3 Gravitasjon

3.1

Vi velger noen tall og viser hvordan denne oppgaven kan løses.

a Vi anslår at knyttneven har en diameter på rundt 8 cm, dvs. en radius på rundt 4 cm. Hvis knyttneven er kuleformet, vil den ha et volum på

$$V=\frac{4\pi r^3}{3}=\frac{4\pi(4\text{ cm})^3}{3}=\frac{4\pi\left(4\cdot10^{-2}\text{ m}\right)^3}{3}=3\cdot10^{-4}\text{ m}^3.$$

Massetettheten til vann er $\rho=1000\text{ kg/m}^3$.

Massen til knyttneven er da $m=\rho\cdot V=1000\text{ kg/m}^3\cdot3\cdot10^{-4}\text{ m}^3=0,3\text{ kg}$

b $G=\gamma\dfrac{Mm}{r^2}=6,67\cdot10^{-11}\text{ Nm}^2/\text{kg}^2\cdot\dfrac{(0,3\text{ kg})^2}{(0,050\text{ m})^2}=2\cdot10^{9}\text{ N}$

3.2

a $G=\gamma\dfrac{Mm}{r^2}=6,67\cdot10^{-11}\text{ Nm}^2/\text{kg}^2\cdot\dfrac{5,972\cdot10^{24}\text{ kg}\cdot7,35\cdot10^{22}\text{ kg}}{(384\,400\,000\text{ m})^2}=\underline{\underline{1,98\cdot10^{20}\text{ N}}}$

b $G=\gamma\dfrac{Mm}{(2r)^2}=\gamma\dfrac{Mm}{4r^2}=\dfrac{1}{4}\cdot1,98\cdot10^{20}\text{ N}=\underline{\underline{4,95\cdot10^{19}\text{ N}}}$

c Ja. Ifølge Newtons 3. lov har en kraft en like stor, motsatt rettet motkraft, og de to kreftene vil være motkrefter. Hvis vi ser på gravitasjonsloven ser vi at kraften er proporsjonal med produktet av de to massene.

3.3

a $g=\gamma\dfrac{M}{r^2}=6,67\cdot10^{-11}\text{ Nm}^2/\text{kg}^2\cdot\dfrac{7,35\cdot10^{22}\text{ kg}}{\left(1737\cdot10^3\text{ m}\right)^2}=\underline{\underline{1,62\text{ m/s}^2}}$

b Vi viser utregningen for en person med masse 70 kg:

$G=mg=70\text{ kg}\cdot1,62\text{ m/s}^2=113\text{ N}=0,11\text{ kN}$

3.4

a Vi bruker Newtons 2. lov, og setter inn uttrykket for gravitasjonskraft og sentripetalakselerasjon: $\Sigma F=ma\ \Rightarrow\ \gamma\dfrac{Mm}{r^2}=\dfrac{mv^2}{r}$

Når vi løser for farten, får vi:

$$v=\sqrt{\gamma\frac{M}{r}}=\sqrt{6,67\cdot10^{-11}\text{ Nm}^2/\text{kg}^2\cdot\frac{5,972\cdot10^{24}\text{ kg}}{6371\cdot10^3\text{ m}+36\,000\cdot10^3\text{ m}}}=3066\text{ m/s}=\underline{\underline{3,07\text{ km/s}}}$$

b Vi finner rundetiden:

$$s=vt\ \Rightarrow\ t=\frac{s}{v}=\frac{2\pi r}{v}=\frac{2\pi\left(6371\cdot10^3\text{ m}+36\,000\cdot10^3\text{ m}\right)}{3066\text{ m/s}}=\underline{\underline{86\,831\text{ s}}}=\underline{\underline{24,1\text{ h}}}$$

3.5

a Vi bruker Newtons 2. lov, og setter inn uttrykket for gravitasjonskraft og sentripetalakselerasjon: $\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$

Når vi løser for farten, får vi:

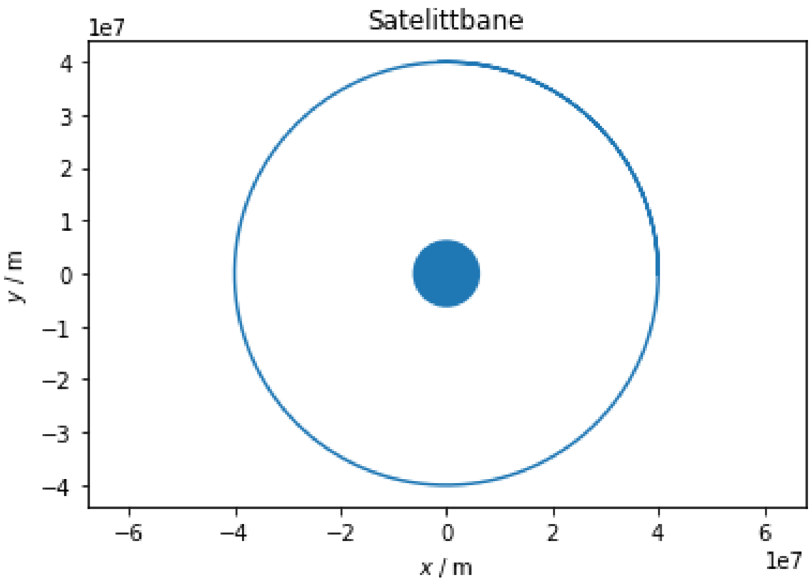
$$v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4{,}0 \cdot 10^7\ \text{m}}} = 3156\ \text{m/s} = \underline{\underline{3{,}2\ \text{km/s}}}$$

b Vi endrer verdien på startfarten til 3156 m/s.

```
from pylab import *

# Konstanter
m = 100                            # masse av satelitt, kg
M = 5.972e24                       # masse av jorda, kg
gamma = 6.67e-11                   # gravitasjonskonstanten, Nm^2/kg^2

# Startverdier
r = array([4e7, 0])                # posisjonen til satellitten, m
v = array([0, 3156])             # farten til satellitten, m/s
t = 0                              # tid, s

# Liste for lagring av verdier
r_liste = [r]                      # liste med posisjoner

# Variable krefter, beregning av kraftsum og akselerasjon
def akselerasjon(r):
    G_abs = gamma*m*M/norm(r)**2   # absoluttverdi gravitasjon, N
    e_r = -r/norm(r)               # enhetsvektor mot sentrum av jorda
    G = G_abs*e_r                  # gravitasjonskraft
    aks = G/m                      # akselerasjon, m/s^2
    return aks

# Simulerer bevegelsen så lenge det ikke har gått 1*10^5 s
# og banen er over jordoverflaten.
dt = 10                            # tidssteg, s

while t < 1e5 and norm(r) > 6.371e6:
    a = akselerasjon(r)            # beregner akselerasjon
    v = v + a*dt                   # beregner ny fart
    r = r + v*dt                   # beregner ny posisjon
    t = t + dt                     # ny tid

    # Lagring av 2D-verdier
    r_liste = concatenate([r_liste, [r]])

# Tegner graf
axis("equal")                              # like akser
title("Satelittbane")                      # tittel
```

```
xlabel("$x$ / m")                         # navn på x-aksen
ylabel("$y$ / m")                         # navn på y-aksen
gca().add_artist(Circle((0,0), 6.371e6))  # sirkel som viser jorda
plot(r_liste[:, 0], r_liste[:, 1])        # plotter posisjonen
show()                                    # viser grafen
```

