = mg$

$\Rightarrow\quad N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha = mg$

Vi deler likning (1) på likning (2), og får:

$$\frac{\mu N\cos\alpha + N\sin\alpha}{N\cos\alpha - \mu N\sin\alpha} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = \frac{v^2}{gr}.$$

Når vi løser for farten, får vi

$$v = \sqrt{gr\left(\frac{\mu\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}\right)}$$

$$= \sqrt{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 120\ \text{m}\left(\frac{0{,}22\cdot\cos 5{,}0^\circ + \sin 5{,}0^\circ}{\cos 5{,}0^\circ - 0{,}22\sin 5{,}0^\circ}\right)} = 19{,}211\ \text{m/s} = \underline{\underline{19\ \text{m/s}}}$$

Dette er det samme som
$19{,}211\cdot 3{,}6\ \text{km/h} = \underline{\underline{69\ \text{km/h}}}$.

2.64

a Siden ingenting annet er sagt, kan vi anta at vi setter startposisjonen lik null $S(0)=0$. Da kan posisjonsfunksjonen ikke ha konstantledd.
Hvis $s(t)$ hadde hatt et førstegradsledd, ville fartsfunksjonen hatt et konstantledd, og startfarten ville ikke være lik null.

b $s(t) = At^2 - Bt^3$

$v(t) = s'(t) = 2At - 3Bt^2$

$a(t) = v'(t) = s''(t) = 2A - 6Bt$

$a'(t) = v''(t) = s'''(t) = -6B$

Vi ser at akselerasjonen reduseres med verdien $6B$ for hver tidsenhet, $B = -a'(t)/6$.
Siden $a(0) = 2A$ ser vi at A er lik halvparten av startakselerasjonen.

c $a(0) = 2A = 2\cdot 1{,}67\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{3{,}34\ \text{m/s}^2}}$

d Siden løper holder toppfart ut hele løpet, varer akselerasjonsfasen så lenge akselerasjonen er positiv. Vi setter $a(t)=0$ Dette gir tiden

$$2A - 6Bt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2A}{6B} = \frac{2\cdot 1{,}67\ \text{m/s}^2}{6\cdot 0{,}059\ \text{m/s}^3} = 9{,}4350\ \text{s} = \underline{\underline{9{,}4\ \text{s}}}$$

e $s(9{,}4350\ \text{s}) = 1{,}67\ \text{m/s}^2\cdot(9{,}4350\ \text{s})^2 - 0{,}059\ \text{m/s}^3\cdot(9{,}4350\ \text{s})^3 = \underline{\underline{99\ \text{m}}}$

f $v(9{,}4350\ \text{s}) = 2\cdot 1{,}67\ \text{m/s}^2\cdot 9{,}4350\ \text{s} - 3\cdot 0{,}059\ \text{m/s}^3\cdot(9{,}4350\ \text{s})^2 = 15{,}756\ \text{m/s} = \underline{\underline{15{,}8\ \text{m/s}}}$

2.65

a Farten i x-retning er konstant, så $x = v_0 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0} = \frac{0{,}80\ \text{m}}{2{,}0\ \text{m/s}} = \underline{\underline{0{,}40\ \text{s}}}$

b $y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot(0{,}40\ \text{s})^2 = 0{,}7848\ \text{m} = \underline{\underline{78\ \text{cm}}}$

c Vi så i oppgave a at $t = \frac{x}{v_0}$. Når vi setter dette inn i uttrykket for y får vi

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\cdot\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2v_0^2}\cdot x^2$$

d Vi velger å skrive tabellen over i regnearket i GeoGebra, merke tabellen, høyreklikke, og velge «lag» og deretter «liste med punkt». Vi bruker deretter funksjonen «Reg» i algebrafeltet for å kunne velge form på funksjonsuttrykket.

f(x) = Reg(l1, a x²)

→ 1.2176 x²

Det er funksjonen $y = 1,2 \cdot x^2$ som best beskriver sammenhengen i tabellen.

e For enkelhets skyld velger vi å regne uten benevninger. Da finner vi at

$$y = \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 = 1,2 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{g}{2v_0^2} = 1,2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{g}{2 \cdot 1,2}} = \sqrt{\frac{9,81}{2 \cdot 1,2}} = 2,0$$

Farten er 2,0 m/s.

f Den mekaniske energien ved starten er gitt ved

$$E_m = (1 - 0,30)E_{m0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgh = 0,70 \cdot \left(\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0\right) \quad \Rightarrow \quad v^2 + 2gh = 0,70 \cdot \left(v_0^2 + 2gh_0\right)$$

Vi bruker at $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, og får

$$\left(v_x^2 + v_y^2\right) + 2gh = 0,70 \cdot \left(\left(v_{x0}^2 + v_{y0}^2\right) + 2gh_0\right) \quad \Rightarrow \quad 2gh = 0,70 \cdot \left(v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + 2gh_0\right) - \left(v_x^2 + v_y^2\right)$$

Siden ballen bare påvirkes av krefter i y-retningen, er $v_x = v_{x0} = 2,0$ m/s. Siden vi måler i høyeste punkt, er $v_y = v_{y0} = 0$ m/s. Vi rydder i uttrykket over, og får

$$h = \frac{1}{2g} \cdot \left(0,70 \cdot \left(v_x^2 + 2gh_0\right) - \left(v_x^2\right)\right) = 0,70 \cdot h_0 - 0.30 \cdot \frac{v_{x0}^2}{2g}$$

Når vi setter inn tall, får vi:

$$h = 0,70 \cdot 0,50 \text{ m} - 0.30 \cdot \frac{(2,0 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m/s}^2} = \underline{\underline{0,29 \text{ m}}} = \underline{\underline{29 \text{ cm}}}$$

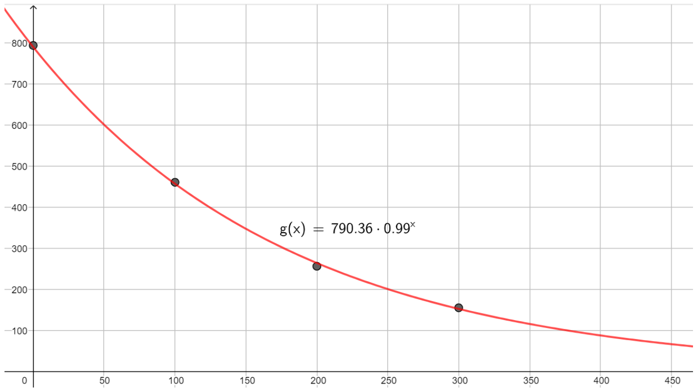
g Siden farten i x-retning er konstant, vil den minste mekaniske energien ballen kan ha være lik $\frac{1}{2}mv_x^2$. Ballen kan derfor ikke fortsette å miste 30 % av sin mekaniske energi hver gang den treffer bakken.

