5 Elektriske felt

5.1

a Vi velger å bruke forholdstall til å finne kraften .

$$\frac{F}{1{,}8\cdot 10^{-6}\ \text{N}} = \frac{k_e \dfrac{q_1 q_2}{(8{,}0\ \text{cm})^2}}{k_e \dfrac{q_1 q_2}{(5{,}0\ \text{cm})^2}} = \frac{5{,}0^2}{8{,}0^2} \quad\Rightarrow\quad F = 1{,}8\cdot 10^{-6}\ \text{N}\cdot\frac{5{,}0^2}{8{,}0^2} = \underline{\underline{7{,}0\cdot 10^{-7}\ \text{N}}}$$

b Ladningene må ha motsatt fortegn.

5.2

a $s = vt \quad\Rightarrow\quad t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{1{,}0\cdot 10^{-10}\ \text{m}}{1{,}5\cdot 10^{7}\ \text{m/s}} = 6{,}667\cdot 10^{-18}\ \text{s} = \underline{\underline{6{,}7\cdot 10^{-18}\ \text{s}}}$

b Siden farten er så stor, må vi regne ut ny posisjon, fart og akselerasjon for svært små tidsendringer.

c Vi bruker koden fra eksempelet, men endrer kriteriet for når while-løkka skal stanse (linje 15), og forandrer teksten i utskriften (linje 21). Programmet ser nå slik ut:

```
# Konstanter
m = 6.64e-27                # massen av alfapartikkelen, kg
q1 = 3.20e-19               # ladningen til alfapartikkelen, C
q2 = 1.26e-17               # ladningen til gullkjernen, C
k = 8.99e9                  # konstant i Coloumbs lov, Nm^2/C^2

# Startverdier
r = -1.0e-10                # startavstand fra kjernen, m
v = 1.5e7                   # startfart, m/s
t = 0                       # starttid, s

# Simulering av bevegelsen
dt = 1.0e-22                # tidssteg, s

while v > 0.99*1.5e7:       # gjenta til v = 0,99 av startfart
    a = -k*q1*q2/(m*r**2)   # beregning av akselerasjon, m/s^2
    v = v + a*dt            # beregning av ny fart, m/s
    r = r + v*dt            # beregning av nye posisjon, m
    t = t + dt              # beregning av ny tid, s

print("Avstanden er", r, "m når farten er 99 % av startfarten.")
```

Når programmet kjører, skriver det ut: `Avstanden er -2.3783335244080182e-12 m når farten er 99 % av startfarten.`

d Vi endrer while-løkken og print-kommandoen i programmet:

```
while r < -5.0e-12:         # gjenta til avstanden er 5e-12 m
    a = -k*q1*q2/(m*r**2)   # beregning av akselerasjon, m/s^2
    v = v + a*dt            # beregning av ny fart, m/s
    r = r + v*dt            # beregning av nye posisjon, m
```

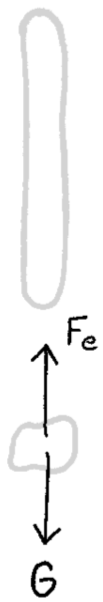
```
    t = t + dt              # beregning av ny tid, s

print("Farten er", v, "m/s når avstanden er 5e-12 m.")
```

Når programmet kjører, skriver det ut:
`Farten er 14930692.790190557 m/s når avstanden er 5e-12 m.`

e I oppgave d så vi at farten ikke reduseres mye fra i begynnelsen av bevegelsen. Vi kan derfor velge å starte simuleringen ved en kortere avstand dersom det er greit med et mindre nøyaktig svar, og dersom vi ønsker at simuleringen skal gå raskere.

5.3

a Det virker en tyngdekraft og en elektrisk kraft på støvkornet. Ifølge Newtons første lov, må disse være like store når støvkornet svever i ro.



$$F_e = G = mg = 0{,}050 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 4{,}9050 \cdot 10^{-4}\ \text{N} = \underline{\underline{4{,}9\ \text{N}}}$$

b $F_e = qE \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{F_e}{q} = \dfrac{4{,}9050 \cdot 10^{-4}\ \text{N}}{1{,}0 \cdot 10^{-12}\ \text{C}} = \underline{\underline{4{,}9 \cdot 10^8\ \text{N/C}}} = \underline{\underline{0{,}49\ \text{GN/C}}}$

5.4

Vi er på er grensen til å måtte bruke relativitetsteori, men siden svaret bare har to gjeldende sifre velger vi her å regne klassisk.

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \quad \Rightarrow \quad U = \frac{mv^2}{2e} = \frac{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(0{,}10 \cdot 3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = \underline{\underline{2{,}6 \cdot 10^3\ \text{V}}} = \underline{\underline{2{,}6\ \text{kV}}}$$

5.5

a $E = \dfrac{U}{d} = \dfrac{3{,}0 \cdot 10^3\ \text{V}}{0{,}10\ \text{m}} = \underline{\underline{3{,}0 \cdot 10^4\ \text{V/m}}} = \underline{\underline{30\ \text{kV/m}}}$ loddrett oppover.

b Fra Newtons første lov vet vi at tyngden til kula må være $G = 4{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{N}$. Da er
$G + F_e = S \quad \Rightarrow \quad F_e = S - G = 4{,}9 \cdot 10^{-2}\ \text{N} - 4{,}3 \cdot 10^{-2}\ \text{N} = \underline{\underline{0{,}6 \cdot 10^{-2}\ \text{N}}} = \underline{\underline{6{,}0\ \text{mN}}}$.
Siden snordraget blir større når spenningen settes på, må den elektriske kraften virke nedover.

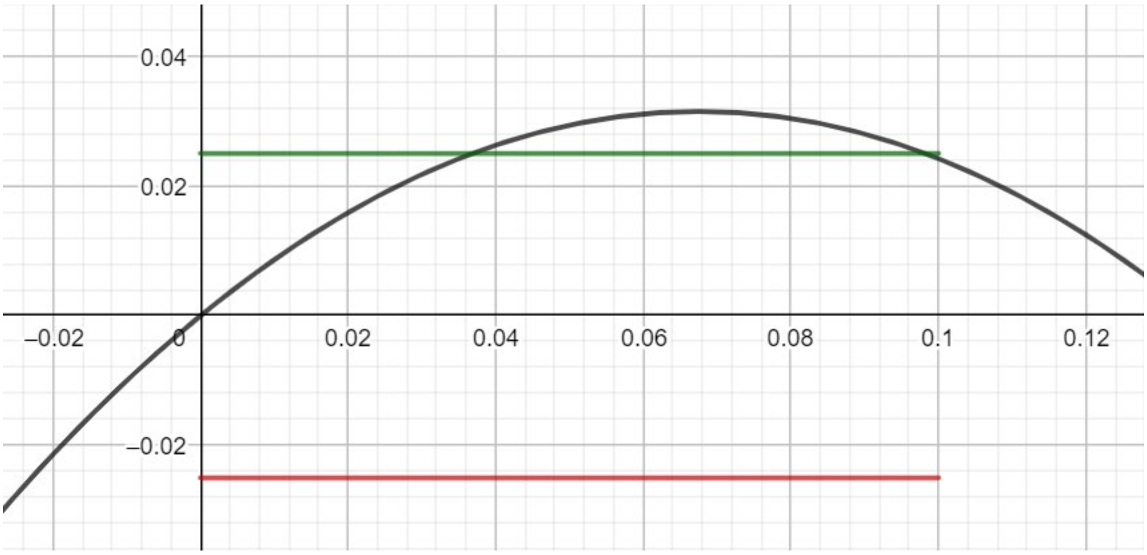
c Kula trekkes mot den positive plata, og må derfor være negativt ladd.

d $F_e = qE \quad \Rightarrow \quad q = \frac{F_e}{E} = \frac{6{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{N}}{3{,}0\cdot 10^{4}\ \text{V/m}} = \underline{\underline{2{,}0\cdot 10^{7}\ \text{C}}} = \underline{\underline{0{,}20\ \mu\text{C}}}$

e Ladningen til kula er langt større enn ladningen til et elektron.

5.6

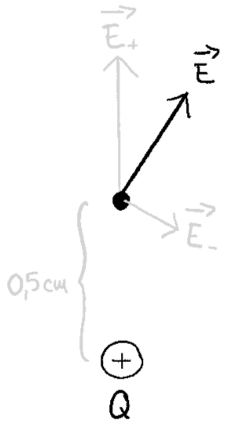
Vi bruker geogebra til å tegne grafen. Vi bruker samme formel som i eksempelet, men bruker massen og ladningen til en α-partikkel (He4-kjerne).



Vi ser at partikkelen nå kolliderer med den øverste platen.

5.7

a Vi tegner en figur som viser situasjonen:



b Punktet ligger nærmere den både den positive og negative polen. Selv om bidraget fra den negative polen vil redusere feltet i y-retning noe, vil feltet fremdeles være sterkere enn det var lengre ute. For å forsvare denne påstanden kan vi se på figuren på s. 229, der det er tydelig at feltlinjene ligger mindre tett jo lengre punktet er fra den positive polen, eller vi kan bruke trigonometri til å regne ut verdien til feltet.

c Feltet fra den positive ladningen er blitt fire ganger større. Feltet fra den negative ladningen har ikke økt like mye, og vinkelen med $\vec{E}_+$ er i tillegg blitt større. $\vec{E}$ er derfor dreid oppover mot loddlinjen slik at vinkelen θ mellom $\vec{E}$ og loddlinjen er derfor blitt mindre.

5.8

Bidragene i y-retning kansellerer hverandre. Bidragene i x-retning er like store. Hvis vi lar ϕ være vinkelen mellom linja som forbinder ladningene med hverandre, og linja som forbinder en av ladningene med punktet P, har vi at

$$E = 2E_x = 2E \cdot \cos\phi = 2 \cdot k_e \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \frac{0{,}05}{r} = 0{,}10 \cdot k_e \cdot \frac{q}{r^3}$$

$$= 2 \cdot 8{,}99 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{2{,}00 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{\left((0{,}05\ \text{m})^2 + (0{,}10\ \text{m})^2\right)^{3/2}} = \underline{\underline{1{,}29 \cdot 10^3\ \text{N/C}}} = \underline{\underline{1{,}29\ \text{kN/C}}}$$

Siden feltet rundt en positiv ladning peker utover og feltet rundt en negativ ladning peker innover, ser vi fra figuren at det elektriske feltet i P må ha retning rett mot høyre.

Merk: Benevningene N/C og V/m er ekvivalente.

5.9

Vi skifter ut verdiene i programmet i eksempelet med verdiene fra eksempel 7 (**`P = array([-0.05, 0.1])`**). Legg merke til at programmet i eksempel 8 regner ut vinkelen mellom feltet og x-retningen, mens man i eksempel 7 fant vinkelen mellom feltet og y-retningen. Vi har her valgt å legge inn noen linjer til slutt i programmet slik at det også skriver ut riktig vinkel i grader.

```python
from pylab import *

# Konstanter
q1 = 2.0e-9                     # ladning til kule 1, C
p1 = array([-0.05, 0])          # posisjon til kule 1, m
q2 = -2.0e-9                    # ladning til kule 2, C
p2 = array([0.05, 0])           # posisjon til kule 2, m
k = 8.99e9                      # konstanten i Coulombs lov

# Funksjon som beregner det elektriske feltet i posisjonen r
def E_felt(r):
    r1 = r - p1                 # vektor fra P1 til r
    e_r1 = r1/norm(r1)          # enhetsvektor ut fra P1
    E1 = k*q1/norm(r1)**2*e_r1  # elektrisk felt fra kule 1
    r2 = r - p2                 # vektor fra P2 til R
    e_r2 = r2/norm(r2)          # enhetsvektor ut fra P1
    E2 = k*q2/norm(r2)**2*e_r2  # elektrisk felt fra kule 2
    E = E1 + E2                 # summerer feltene fra kulene
    return E                    # returnerer det samlede feltet

# Beregning
P = array([-0.05, 0.1])         # punktet der vi beregner feltet
E = E_felt(P)                   # beregning av felt

# Vi skriver ut resultatet
print("Det elektriske feltet i punktet", P, "er", E, ".")
print("Det har en absoluttverdi på", norm(E), "V/m.")
```

```
print("Vinkelen mellom feltretningen og x-aksen er", arctan(E[1]/E[0]),
"radianer.")

# Vi beregner vinkelen mellom feltet og y-aksen i grader
vinkel_eks_7 = 90-arctan(E[1]/E[0])*360/(2*pi)
print("Vinkelen mellom feltretningen og y-aksen (målt i grader) er: ",
vinkel_eks_7, "grader.")
```

Når programmet kjører, skriver det ut at: **`Vinkelen mellom feltretningen og y-aksen (målt i grader) er:  28.67505006310475 grader.`**
Vi ser at programmet gir samme resultat som vi så i eksempelet.