Når programmet kjører, får vi dette plottet:



Det ser ut til at simuleringen gir en sirkelbane.

c Vi prøver oss systematisk fram med forskjellige verdier for startfart. Satellitten kan ha en startfart på 1,7 km/s uten å kollidere med jorda.

3.6

Vi får et lite avvik fra tabellverdien fordi vi ikke har tatt hensyn til krefter fra andre himmellegemer.

3.7

a Vi bruker formelen fra eksempel 10. Da får vi

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2} = \frac{4\pi^2 \left(1{,}46\cdot 10^{14}\ \text{m}\right)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot (15{,}2\cdot 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\ \text{s})^2} = \underline{\underline{8{,}02\cdot 10^{36}\ \text{kg}}}$$

b $$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 1{,}46\cdot 10^{14}\ \text{m}}{15{,}2\cdot 365\cdot 24\cdot 60\cdot 60\ \text{s}} = \underline{\underline{1{,}91\cdot 10^{6}\ \text{m/s}}}$$

3.8

a Potensiell energi er gitt ved formelen: $E_\text{p} = -\gamma \frac{Mm}{r}$

Når romsonden er 10 km fra jordoverflaten, er den potensielle energien:

$$E_\text{p} = -\gamma \frac{Mm}{r} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5{,}972\cdot 10^{24}\ \text{kg}\cdot 200\ \text{kg}}{6381\cdot 10^{3}\ \text{m}} = -1{,}2485\cdot 10^{10}\ \text{J} = \underline{\underline{-12{,}5\ \text{GJ}}}$$

Når romsonden er 100 km fra jordoverflaten, er den potensielle energien:

$$E_\text{p} = -\gamma \frac{Mm}{r} = -6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5{,}972\cdot 10^{24}\ \text{kg}\cdot 200\ \text{kg}}{6471\cdot 10^{3}\ \text{m}} = -1{,}2311\cdot 10^{10}\ \text{J} = \underline{\underline{-12{,}3\ \text{GJ}}}$$

b Den potensielle energien er størst når romsonden er uendelig langt unna jorda. Da er $E_p = 0\ \text{J}$

c $\Delta E_p = -1{,}2311 \cdot 10^{10}\ \text{J} - \left(-1{,}2485 \cdot 10^{10}\ \text{J}\right) = 1{,}7369 \cdot 10^{8}\ \text{J} = \underline{\underline{1{,}7 \cdot 10^{8}\ \text{J}}}$

d Tyngdekraften virker i motsatt retning av bevegelsesretningen, $W_G = -\Delta E_p = \underline{\underline{-1{,}7 \cdot 10^{8}\ \text{J}}}$

3.9

a Vi slår opp jordas fart rundt sola, og finner at denne er 29,8 km/s. Vi henter tallene for solas og jordas masse og avstanden mellom dem fra boka. Da får vi at:

$$
\begin{aligned}
E_m &= E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{Mm}{r} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \left(29{,}8 \cdot 10^{3}\ \text{m/s}\right)^2 - 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m}} \\
&= \underline{\underline{-2{,}65 \cdot 10^{33}\ \text{J}}}
\end{aligned}
$$

b Hvis jorda hadde hatt mekanisk energi lik eller større enn null, ville den hatt en fart som var større enn unnslippingsfarten fra sola. Siden jorda går i bane rundt sola, kan dette ikke være tilfelle.

3.10

a Vi bruker formelen fra eksempel 13, og finner

$$
v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 9{,}4 \cdot 10^{20}\ \text{kg}}{470 \cdot 10^{3}\ \text{m}}} = 517\ \text{m/s} = \underline{\underline{0{,}52\ \text{km/s}}}
$$

b I tillegg til andre praktiske problemer, vil det være lite sannsynlig at du vil kunne klare å gi flaska en fart på over 500 m/s. Du vil derfor sannsynligvis ikke klare deg.

3.11

a

```
from pylab import *

# Konstanter
m_j = 5.972e24                          # massen til jorda, kg
m_m = 7.35e22                           # massen til månen, kg
r_j = 6371000                           # radius til jorda, m
r_m = 1737000                           # radius til månen, m
r0 = 380000000                          # startavstand mellom jord og måne, m
gamma = 6.67*10**(-11)                  # gravitasjonskonstanten, m^3/(kg*s^2)

# Funksjon som regner ut og returnerer akselerasjon
def a(r, m):
    G = gamma*m_j*m_m/r**2              # tyngdekraft, N
    sum_F = G                           # kraftsum, N
    aks = sum_F/m                       # regner ut akselerasjon
    return aks

# Startverdier for bevegelse
R_j = 0                                 # jorda starter i origo
v_j = 0                                 # jorda starter i ro
```

```
R_m = r0                                      # månen starter r0 meter fra origo
v_m = 0                                       # månen starter i ro
R = R_m - R_j                                 # Avstanden mellom jorda og månen
t = 0                                         # Starttid

# Sluttavstand (r_j + r_m)
R_slutt = r_j + r_m                           # sluttposisjon, m

# Simulering av bevegelse
dt = 1                                        # tidssteg
while R > R_slutt:                            # stopper simuleringen når de kræsjer
    v_j = v_j + a(R, m_j)*dt                  # regner ut farten til jorda
    v_m = v_m - a(R, m_m)*dt                  # regner ut farten til månen
    R_j = R_j + v_j*dt                        # regner ut posisjonen til jorda
    R_m = R_m + v_m*dt                        # regner ut posisjonen til månen
    R = R_m - R_j                             # regner ut ny avstand
    t = t + dt                                # går til neste tidspunkt

print("Tid før kollisjon:", round(t/3600), "h")
```

Når programmet kjører, skriver det ut: **`Tid før kollisjon: 114 h.`**

b -

c Månen har en hastighet omtrent lik sirklingsfarten. Dette gjør at den ikke faller ned, men fortsetter i bane rundt jorda.