2.66

a **Vi bruker regnearket i GeoGebra til å regne ut den kinetiske energien ved de forskjellige avstandene:**

	A	B	C	D
1				
2		Fart (m/s)	Avstand (m)	Kinetisk energi (J)
3		740	0	794.02
4		564	100	461.24
5		421	200	257
6		328	300	156

Vi merker kolonnene for avstand og kinetisk energi, og gjør en regresjonsanalyse. En eksponentialfunksjon ser ut til å passe godt.



b **Vi regner ut** $g(150)$ **, og finner at den kinetiske energien er omtrent 350 J når kula er 150 m fra geværløpet.**

a = g(150)

→ 348.1

c Vi bruker fallhøyden til å regne ut hvor mye potensiell energi kula har mistet, og ser at den er svært mye mindre enn den kinetiske energien til kula. Vi ser derfor bort fra tapet av potensiell energi når vi regner ut arbeidet som luftmotstanden har gjort. Fra tabellen eller grafen i oppgave a ser vi at kula i starten har en kinetisk energi på omtrent 800 J. Vi får da:

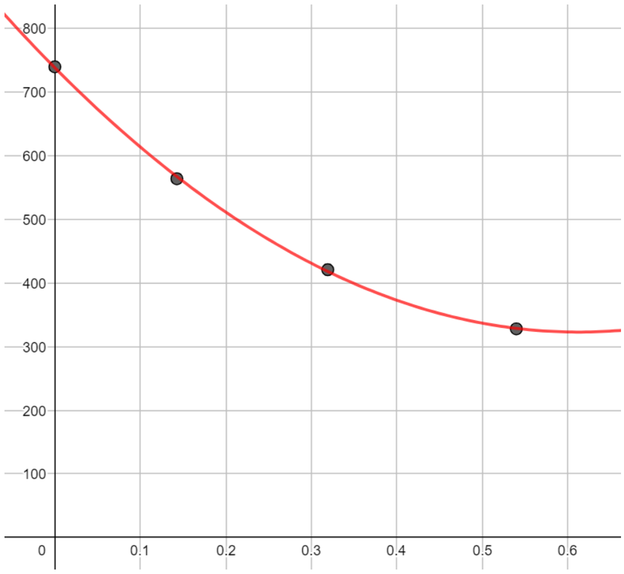
$$W_L = \Delta E_k = 350\ \text{J} - 800\ \text{J} = \underline{\underline{-450\ \text{J}}}$$

d $$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}43\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}} = 0{,}54\ \text{s}$$

e Vi bruker funksjonen $t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$ til å finne tiden for de forskjellige fallhøydene.

Fallhøyde	Tid (s)	Fart (m/s)
0	0	740
0.1	0.14	564
0.5	0.32	421
1.43	0.54	328

Vi gjør en regresjon, og finner at en annengradsfunksjon passer godt:



f Akselerasjon er den tidsderiverte av fart. Vi bruker funksjonen vi fant i forrige deloppgave til å finne en verdi for akselerasjonen etter 0,14 s, og finner at $a(0{,}14\text{ s}) \approx 1000\text{ m/s}^2$. Siden dette er langt større enn tyngdeakselerasjonen, ser vi bort fra denne. Vi får da at

$$L = ma = 0{,}0029\text{ kg} \cdot 1000\text{ m/s}^2 = 2{,}9\text{ N}.$$

Luftmotstanden på kula er grovt regnet omtrent lik 3 N.

2.67

a Flyet og alt som er i det, passasjerene inkludert, er bare påvirket av tyngdekraften, og følger samme fallkurve. Passasjerene vil derfor føle seg vektløse. Dette er det samme som astronautene i den internasjonale romstasjonen opplever.

b Flyet er ved punkt B ved tiden $t = 0$. Vi bruker posisjonsformel 2 i y-retning for å finne tiden ved punkt C:

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt\right)t = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{0y} - \frac{1}{2}gt_C = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_C = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2 \cdot 160\text{ m/s} \cdot \sin 50{,}0^\circ}{9{,}81\text{ m/s}^2} = 24{,}988\text{ s} = \underline{\underline{25{,}0\text{ s}}}$$

Vi finner sluttiden: $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt\right)t = 0$

c I toppen av parabelbanen er $v_y = 0\text{ m/s}$, så $v = v_x = 160\text{ m/s} \cdot \cos 50{,}0^\circ = 102{,}846\text{ m/s} = \underline{\underline{103\text{ m/s}}}$

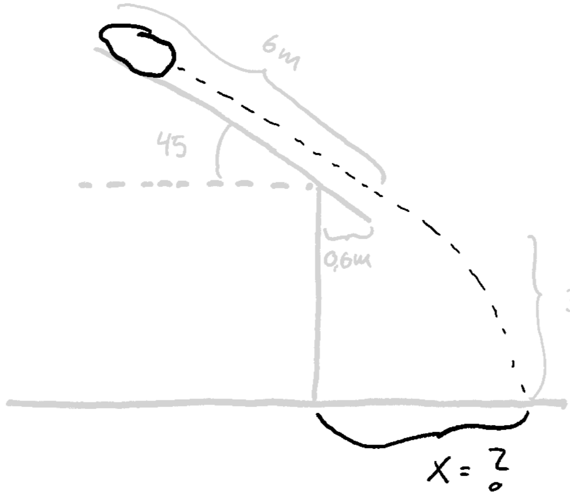
d Gjennom hele parabelbanen er det bare tyngdekraften som virker på flyet, så akselerasjonen er lik tyngdeakselerasjonen, $a = g = \underline{\underline{9{,}81\text{ m/s}^2}}$

e Vi bruker uttrykket for sentripetalakselerasjonen:

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{v^2}{a} = \frac{(102{,}846\text{ m/s})^2}{9{,}81\text{ m/s}} = 1078\text{ m} = \underline{\underline{1{,}08\text{ km}}}$$

1.68

Vi tegner en figur for å få oversikt over situasjonen.