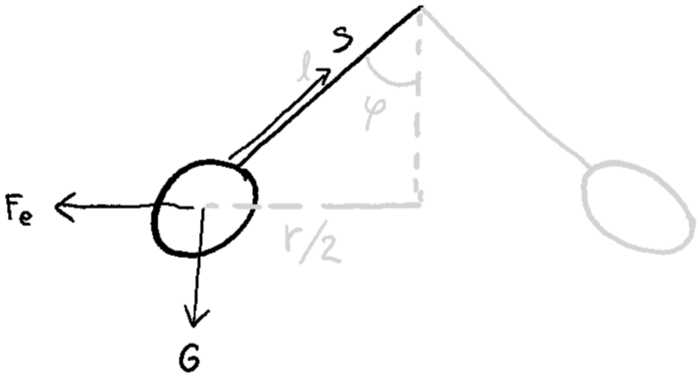
5.10

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = k_e \frac{e^2}{r^2} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{\left(1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)^2}{\left(2{,}0 \cdot 10^{-8}\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{5{,}8 \cdot 10^{-13}\ \text{N}}}$$

Siden protonene har samme ladning, har kraften retning bort fra det andre protonet.

5.11

I utregningen bruker vi verdien $q = 1{,}0 \cdot 10^{-7}\ \text{C}$ for ladningen til ballongene.



Vi velger å først finne et uttrykk for avstanden r mellom de to ballongene.

Fra figuren ser vi at $\sin\phi = \dfrac{r/2}{l} = \dfrac{r}{2l} \quad \Rightarrow \quad r = 2l\sin\phi$

Vi ser også at $\tan\phi = \dfrac{F_e}{G} = \dfrac{k_e \dfrac{q^2}{r^2}}{mg} = \dfrac{k_e q^2}{mgr^2}$

Vi setter inn uttrykket vi fant for avstanden r: $\tan\phi = \dfrac{k_e q^2}{mg(2l\sin\phi)^2}$.

Vi bruker f.eks. CAS og løser for vinkelen ϕ. Da finner vi at $\phi = \underline{\underline{8{,}8^\circ}}$.

5.12

a Når kule har like stor ladning:

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = k_e \frac{q^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{F_e}{k_e}} \cdot r = \sqrt{\frac{1{,}5\ \text{N}}{8{,}99 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2}} \cdot 0{,}25\ \text{m} = \underline{\underline{3{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}} = \underline{\underline{3{,}2\ \mu\text{C}}}$$

b Når den éne kula har dobbelt så stor ladning som den andre:

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = k_e \frac{q \cdot 2q}{r^2} = 2k_e \frac{q^2}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad q = \sqrt{\frac{F_e}{2k_e}} \cdot r = \sqrt{\frac{1{,}5\ \text{N}}{2 \cdot 8{,}99 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2}} \cdot 0{,}25\ \text{m} = \underline{\underline{2{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}} = \underline{\underline{2{,}3\ \mu\text{C}}}$$

5.13

I. Påstanden er riktig. De elektriske kreftene er like store på de to kulene. Da må tyngdekraften på kule A være større enn på kule B for at vinkelen med loddlinja skal kunne være større for kule B.

II. Påstanden er riktig. De to kulene tiltrekker hverandre, og må derfor ha motsatt fortegn.

III. Påstanden er gal. De elektriske kreftene er like store. Vi vet dette fra Newtons tredje lov, eller fra formelen for elektriske krefter.

IV. Det er umulig å avgjøre.

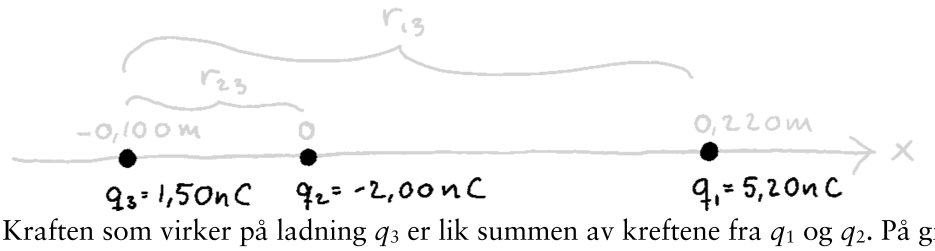
5.14

Vi ser på forholdstallet mellom de to kreftene: $\dfrac{F_e}{G} = \dfrac{k_e \dfrac{e^2}{r^2}}{\gamma \dfrac{m_p m_e}{r^2}} = \dfrac{k_e e^2}{\gamma m_p m_e} \neq 1$.

Vi ser at avstanden mellom protonet og elektronet kansellerer ut av likningen. Forholdstallet mellom de to kreftene, vil alltid være like stor, og ulik 1. De to kreftene kan altså aldri bli like store.

5.15

a Vi tegner en figur som viser situasjonen:



Kraften som virker på ladning q_3 er lik summen av kreftene fra q_1 og q_2. På grunn av fortegnene, virker kraften mellom q_3 og q_2 tiltrekkende, og kraften mellom q_3 og q_1 frastøtende. Vi har da:

$$F = F_1 + F_2 = k_e \frac{|q_2||q_3|}{r_{23}^2} - k_e \frac{|q_1||q_3|}{r_{13}^2} = k_e |q_3| \cdot \left(\frac{|q_2|}{r_{23}^2} - \frac{|q_1|}{r_{13}^2} \right)$$

$$= 8{,}99 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2 \cdot 1{,}50 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot \left(\frac{2{,}00 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{(0{,}100\ \text{m})^2} - \frac{5{,}20 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{(0{,}100\ \text{m} + 0{,}220\ \text{m})^2} \right)$$

$$= \underline{\underline{2{,}0 \cdot 10^{-6}\ \text{N}}} = \underline{\underline{2{,}0\ \mu\text{N}}}$$

b Dersom q_3 befinner seg mellom q_1 og q_2, vil kreftene peke i samme retning, og kraftsummen kan aldri bli lik null. Siden $|q_2|<|q_1|$, må q_3 ligge til venstre for q_2 som før:

Vi lar x_1 være x-koordinaten til q_1. Hvis kreftene fra q_1 og q_2 skal være like store, må vi ha:

$$F_1 = F_2 \quad \Rightarrow \quad k_e\frac{|q_2||q_3|}{r_{23}^2} = k_e\frac{|q_1||q_3|}{r_{13}^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{|q_2|}{r_{23}^2} = \frac{|q_1|}{r_{13}^2} \quad \Rightarrow \quad r_{13} = \sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}}\cdot r_{23}$$

Vi bruker at $r_{13} = r_{23} + x_1$. Da har vi

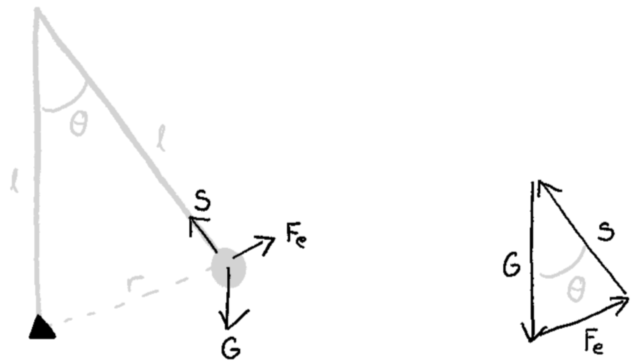
$$r_{23} + x_3 = \sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}}\cdot r_{23}$$

$$\Rightarrow \quad x_3 = \sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}}\cdot r_{23} - r_{23} = \left(\sqrt{\frac{|q_1|}{|q_2|}} - 1\right)\cdot r_{23} = \left(\sqrt{\frac{5,20}{2,00}} - 1\right)\cdot 0,100\ \text{m} = \underline{\underline{0,0612\ \text{m}}}$$

Obs: Feil i fasit i denne oppgaven (1. opplag).

5.16

Vi tegner en figur som viser situasjonen. Siden loddet har mye større masse enn ballongen, kan vi anta at snora loddet henger i henger loddrett. Siden ballongen henger i ro er kraftsummen på denne lik null.



Vi velger å løse oppgaven geometrisk. Siden tyngdekraften virker loddrett nedover, og den elektriske kraften virker langs linja mellom loddet og ballongen, har vi to formlike trekanter. Vi velger å regne uten benevning. Da er lengden på snora $l = 1$, og vi kan skrive:

$$\frac{l}{r} = \frac{mg}{F_e} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{mg}{F_e} \quad \Rightarrow \quad \frac{F_e}{r} = mg \quad \Rightarrow \quad k_e\frac{q_1q_2}{r^3} = mg\,.$$

Når vi løser for r, finner vi

$$r = \left(k_e\frac{q_1q_2}{mg}\right)^{1/3} = \left(8,99\cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2 \cdot \frac{1,10\cdot 10^{-14}\ \text{C}^2}{2,5\cdot 10^{-3}\ \text{kg}\cdot 9,81\ \text{m/s}^2}\right)^{1/3} = 0,1542\ \text{m}\,.$$

Vi bruker cosinussetningen til å finne et uttrykk for r som funksjon av vinkelen θ, og finner vinkelen.

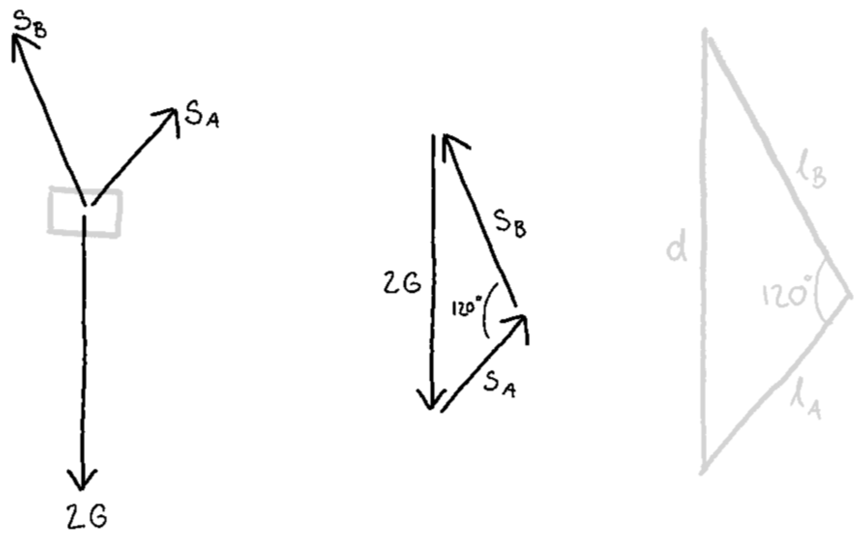
$$r = \sqrt{1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos\theta} = \sqrt{2 - 2\cos\theta} \quad \Rightarrow \quad 2\cos\theta = 2 - r^2$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{2 - r^2}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2 - (0{,}1592\ \text{m})^2}{2}\right) = \underline{\underline{8{,}8^\circ}}$$

5.17

Oppgaven kan løses ved å dekomponere krefter og finne vinkler, men vi velger her å bruke en rent geometrisk løsningsmetode som bygger på cosinussetningen, formlikhet og det faktum at om en vektorsum er lik null, så danner vektorene sidekantene i en lukket figur.

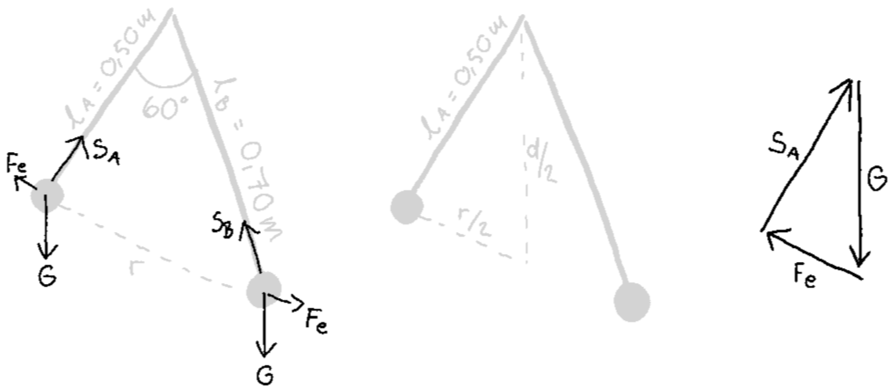
Vi velger til å begynne med å se på begge kule som ett system, og tegner de ytre kreftene. Siden summen av kreftene må være lik null, danner kreftene en lukket trekant som er formlik med trekanten til høyre:



Vi bruker cosinussetningen til å finne avstanden d:

$$d = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}7^2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot \cos 120^\circ} = 1{,}0440$$

Vi ser så på kreftene på kule A (vi kunne like gjerne valgt kule B).