3.12

Vi bruker Newtons gravitasjonslov til å finne et uttrykk for massen: $G = \gamma \dfrac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad m = \dfrac{Gr^2}{\gamma M}$

La oss anta du har en masse på 60 kg. Da er massen til osten

$\Rightarrow \quad m = \dfrac{1{,}0\ \text{N} \cdot (0{,}50\ \text{m})^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 60\ \text{kg}} = 6 \cdot 10^7\ \text{kg}$, eller omtrent 60 millioner kg.

3.13

Solas masse er $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg}$, jordas masse er $m = 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$. Avstanden fra sola til jorda er $r = 1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m}$. Gravitasjonskraften på jorda fra sola og gravitasjonskraften på sola fra jorda er begge lik: $G = \gamma \dfrac{Mm}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \dfrac{1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(1{,}496 \cdot 10^{11}\ \text{m})^2} = \underline{\underline{3{,}54 \cdot 10^{22}\ \text{N}}}$

3.14

Tyngdekraften på Amanda fra Eirik er:

$$G_{\text{AE}} = \gamma \frac{m_{\text{E}} m_{\text{A}}}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{75\ \text{kg} \cdot 60\ \text{kg}}{(0{,}80\ \text{m})^2} = \underline{\underline{4{,}7 \cdot 10^{-7}\ \text{N}}} = \underline{\underline{0{,}47\ \mu\text{N}}}$$

Tyngdekraften på Amanda fra månen er:

$$G_{\text{Am}} = \gamma \frac{m_{\text{m}} m_{\text{A}}}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot 60\ \text{kg}}{(384\ 400 \cdot 10^3\ \text{m})^2} = \underline{\underline{2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{N}}} = \underline{\underline{2{,}0\ \text{mN}}}$$

Hvis vi ikke tar hensyn til andre effekter enn tyngdekraften, er det månen som virker mest tiltrekkende på Amanda.

3.15

$$G = \gamma \frac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{\gamma Mm}{G}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,972 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 4,5 \cdot 10^3\ \text{kg}}{1,0 \cdot 10^3\ \text{N}}} = 4,234 \cdot 10^7\ \text{m}$$

Baneradien er $\underline{\underline{4,2 \cdot 10^7\ \text{km}}}$. Høyden over ekvator er $4,234 \cdot 10^7\ \text{m} - 6,371 \cdot 10^6\ \text{m} = \underline{\underline{3,6 \cdot 10^7\ \text{m}}}$.

3.16

Et lysår er $1\ \text{ly} = 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{s} \cdot 3,0 \cdot 10^8\ \text{m/s} = 9,4608 \cdot 10^{15}\ \text{m}$.

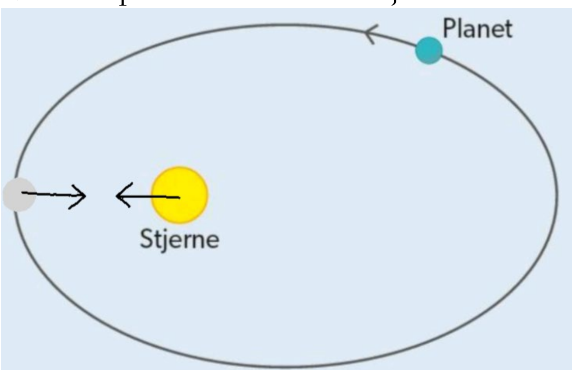
Massen til det sorte hullet er $M = 4,1 \cdot 10^6 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}\ \text{kg} = 8,159 \cdot 10^{36}\ \text{kg}$.

Kraften er da:

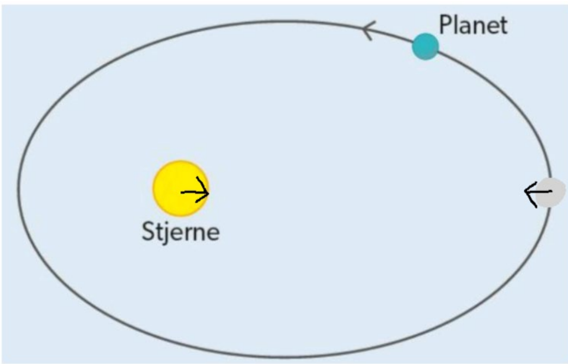
$$G = \gamma \frac{Mm}{r^2} = 6,67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{8,159 \cdot 10^{36}\ \text{kg} \cdot 5,972 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\left(27\,000 \cdot 9,4608 \cdot 10^{15}\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{5,0 \cdot 10^{10}\ \text{N}}} = \underline{\underline{50\ \text{GN}}}$$

3.17

a Gravitasjonskreftene er størst når planeten er nærmest stjerna:

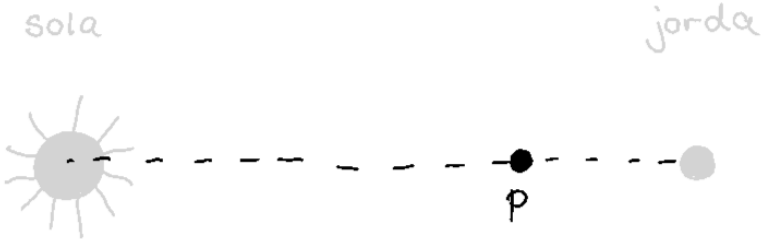


b Gravitasjonskreftene er minst når planeten er lengst fra stjerna:

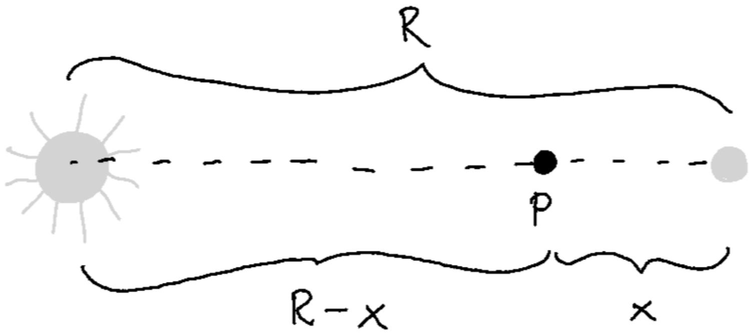


3.18

a Siden sola har større masse enn jorda, må punktet ligge nærmere jorda enn sola for at kraftsummen skal bli lik null:



b Vi kaller avstanden mellom punktet og jorda for x, og lar R være avstanden mellom jorda og sola. Massen til gjenstanden er m.