Vi bruker bevaring av mekanisk energi til å finne den største mulige farten på kanten av hustaket. Vi legger nullpunktet for høyden ved bunnen av taket, og regner med at snøen starter fra ro på toppen av taket. Da er

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}00\ \text{m} \cdot \sin 45^\circ} = 9{,}1236\ \text{m/s}$$

Siden vinkelen er 45°, er farten i x- og y-retning like stor:

$$v_{x1} = v_{y1} = 9{,}1236\ \text{m/s} \cdot \cos 45^\circ = 6{,}4514\ \text{m/s} \quad \text{(ved bunnen av taket)}$$

Etter at snøen forlater taket, er farten i x-retning konstant. Vi velger å bruke den tidløse formelen til å finne hvor stor farten er i y-retning når snøen treffer bakken:

$$v_{y2}^2 = v_{y1}^2 + 2gy \quad \Rightarrow$$

$$v_{y2} = \sqrt{v_{y1}^2 + 2gy} = \sqrt{(6{,}4514\ \text{m/s})^2 + 2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 3{,}00\ \text{m}} = 10{,}024\ \text{m/s}$$

Vi bruker fartsformelen i y-retning til å finne hvor lang tid snøen bruker på selve fallet:

$$v_{y2} = v_{y1} + gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_{y2} - v_{y1}}{g} = \frac{10{,}024\ \text{m/s} - 6{,}4514\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}3642\ \text{s}$$

Farten i x-retning er konstant under fallet. Vi bruker dette sammen med tiden vi fant til å finne avstanden fra husveggen:

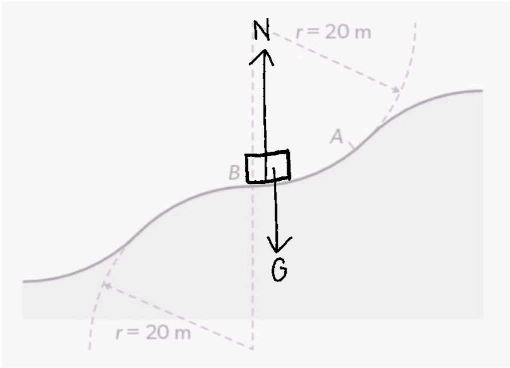
$$x = v_{x1}t + 0{,}600\ \text{m} = 6{,}4514\ \text{m/s} \cdot 0{,}3642\ \text{s} + 0{,}600\ \text{m} = \underline{\underline{2{,}95\ \text{m}}}$$

2.69

a Siden akeren slipper seg utfor, er farten i A lik null. Vi legger nullnivået for høyden ved B. Den mekaniske energien er bevart, slik at

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh_A \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 5{,}0\ \text{m}} = \underline{\underline{9{,}9\ \text{m/s}}}$$

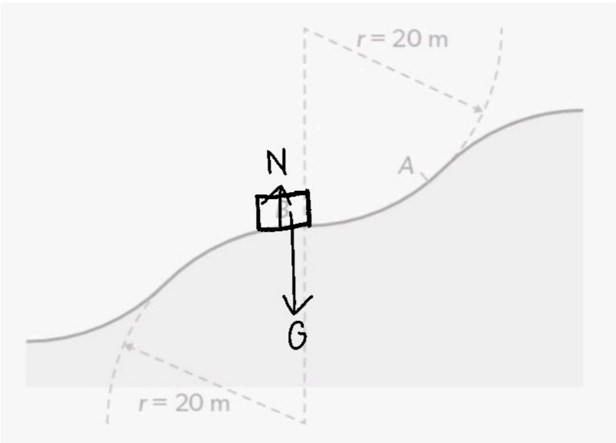
b Rett før kjelken passerer B, følger banen en sirkelbane med midtpunkt 20 m over B. Kraftsummen må peke rett oppover, så normalkraften fra underlaget er større enn tyngden.



$$\Sigma F = N - G = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{mv^2}{r} + mg = \frac{70\ \text{kg} \cdot (9{,}9\ \text{m/s})^2}{20\ \text{m}} + 70\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 1030\ \text{N} = \underline{\underline{1{,}0\ \text{kN}}}$$

c Rett etter at kjelken har passert B, følger den en sirkelbane med midtpunkt 20 m rett under B. Tyngdekraften må være større enn normalkraften.



$$\Sigma F = G - N = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad N = mg - \frac{mv^2}{r} = 70\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - \frac{70\ \text{kg} \cdot (9{,}9\ \text{m/s})^2}{20\ \text{m}} = 344\ \text{N} = \underline{\underline{0{,}34\ \text{kN}}}$$

d Vi setter $N = 0$, og får $G = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad mg = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = gr$.

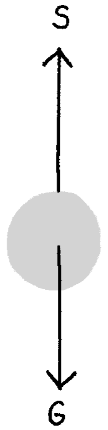
Vi legger igjen nullpunktet for høyden ved B. Siden den mekaniske energien er bevart, finner vi:

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_B^2}{2g} = \frac{gr}{2g} = \frac{r}{2} = \frac{20\ \text{m}}{2} = \underline{\underline{10\ \text{m}}}$$

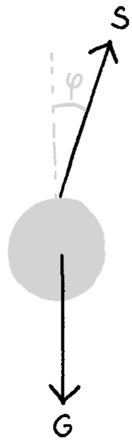
Akeren må starte 10 m over punkt B.