Vi bruker cosinussetningen på figuren til venstre til å finne r:

$$r = \sqrt{l_A^2 + l_B^2 - 2 l_A l_B \cos\phi} = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}7^2 - 2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}7 \cdot \cos 60^\circ} = 0{,}6245$$

Siden både tyngdekraften og den elektriske kraften er like store på hver kule vet vi at to av sidene i trekanten i den midterste figuren er $r/2$ og $d/2$. Denne trekanten er formlik med trekanten som dannes av kreftene på kula. Vi har da

$$\frac{F_e}{G} = \frac{r/2}{d/2} = \frac{r}{d} \quad \Rightarrow \quad F_e = \frac{Gr}{d} \quad \Rightarrow \quad k_e \frac{q^2}{r^2} = \frac{mgr}{d}$$

Når vi løser for ladningen, får vi at:

$$q = \sqrt{\frac{mgr^3}{k_e d}} = \sqrt{\frac{5{,}0\cdot 10^{-3}\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot (0{,}6245\ \text{m})^3}{8{,}99\cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2\cdot 1{,}0440\ \text{m}}} = \underline{\underline{1{,}13\cdot 10^{-6}\ \text{C}}} = \underline{\underline{1{,}13\ \mu\text{C}}}$$

5.18

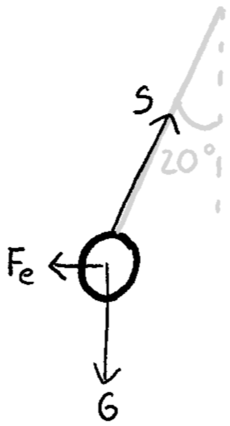
a $F_e = qE \quad \Rightarrow \quad E = \frac{F_e}{q} = \frac{F_e}{e} = \frac{8{,}8\cdot 10^{-16}\ \text{N}}{1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{C}} = \underline{\underline{5{,}5\cdot 10^3\ \text{N/C}}} = \underline{\underline{5{,}5\ \text{kN/C}}}$

Siden elektronet er negativt ladd, har det elektriske feltet motsatt retning av kraften. Det elektriske feltet har derfor retning rett oppover.

b Siden protonet har like stor ladning som elektronet, blir den elektriske kraften like stor, $F_e = 8{,}8\cdot 10^{-16}\ \text{N}$. Siden det er positivt ladd, virker kraften i samme retning som det elektriske feltet, altså rett oppover.

5.19

a Det virker en tyngdekraft, en elektrisk kraft og en snorkraft på kula.



b $G = mg = 10\cdot 10^{-3}\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = 9{,}81\cdot 10^{-2}\ \text{N} = \underline{\underline{9{,}8\cdot 10^{-2}\ \text{N}}} = \underline{\underline{98\ \text{mN}}}$

$$\frac{G}{S} = \cos 20^\circ \quad \Rightarrow \quad S = \frac{G}{\cos 20^\circ} = \frac{9{,}81\cdot 10^{-2}\ \text{N}}{\cos 20^\circ} = 0{,}1044\ \text{N} = \underline{\underline{0{,}10\ \text{N}}}$$

$$F_e = \sqrt{S^2 - G^2} = \sqrt{(0{,}1044\ \text{N})^2 - (9{,}81\cdot 10^{-2}\ \text{N})^2} = 3{,}571\cdot 10^{-2}\ \text{N} = \underline{\underline{3{,}6\cdot 10^{-2}\ \text{N}}} = \underline{\underline{36\ \text{mN}}}$$

c $F_e = qE \quad \Rightarrow \quad E = \frac{F_e}{q} = \frac{3{,}571\cdot 10^{-2}\ \text{N}}{-2{,}0\cdot 10^{-7}\ \text{C}} = -1{,}8\cdot 10^5\ \text{N/C} = -0{,}18\ \text{MN/C}$

Størrelsen på feltet er 0,18 MN/C. Fortegnet forteller oss at det har motsatt retning av den elektriske kraften.

5.20

Hvis elektronet blir akselerert fra ro, er $E_k = eU = 1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 2{,}0\cdot 10^3\ \text{V} = \underline{\underline{3{,}2\cdot 10^{-16}\ \text{J}}}$

5.21

a $E_k = 1{,}0\ \text{keV} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = 1{,}0\ \text{kV} \cdot e$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}0\ \text{kV} \cdot e}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^3\ \text{V} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} = \underline{\underline{4{,}4 \cdot 10^5\ \text{m/s}}}$$

b Vi bruker samme formel som vi fant i oppgave a, og setter inn tall for elektronmassen:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}0\ \text{kV} \cdot e}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}0 \cdot 10^3\ \text{V} \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = \underline{\underline{1{,}9 \cdot 10^7\ \text{m/s}}}$$

5.22

a Vi tar utgangspunkt i den tidløse formelen. Vi ser bort fra andre krefter enn de elektriske, og bruker sammenhengen mellom elektriske krefter og elektriske felt, $F_e = qE$. Da har vi:

$$v^2 = 2as = 2 \cdot \frac{F_e}{m} \cdot s = 2 \cdot \frac{qE}{m} \cdot s$$

$$\Rightarrow \quad E = \frac{mv^2}{2qs} = \frac{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(3{,}0 \cdot 10^7\ \text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}01\ \text{m}} = \underline{\underline{2{,}6 \cdot 10^5\ \text{V/m}}} = \underline{\underline{0{,}26\ \text{MV/m}}}$$

b Vi bruker posisjonsformel 1. Siden startfarten er lik null, blir denne

$$s = \frac{1}{2}vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2s}{v} = \frac{2 \cdot 0{,}010\ \text{m}}{3{,}0 \cdot 10^7\ \text{m/s}} = \underline{\underline{6{,}7 \cdot 10^{-10}\ \text{s}}} = \underline{\underline{0{,}67\ \text{ns}}}$$

5.23

a Sammenhengen mellom spenning, kinetisk energi og fart finner vi ved å sette:

$$W = qU \quad \Rightarrow \quad \Delta E_k = E_k - E_{k0} = qU \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = qU$$

Når startfarten er lik null, er $E_{k0} = 0$, og vi har:

$$E_k = qU = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 250\ \text{V} = \underline{\underline{4{,}0 \cdot 10^{-17}\ \text{J}}}$$

Vi finner sluttfarten:

$$\frac{1}{2}mv^2 = qU \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 250\ \text{V}}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 9{,}4 \cdot 10^6\ \text{m/s}$$

b Vi bruker sammenhengen fra oppgave a til å finne den nye kinetiske energien:

$$E_k = qU + E_{k0} = qU + \frac{1}{2}mv_0^2 = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 250\ \text{V} + \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$= 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 250\ \text{V} + \frac{1}{2} \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(5{,}0 \cdot 10^6\ \text{m/s}\right)^2$$

$$= 5{,}1387 \cdot 10^{-17}\ \text{J}$$

$$= \underline{\underline{5{,}1 \cdot 10^{-17}\ \text{J}}}$$

Vi finner den nye farten ved å bruke svaret vi fant for kinetisk energi

$$\frac{1}{2}mv^2 = E_k \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2E_k}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}1387 \cdot 10^{-17}\ \text{J}}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = \underline{\underline{1{,}1 \cdot 10^7\ \text{m/s}}}$$

5.24

a Resultantresistansen i kretsen er $R = R_1 + R_2 = 5{,}0\ \Omega + 2{,}5\ \Omega = 7{,}5\ \Omega$.

Strømmen i kretsen er da $I = \dfrac{U}{R} = \dfrac{15\ \text{V}}{7{,}5\ \Omega} = 2{,}0\ \text{A}$.

Vi får da spenningen $U_1 = R_1 \cdot I = 5{,}0\ \Omega \cdot 2{,}0\ \text{A} = 10\ \text{V}$ over motstand R_1

b $W = qU = 1{,}0\ \text{C} \cdot 10\ \text{V} = \underline{\underline{10\ \text{J}}}$

c $E = \dfrac{U}{d} = \dfrac{10\ \text{V}}{2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = \underline{\underline{500\ \text{V/m}}}$

d Ifølge Kirschhoffs 2. lov, er $U = U_1 + U_2 \quad \Rightarrow \quad U_2 = U - U_1 = 15\ \text{V} - 10\ \text{V} = 5\ \text{V}$. Da er det elektriske feltet i motstanden R_2 i gjennomsnitt $E = \dfrac{U}{d} = \dfrac{5\ \text{V}}{2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = \underline{\underline{250\ \text{V/m}}}$

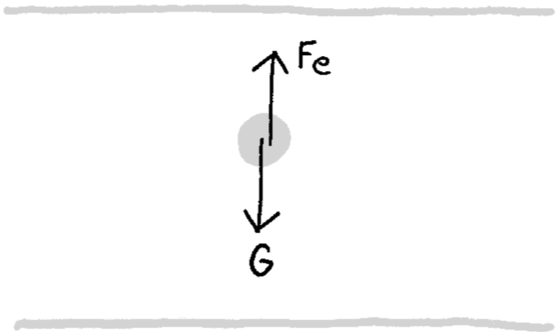
e Siden ledningene har langt lavere resistans enn mostandene, vil spenningsfallet gjennom ledningene være svært lite, og vi kan i praksis si at det elektriske feltet er lik null.

f $F_e = qE = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 250\ \text{N/C} = \underline{\underline{4{,}0 \cdot 10^{-17}\ \text{N}}}$

g Elektronene mister potensiell energi. Energien blir omgjort til termisk energi i motstandene, og den kinetiske energien til elektronene øker ikke.

5.25

a Det virker en tyngdekraft og en elektrisk kraft på oljedråpen.



b Når oljedråpen henger i ro, er summen av kreftene lik null. Vi har da:

$$F_e = G \quad \Rightarrow \quad qE = mg \quad \Rightarrow \quad \frac{qU}{d} = mg$$

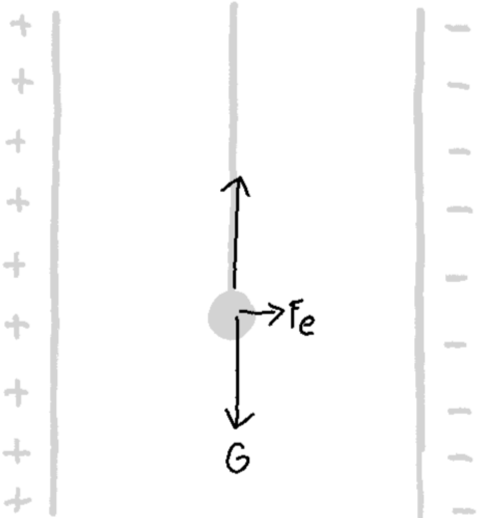
$$\Rightarrow \quad q = \frac{dmg}{U} = \frac{0{,}012\ \text{m} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-13}\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{16 \cdot 10^3\ \text{V}} = \underline{\underline{1{,}6 \cdot 10^{-18}\ \text{C}}}$$

Siden vi ikke vet noe om hvilken plate som er positiv og negativ, vet vi ikke om oljedråpen er positivt eller negativt ladd.

5.26

a $F_e = qE = \dfrac{qU}{d} = \dfrac{1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 1000\ \text{V}}{0{,}10\ \text{m}} = \underline{\underline{1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{N}}} = \underline{\underline{15\ \text{mN}}}$

b Før spenningen skrus på, er snordraget og tyngden like store, og kula henger i ro.



Rett etter at vi har satt på spenningen, er kraftsummen lik den elektriske kraften:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad F_e = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F_e}{m}.$$

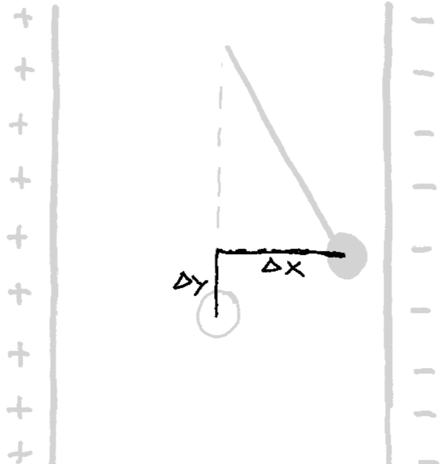
Vi vet at $G = mg \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{G}{g}$.

Siden snordraget før spenningen settes på og tyngden er like store, er $G = S = 0{,}17\ \text{N}$. Når vi setter inn tall, får vi da Dette gir så vi har at

$$a = \frac{gF_e}{G} = \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{N}}{0{,}17\ \text{N}} = 0{,}8656\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{0{,}87\ \text{m/s}^2}}$$

c $W = F \cdot s = 1{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{N} \cdot 0{,}010\ \text{m} = \underline{\underline{1{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{J}}} = \underline{\underline{0{,}15\ \text{mJ}}}$

d Vi kan for eksempel vise dette ved å se på arbeidet kreftene hadde gjort dersom kula kom nær den negative plata. Kula starter i ro, og vil ha en kinetisk energi lik null når den er nærmest den elektriske plata. Da er også summen av arbeidet som er gjort på kula lik null.



Den elektriske kraften gjør et positivt arbeid: $W_e = F_e \Delta x = qE\Delta x = \dfrac{qU}{d}\Delta x$, og tyngdekraften gjør et negativt arbeid: $W_g = G\Delta y = G \cdot \left(l - \sqrt{l^2 - \Delta x^2}\right)$.