For at kraftsummen skal være null, må vi ha:

$$\gamma \frac{M_{\text{sol}} m}{(R-x)^2} = \gamma \frac{M_{\text{jord}} m}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{M_{\text{sol}}}{(R-x)^2} = \frac{M_{\text{jord}}}{x^2}$$

Vi setter inn tall for massene og avstanden R, og bruker CAS til å løse for x:

1	Mj := $5.972 \cdot 10^{24}$ → **Mj := 5972000000000000000000000**
2	Ms := $1.99 \cdot 10^{30}$ → **Ms := 1990000000000000000000000000000**
3	R := $1.496 \cdot 10^{11}$ → **R := 149600000000**
4	$\frac{\text{Ms}}{(\text{R}-\text{x})^2} = \frac{\text{Mj}}{\text{x}^2}$ → $\frac{1990000000000000000000000000000}{(-x+149600000000)^2} = \frac{5972000000000000000000000}{x^2}$
5	Løs($4) ≈ **{x = −259607929.4285, x = 258710026.0304}**

Løsningen vi leter etter er den med positivt fortegn. Vi ser at punktet har en avstand $x = 258\,710\,026 \text{ m} = 2{,}6 \cdot 10^8$ m fra jorda.

3.19

a $G = \gamma \frac{Mm}{r^2} = \gamma \frac{2M_{\text{j}}m}{(1{,}3r_{\text{j}})^2} = \frac{2}{1{,}3^2} \cdot \gamma \frac{M_{\text{j}}m}{r_{\text{j}}^2} = \frac{2}{1{,}3^2} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot 1{,}00 \text{ kg} = \underline{\underline{11{,}6 \text{ N}}}$

b Fjærvekta ville målt samme vekt, altså 11,6 N. Massen til posen med epler er uavhengig av sted, men hvis vekta viste masse, ville den tilsynelatende massen være $\frac{G}{g} = \frac{11{,}6\ \text{N}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = 1{,}18\ \text{kg}$.

c Tyngdeakselerasjonen er lik $g = \frac{G}{m} = \frac{11{,}6\ \text{N}}{1{,}00\ \text{kg}} = \underline{\underline{11{,}6\ \text{m/s}^2}}$

3.20

Newtons 2. lov og sentripetalakselrasjon gir oss: $\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{M}{r} = v^2$.

Farten er $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$. Vi setter dette uttrykket inn i formelen vi fant over, og løser for masse:

$$\gamma \frac{M}{r} = v^2 \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2} = \frac{4\pi^2 (19\,700\,000\ \text{m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot (6{,}4 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{s})^2} = \underline{\underline{1{,}5 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}}$$

3.21

a $\gamma \frac{Mm}{(2r)^2} = \gamma \frac{Mm}{4r^2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\gamma \frac{Mm}{r^2}\right) = \frac{F}{4}$

b Avstanden må være x slik at:

$$\gamma \frac{Mm}{x^2} = 2F \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{Mm}{x^2} = 2 \cdot \gamma \frac{Mm}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^2} = \frac{2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

3.22

a $g = \gamma \frac{M}{r^2}$ der $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ er gravitasjonskonstanten, M er massen til stjernen, og r er avstanden fra sentrum av stjernen.

b Hvis r dobles blir $g = \gamma \frac{M}{(2r)^2} = \gamma \frac{M}{4r^2} = \frac{1}{4} \cdot \gamma \frac{M}{r^2} = \frac{g}{4}$, så gravitasjonsfeltstyrken blir en firedel så stor.

3.23

a $g = \gamma \frac{M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6371\,000\ \text{m} + 360\,000\ \text{m})^2} = \underline{\underline{8{,}79\ \text{m/s}^2}}$

b Vi lar G_{jord} og g_{jord} være tyngden og tyngdeakselerasjonen på jorda, og G_{ISS} og g_{ISS} være de tilsvarende størrelsene på den internasjonale romstasjonen. Massen til romfareren er den samme på jorden og på ISS, så vi må ha $G_{\text{jord}} = mg_{\text{jord}} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{G_{\text{jord}}}{g_{\text{jord}}}$, og tilsvarende

$$G_{\text{ISS}} = mg_{\text{ISS}} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{G_{\text{ISS}}}{g_{\text{ISS}}}.$$

Dette betyr at $\frac{G_{\text{ISS}}}{g_{\text{ISS}}} = \frac{G_{\text{jord}}}{g_{\text{jord}}} \quad \Rightarrow \quad G_{\text{ISS}} = \frac{g_{\text{ISS}}}{g_{\text{jord}}} \cdot G_{\text{jord}} = \frac{8{,}79\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2} \cdot 750\ \text{N} = \underline{\underline{672\ \text{N}}}$.

3.24

a $g = \gamma \dfrac{M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \dfrac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{\left(1737 \cdot 10^3\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{1{,}6\ \text{m/s}^2}}$

b $g = \gamma \dfrac{M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \dfrac{6{,}4 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{\left(3{,}4 \cdot 10^6\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{3{,}7\ \text{m/s}^2}}$

3.25

MERK: Da fasiten ble laget, ble det brukt noe annerledes verdier for massen til månen, jorda og avstanden enn det som er oppgitt i figuren. Svarene avviker derfor noe fra fasit.

a $g = \gamma \dfrac{m_{\text{måne}}}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \dfrac{7{,}35 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{\left(3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}\right)^2} = 3{,}3247 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{3{,}32 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2}}$

b $g_\text{A} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{7{,}35 \cdot 10^{22}}{\left(3{,}84 \cdot 10^8 - 6{,}371 \cdot 10^6\right)^2}\ \text{m/s}^2 = 3{,}4378 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{3{,}44 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2}}$

$g_\text{B} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{7{,}35 \cdot 10^{22}}{\left(3{,}84 \cdot 10^8 + 6{,}371 \cdot 10^6\right)^2}\ \text{m/s}^2 = 3{,}2171 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{3{,}22 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2}}$

$g_\text{C} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \dfrac{7{,}35 \cdot 10^{22}}{\left(3{,}84 \cdot 10^8\right)^2 + \left(6{,}371 \cdot 10^6\right)^2}\ \text{m/s}^2 = 3{,}3238 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{3{,}32 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2}}$

I alle tilfellene vil akselerasjonen over ha retning rett mot månene. Akselerasjonen i punkt C vil få en vinkel $\theta = \tan^{-1} \dfrac{6{,}371 \cdot 10^6\ \text{m}}{3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}} = 0{,}951^\circ$ med aksen mellom sentrum av jorda og månen.

c Vi lar positiv x-retning være mot høyre.

$a_\text{A} = \Delta g = g_\text{A} - g = 3{,}4378 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 - 3{,}3247 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2$
$= 0{,}1131 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{1{,}13 \cdot 10^{-6}\ \text{m/s}^2}}$

Akselerasjonen er positiv, og har retning mot månen, altså radielt ut fra jorda.