2.70

a Når bilen kjører med konstant fart på en horisontal vei, er summen av kreftene på kula lik null:



b Når bilen kjører med konstant akselerasjon, får snora en vinkel $\phi = 12^\circ$ med vertikalretningen:



c Vi lar x- og y-aksen ligge langs horisontal- og vertikalretningen, og skriver opp likninger for kraftsummen i x- og y-retningen:

x-retning: $\Sigma F_x = S\sin\phi = ma$

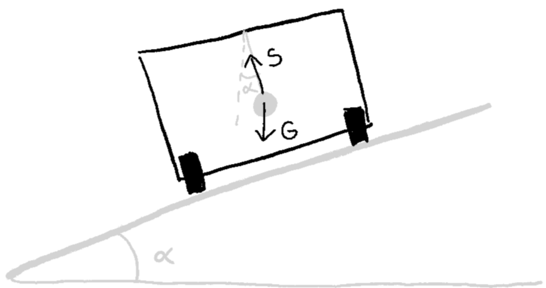
y-retning: $\Sigma F_y = S\cos\phi - G = 0 \quad \Rightarrow \quad S\cos\phi = mg$

Vi løser likningen for akselerasjonen:

$$\frac{S\sin\phi}{S\cos\phi} = \frac{ma}{mg} \quad \Rightarrow \quad \tan\phi = \frac{a}{g}$$

$$\Rightarrow \quad a = g\tan\phi = 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \tan 12^\circ = 2{,}0852\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{2{,}1\ \text{m/s}^2}}$$

d Vi tegner en figur som viser bilen sett bakfra og kula som henger i en snor:



Vi lar fremdeles x- og y-aksen ligge langs horisontal- og vertikalretningen, og skriver opp likninger for kraftsummen i x- og y-retningen:

x-retning: $\Sigma F_x = S\sin\alpha = \frac{mv^2}{r}$

y-retning: $\Sigma F_y = S\cos\alpha - G = 0 \quad \Rightarrow \quad S\cos\alpha = mg$

Vi løser likningen for dosseringsvinkelen:

$$\frac{S\sin\alpha}{S\cos\alpha} = \frac{\frac{mv^2}{r}}{mg} = \frac{v^2}{gr} \quad \Rightarrow \quad \tan\alpha = \frac{v^2}{gr}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{gr}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{(60/3{,}6 \text{ m/s})^2}{9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 180 \text{ m}}\right) = \underline{\underline{8{,}9^\circ}}$$

e Siden underlaget er vannrett, er friksjonskraften den eneste kraften som virker i horisontalplanet. Da har vi: $R = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{rR}{m}} = \sqrt{\frac{40 \text{ m} \cdot 2{,}0 \text{ N}}{1{,}0 \text{ kg}}} = 8{,}9443 \text{ m/s} = \underline{\underline{8{,}9 \text{ m/s}}}$

Dette tilsvarer $8{,}9443 / 3{,}6 \text{ km/h} = \underline{\underline{32 \text{ km/h}}}$

2.71

Far og datter vil føle seg vektløse dersom farten er så stor at $g \leq \frac{v^2}{r}$.

Vi antar at det ikke virker friksjon og luftmotstand på vogna, og at den ikke blir tilført energi. Da vil den mekaniske energien være bevart. Vi velger å legge nullpunktet for høyden ved punktet B. Da er $h_0 = 1{,}0$ m , $h = 0$ m . Vogna starter fra ro, så $v_0 = 0$ m/s . For enkelhets skyld lar vi være å skrive ut enhetene i utretningen.

Vi finner et uttrykk for farten ved punkt B: $\frac{1}{2}mv^2 = mgh_0 \quad \Rightarrow \quad v^2 = 2gh_0 = 2g$.

Vi setter dette inn i uttrykket for sentripetalakselerasjon: $\frac{v^2}{r} = \frac{2g}{5} = 0{,}4g$.

Siden $g > 0{,}40g$, vil far og datter ikke føle seg vektløse.

Merk: Hvis tyngdeakselerasjonen faktisk er større enn sentripetalakselerasjonen, vil vogna miste kontakten med underlaget helt, og følge en større sirkelbane.

2.72

Vi antar at bilen har fart 50 km/h rett mot rekkverket, og ser hvor langt i x-retning den kan komme i løpet av et fall på 2,1 m.

Vi finner først hvor lang tid bilen bruker på å falle 2,1 m:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2\cdot 2{,}1\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}} = 0{,}6543\ \text{s}$$

Vi finner hvor langt en bil med fart $50\ \text{km/h} = 50/3{,}6\ \text{m/s}$ kommer i løpet av denne tiden:

$$x = v_0 t = (50/3{,}6\ \text{m/s})\cdot 0{,}6543\ \text{s} = 9{,}1\ \text{m}\,.$$

Vi ser at strekningen vi regner ut omtrent stemmer med det som ble målt. Samtidig forutsetter våre beregninger en fart på tvers av veibanen, at bilen ikke mistet noe mekanisk energi i møte med rekkverket, og at bilføreren ikke gjorde noe forsøk på å bremse da han merket det begynte å gå galt. Dette virker noe usannsynlig, og vi konkluderer med at det bilføreren sier kanskje ikke er helt riktig.

2.73

a Vi bruker bevegelse i x-retning til å finne tiden kastet tar. Siden kastet er vannrett og vi ikke har noen akselerasjon i x-retning, er farten i x-retning konstant lik startfarten. Da er

$$x = v_0 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0} = \frac{6{,}00\ \text{m}}{20{,}0\ \text{m/s}} = 0{,}300\ \text{s}$$

Vi finner ut hvor langt pila har falt i løpet av denne tiden:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot(0{,}300\ \text{s})^2 = 0{,}44145\ \text{m} = \underline{\underline{44{,}1\ \text{cm}}}$$

b Farten er konstant i x-retning, så i passeringspunktet er $v_x = 20{,}0\ \text{m/s}$.

Siden startfarten i y-retning er lik null, er : $v_y = gt = 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}300\ \text{s} = 2{,}943\ \text{m/s}$.

Farten i passeringspunktet er da: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2{,}943\ \text{m/s})^2 + (2{,}943\ \text{m/s})^2} = \underline{\underline{20{,}2\ \text{m/s}}}$.

Vi finner vinkelen med horisontallinja:

$$\tan\phi = \frac{v_y}{v_x} \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2{,}943\ \text{m/s}}{20{,}0\ \text{m/s}}\right) = \underline{\underline{8{,}37^\circ}}$$

c Vi legger som før nullpunktet for høyden i starthøyden, som også er det samme som høyden til sentrum av skiven. Pilen treffer skiven dersom høyden i sluttpunktet er i intervallet $-5{,}00\ \text{cm} \le y \le 5{,}00\ \text{cm}$. Vi velger positiv y-retning loddrett oppover.