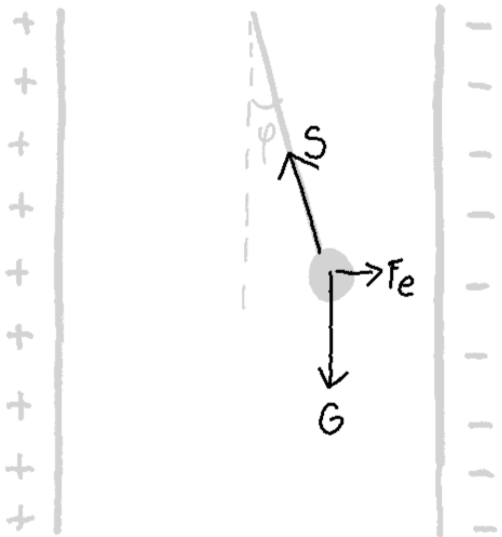
Vi velger å bruke CAS til å løse likningen $W_e = W_g$:

1	$q := 1.5 \cdot 10^{-6}$ $\rightarrow\ \mathbf{q := \frac{3}{2000000}}$
2	$G := 0.17$ $\rightarrow\ \mathbf{G := \frac{17}{100}}$
3	$l := 0.2$ $\rightarrow\ \mathbf{l := \frac{1}{5}}$
4	$d := 0.1$ $\rightarrow\ \mathbf{d := \frac{1}{10}}$
5	$U := 1000$ $\rightarrow\ \mathbf{U := 1000}$

6	$W_e := \frac{q\,U}{d}\,x$ $\rightarrow\ \mathbf{W_e := \frac{3}{200}\,x}$
7	$W_g := G\left(l - \sqrt{l^2 - x^2}\right)$ $\rightarrow\ \mathbf{W_g := \frac{1}{500}\left(-17\sqrt{-25\,x^2+1}+17\right)}$
8	$W_e = W_g$ $\rightarrow\ \mathbf{\frac{3}{200}\,x = \frac{1}{500}\left(-17\sqrt{-25\,x^2+1}+17\right)}$
9	Løs($8) $\approx\ \mathbf{\{x = 0, x = 0.04\}}$

Vi ser at arbeidet er null på starten og etter 4 cm. Siden kula må bevege seg 5 cm for å nå fram til den negative plata, vil den ikke treffe den.

e Vi tegner en figur som viser kreftene på kula som henger i ro:



Når kula blir hengene i ro, er kraftsummen både i x- og y-retning lik null. Vi har da at $S_x = F_e$ og $S_y = G$.

Da er $\tan\phi = \dfrac{S_x}{S_y} = \dfrac{F_e}{G} \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{F_e}{G}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1{,}5\cdot 10^{-2}\ \text{N}}{0{,}17\ \text{N}}\right) = \underline{\underline{5{,}0^\circ}}$

5.27

Newtons andre lov gjelder for hver romlig dimensjon, slik at $\Sigma F_x = ma_x$. Hvis kraftsummen i x-retning er lik null, må også akselerasjonen i x-retning være lik null, og farten er konstant.

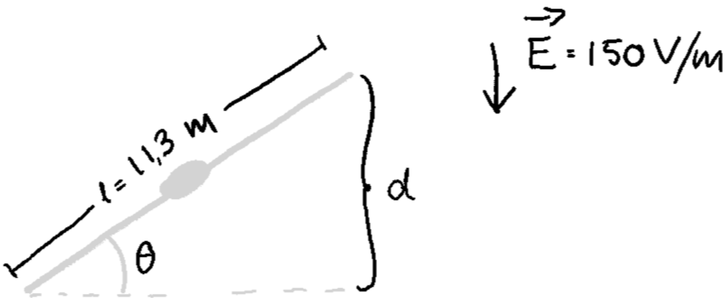
5.28

Når kula står stille, er summen av kreftene lik null. Da er

$$G = F_e \quad \Rightarrow \quad mg = eE \quad \Rightarrow \quad m = \frac{eE}{g} = \frac{1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 1{,}2\cdot 10^{3}\ \text{V/m}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = \underline{\underline{2{,}0\cdot 10^{-17}\ \text{kg}}}$$

5.29

Vi tegner en figur som viser situasjonen:



Nå er $E = \dfrac{U}{d} = \dfrac{U}{l\cdot\sin\phi} \quad \Rightarrow \quad \theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{U}{lE}\right) = \sin^{-1}\left(\dfrac{1{,}10\cdot 10^{3}\ \text{V}}{11{,}3\ \text{m}\cdot 150\ \text{V/m}}\right) = \underline{\underline{40{,}5^\circ}}$

5.30

a Arbeidet som gjøres er lik ladning ganget med spenning. Vi har da:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU_\text{k}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eU_\text{k}}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 2{,}0\cdot 10^{3}\ \text{V}}{9{,}1094\cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 2{,}6506\cdot 10^{7}\ \text{m/s} = \underline{\underline{2{,}7\cdot 10^{7}\ \text{m/s}}}$$

b Det elektriske feltet påvirker ikke farten i x-retning. Siden farten er konstant, er

$$x = v_x t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_x} = \frac{0{,}10\ \text{m}}{2{,}6506\cdot 10^{7}\ \text{m/s}} = 3{,}7727\cdot 10^{-9}\ \text{s} = \underline{\underline{3{,}8\cdot 10^{-9}\ \text{s}}} = \underline{\underline{3{,}8\ \text{ns}}}$$

c Vi bruker at $F_e = eE$ og Newtons andre lov til å finne akselerasjonen i y-retning:

$$F_e = eE = \frac{eU_\text{p}}{d} \quad \Rightarrow \quad ma = \frac{eU_\text{p}}{d}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{eU}{dm} = \frac{1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 500\ \text{V}}{4{,}0\cdot 10^{-2}\ \text{m}\cdot 9{,}1094\cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = \underline{\underline{2{,}2\cdot 10^{15}\ \text{m/s}^2}}$$

d Fra oppgave a og b får vi $x = v_x t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{x}{v_x} = \dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{2eU_\text{k}}{m}}} = \sqrt{\dfrac{m}{2eU_\text{k}}}\cdot x$.

Posisjonen i y-retning, er $y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a \cdot \left(\sqrt{\frac{m}{2eU_\mathrm{k}}} \cdot x\right)^2 = \frac{ma}{4eU_\mathrm{k}}x^2$.

Vi bruker at $ma = \frac{eU_\mathrm{p}}{d}$, og får $y = \frac{ma}{4eU_\mathrm{k}}x^2 = \frac{\left(\frac{eU_\mathrm{p}}{d}\right)}{4eU_\mathrm{k}}x^2 = \frac{eU_\mathrm{p}}{4edU_\mathrm{k}}x^2 = \frac{U_\mathrm{p}}{4dU_\mathrm{k}}x^2$.

5.31

a Vi finner tiden det tar for elektronet å komme forbi platene:

$$x = v_0 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0} = \frac{0{,}100\ \mathrm{m}}{1{,}00 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s}} = 1{,}00 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}$$

Vi finner et uttrykk for akselerasjonen: $\Sigma F = F_e = \frac{eU}{d} \quad \Rightarrow \quad ma = \frac{eU}{d} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{eU}{dm}$

Vi antar at elektronet kommer inn midt mellom platene. Avstanden mellom platene er *d*, så elektronet må seinest være kommet ut når $y = d/2$.

$$y = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{eU}{dm} \cdot t^2$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{2dmy}{et^2} = \frac{2 \cdot 0{,}0200\ \mathrm{m} \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg} \cdot 0{,}0100\ \mathrm{m}}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot \left(1{,}00 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}\right)^2} = 22{,}7735\ \mathrm{V} = \underline{\underline{22{,}8\ \mathrm{V}}}$$

b Farten i *x*-retning er konstant, og elektronet får i tillegg en fart i *y*-retning.

c Vi velger å bruke posisjonsformel 1 til å finne sluttfarten i y-retning. Vi har da

$$y = \frac{1}{2}\left(v_{0y} + v_y\right)t = \frac{1}{2}v_y t \quad \Rightarrow \quad v_y = \frac{2y}{t} = \frac{2 \cdot 0{,}0100\ \mathrm{m}}{1{,}00 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{s}} = 2{,}00 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s},$$

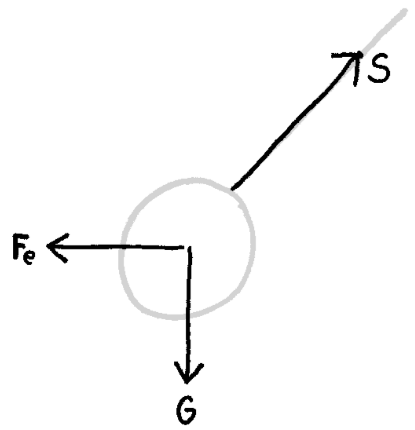
Absoluttverdien av farten er da

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(1{,}00 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s}\right)^2 + \left(2{,}00 \cdot 10^6\ \mathrm{m/s}\right)^2} = 1{,}0198 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s} = \underline{\underline{1{,}02 \cdot 10^7\ \mathrm{m/s}}}$$

Merk: Oppgaven kan også løses ved å bruke at $qU = \Delta E_k$.

5.32

a Det virker en tyngdekraft, en elektrisk kraft og en snorkraft på kula:



b $G = mg = 4{,}79 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = \underline{\underline{4{,}70 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N}}} = \underline{\underline{47{,}0\ \mathrm{mN}}}$ loddrett nedover

$F_e = qE = 2{,}00 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 2{,}35 \cdot 10^{4}\ \text{V/m} = \underline{\underline{4{,}70 \cdot 10^{-2}\ \text{N}}} = \underline{\underline{47{,}0\ \text{mN}}}$ vannrett, parallellt med det elektriske feltet

$S = \sqrt{G^2 + F_e^2} = \sqrt{2 \cdot \left(4{,}70 \cdot 10^{-2}\ \text{N}\right)^2} = \underline{\underline{6{,}65 \cdot 10^{-2}\ \text{N}}} = \underline{\underline{66{,}5\ \text{mN}}}$, danner en vinkel på med loddlinja siden den vannrette og loddrette komponenten er like store.

c Når snora ryker, vil kula være påvirket av tyngdekraften og den elektriske kraften. Siden disse er like store, vil kula få en rettlinjet bane 45,0° på skrå nedover, i motsatt retning av det snorkraften hadde.

5.33

a Siden elektronet starter fra ro, og spenningen mellom de to platene er større enn i elektronkanonen, vil elektronet stoppe opp og skifte retning før det kommer fram til plate B.

b Vi vet at $W = Uq = \Delta E_k$. Når elektronet starter fra ro, har vi:

$$E_k = eU \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv^2 = eU$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 190\ \text{V}}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 8{,}1697 \cdot 10^{6}\ \text{m/s} = \underline{\underline{8{,}17 \cdot 10^{-17}\ \text{m/s}}}$$

c $F_e = eE = \dfrac{eU}{d} = \dfrac{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 360\ \text{v}}{6{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = \underline{\underline{9{,}6 \cdot 10^{-16}\ \text{N}}}$. Siden elektronet er negativt ladd, har kraften retning mot plate A.

d Vi vet at $F_e \cdot s = \Delta E_k$. Vi vet også at $eU = E_k$, der U er spenningen i elektronkanonen. Da er

$$F_e \cdot s = eU \quad \Rightarrow \quad s = \frac{eU}{F_e} = \frac{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 190\ \text{V}}{9{,}6 \cdot 10^{-16}\ \text{N}} = 3{,}1667 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = \underline{\underline{3{,}2\ \text{cm}}}.$$

Siden kraften er konstant, er også akselerasjonen det, og vi kan bruke fartsformelen og Newtons andre lov til å finne tiden. Med positiv retning mot høyre, har vi:

$$v = v_0 + at = v_0 - \frac{F_e}{m} \cdot t = 0$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{mv_0}{F_e} = \frac{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 8{,}1697 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}}{9{,}6 \cdot 10^{-16}\ \text{N}} = \underline{\underline{7{,}8 \cdot 10^{-9}\ \text{s}}} = \underline{\underline{7{,}8\ \text{ns}}}$$

5.34

a Kraften mellom kulene må virke tiltrekkende dersom de skal bevege seg mot hverandre. Dette er bare tilfelle dersom kulenes ladning har motsatt fortegn.

b Vi må bruke bevegelseslikningene og Newtons andre lov. Vi må da kjenne kulenes masse og ladning, og avstanden mellom dem. Hvis ikke radius til kulene er svært mye mindre enn avstanden mellom dem, må vi også kjenne radius.

c Vi kan for eksempel ta utgangspunkt i programmet på s. 149 i boka, og gjøre de nødvendige endringene så det er den elektriske kraften som trekker kulene mot hverandre.

```
from pylab import *

# Konstanter (vi antar at radius til kulene er svært mye mindre enn avstanden
mellom dem)
k = 8.99e9                  # Coulomb-konstanten, Nm^2/kg^2
m1 = 1                      # masse til kule 1, kg
q1 = 1e-6                   # ladning til kule 1, C
r1 = 0                      # posisjon til kule 1, m
```

```
m2 = 1                       # masse til kule 2, kg
q2 = -1e-6                   # ladning til kule 2, C
r2 = 2                       # posisjon til kule 2, m

# Startbetingelser
v1 = 0                       # startfart til kule 1, m/s
v2 = 0                       # startfart til kule 2, m/s
r = r2 - r1                  # avstand mellom kulene
t = 0                        # starttid, s
dt = 0.001                   # tidssteg, s

# Funksjon som regner ut og returnerer akselerasjon
def a(m, r):
    F = -k*q1*q2/r**2        # elektrisk kraft
    aks = F/m                # akselerasjon
    return aks

# Løkke som gjør beregninger
while r >= 0:
    v1 = v1 + a(m1, r)*dt    # beregner ny fart for kule 1 (positiv retning)
    v2 = v2 - a(m2, r)*dt    # beregner ny fart for kule 2 (negativ retning)
    r1 = r1 + v1*dt          # beregner ny posisjon for kule 1
    r2 = r2 + v2*dt          # beregner ny posisjon for kule 2
    r = r2 - r1              # beregner ny avstand mellom kulene
    t = t + dt               # beregner ny tid
print("Det tar", t, "s før kulene treffer hverandre.")
```

I dette programmet har vi valgt å se på to kuler, hver med masse 1 kg og ladning 1 μC, som i begynnelsen har en avstand 2 m fra hverandre. Med disse verdiene, finner vi at det tar 23,4 s. før kulene treffer hverandre.