$a_\text{B} = \Delta g = g_\text{B} - g = 3{,}2171 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 - 3{,}3247 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2$
$= -0{,}1076 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{-1{,}08 \cdot 10^{-6}\ \text{m/s}^2}}$

Akselerasjonen er negativ og har retning fra månen. Denne vil derfor også peke radielt ut fra jorda.

Vi dekomponerer akselerasjonen i punkt C:

$g_{\text{C}x} = 3{,}3238 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 0{,}951^\circ = 3{,}3233 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2$

$g_{\text{C}y} = 3{,}3238 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 0{,}951^\circ = 5{,}5166 \cdot 10^{-7}\ \text{m/s}^2$

Akselerasjonen i y-retning (radielt utover fra jordas sentrum), vil ikke se annerledes ut fra jorda. Akselerasjonen i x-retning vil være litt mindre enn akselerasjonen til jorda. Sett fra jorda, får vi:

$a_{\text{C}x} = 3{,}3247 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 - 3{,}3233 \cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 = 1{,}40 \cdot 10^{-8}\ \text{m/s}^2$ i retning vekk fra månen.

$a_{\text{C}y} = 5{,}5166 \cdot 10^{-7}\ \text{m/s}^2$ radielt innover

Akselerasjonen i punkt C sett fra jorda er da

$a_\text{C} = \sqrt{a_{\text{C}x}^2 + a_{\text{C}y}^2}$

$= \sqrt{\left(1{,}40 \cdot 10^{-8}\ \text{m/s}^2\right)^2 + \left(5{,}5166 \cdot 10^{-7}\ \text{m/s}^2\right)^2} = 5{,}5184 \cdot 10^{-7}\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{0{,}552 \cdot 10^{-6}\ \text{m/s}^2}}$

Retningen til akselerasjonen i C $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{1{,}40\cdot 10^{-8}\ \text{m/s}^2}{5{,}5166\cdot 10^{-7}\ \text{m/s}^2}\right) = 1{,}45^\circ$ fra loddrett (den radielle aksen mot jordas sentrum).

d Siden vi antar akselerasjonen er konstant, kan vi bruke bevegelseslikninger for å løse oppgaven.

$$y = \frac{1}{2}a_A t^2 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}1131\cdot 10^{-5}\ \text{m/s}^2 \cdot (15\cdot 60\ \text{s})^2 = \underline{\underline{0{,}46\ \text{m}}} = \underline{\underline{46\ \text{cm}}}$$

e Akselerasjonen til vannet, sett fra jorda, er større i punkt A enn i punkt B. Vannet vil derfor komme lengre i løpet av samme tid, vannstanden blir høyere, og tidevannet er derfor størst ved punkt A.

3.26

a $g = \gamma\dfrac{M}{r_0^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \dfrac{5{,}972\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\left(6371\cdot 10^3\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{9{,}81\ \text{m/s}^2}}$

b $g = \gamma\dfrac{M}{(r_0+h)^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \dfrac{5{,}972\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\left(6371\cdot 10^3\ \text{m} + 8848\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{9{,}79\ \text{m/s}^2}}$

c $g = \gamma\dfrac{M}{(r_0+h)^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \dfrac{5{,}972\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\left(6371\cdot 10^3\ \text{m} + 14\,000\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{9{,}77\ \text{m/s}^2}}$

d Nei, det er det ikke. Selv ved en høyde på14 000 m er forskjellen bare i overkant av

$$\frac{9{,}81 - 9{,}77}{9{,}81}\cdot 100\ \% = 0{,}4\ \%$$

3.27

a $g = \gamma\dfrac{M}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \dfrac{1{,}4\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}\ \text{kg}}{\left(10\cdot 10^3\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{1{,}9\cdot 10^{12}\ \text{N/kg}}}$

b $g = \gamma\dfrac{M}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \dfrac{1{,}4\cdot 1{,}99\cdot 10^{30}\ \text{kg}}{\left(10\cdot 10^6\cdot 10^3\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{1{,}9\ \text{N/kg}}}$

3.28

Vi bruker Newtons 2. lov, og setter inn uttrykket for gravitasjonskraft og sentripetalakselerasjon:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

Vi bruker at avstanden fra sentrum til teleskopet er lik jordradien pluss høyden over jordoverflaten Når vi løser for farten, får vi:

$$v = \sqrt{\gamma\frac{M}{r_0+h}} = \sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5{,}972\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6371\cdot 10^3\ \text{m} + 600\cdot 10^3\ \text{m}}} = 7559\ \text{m/s} = \underline{\underline{7{,}56\ \text{km/s}}}$$

Vi finner rundetiden:

$$s = vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} = \frac{2\pi(r_0+h)}{v} = \frac{2\pi\left(6371\cdot 10^3\ \text{m} + 600\cdot 10^3\ \text{m}\right)}{7559\ \text{m/s}} = \underline{\underline{5794\ \text{s}}} = \underline{\underline{97\ \text{min}}}$$

3.29

a Vi bruker Newtons 2. lov, setter inn uttrykket for gravitasjonskraft og sentripetalakselerasjon, og løser for farten:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{\gamma M}{r}$$

Vi bruker at $s = vt \quad \Rightarrow \quad v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$. Når vi setter dette inn i uttrykket over, får vi:

$$\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{\gamma M}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{\gamma M}{r}$$

Vi løser for radius og setter inn tall. Da får vi:

$$r = \left(\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$= \left(\frac{6,67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,972\cdot 10^{24}\ \text{kg}\cdot(96\cdot 60\ \text{s})^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 6,943\cdot 10^6\ \text{m} = \underline{\underline{6,9\cdot 10^6\ \text{m}}}$$

b $r = r_0 + h \quad \Rightarrow \quad h = r - r_0 = 6,943\cdot 10^6\ \text{m} - 6,371\cdot 10^6\ \text{m} = 5,724\cdot 10^5\ \text{m}$

Dette gir en høyde på ca. 570 km.

3.30

a Vi bruker Newtons 2. lov, setter inn uttrykket for gravitasjonskraft og sentripetalakselerasjon, og løser for farten:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5,972\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6,371\cdot 10^6 + 10\,000}} = 7901\ \text{m/s} = \underline{\underline{7,90\ \text{km/s}}}$$

b Dersom farten er bare litt høyere, vil kula gå i en ellipsebane rundt jordkloden. Dersom den er høyere enn unnslippingsfarten (mer om dette i kapittel 3D), vil den bevege seg ut av jordas gravitasjonsfelt og ikke komme tilbake.