Vi bruker bevegelse i x-retning til å finne tiden pila bruker på å tilbakelegge en avstand på 6,00 meter:

$$x = v_0\cos\theta\cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0\cos\theta} = \frac{6{,}00\ \text{m}}{20{,}0\ \text{m/s}\cdot\cos 5{,}00^\circ} = 0{,}301146\ \text{s}\,.$$

Vi setter tiden inn i uttrykket som beskriver posisjon i y-retning:

$$\begin{aligned} y &= v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= 20{,}0\ \text{m/s}\cdot\sin 5{,}00^\circ\cdot 0{,}301146\ \text{s} - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot(0{,}301146\ \text{s})^2 \\ &= 0{,}0801\ \text{m} \\ &= 8{,}01\ \text{cm} \end{aligned}$$

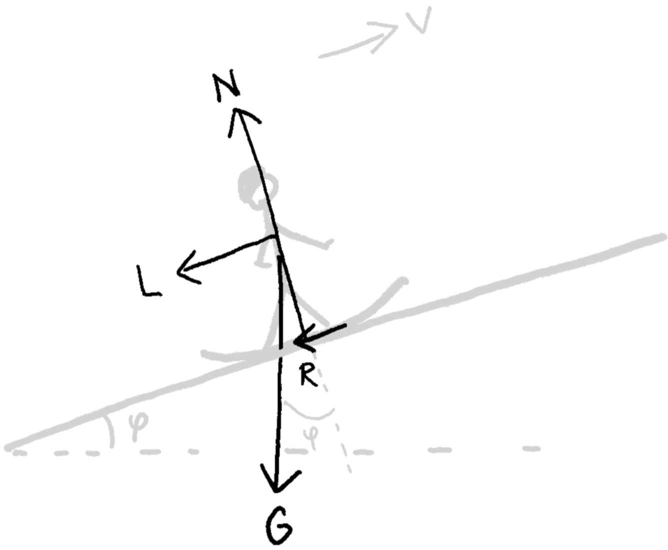
Pila treffer omtrent tre cm ovenfor skiva.

d Både pila og blinken har startfart lik null i y-retning, og faller med samme akselerasjon. De vil derfor være på samme sted når pila kommer fram til blinken.

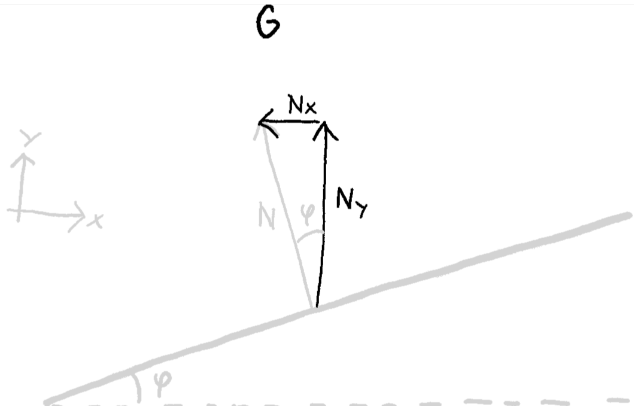
2.74

Kommentert [LN1]:

a Det virker en tyngdekraft, en normalkraft, luftmotstand og friksjon på personen:



b Det er ingen akselerasjon på tvers av skråplanet, så sammenhengen mellom normalkraften og tyngdekraften er $N = mg\cos\phi$.



Vi velger å legge koordinatsystemet slik at x-aksen ligger i horisontal og y-aksen i vertikal retning (se figuren over). Da er normalkraften i x- og y-retning:

$$N_x = -N\sin\theta = mg\cos\theta\sin\theta$$

$$N_y = N\cos\theta = mg\cos\theta\cos\theta$$

Skrevet på vektorform blir dette

$$\vec{N} = \left[N_x, N_y\right] = \left[-mg\cos\theta\sin\theta, mg\cos\theta\cos\theta\right] = mg\cos\theta\left[-\sin\theta, \cos\theta\right] = mg\cos\theta \cdot \vec{e}_N$$

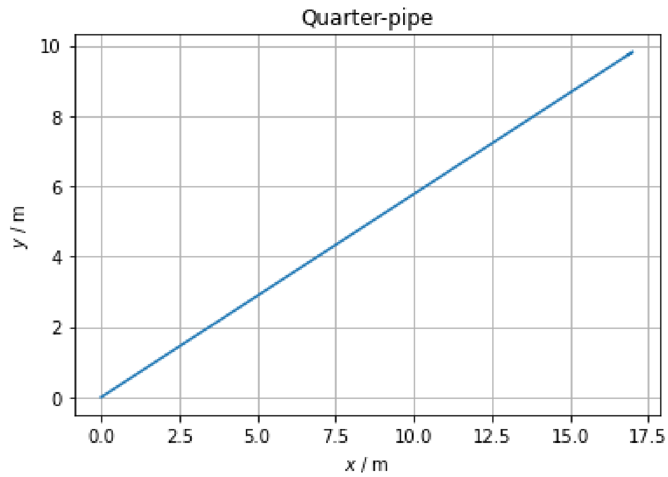
c

```
from pylab import *

# Konstanter
```

```
m = 70                                      # massen til
snowboardkjøreren (kg)
g = 9.81                                    # tyngdeakselrasjonen
(m/s^2)
theta =  radians(30)                        # vinkelen på skråplanet
mu = 0.040                                  # friksjonstall
k = 0.31                                    # luftmotstandstall
(kg/m)
y0 = 0                                      # starthøyde (m)
v0 = 15                                     # absoluttverdi av
startfart (m/s)

# Posisjonsvektor, fartsvektor og tidssteg
r = array([0, y0])                          # startposisjon (m)
v = array([v0*cos(theta), v0*sin(theta)])   # startfart (m/s)
t = 0                                       # starttid (s)
dt = 0.0001                                 # tidssteg (s)

# Liste for lagring av verdier
r_liste = [r]                               # posisjon
v_liste = [v]                               # fart

# Enhetsvektorer
e_G = array([0, -1])                        # retningen til
tyngdekraften
e_N = array([-sin(theta), cos(theta)])      # retningen til
normalkraften

# Konstante krefter
G = m*g*e_G                                 # tyngdekraft (N)
N = m*g*cos(theta)*e_N                      # normalkraft (N)

# Variable krefter, utregning av kraftsum og akselerasjon
def a(v):
    e_v = v/norm(v)                         # retningen til farten
    L = -k*norm(v)**2*e_v                   # luftmotstand (N)
    R = -mu*norm(N)*e_v                     # friksjon (N)
    sum_F = G + N + L + R                   # kraftsum (N)
    aks = sum_F/m                           # akselerasjonsvektor
(m/s^2)
    return aks

while t < 3:
    v = v+a(v)*dt                           # regner ut neste
fartsvektor
    r = r + v*dt                            # regner ut neste
posisjonsvektor
    t = t + dt                              # går til neste tidspnkt
```

```
    # Lagring av 2D-verdier i lister
    r_liste = concatenate([r_liste, [r]])   # posisjon
    v_liste = concatenate([v_liste, [v]])   # fart

# Skriver ut avstand langs skråplan
print("Snowboardkjøreren har beveget seg en distanse",
round(norm(r), 1), "m oppover skråplanet.")

# Tegner graf
plot(r_liste[:, 0], r_liste[:, 1])      # tegner graf
title("Quarter-pipe")   # graftittel
xlabel("$x$ / m")                      # navn på x-akse
ylabel("$y$ / m")                      # navn på y-akse
grid()
show()
```