Mer avanserte programmer kan f.eks. ta hensyn til at kulene har en radius.

5.35

I begge deloppgaver har vi at $eU = \Delta E_k = (\gamma_2 - 1)mc^2 - (\gamma_1 - 1)mc^2$.

a Når elektronet har startfart lik null, har vi

$$U = \frac{(\gamma_2 - 1)mc^2}{e} = \frac{1}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}90^2}} - 1 \right) \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2 .$$

$$= \underline{\underline{6{,}6 \cdot 10^5\ \text{V}}} = \underline{\underline{0{,}66\ \text{MV}}}$$

b Når elektronet akselereres fra en fart lik 0,90c til 0,99c, har vi at

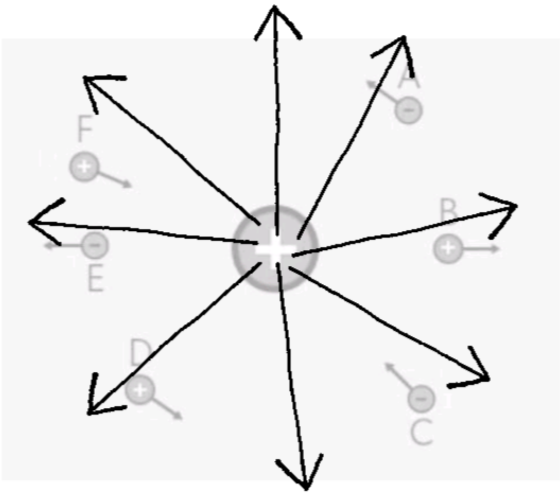
$$U = \frac{(\gamma_2 - 1)mc^2 - (\gamma_1 - 1)mc^2}{e} = \frac{mc^2}{e} \cdot \left((\gamma_2 - 1) - (\gamma_1 - 1)\right) = \frac{mc^2}{e} \cdot (\gamma_2 - \gamma_1)$$

$$= \frac{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}99^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - 0{,}90^2}} \right)$$

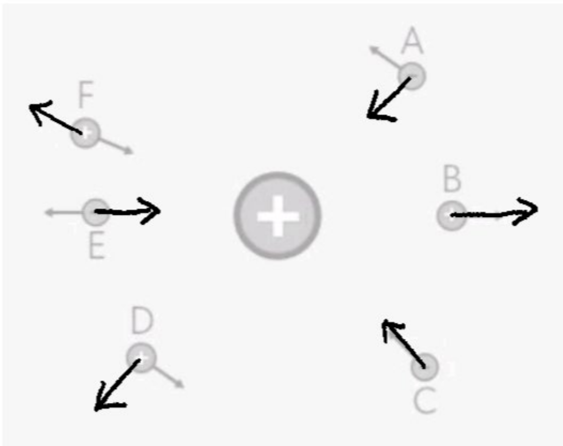
$$= \underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^6\ \text{V}}} = \underline{\underline{2{,}5\ \text{MV}}}$$

5.36

a Det elektriske feltet peker radielt utover fra en positiv ladning:



b Den elektriske kraften på positive ladninger har retning *med* feltretningen. Den elektriske kraften på negative ladninger har retning *mot* feltretningen.



c A: Umulig å avgjøre. Dersom farten har riktig verdi for at $F_e = \frac{mv^2}{r}$ vil partikkelen gå i sirkelbane med konstant banefart. Dersom farten har en annen verdi, vil den bevege seg utover (og miste fart) eller innover (farten øker).
B: Farten øker fordi farten og kraften peker i samme retning.
C: Farten øker fordi farten og kraften peker i samme retning.
D: Farten øker fordi den vil få en komponent utover i tillegg til farten den allerede har.
E: Farten minker fordi kraften har motsatt retning av farten.
F: Farten minker fordi kraften har motsatt retning av kraften.

5.37

a Vi endrer verdiene på ladningen, og har forenklet utskriften i slutten av programmet. Det ser nå slik ut:

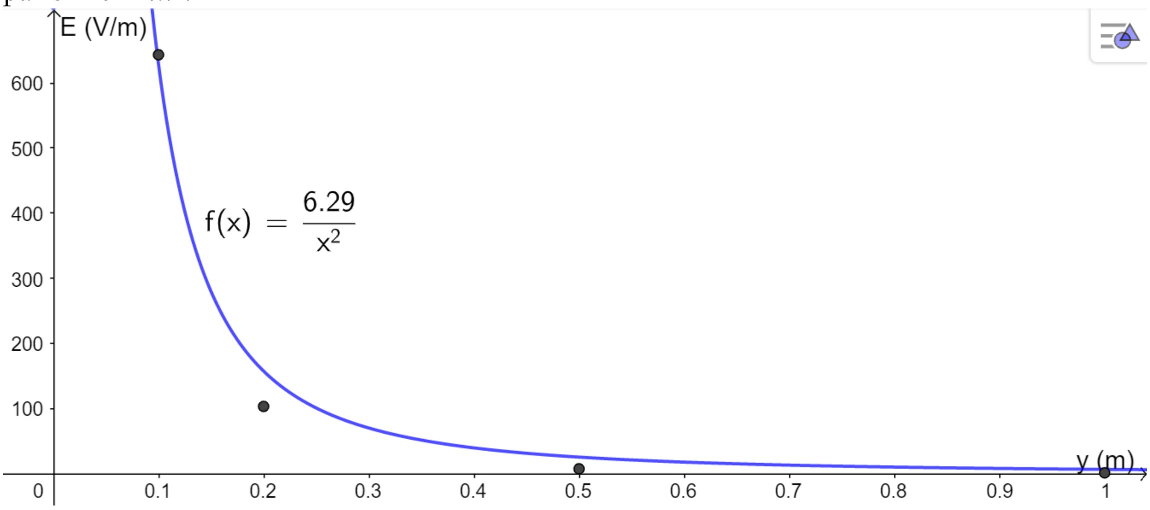
```
from pylab import *

# Konstanter
q1 = 1.0e-9                    # ladning til kule 1, C
```

```
p1 = array([-0.05, 0])          # posisjon til kule 1, m
q2 = -1.0e-9                    # ladning til kule 2, C
p2 = array([0.05, 0])           # posisjon til kule 2, m
k = 8.99e9                      # konstanten i Coulombs lov

# Funksjon som beregner det elektriske feltet i posisjonen r
def E_felt(r):
    r1 = r - p1                 # vektor fra P1 til r
    e_r1 = r1/norm(r1)          # enhetsvektor ut fra P1
    E1 = k*q1/norm(r1)**2*e_r1  # elektrisk felt fra kule 1
    r2 = r - p2                 # vektor fra P2 til R
    e_r2 = r2/norm(r2)          # enhetsvektor ut fra P1
    E2 = k*q2/norm(r2)**2*e_r2  # elektrisk felt fra kule 2
    E = E1 + E2                 # summerer feltene fra kulene
    return E                    # returnerer det samlede feltet

# Beregning
P = array([0, 1])           # punktet der vi beregner feltet
E = E_felt(P)                   # beregning av felt

# Vi skriver ut resultatet
print("Når punktet P har koordinatene", P,"har det elektriske feltet en
absoluttverdi på", norm(E), "V/m.")
```

Vi justerer koordinatenet til P, og kjører programmet for de forskjellige verdiene. Vi finner da:

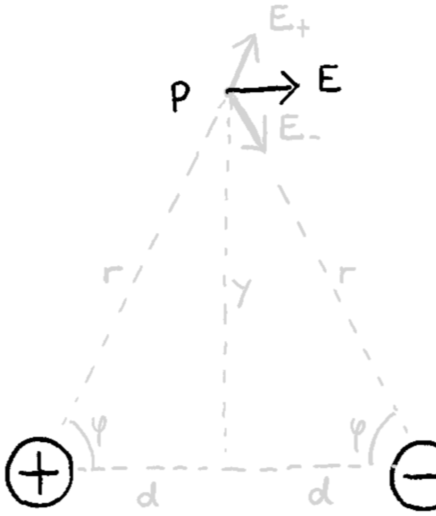
10 cm over dipolen: E = 643 V/m
20 cm over dipolen: E = 103 V/m
50 cm over dipolen: E = 7,1 V/m
100 cm over dipolen: E = 0,90 V/m

b Vi velger å legge punktene inn i grafikkfeltet i Geogebra, og gjøre en regresjon med en funksjon på formen $1/x^2$.



Selv om grafen følger punktene nokså godt, ser vi om vi zoomer inn at alle punktene med unntak av det første ligger et godt stykke under grafen. Feltstyrken avtar derfor raskere enn som $1/r^2$.

c Vi tegner en figur som viser situasjonen:



Vi ser at y-komponentene av det elektriske feltet kansellerer hverandre. Avstanden fra hver av ladningene til punktet P er $r = \sqrt{y^2 + d^2}$. De to x-komponentene er like store:

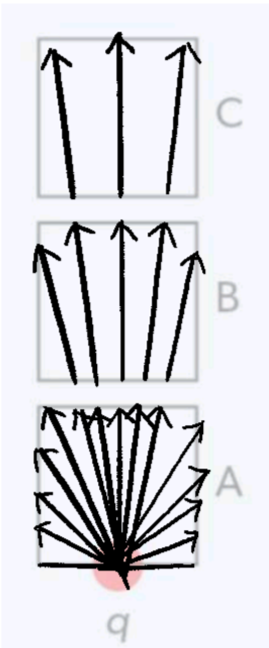
$E_x = k_e \frac{q}{r^2} \cdot \cos\phi = k_e \frac{q}{r^2} \cdot \frac{d}{r} = k_e \frac{qd}{r^3}$.

Det totale feltet er da: $E = 2E_x = 2k_e \frac{qd}{r^3} = \frac{2k_e qd}{\left(y^2 + d^2\right)^{3/2}}$, som var det vi skulle vise. **5.38**

Hvis området er lite nok, vil forskjellen i vinkelen og i styrke være så liten at feltet vil oppleves som homogent. Dette tilsvarer situasjonen vi har for gravitasjonsfeltstyrke dersom vi ser på et lite område nær jordoverflaten.

5.39

a Det elektriske feltet rundt en positiv ladning peker radielt utover. Merk at pilene viser retningen, og det er tettheten, ikke lengden av pilene, som viser styrken på feltet.



b Vi ser at feltet i det ytterste området, område C, er mest homogent.

5.40

a Frie negative ladninger vil trekkes mot den positive ladningen og legge seg på innsiden av kuleskallet, frie positive ladninger vil skyves vekk fra ladningen og legge seg på utsiden av kuleskallet.

b Dersom det elektriske feltet i kuleskallet ikke er lik null, vil det virke en kraft på ladningene, og frie ladninger ville flytte på seg inntil feltet igjen blir lik null.

5.41

a Feltlinjer peker inn mot negative ladninger og ut fra positive ladninger. Dette betyr at

A: Øverste ladning er positiv og nederste ladning er negativ
B: Begge ladningene er positive
C: Ladningene til venstre er positive, ladningen til høyre er negativ
D: Ladningen i midten er negativ, ladningene øverst og nederste er positive
E: Alle ladningene er positive.

b Jo tettere feltlinjene ligger, jo sterkere er feltet, og jo sterkere er ladningen.

A: Ladningene er like store.
B: Nederste ladning er større enn øverste ladning
C: De to ladningene til venstre er like store. Ladningen til høyre er større enn disse.
D: Ladningen i midten er størst. Øverste og nederste ladning er like store.
E: Alle ladningene er like store.