3.31

a 1,2 m er mye mindre enn månens radius, Vi ser derfor bort fra denne høyden, og regner med $r = 1737\cdot 10^3\ \text{m}$. Månens masse er $M = 7,35\cdot 10^{22}\ \text{kg}$. Siden utgangsfarten er vannrett, må denne være den samme som sirklingsfarten. Vi bruker Newtons 2. lov, setter inn uttrykket for gravitasjonskraft og sentripetalakselerasjon, og løser for farten:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6,67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 7,35\cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1737\cdot 10^3\ \text{m}}} = 1680\ \text{m/s} = \underline{\underline{1,7\ \text{km/s}}}$$

b Vi bruker at

$$s = vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi\cdot 1737\cdot 10^3\ \text{m}}{1680\ \text{m/s}} = 6496\ \text{s} = 108\ \text{min} = \underline{\underline{1\ \text{h}\ 48\ \text{min}}}$$

3.32

a $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot 1,88\cdot 10^9\ \text{m}}{16,7\cdot 24\cdot 60\cdot 60\ \text{s}} = 8187\ \text{m/s} = \underline{\underline{8,19\ \text{km/s}}}$

b Vi bruker Newtons 2. lov, setter inn uttrykket for gravitasjonskraft og sentripetalakselerasjon, og løser for massen til planeten:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{v^2 r}{\gamma} = \frac{(8187\ \text{m/s})^2 \cdot 1{,}88 \cdot 10^9\ \text{m}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2} = 1{,}8891 \cdot 10^{27}\ \text{kg} = \underline{\underline{1{,}89 \cdot 10^{27}\ \text{kg}}}$$

Vi slår opp massene i en fysikktabell, og finner at planeten vi ser på må være Jupiter.

c Vi slår opp, og finner at Jupiter har en radius på omtrent $70 \cdot 10^6\ \text{m}$. Vi setter den mekaniske energien lik null ved overflaten til planeten, og løser for farten:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{Mm}{r_0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 1{,}8891 \cdot 10^{27}\ \text{kg}}{70 \cdot 10^6\ \text{m}}} = 6{,}0 \cdot 10^4\ \text{m/s} = \underline{\underline{60\ \text{km/s}}}$$

3.33

a Vi bruker Newtons 2. lov, setter inn uttrykket for gravitasjonskraft og sentripetalakselerasjon, og løser for farten:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}371 \cdot 10^6 + 280 \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7739\ \text{m/s} = \underline{\underline{7{,}74\ \text{km/s}}}$$

b Vi finner omløpstiden:

$$s = vt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} \quad \Rightarrow$$

$$T = \frac{2\pi (r_0 + h)}{v} = \frac{2\pi \cdot (6371 + 280) \cdot 10^3\ \text{m}}{7739\ \text{m/s}} = 5340\ \text{s} = \underline{\underline{90\ \text{min}}}$$

c Astronauten vil se en soloppgang én gang for hvert omløp, så det går 90 min mellom hver soloppgang.

d $\dfrac{24 \cdot 60\ \text{min}}{90\ \text{min}} = \underline{\underline{16}}$

3.34

a Vi lar R være avstanden fra sentrum av hver stjerne, inn til sentrum av sirkelbanen de følger.

Hver av stjernene vil oppleve en tyngdekraft $G = \gamma \dfrac{M^2}{(2R)^2}$.

Denne tyngdekraften må gi hver av dem en sentripetalakselerasjon lik $a_s = \dfrac{v^2}{R}$.

Newtons andre lov gir oss da: $\gamma \dfrac{M^2}{(2R)^2} = \dfrac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad M = \dfrac{4Rv^2}{\gamma}$.

Siden stjernene følger en sirkelbane er $v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{2\pi R}{T} \quad \Rightarrow \quad R = \dfrac{vT}{2\pi}$.

Vi setter dette inn i uttrykket over, og finner at $M = \dfrac{4Rv^2}{\gamma} = \dfrac{4\left(\dfrac{vT}{2\pi}\right)v^2}{\gamma} = \dfrac{2v^3T}{\pi\gamma}$.

b Vi bruker uttrykket fra oppgave a til å finne massen:

$$M=\frac{2v^3T}{\pi\gamma}=\frac{2\cdot\left(113\cdot10^3\ \text{m/s}\right)^3\cdot3{,}96\cdot24\cdot60\cdot60\ \text{s}}{\pi\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2}=4{,}7119\cdot10^{30}\ \text{kg}=\underline{\underline{4{,}71\cdot10^{30}\ \text{kg}}}$$

Sola har en masse på $M_\odot=1{,}99\cdot10^{30}\ \text{kg}$.

Da er $\dfrac{M}{M_\odot}=\dfrac{4{,}7119\cdot10^{30}\ \text{kg}}{1{,}99\cdot10^{30}\ \text{kg}}=2{,}37 \quad\Rightarrow\quad M=\underline{\underline{2{,}37\ M_\odot}}$

c Avstanden mellom stjernene er $2R$. Vi bruker uttrykket fra oppgave a:

$$2R=2\cdot\frac{vT}{2\pi}=2\cdot\frac{113\cdot10^3\ \text{m/s}\cdot3{,}96\cdot24\cdot60\cdot60\ \text{s}}{2\pi}=\underline{\underline{1{,}23\cdot10^{10}\ \text{m}}}.$$

Vi slår opp avstanden mellom sola og Merkur, og finner at den er $d=5{,}8\cdot10^{10}\ \text{m}$.

Da er $\dfrac{d}{2R}=\dfrac{5{,}8\cdot10^{10}\ \text{m}}{1{,}23\cdot10^{10}\ \text{m}}\approx5$.

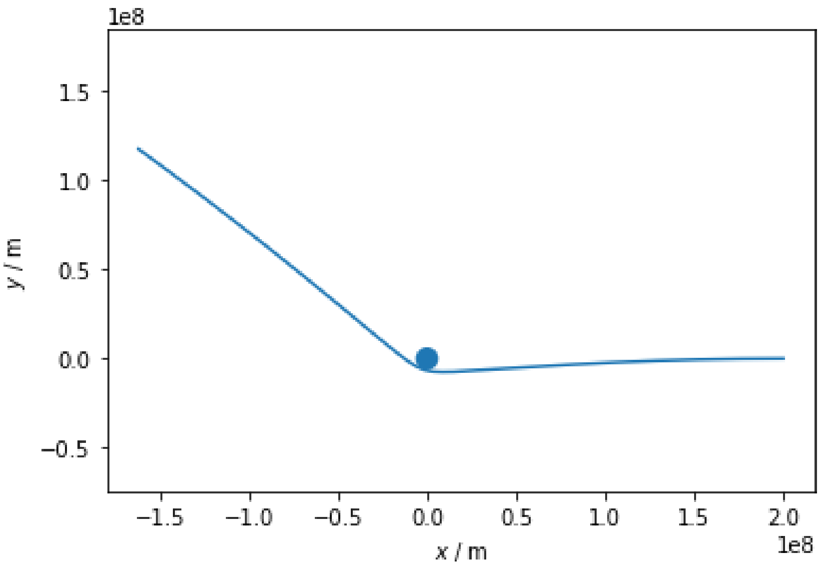
Avstanden mellom de to stjernene er omtrent 1/5 av avstanden mellom sola og Merkur.