Når programmet kjører, skriver det ut setningen:
`Snowboardkjøreren har beveget seg en distanse 19.4 m oppover skråplanet.`
Det tegner også posisjonsgrafen:



d I løpet av tiden Δt har kjøreren beveget seg en avstand $\Delta s = v\Delta t$. Vi lar $\Delta\theta$ være vinkelen kjøreren har bevege seg i løpet av samme tid. Forholdstallet mellom Δs og omkretsen $2\pi r$ rundt hele sirkelen, må være like stort som forholdstallet mellom vinkelen $\Delta\theta$ og vinkelen 2π som tilsvarer hele sirkelen. Vi har altså $\frac{\Delta s}{2\pi r} = \frac{v\Delta t}{2\pi r} = \frac{\Delta\theta}{2\pi}$.

e

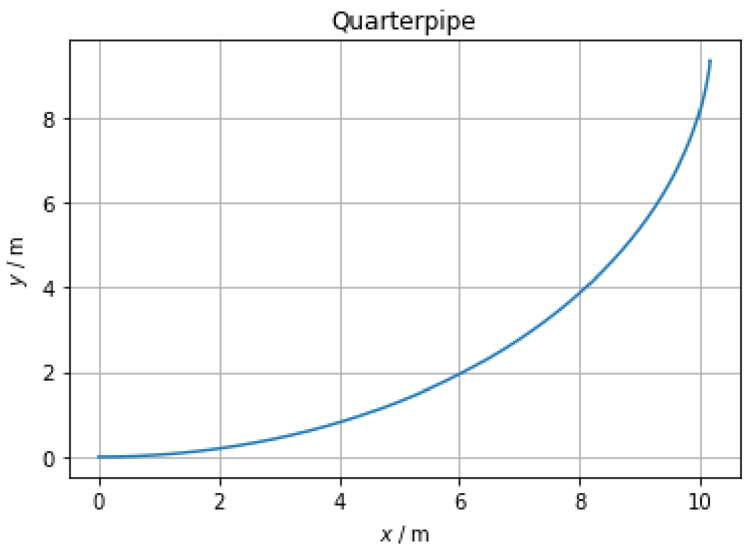
```
from pylab import *

# Konstanter
m = 70                                    # massen til
snowboardkjøreren (kg)
```

```
g = 9.81                                      # tyngdeakselerasjonen
(m/s^2)
radius = 10.2                                 # radius i quarter-pipen
(m)
theta =  radians(0)                           # startvinkel
mu = 0.040                                    # friksjonstall
k = 0.31                                      # luftmotstandstall
(kg/m)
y0 = 0                                        # starthøyde (m)
v0 = 15                                       # absoluttverdi av
startfart (m/s)

# Posisjonsvektor, fartsvektor og tidssteg
r = array([0, y0])                            # startposisjon (m)
v = array([v0*cos(theta), v0*sin(theta)])     # startfart (m/s)
t = 0                                         # starttid (s)
dt = 0.0001                                   # tidssteg (s)

# Liste for lagring av verdier
r_liste = [r]                                 # posisjon
v_liste = [v]                                 # fart

# Enhetsvektorer
e_G = array([0, -1])                          # retningen til
tyngdekraften

# Konstante krefter
G = m*g*e_G                                   # tyngdekraften (N)

# Utregning av akselerasjon
def a(v, theta):
    e_v = v/norm(v)                           # retningen til farten
    e_N = array([-sin(theta), cos(theta)])    # retningen til
normalkraften
    N = (m*g*cos(theta) + m*norm(v)**2/radius)*e_N  # normalkraft
(N)
    L = -k*norm(v)**2*e_v                     # luftmotstand (N)
    R = -mu*norm(N)*e_v                       # friksjon (N))
    sum_F = G + N + L + R                     # kraftsum (N)
    aks = sum_F/m                             # akselerasjon fra
Newtons 2. lov (m/s^2)
    return aks

while v[1] >= 0:
    v = v + a(v, theta)*dt                    # regner ut neste
fartsvektor
    theta = theta + norm(v)*dt/radius         # regner ut neste
vinkel
```

```
    r = r + v*dt                          # regner ut neste
posisjonsvektor
    t = t + dt                            # går til neste tidspnkt

    # Lagring av 2D-verdier i lister
    r_liste = concatenate([r_liste, [r]])   # posisjon
    v_liste = concatenate([v_liste, [v]])   # fart

# Skriver ut maksimal høyde
print("Kjøreren får en maksimal høyde på", round(r[1], 3), "m.")

# Tegner graf
plot(r_liste[:,0], r_liste[:, 1])
title("Quarterpipe")                      # graftittel
xlabel("$x$ / m")                         # navn på x-akse
ylabel("$y$ / m")                         # navn på y-akse
grid()
show()
```

Når koden kjører, skriver den ut denne setningen: `Kjøreren får en maksimal høyde på 9.356 m.`