5.42

a Strengt tatt må vi dypt ned i kvantefysikken for å kunne forklare uttrykket, og selv da er det ting vi ikke forstår. En mer

b Kraften er tiltrekkende dersom de to ladningene har motsatt fortegn. Minustegnet vil derfor dukke opp når vi setter inn verdier i formlene.

c Alfapartikkelen snur når den kinetiske energien er lik null. Siden det bare virker elektriske krefter på systemet, har vi at $E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}$, der E_p og E_{p0} står for potensiell elektrisk energi. Vi lar startpunktet være når avstanden mellom alfapartikkelen og atomkjernen er $r = 1{,}0 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$, og lar sluttpunktet være når alfapartikkelen snur. Da er

$$E_p = E_{k0} + E_{p0} \quad \Rightarrow \quad k_e \frac{qQ}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 + k_e \frac{qQ}{r_0} \quad \Rightarrow \quad k_e \frac{qQ}{r} - k_e \frac{qQ}{r_0} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{mv_0^2}{2k_e qQ} \quad \Rightarrow \quad r = \left(\frac{mv_0^2}{2k_e qQ} + \frac{1}{r_0} \right)^{-1}$$

Når vi setter inn tall (vi bruker tallene fra eksempelet), får vi:

$$r = \left(\frac{6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^{7}\ \text{m/s}\right)^2}{2 \cdot 8{,}99 \cdot 10^{9}\ \text{Nm}^2/\text{C}^2 \cdot 3{,}20 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1{,}26 \cdot 10^{-17}\ \text{C}} + \frac{1}{1{,}0 \cdot 10^{-10}\ \text{m}} \right)^{-1} = \underline{\underline{4{,}9 \cdot 10^{-14}\ \text{m}}}$$

5.43

a Siden begge ladningene er positive, virker den elektriske kraften frastøtende. Kraften virker derfor i bevegelsesretningen, og den gjør et postivit arbeid.

b Arbeid er lik kraft ganget med strekning. Kraften er større når avstanden mellom ladningene er liten, så arbeidet blir større i den første halvdelen av bevegelsen.
Merk: Siden kraften ikke er konstant gjennom bevegelsen, vil arbeidet her være likt integralet over kraften. Hvis vi deler første og andre halvdel av bevegelsen inn i like mange bitte små deler, vil argumentet likevel holde.

c *Alternativ I: Integrasjon*

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F(r)\ \mathrm{d}r = \int_{r_1}^{r_2} k_e \frac{qQ}{r^2}\ \mathrm{d}r = k_e qQ \int_{r_1}^{r_2} r^{-2}\ \mathrm{d}r = -k_e qQ\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = k_e qQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Alternativ II: Endring i elektrisk potensiell energi:

$$W = \Delta E_k = -\Delta E_p = -\left(k_e \frac{qQ}{r_2^2} - k_e \frac{qQ}{r_1^2}\right) = k_e \frac{qQ}{r_1^2} - k_e \frac{qQ}{r_2^2} = k_e qQ\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)$$

5.44

a Kraften på den positive ladningen er:

$$F_+ = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2} \cdot \frac{0{,}14 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot \left(-1{,}0 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}\right)}{\left(5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^2} = -8{,}05504000 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{N}$$

Kraften på den negative ladningen er:

$$F_- = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2} \cdot \frac{\left(-0{,}14 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\right) \cdot \left(-1{,}0 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}\right)}{\left(5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} + 0{,}27 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m}\right)^2} = 8{,}05503991 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{N}$$

Kraftsummen er da:

$$F_{\mathrm{dipol}} = F_+ + F_- = -8{,}05504000 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{N} + 8{,}05503991 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{N} = 8{,}6994 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{N} = \underline{\underline{8{,}7 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{N}}}$$

b Vannmolekylet har masse lik $m = 18u = 18 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg} = 2{,}988 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}$.

Tyngden til vannmolekylet er da lik $G = mg = 2{,}988 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg} \cdot 9{,}81\ \mathrm{m/s^2} = 2{,}9 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{N}$

Forholdet mellom tyngdekraften og den elektriske kraften er omtrent

$$\frac{F_{\mathrm{dipol}}}{G} \approx \frac{9 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{N}}{3 \cdot 10^{-25}\ \mathrm{N}} = 300$$

Den elektriske kraften på grunn av dipolegenskapene er nesten 300 ganger større enn tyngdekraften.

c Det virker rimelig å anta at den elektriske avbøyningen kan skyldes dipolegenskapene til vannmolekylet.

d Kraften på de positive ionene er:

$$F_+ = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2} \cdot \frac{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C} \cdot \left(-1{,}0 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}\right)}{\left(5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}\right)^2} = -5{,}75360000 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N}$$

Kraften på de negative ionene er:

$$F_- = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2} \cdot \frac{\left(-1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\right) \cdot \left(-1{,}0 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C}\right)}{\left(5{,}0 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} + 1{,}0 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}\right)^2} = 5{,}75336986 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N}$$

Kraftsummen er da:

$$F_{\mathrm{ion}} = F_+ + F_- = \left(-5{,}75360000 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N}\right) + 5{,}75336986 \cdot 10^{-14}\ \mathrm{N} = 2{,}3 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{N}$$

Forholdstallet mellom denne kraften og kraften som virker på det polare vannmolekylet er:

$$\frac{F_{\mathrm{ion}}}{F_{\mathrm{dipol}}} = \frac{2{,}3 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{N}}{8{,}7 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{N}} = 26 \cdot 10^3$$

Kraften på ionene er omtrent 26 000 ganger større enn kraften på dipolen.
Obs: Feil i fasit i denne oppgaven (1. opplag).

e For hvert ionepar, er det $5{,}6 \cdot 10^8$ dipoler. Dette er langt større enn 26 000. Totalt sett vil kraften på grunn av dipolen være langt større enn kraften på ionene. Vi vurderer det derfor slik at det er dipoleffekten som er den viktigste forklaringen på avbøyningen av vannstrålen.

5.45

Vi lar N være antall protoner i et kg hydrogen. Vi slår opp massen til hydrogenatomet, og finner at $m = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$. Da er $N = \dfrac{1\ \text{kg}}{1{,}6736 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 5{,}9751 \cdot 10^{26}$. Den totale ladningen til alle protonene er $Q = eN = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 5{,}9751 \cdot 10^{26} = \underline{\underline{9{,}6 \cdot 10^{7}\ \text{C}}}$

5.46

$$\frac{G}{F_e} = \frac{\gamma \dfrac{m_p m_e}{r^2}}{k_e \dfrac{e^2}{r^2}} = \frac{\gamma m_p m_e}{k_e e^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{8{,}99 \cdot 10^{9}\ \text{Nm}^2/\text{C}^2 \cdot \left(1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right)^2} = \underline{\underline{4{,}4 \cdot 10^{-40}}}$$

5.47

Klassisk:

$$\frac{1}{2} m v^2 = eU \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 150 \cdot 10^{3}\ \text{V}}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = \underline{\underline{2{,}30 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}}$$

Relativistisk:

Vi velger å først finne verdien for lorentzfaktoren:

$$(\gamma - 1) m c^2 = eU \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{eU}{mc^2} + 1 = \frac{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 150 \cdot 10^{3}\ \text{V}}{9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(3{,}0 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2} + 1 = 1{,}2927$$

Farten er da:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = 1{,}2927 \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{1{,}2927^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{1 - \frac{1}{1{,}2927^2}} \cdot c = 0{,}6337c = \underline{\underline{1{,}90 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}}$$

5.48

Farten er over ti prosent av lysfarten, så vi må regne relativistisk. Vi finner først lorentzfaktoren:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{9{,}8 \cdot 10^{7}\ \text{m/s}}{3{,}0 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}\right)^2}} = 1{,}0580$$

Vi har da:

$$E_k = qU \quad \Rightarrow \quad (\gamma - 1) m c^2 = eU$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{(\gamma - 1) m c^2}{e} = \frac{0{,}0580 \cdot 9{,}1094 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(3{,}0 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2}{1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = \underline{\underline{3{,}0 \cdot 10^{4}\ \text{V}}} = \underline{\underline{30\ \text{kV}}}$$

5.49

```
from pylab import *

# Konstanter
m = 6.64e-27                    # massen av alfapartikkelen, kg
q1 = 3.20e-19                   # ladning til alfapartikkelen, C
q2 = 1.26e-17                   # ladning til gullkjernen, C
k = 8.99e9                      # konstanten i Coulombs lov, Nm^2/C^2
```

```
# Startverdier
x = 1e-10                          # avstand langs x-aksen, m
y = 0.5e-14                        # høyden over siktelinja, m
r = array([-x, y])                  # posisjon til alfapartikkelen, m
v = array([1.5e7, 0])
t = 0                              # starttid, s

# Liste som lagrer posisjonsverdier
r_liste = [r]

# Funksjon som regner ut og returnerer akselerasjon
def a(r):
    eF = r/norm(r)                # enhetsvektor som gir retning til kraft
    F = k*q1*q2/norm(r)**2*eF      # størreslen til kraften, N
    aks = F/m                      # akselerasjon, m/s^2
    return aks                     # returnerer akselerasjon

# Simulering av bevegelsen
dt = 1.0e-21                       # tidssteg, s

while r[0] < 1e-10 and abs(r[0]) <= x:
    v = v + a(r)*dt
    r = r + v*dt
    t = t + dt

    r_liste = concatenate([r_liste, [r]]) # lagrer verdier for r

# Tegner graf
axis("equal")                          # like akser
title(" Bane til alfapartikkel")       # tittel
xlabel("$x$ / m")                      # navn på x-aksen
ylabel("$x$ / m")                      # navn på y-aksen
plot(r_liste[:,0], r_liste[:,1])       # plotter graf
show()                                 # viser graf

# Seregner vinkelen mellom feltet og y-aksen i grader
vinkel = arctan(v[1]/v[0])*360/(2*pi)

# Skriver ut vinkelen mellom positiv x-akse og partikkelbanen
if vinkel >= 0:
    print("Avbøyningsvinkelen er: ", vinkel, "grader.")
else:
    print("Avbøyningsvinkelen er: ", 180 + vinkel, "grader.")
```

Vi finner som forventet at avbøyningsvinkelen blir større jo nærmere siktelinja alfapartikkelen starter.

5.50

a $E = k_e \dfrac{q}{r^2} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2 \cdot \dfrac{1{,}0\ \text{C}}{(1{,}0\ \text{m})^2} = \underline{\underline{8{,}99 \cdot 10^9\ \text{V/m}}}$

b $\Phi_e = A \cdot E = 4\pi r^2 \cdot E = 4\pi \cdot (1{,}0\ \text{m})^2 \cdot 8{,}99 \cdot 10^9\ \text{V/m} = \underline{\underline{1{,}1 \cdot 10^{11}\ \text{Vm}}}$

c $\Phi_e = A \cdot E = 4\pi r^2 \cdot k_e \dfrac{Q}{r^2} = 4\pi k_e Q$

d $E = \dfrac{U}{d} = \dfrac{250\ \text{V}}{1{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = \underline{\underline{2{,}5 \cdot 10^4\ \text{V/m}}} = \underline{\underline{25\ \text{kV/m}}}$

e Vi ser for oss at vi lager en boks rundt den positive plata, og at sidekanten er like stor som selve plata. Da er $\Phi_e = A \cdot E = 0{,}040\ \text{m}^2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^4\ \text{V/m} = \underline{\underline{1{,}0 \cdot 10^3\ \text{Vm}}} = \underline{\underline{1{,}0\ \text{kVm}}}$

f $\Phi_e = 4\pi k_e Q \quad \Rightarrow \quad Q = \dfrac{\Phi_e}{4\pi k_e} = \dfrac{1{,}0 \cdot 10^3\ \text{Vm}}{4\pi \cdot 8{,}99 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2} = \underline{\underline{8{,}9 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}} = \underline{\underline{8{,}9\ \text{nC}}}$

g Ifølge Gauss lov er $\Phi_e = 4\pi k_e Q$. Fra definisjonen av elektrisk fluks, og formelen for det elektriske feltet mellom to ladde plater, har vi at $\Phi_e = A \cdot E = A \cdot \dfrac{U}{d}$. Vi ser for oss at vi legger en sluttet flate rundt den positive platen, og har da: $\Phi_e = 4\pi k_e q = A \cdot \dfrac{U}{d} \quad \Rightarrow \quad U = \dfrac{4\pi k_e q d}{A}$, som var det vi skulle vise.

5.51

a Metall leder elektrisk ladning. Hvis det er et elektrisk felt i metallet, vil det virke en kraft på de elektriske ladningene. De negative elektronene vil da bevege seg mot den positive ladningen, og legge seg på innsiden av kuleskallet.

b Når det ikke lengre virker elektriske krefter på elektronene, er det elektriske feltet i selve kuleskallet lik null. Vi legger en Gauss-flate i selve lederen, slik at den elektriske fluksen er lik null. Da er $\Phi_e = 4\pi k_e q \quad \Rightarrow \quad q = \dfrac{\Phi_e}{4\pi k_e} = \dfrac{0}{4\pi k_e} = 0$. Summen av alle ladningene på innsiden av kuleskallet må da være lik null. Siden vi vet den positive ladningen er lik $+Q$, må summen av alle de negative ladningene være $-Q$.