3.35

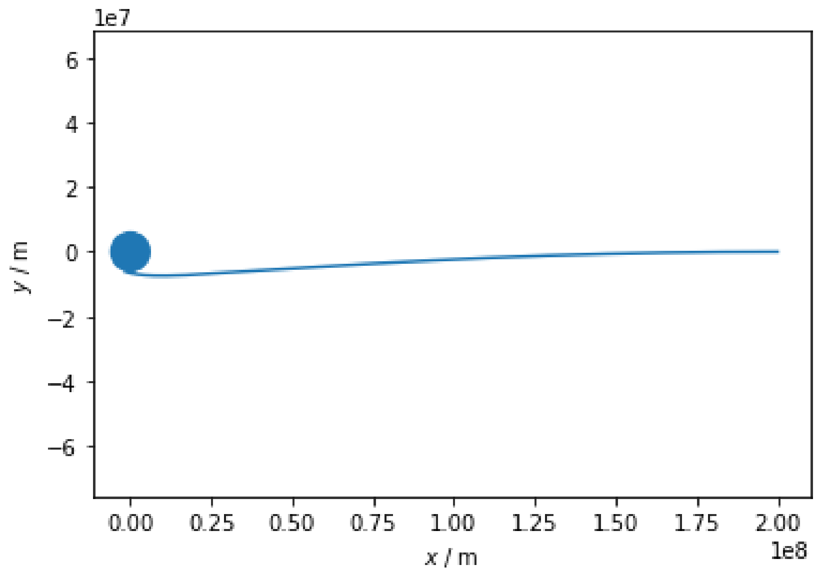
```
from pylab import *

m = 5.0e10                          # masse til meteor (kg)
M = 5.97e24                         # jordmassen (kg)
gamma = 6.67e-11                    # gravitasjonskonstanten (m/s^2)
r_j = 6.37e6                        # jordas radius (m)
r0 = 2.0e8                          # startposisjon (m)
v0 = -10000                         # startfart (m/s)
F_abs = 2.41e9                      # skyvekraft (N)

r = array([r0, 0])                  # posisjonsvektor
v = array([v0, 0])                  # fartsvektor
r_liste = [r]                       # liste med alle posisjonsvektorene

t = 0                               # starttid (s)
dt = 10                             # tidssteg (s)

# Funksjon som regner ut og returnerer akselerasjon
def a(r):
    e_r = -r/norm(r)                # retning for gravitasjon
    G = gamma*m*M/norm(r)**2*e_r    # gravitasjonskraften med retning (N)
    e_f = array([-v[1], v[0]]/norm(v)) # retning for skyvekraft
    F = F_abs*e_f                   # skyvekraft (med retning) (N)
    aks = (G+F)/m                   # akselerasjon (m/s^2)
    return aks

# Løkke som stanser enten når asteroiden kræjser
# eller når  den har avstand større enn startavstanden
while norm(r) > r_j and norm(r) <= r0:
    v = v + a(r)*dt                 # ny fart (m/s)
    r = r + v*dt                    # ny posisjon (m)
    t = t + dt                      # ny tid (s)
```

```
    r_liste = concatenate([r_liste, [r]])   # legger posisjonsvektor i liste

# Grafen tegnes
axis("equal")
gca().add_artist(Circle((0,0), 6.37e6)) # prikk som symboliserer jorda
plot(r_liste[:,0], r_liste[:,1])        # tegner graf
xlabel("$x$ / m")                      # navn på x-akse
ylabel("$y$ / m")                      # navn på y-akse
show()
```

Vi prøver oss fram med forskjellige verdier i linje 9 av programmet over. Med en verdi på $F_{\text{abs}} = 2{,}41 \cdot 10^9\ \text{N}$ unngår asteroiden akkurat så vidt å kræsje med jorda. Banen ser da slik ut:



Med en skyvekraft på $F_{\text{abs}} = 2{,}405 \cdot 10^9\ \text{N}$, vil asteroiden treffe jorda:



3.36

a Geostasjonære satellitter er i ro relativt til et punkt på jordoverflaten, og har derfor samme rotasjonstid som jorda.

b Vi gjør rotasjonstiden om til sekunder:

$$23\ \text{h} + 56\ \text{min} + 4\ \text{s} = (23 \cdot 3600\ \text{s}) + (56 \cdot 60\ \text{s}) + 4\ \text{s} = 86\,164\ \text{s}$$

Vi bruker Newtons 2. lov, setter inn uttrykket for gravitasjonskraft og sentripetal-akselerasjon, og løser for farten: $\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma \dfrac{Mm}{r^2} = \dfrac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \dfrac{\gamma M}{r}$.

Siden banen er sirkelformet, har vi at: $s = vt \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{2\pi r}{T}$.

Når vi setter dette inn i uttrykket over, får vi: $\left(\dfrac{2\pi r}{T}\right)^2 = \dfrac{\gamma M}{r} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \dfrac{\gamma M}{r}$

Vi løser for radius: $r = \left(\dfrac{\gamma M T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$

Baneradien er lik jordradien pluss høyden over jordoverflaten. Vi bruker dette til å finne høyden:

$$r_0 + h = \left(\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \quad \Rightarrow \quad h = \left(\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - r_0$$

Når vi setter inn tall, får vi:

$$\begin{aligned} h &= \left(\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - r_0 \\ &= \left(\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot (86\,164\ \text{s})^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - 6{,}371 \cdot 10^6\ \text{m} \\ &= 4{,}215469 \cdot 10^7\ \text{m} - 6{,}371 \cdot 10^6\ \text{m} \\ &= 3{,}5784 \cdot 10^7\ \text{m} = \underline{\underline{3{,}57 \cdot 10^7\ \text{m}}} \end{aligned}$$

c $v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{2\pi r}{T} = \dfrac{2\pi \cdot 4{,}215469 \cdot 10^7\ \text{m}}{86\,164\ \text{s}} = 3074\ \text{m/s} = \underline{\underline{3{,}07\ \text{km/s}}}$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 635\ \text{kg} \cdot (3074\ \text{m/s})^2 = \underline{\underline{3{,}00 \cdot 10^9\ \text{J}}} = \underline{\underline{3{,}00\ \text{GJ}}}$$

$$E_p = -\gamma \frac{Mm}{r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 635\ \text{kg}}{4{,}2155469 \cdot 10^7\ \text{m}} = \underline{\underline{-6{,}00 \cdot 10^9\ \text{J}}} = \underline{\underline{-6{,}00\ \text{GJ}}}$$

$$E_m = E_k + E_p = 3{,}00 \cdot 10^9\ \text{J} - 6{,}00 \cdot 10^9\ \text{J} = \underline{\underline{-3{,}00 \cdot 10^9\ \text{J}}} = \underline{\underline{-3{,}00\ \text{GJ}}}$$

d På jordoverflaten:

$$\begin{aligned} E_{m0} &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma \frac{Mm}{r_0} = 0 - \gamma \frac{Mm}{r_0} \\ &= -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 635\ \text{kg}}{6371 \cdot 10^3\ \text{m}} = -3{,}9702 \cdot 10^{10}\ \text{J} = -39{,}7\ \text{GJ} \end{aligned}$$