Programmet lager også dette plottet over posisjonen til snowboardkjøreren:



f

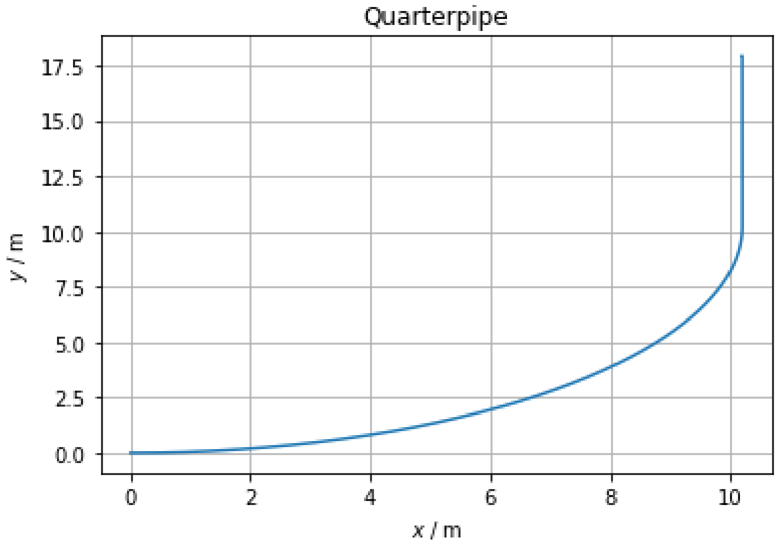
```
from pylab import *

# Konstanter
```

```
m = 70                                       # massen til
snowboardkjøreren (kg)
g = 9.81                                     # tyngdeakselerasjonen
(m/s^2)
radius = 10.2                                # radius i quarter-pipen
(m)
theta =  radians(0)                          # startvinkel
mu = 0.040                                   # friksjonstall
k = 0.31                                     # luftmotstandstall
(kg/m)
y0 = 0                                       # starthøyde (m)
v0 = 76.5/3.6                                # absoluttverdi av
startfart (m/s)

# Posisjonsvektor, fartsvektor og tidssteg
r = array([0, y0])                           # startposisjon (m)
v = array([v0*cos(theta), v0*sin(theta)])    # startfart (m/s)
t = 0                                        # starttid (s)
dt = 0.0001                                  # tidssteg (s)

# Liste for lagring av verdier
r_liste = [r]                                # posisjon
v_liste = [v]                                # fart

# Enhetsvektorer
e_G = array([0, -1])                         # retningen til
tyngdekraften

# Konstante krefter
G = m*g*e_G                                  # tyngdekraften (N)

# Utregning av akselerasjon
def a1(v, theta):
    e_v = v/norm(v)                          # retningen til farten
    e_N = array([-sin(theta), cos(theta)])   # retningen til
normalkraften
    N = (m*g*cos(theta) + m*norm(v)**2/radius)*e_N  # normalkraft
(N)
    L = -k*norm(v)**2*e_v                    # luftmotstand (N)
    R = -mu*norm(N)*e_v                      # friksjon (N))
    sum_F = G + N + L + R                    # kraftsum (N)
    aks = sum_F/m                            # akselerasjon fra
Newtons 2. lov (m/s^2)
    return aks

def a2(v):
    L = k*norm(v)**2*e_G                     # luftmotstand (N)
(peker i samme retning som G)
```

```
    sum_F = G + L                               # kraftsum (N)
    aks = sum_F/m                               # akselerasjon fra
Newtons 2. lov (m/s^2)
    return aks

while v[1] >= 0:
    if r[1]<=10.2:                              # mens kjøreren har
kontakt med halfpipen
        v = v + a1(v, theta)*dt                 # regner ut neste
fartsvektor
        theta = theta + norm(v)*dt/radius       # regner ut neste
vinkel
    else:                                       # mens kjøreren ikke har
kontakt med halfpipen
        v = v + a2(v)*dt                        # regner ut neste
fartsvektor

    r = r + v*dt                                # regner ut neste
posisjonsvektor
    t = t + dt                                  # går til neste tidspnkt

    # Lagring av 2D-verdier i lister
    r_liste = concatenate([r_liste, [r]])       # posisjon
    v_liste = concatenate([v_liste, [v]])       # fart

h = r[1]-10.2
print("Kjøreren kommer en høyde", round(h, 3), "m over
quarterpipen.")

# Tegner graf
plot(r_liste[:,0], r_liste[:, 1])
title("Quarterpipe")                            # graftittel
xlabel("$x$ / m")                               # navn på x-akse
ylabel("$y$ / m")                               # navn på y-akse
grid()
show()
```

Når koden kjører, skriver den ut denne setningen: `Kjøreren kommer en høyde 7.731 m over quarterpipen.`

Programmet lager også dette plottet over posisjonen til snowboardkjøreren:



KAPITTELTEST

Oppgave 1

a Vi bruker posisjonsformel 2 i y-retning for å finne et uttrykk for tiden kula bruker:

$$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = \left(v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt\right)t = 0$$

Uttrykket i parentesen vil gi oss slutttiden:

$$v_0 \sin\theta - \frac{1}{2}gt = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}gt = v_0 \sin\theta \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

Vi setter tiden inn i uttrykket for posisjonen i x-retning, og løser for x:

$$x = v_{0x}t = v_0 \cos\theta \cdot t = \frac{2v_0^2 \cos\theta \sin\theta}{g} = \frac{2 \cdot (17\ \text{m/s})^2 \cos 45^\circ \sin 45^\circ}{1{,}62\ \text{m/s}^2} = 178\ \text{m} = \underline{\underline{0{,}18\ \text{km}}}$$

b Farten i x-retning er konstant: $v_x = v_0 \cos\theta$.

Vi kan bruke den tidløse formelen til å vise at farten i y-retning når $y = 0$ er like stor som startfarten: $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy \quad \Rightarrow \quad v_y^2 = v_{0y}^2 \quad \Rightarrow \quad v_y = -v_{0y} = v_0 \sin\theta$.

Absoluttverdien av farten når ballen lander er da

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos\theta)^2 + (v_0 \sin\theta)^2} = \sqrt{v_0^2 \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)^2} = v_0 = \underline{\underline{17\ \text{m/s}}}$$

Siden farten i både x- og y-retning er den samme som ved begynnelsen, må fartsretningen også nå ha en vinkel på 45° relativt til bakken.