5.52

a $G = \gamma \dfrac{m^2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \left(\dfrac{5{,}0\ \text{kg}}{2{,}0\ \text{m}}\right)^2 = 4{,}16875 \cdot 10^{-10}\ \text{N} = \underline{\underline{4{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{N}}}$

b Vi lar n være antall elektroner vi trenger. Vi må da ha:

$$F_e = G \quad \Rightarrow \quad k_e \frac{(ne)^2}{r^2} = G$$

$$\Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{r^2 G}{k_e e^2}} = \sqrt{\frac{(2{,}0\ \text{m})^2 \cdot 4{,}16875 \cdot 10^{-10}\ \text{N}}{8{,}99 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2 \cdot (1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \text{C})^2}} = 2{,}6917 \cdot 10^9 = \underline{\underline{2{,}7 \cdot 10^9}}$$

c Det er 29 elektroner i hvert kobberatom. Vi lar N være antall elektroner i en kule. Da er:

$$N = 29 \cdot \frac{5{,}0\ \text{kg}}{63{,}5 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} = 1{,}3756 \cdot 10^{27}$$

Forholdstallet mellom n og N er: $\dfrac{N}{n} = \dfrac{1{,}3756 \cdot 10^{27}}{2{,}6917 \cdot 10^{9}} = 5{,}1 \cdot 10^{17}$.

Vi flytter altså $\dfrac{1}{5{,}1 \cdot 10^{17}}$ av elektronene.

5.53

a Avstanden fra dQ til punktet P er $R = \sqrt{r^2 + a^2}$.

Det elektriske feltet er da $\mathrm{d}E = k_e \dfrac{\mathrm{d}Q}{R^2} = k_e \dfrac{\mathrm{d}Q}{r^2 + a^2}$.

b Vi lar ϕ være vinkelen mellom linja fra P til S og linja fra P til dQ. Da er

$$\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E \cdot \cos\phi = \mathrm{d}E \cdot \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} = k_e \frac{\mathrm{d}Q}{r^2 + a^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{r^2 + a^2}} = k_e a \frac{\mathrm{d}Q}{\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

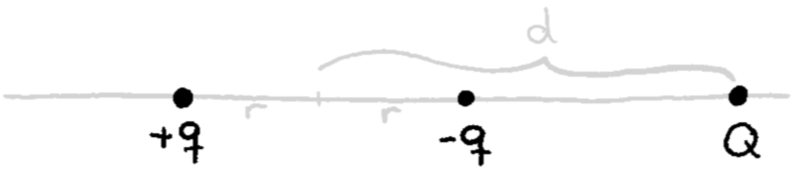
c Summen av alle y-komponentene vil kansellere hverandre, og bare x-komponentene blir igjen. Da må det samlede elektriske feltet peke langs x-retningen.

d Integralet gir summen av alle de uendelig små bitene dE. Vi ser fra figuren at k_e, a og r er uavhengige av ladningen Q. Vi har da:

$$E = \int_0^Q \mathrm{d}E = \int_0^Q \mathrm{d}E_x = \int_0^Q k_e a \frac{\mathrm{d}Q}{\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{k_e a}{\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}} \int_0^Q dQ = k_e \frac{aQ}{\left(r^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

5.54

Vi tegner en figur som viser situasjonen. Siden $d > r$, ligger ladningen på utsiden av dipolen.



Kraftsummen som virker på dipolen, er lik kraftsummen som virker på ladningen Q.

$$F_{\text{dipol}} = F_+ + F_- = F_e = k_e \frac{qQ}{(d+r)^2} - k_e \frac{qQ}{(d-r)^2} = k_e qQ \cdot \frac{(d-r)^2 - (d+r)^2}{(d+r)^2 (d-r)^2}$$

$$= k_e qQ \cdot \frac{d^2 - 2dr + r^2 - d^2 - 2dr - r^2}{\left((d+r)(d-r)\right)^2} = k_e qQ \cdot \frac{-2dr - 2dr}{\left(d^2 - r^2\right)^2} = -4k_e qQ \cdot \frac{dr}{\left(d^2 - r^2\right)^2}$$

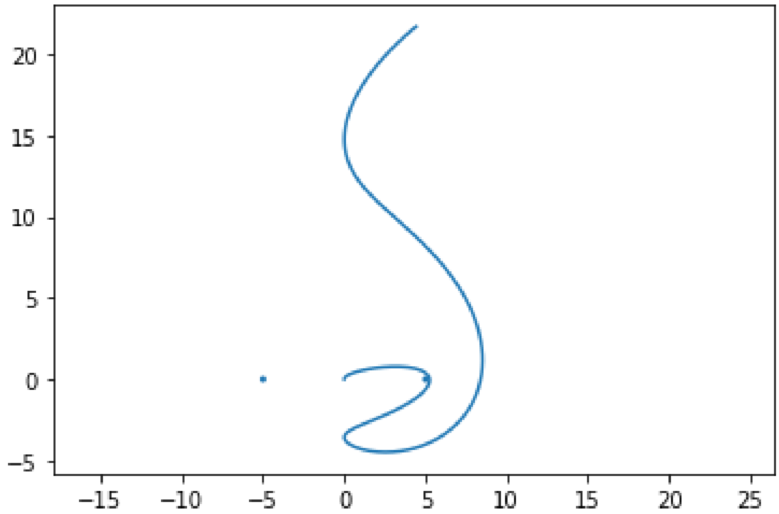
Absoluttverdien av kraften er $F_{\text{dipol}} = 4k_e qQ \cdot \dfrac{dr}{\left(d^2 - r^2\right)^2}$, som vi skulle vise.

5.55

```
from pylab import *

# Konstanter
q1 = 1.0e-5                     # positiv ladning i dipol, C
p1 = array([-5, 0])             # posisjon til positiv ladning i dipol, m
q2 = -1.0e-5                    # negativ ladning i dipol, C
p2 = array([5, 0])              # posisjon til negativ ladning i dipol, m

k = 8.99e9                      # konstanten i Coulombs lov, Nm^2/C^2
```

```
Q_part = 1.0e-5                # ladning til partikkel, C
m_part = 0.01                  # masse til partikkel, kg

# Startposisjon og -fart for partikkelen
r = array([0, 0])              # startposisjon til partikkel, m
v = array([0, 1])              # startfart til partikkel, m/s
t = 0                          # starttid, s
dt = 0.001                     # tidssteg, s

# Liste med posisjon
r_liste = [r]                  # liste som lagerer posisjoner

# Funksjon som beregner det elektriske feltet i posisjonen r
def a(r):
    # Finner samlet elektrisk felt
    r1 = r - p1                # vektor fra negativ ladning til partikkel
    e_r1 = r1/norm(r1)         # enhetsvektor fra positiv ladning til
partikkel
    E1 = k*q1/norm(r1)**2*e_r1  # elektrisk felt fra positiv ladning
    r2 = r - p2                # vektor fra negativ ladning til partikkel
    e_r2 = r2/norm(r2)         # enhetsvektor fra negativ ladning til
partikkel
    E2 = k*q2/norm(r2)**2*e_r2  # elektrisk felt fra negativ ladning
    E = E1 + E2                # vektorsum av elektrisk felt

    # Finner kraftsum og akselerasjon
    F_sum = E*Q_part           # kraftsum er lik elektrisk kraft
    aks = F_sum/m_part         # regner ut akselerasjon
    return aks                 # returnerer akselerasjon

# Løkke som beregner fart og posisjon for hvert tidssteg
while t < 20:                  # simuleringen stanser etter 20 sekunder
    v = v + a(r)*dt            # beregner ny fart, m/s
    r = r + v*dt               # beregner ny posisjon, m
    t = t + dt                 # beregner ny tid, s
    r_liste = concatenate([r_liste, [r]]) # legger posisjon inn i liste

# Tegner graf
axis("equal")                          # lar aksene ha lik inndeling
gca().add_artist(Circle((-5,0), 0.2))  # tegner prikk, positiv del av dipol
gca().add_artist(Circle((5,0), 0.2))   # tegner prikk, negativ del av dipol
plot(r_liste[:,0], r_liste[:,1])       # plotter graf
show()                                 # viser graf
```

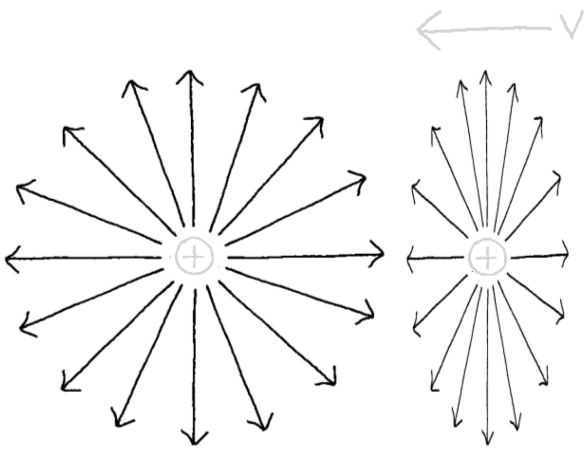
Når vi kjører programmet med verdiene vi har valgt, og avslutter simuleringen etter 20 sekunder, får vi denne grafen:



Om du prøver deg fram med forskjellige verdier, vil du snart oppdage at programmet er svært følsomt for selv små endringer i startbetingelsene, og bevegelsen kan virke ganske kaotisk. Det er ikke mulig å få partikkelen til å gå i en stabil bane i en dipol.

5.56

På figuren til venstre ser vi feltet rundt en partikkel som er i ro, og til høyre feltet rundt en partikkel som har en fart relativt til observatøren. På grunn av lengdekontraksjon vil feltlinjene ligge tettere, slik at vi vil måle et større felt enn vi gjør når vi står i ro.



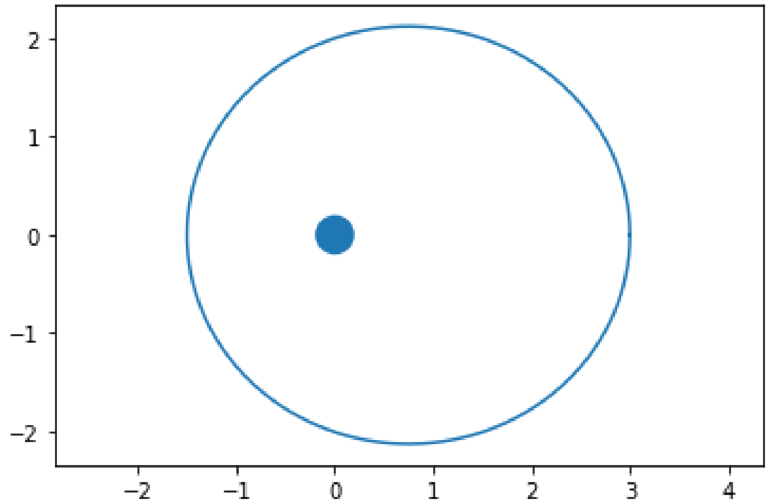
5.57

a

```
from pylab import *

# Konstanter og startbetingelser
k = 8.99e9                          # konstanten i Coulombs lov

# Kule A
qA = 5.0e-5                         # ladning til kule A, C
mA = 0.1                            # masse til kule A, kg
```

```
rA = array([3, 0])                 # posisjon til kule A, m
vA = array([0, 10])                # fart til kule A, m/s

# Kule B
qB = -1.0e-4                       # ladning til kule B, C
mB = 0.5                           # masse til kule B, kg
rB = array([0, 0])                 # posisjon til kule B, m
vB = array([0, 0])                 # fart til kule B, m/s

# Liste med osisjonene til kule A
rA_liste = [rA]

# Tid
t = 0                              # starttid, s
dt = 0.001                         # tidssteg, s

# Funksjon som beregner akselerasjonen til kule A
def aA(r):
    F_abs = k*qA*qB/norm(r)**2     # beregner størrelsen til elektrisk kraft
    e_r = r/norm(r)                # beregner enhetsvektor tl kraft
    F = F_abs*e_r                  # beregner kraft med retning
    aks = F/mA                     # regner ut akselerasjonen
    return aks                     # returnerer akselerasjonen

# Løkke som beregner ny fart, posisjon og tid
while rA[0] <= 3:                  # simuleringen stanser etter en runde
    vA = vA + aA(rA)*dt            # regner ut ny fart, m/s
    rA = rA + vA*dt                # regner ut ny posisjon, m
    t = t + dt                     # regner ut ny tid, s
    rA_liste = concatenate([rA_liste, [rA]]) # legger posisjon inn i liste

# Plotter bane
axis('equal')                      # lik avstand på aksene
gca().add_artist(Circle((0,0), 0.2))# tegner prikk for ladning B
plot(rA_liste[:,0], rA_liste[:,1])  # tegner bane
show()                             # viser bane

# Skriver ut sluttid
print("Partikkel A bruker", t, "s på ett omløp rundt partikkel B.")
```

Når programmet kjører, skriver det ut dette plottet av banen:

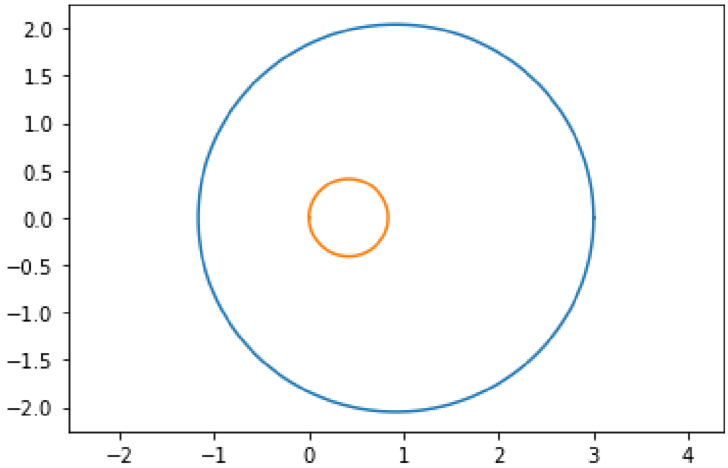


Det skriver også ut:
Partikkel A bruker 1.0010000000000006 s på ett omløp rundt partikkel B.

b Vi gjør noen endringer i programmet fra A. De viktigste endringene er at vi gir kule B en startfart (`vB = array([0, -2])`), sender både posisjon og masse inn i funksjonen som beregner akselerasjon slik at denne også kan brukes på kule B, og beregner og plotter verdier også for kule B.

```
# Funksjon som beregner akselerasjon
def a(r, m):
    F_abs = k*qA*qB/norm(r)**2      # beregner elektrisk kraft
    e_r = r/norm(r)                 # finner retning til elektrisk kraft
    F = F_abs*e_r                   # kraftsum
    aks = F/m                       # beregner akselerasjon
    return aks                      # returnerer akselerasjon

# Løkke som beregner ny fart, posisjon og tid
while rA[0] <= 3:                   # simuleringen stanser etter en runde
    r = rA - rB                     # avstand mellom kulene, m
    vA = vA + a(r, mA)*dt           # beregner ny fart for kule A
    rA = rA + vA*dt                 # beregner ny posisjon for kule A
    vB = vB + a(-r, mB)*dt          # beregner ny fart for kule B
    rB = rB + vB*dt                 # beregner ny posisjon for kule B
    t = t + dt                      # beregner ny tid

    rA_liste = concatenate([rA_liste, [rA]]) # legger posisjon A inn i liste
    rB_liste = concatenate([rB_liste, [rB]]) # legger bosisjon B inn i liste

# Plotter bane
axis('equal')                       # lik avstand på aksene
plot(rA_liste[:,0], rA_liste[:,1])  # plotter banen til kule A
plot(rB_liste[:,0], rB_liste[:,1])  # plotter banen til kule B
show()                              # viser plott

# Skriver ut sluttid
print("Partikkel A bruker", t, "s på ett omløp rundt partikkel B.")
```

Når programmet kjører, skriver det ut dette plottet av de to banene:



Det skriver også ut denne setningen:

```
Partikkel A bruker 1.0699999999999993 s på ett omløp rundt partikkel B.
```

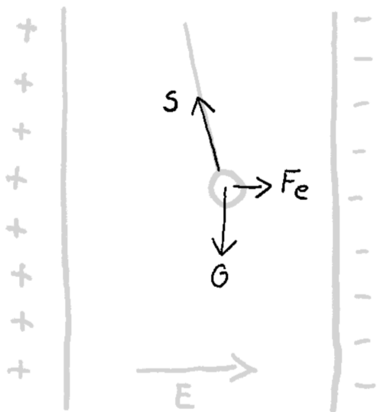
Vi ser at rundetiden er noe lengre når begge partiklene er i bevegelse.

c Fra plottet ser vi av begge kulene tilnærmet går i sirkelbane. Dette er ikke tilfellet dersom vi endrer startfarten til kule B. Når vi beregner den samlede bevegelsesmengden ser vi at $\Sigma\vec{p} = m_A\vec{v}_A + m_B\vec{v}_B = 0{,}100\ \text{kg}\cdot[0,\ 10]\ \text{m/s} + 0{,}500\ \text{kg}\cdot[0,\ -2{,}0]\ \text{m/s} = [0,\ 0]\ \text{kgm/s}$. Siden det ikke virker ytre krefter på systemet, er bevegelsesmengden bevart, og massesenteret til de to kulene ligger i ro.

Kapitteltest

Oppgave 1

a På figuren er det elektriske feltet tegnet inn i grått, og kreftene i svart:



b $E = \dfrac{U}{d} = \dfrac{2{,}3\cdot 10^3\ \text{V}}{8{,}0\cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 2{,}875\cdot 10^4\ \text{V/m} = \underline{\underline{2{,}9\cdot 10^4\ \text{V/m}}} = \underline{\underline{29\ \text{kV/m}}}$

c Fra figuren ser vi at $\tan\phi = \dfrac{F_e}{G} = \dfrac{F_e}{mg}$.

Den elektriske kraften blir da:

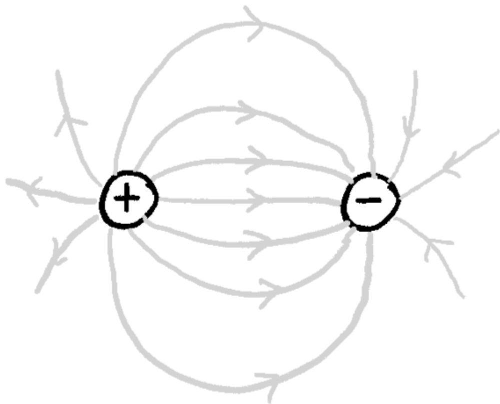
$F_e = mg\tan\phi = 15\cdot 10^{-3}\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot\tan 10^\circ = 2{,}5947\cdot 10^{-2}\ \text{N} = \underline{\underline{2{,}6\cdot 10^{-2}\ \text{N}}} = \underline{\underline{26\ \text{mN}}}$

d $F_e = qE \quad\Rightarrow\quad q = \dfrac{F_e}{E} = \dfrac{2{,}5947\cdot 10^{-2}\ \text{N}}{2{,}875\cdot 10^4\ \text{V/m}} = \underline{\underline{9{,}0\cdot 10^{-7}\ \text{C}}}$

Oppgave 2

a $F_e = k_e \dfrac{q_1 q_2}{r^2} = 8{,}99 \cdot 10^9\ \text{Nm}^2/\text{C}^2 \cdot \dfrac{\left(6{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{C}\right)^2}{r^2} = \dfrac{40\ \text{Nm}^2}{r^2}$

b Kulene danner et dipolfelt



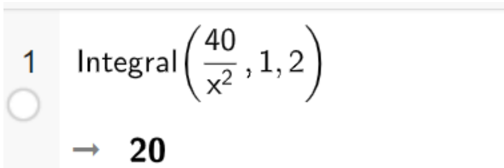
c Den elektriske kraften virker tiltrekkende, så når vi fjerner kulene fra hverandre virker den elektriske kraften mot bevegelsesretningen og gjør derfor et negativt arbeid.

d Fra kapittel 1 (se s. 36 i boka) vet vi at $W = \int_{R_1}^{R_2} F(r)\,\mathrm{d}r$ når kraften ikke er konstant.

Hvis vi setter inn uttrykket fra oppgave a (og dropper benevningen), får vi $W = \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{40}{r^2}\,\mathrm{d}r$. Hvis vi bare er interessert i absoluttverdien, blir dette $|W| = \left| \int_{R_1}^{R_2} \dfrac{40}{r^2}\,\mathrm{d}r \right|$.

e Endringen i potensiell energi er lik det arbeidet som gjøres. Vi bruker formelen fra forrige oppgave, og får $|\Delta E_p| = |W| = \left| \int_{1{,}0}^{2{,}0} \dfrac{40}{r^2}\,\mathrm{d}r \right|$.

Når vi bruker CAS til å løse integralet, får vi at endringen i potensiell energi er på 20 J.



Siden vi gjør et arbeid i retning mot den elektriske kraften, vil den potensielle energien øke, og endringen er positiv.

Oppgave 3

a Siden de to ladningene er like store, vil kraften fra de to virke samme vei hvis vi befinner oss utenfor ladningene, og hver sin vei hvis vi befinner oss mellom A og B. Hvis vi beveger oss utover fra punktet P, vil det elektriske feltet derfor synke mot null. På veien vil det passere et punkt der feltstyrken er $\vec{E}/2$.
Hvis vi befinner oss mellom A og B, vil feltstyrken fra hver enkelt ladning være sterkere enn i P, men siden de virker hver sin vei, vil det finnes et punkt også her hvor feltstyrken er $\vec{E}/2$.
Siden størrelsen $\vec{E}/2$ er en vektorstørrelse, må vi ta hensyn til retningen til feltet. Det finnes derfor ikke flere enn to punkter der betingelsen er oppfylt.

b Vi lar q være ladningene i punkt A og B. Feltstyrken i P er da: $E = k_e \dfrac{q}{(2d)^2} + k_e \dfrac{q}{d^2} = \dfrac{5k_e q}{4d^2}$.

Vi ønsker altså å finne de to punktene der det elektriske feltet peker mot høyre og har absoluttverdi $\frac{E}{2}=\frac{5k_e q}{8d^2}$.

For å gjøre notasjonen enkel, velger vi å sette $d=1$. I praksis betyr det at x uttrykkes som en konstant ganget med d.

Punktet mellom de to ladningene:
Vi ser først på punktet mellom de to ladningene. Vi lar x_1 være avstanden til ladningen i A.

$$\frac{k_e q}{x_1^2}-\frac{k_e q}{(d-x_1)^2}=\frac{5k_e q}{8d^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x_1^2}-\frac{1}{(1-x_1)^2}=\frac{5}{8}$$

Vi løser i CAS, og finner:

1 $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{5}{8}$

$\rightarrow \; \frac{1}{x^2}-\frac{1}{(-x+1)^2}=\frac{5}{8}$

2 Løs($1, x > 0)

$\rightarrow \; \{x=0.48\}$

Punktet til høyre for B:
Vi lar x_2 være avstanden til ladningen i B.

$$\frac{k_e q}{x_2^2}+\frac{k_e q}{(d+x_2)^2}=\frac{5k_e q}{8d^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x_2^2}+\frac{1}{(1+x_2)^2}=\frac{5}{8}$$

Vi løser også denne i CAS, og finner:

3 $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1+x)^2}=\frac{5}{8}$

$\rightarrow \; \frac{1}{x^2}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{5}{8}$

4 Løs($3, x > 0)

$\approx \; \{x=1.47\}$

Det elektriske feltet er lik $\vec{E}/2$ i punktet som ligger 0,48d til høyre for A og i punktet som ligger 1,47d til høyre for B.

Oppgave 4

a $F=eE \quad\Rightarrow\quad E=\frac{F}{e}=\frac{9{,}14\cdot 10^{-16}\ \text{N}}{1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{C}}=\underline{\underline{5{,}7\cdot 10^{3}\ \text{N/C}}}=\underline{\underline{5{,}7\ \text{kN/C}}}$

b Vi tegner en figur som viser situasjonen:

c Farten i x-retning er konstant, så vi har $x = v_x t \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{x}{v_x}$.

Startfarten i y-retning er lik null, så $y = \dfrac{1}{2}at^2 = \dfrac{F_e}{2m}t^2 = \dfrac{F_e}{2m}\cdot\left(\dfrac{x}{v}\right)^2 = \dfrac{F_e}{2mv^2}\cdot x^2$.

Når vi setter inn tall, får vi: $y = \dfrac{F_e}{2mv^2}\cdot x^2 = \dfrac{9{,}14\cdot 10^{-16}}{2\cdot 1{,}6726\cdot 10^{-27}\cdot\left(9{,}4\cdot 10^4\right)^2}\cdot x^2 = 31x^2$.

Oppgave 5

Selv om vi strengt tatt bør bruke en mer nøyaktig verdi for lysfarten, velger vi her å bruke tabellverdien $c = 3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s}$. Da er lorentzfaktoren:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\left(3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s} - 3\ \text{m/s}\right)^2}{\left(3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2}}} = 7071$$

Vi finner spenningen:

$$E_k = eU \quad \Rightarrow \quad (\gamma-1)mc^2 = eU \quad \Rightarrow \quad U = \frac{(\gamma-1)mc^2}{e}$$

$$U = \frac{7070\cdot 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2}{1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{C}} = \underline{\underline{6{,}7\cdot 10^{12}\ \text{V}}} = \underline{\underline{6{,}7\ \text{TV}}}$$

Dersom vi bruker en mer nøyaktig verdi for lyshastigheten, $c = 299\,792\,458\ \text{m/s}$, er lorentzfaktoren $\gamma = 7069$, og vi får

$$U = \frac{(\gamma-1)mc^2}{e} = \frac{7068\cdot 1{,}6726\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(3{,}0\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2}{1{,}60\cdot 10^{-19}\ \text{C}} = \underline{\underline{6{,}6\cdot 10^{12}\ \text{V}}} = \underline{\underline{6{,}6\ \text{TV}}}$$