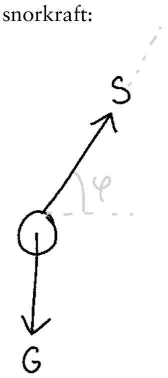
Oppgave 2

$$a_s = \frac{v^2}{r} = \frac{(s/T)^2}{r} = \frac{(2\pi r/T)^2}{r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

$$\Rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{a_s}} = 2\pi\sqrt{\frac{6378\cdot 10^3\ \text{m} + 400\cdot 10^3\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}} = 5223\ \text{s} = 87\ \text{min} = 1\ \text{h}\ 27\ \text{min}$$

Oppgave 3

a Figuren viser kula, med tyngdekraft og snorkraft:



b $a_s = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{(5{,}40\ \text{m/s})^2}{2{,}05\ \text{m}} = 14{,}224\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{14{,}2\ \text{m/s}^2}}$

c De loddrette kraftkomponentene utlikner hverandre, så vi har $\Sigma F = S_x$. Kreftene i x- og y-retning gir da et likningssett med snorkraften S og vinkelen ϕ som ukjente:

x-retning: $S\cos\phi = ma_s$

y-retning: $S\sin\phi = mg$

Vi løser likningsettet for vinkelen:

$$\frac{S\sin\phi}{S\cos\phi} = \frac{mg}{ma_s} \quad \Rightarrow \quad \tan\phi = \frac{g}{a_s} \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{g}{a_s}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{14{,}224\ \text{m/s}^2}\right) = 34{,}593^\circ = \underline{\underline{34{,}6^\circ}}$$

d $S\cos\phi = ma_s \Rightarrow S = \dfrac{ma_s}{\cos\phi} = \dfrac{7{,}26\cdot 14{,}224}{\cos 34{,}593°}\ \text{N} = 125{,}44\ \text{N} \approx \underline{\underline{125\ \text{N}}}$

e Etter at slegga er sluppet, er det bare tyngdekraften som virker på slegga. Akselerasjonen er da $a = \underline{\underline{9{,}81\ \text{m/s}^2}}$ loddrett nedover gjennom hele bevegelsen.

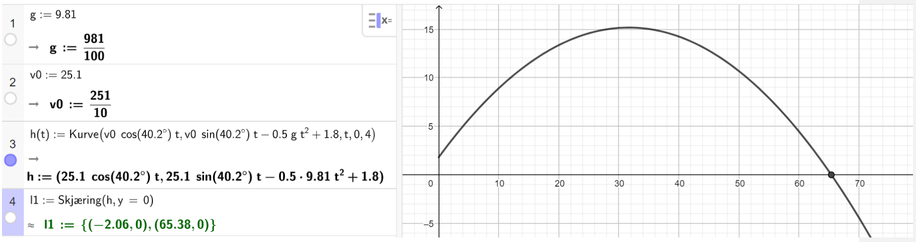
I toppunktet er farten i y-retning lik null. Farten i x-retning er konstant. I toppunktet er da $v = v_x = v_0\cos\theta = 25{,}1\ \text{m/s}\cdot\cos 40{,}2^\circ = \underline{\underline{19{,}2\ \text{m/s}}}$.

f Farten i x-retning er konstant, så vi har at $x = v_x t = v_0\cos\theta\cdot t$.

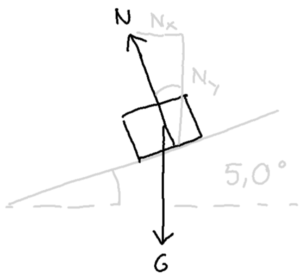
Vi skriver opp posisjonslikningen for y:

$$y = v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2 + y_0 = 25{,}1\ \text{m/s}\cdot\sin 40{,}2^\circ\cdot t - \frac{1}{2}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot t^2 + 1.80\ \text{m}$$

Vi velger å bruke parameterframstilling til å tegne grafen i GeoGebra, og finner nullpunktet for grafen. Vi finner da at kastet blir 65,4 meter langt.



Oppgave 4



Vi dekomponerer normalkraften i en vannrett og loddrett komponent. Summen av de loddrette kreftene er da lik null, og vi har at $\Sigma F = N_x = mg\sin\theta$. Vi har da

$$mg\sin\theta = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gr\sin\theta} = \sqrt{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 550\ \text{m} \cdot \sin 5{,}0^\circ} = 21{,}7\ \text{m/s} = \underline{\underline{78\ \text{km/s}}}$$

Oppgave 5

a Vi bruker bevaring av mekaniske energi til å finne farten i punkt B. Bilen starter fra ro, og vi legger nullpunktet for høyden ved punkt B. Da er:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}60\ \text{m}} = 3{,}4310\ \text{m/s} = \underline{\underline{3{,}4\ \text{m/s}}}$$

Bilen har da en sentripetalakselerasjon på $a_s = \frac{v^2}{r} = \frac{(3{,}4310\ \text{m/s})^2}{0{,}20\ \text{m}} = 58{,}86\ \text{m/s}^2$.

Vi bruker Newtons andre lov til å finne normalkraften:

$$\Sigma F = N - G = ma_s$$

$$\Rightarrow \quad N = ma_s + G = m(a_s + g) = 50 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\left(58{,}86\ \text{m/s}^2 + 9{,}81\ \text{m/s}^2\right) = \underline{\underline{3{,}4\ \text{N}}}$$

b Vi kan igjen bruke bevaring av mekanisk energi til å finne farten i punkt C. Vi legger nå nullpunktet for høyden ved C:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh_0 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh_0} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}20\ \text{m}} = 1{,}9809\ \text{m/s}.$$

Sentripetalakselerasjonen i C er $a_s = \frac{v^2}{r} = \frac{(1{,}9809\ \text{m/s})^2}{0{,}20\ \text{m}} = 19{,}62\ \text{m/s}^2$

I C peker både tyngdekraften og normakraften nedover. Vi bruker igjen Newtons andre lov til å finne normalkraften:

$$\Sigma F = N + G = ma_s$$

$$\Rightarrow \quad N = ma_s - G = m(a_s - g) = 50 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}\left(19{,}62\ \text{m/s}^2 - 9{,}81\ \text{m/s}^2\right) = \underline{\underline{0{,}49\ \text{N}}}$$

c Jo mindre farten blir, jo mindre blir normalkraften i punkt C. Vi setter $N = 0$ og bruker Newtons andre lov med sentripetalakselerasjon for å finne den minste farten. Da er:

$$\Sigma F = G = ma_{\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad mg = ma_{\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad mg = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{gr} = \sqrt{9{,}81\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}20\ \mathrm{m}} = \underline{\underline{1{,}4\ \mathrm{m/s}}}$$