Energien som må tilføres er:

$$\Delta E_m = -3{,}00\ \text{GJ} - (-39{,}7\ \text{GJ}) = \underline{\underline{36{,}7\ \text{GJ}}}$$

3.37

Vi bruker Newtons 2. lov til å finne et uttrykk for sirklingsfarten:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{\gamma M}{r}$$

Vi setter denne farten inn i uttrykket for mekanisk energi:

$$E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\gamma M}{r}\right) - \gamma\frac{Mm}{r} = -\gamma\frac{Mm}{2r}$$

Vi finner differansen mellom den mekaniske energien på starten og slutten:

$$\Delta E_\mathrm{m} = E_\mathrm{m2} - E_\mathrm{m1} = -\gamma\frac{Mm}{2r_2} - \left(-\gamma\frac{Mm}{2r_1}\right) = \frac{\gamma Mm}{2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$= \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}\cdot 5{,}972\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\cdot 478\ \mathrm{kg}}{2}\left(\frac{1}{(6371+1600)\cdot 10^3\ \mathrm{m}} - \frac{1}{(6371+3600)\cdot 10^3\ \mathrm{m}}\right)$$

$$= \underline{\underline{2{,}40\cdot 10^9\ \mathrm{J}}} = \underline{\underline{2{,}40\ \mathrm{GJ}}}$$

3.38

a Vi bruker Newtons 2. lov, setter inn uttrykket for gravitasjonskraft og sentripetalakselerasjon, og løser for farten:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}\cdot 5{,}972\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{6875\cdot 10^3\ \mathrm{m}}} = 7612\ \mathrm{m/s} = \underline{\underline{7{,}61\ \mathrm{km/s}}}$$

b I elipsebanen er satellitten bare påvirket av tyngdekraften, så den mekaniske energien er bevart. Vi har:

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{P}^2 - \gamma\frac{Mm}{r_\mathrm{P}} = \frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 - \gamma\frac{Mm}{r_\mathrm{A}} \quad \Rightarrow \quad v_\mathrm{P}^2 - 2\gamma\frac{M}{r_\mathrm{P}} = v_\mathrm{A}^2 - 2\gamma\frac{M}{r_\mathrm{A}}$$

Vi løser for farten v_A, og får

$$v_\mathrm{A} = \sqrt{v_\mathrm{P}^2 + 2\gamma M\left(\frac{1}{r_\mathrm{A}} - \frac{1}{r_\mathrm{P}}\right)}$$

$$= \sqrt{(10\,040\ \mathrm{m/s})^2 + 2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}\cdot 5{,}972\cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}\left(\frac{1}{45\,760\cdot 10^3\ \mathrm{m}} - \frac{1}{6875\cdot 10^3\ \mathrm{m}}\right)}$$

$$= 1{,}53\cdot 10^3\ \mathrm{m/s} = \underline{\underline{15{,}3\ \mathrm{km/s}}}$$

3.39

Siden både tyngdekraften og skyvekraften virker på asteroiden, er ikke den mekaniske energien bevart. Vi vet at $E_\mathrm{m} = E_\mathrm{m0} + W \quad \Rightarrow \quad E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k0} + E_\mathrm{p0} + F\cdot s$, der F er skyvekraften, og s er avstanden den virker over.

Martin velger å bruke CAS til å løse oppgaven. Han starter med å definere nødvendige størrelser:

1	$m := 5 \cdot 10^{10}$ $\rightarrow$ $\mathbf{m := 50000000000}$
2	$M := 5.97 \cdot 10^{24}$ $\rightarrow$ $\mathbf{M := 5972000000000000000000000}$
3	$g := 6.67 \cdot 10^{-11}$ $\rightarrow$ $\mathbf{g := \frac{667}{10000000000000}}$
4	$r_0 := 2 \cdot 10^8$ $\approx$ $\mathbf{r_0 := 200000000}$
5	$v_0 := -10000$ $\approx$ $\mathbf{v_0 := -10000}$

Deretter setter han opp uttrykkene for kinetisk og potensiell energi på starten, og potensiell energi i det asteroiden snur (da er den i ro, så den kinetiske energien er lik null):

6	$E_{k0} := \frac{1}{2}\, m\, v_0^2$ $\approx$ $\mathbf{E_{k0} := 2.5 \cdot 10^{18}}$
7	$E_{p0} := -g\, \frac{M\, m}{r_0}$ $\approx$ $\mathbf{E_{p0} := -9.96 \cdot 10^{16}}$
8	$E_p := -g\, \frac{M\, m}{r}$ $\approx$ $\mathbf{E_p := \frac{-1.99 \cdot 10^{25}}{r}}$

Martin bruker formelen vi så på begynnelsen, og løser for den kinetiske energien i sluttpunktet. Siden asteroiden snur, vil farten og den kinetiske energien være lik null i dette punktet:

$$E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0} + F \cdot s \quad \Rightarrow \quad E_k = E_{k0} + E_{p0} - E_p + F \cdot s = E_{k0} + E_{p0} - E_p + F\left(r - r_0\right) = 0$$

9	$E_{k0} + E_{p0} - E_p + F\,(r - r_0) = 0$ $\approx$ $\mathbf{\frac{F\, r^2 - 200000000\, F\, r + 2.4 \cdot 10^{18}\, r + 1.99 \cdot 10^{25}}{r} = 0}$

Når asteroiden snur, er skyvekraften like stor som tyngdekraften. Det gir enda en likning:

10	$F = g\, \frac{M\, m}{r^2}$ $\approx$ $\mathbf{F = \frac{1.99 \cdot 10^{25}}{r^2}}$

Når vi løser likningssettet i linje 9 og 10, og setter som krav at radius der asteroiden snur skal være større enn jordradien, får vi:

11 Løs({$9, $10}, {F, r}, r > 6371000)

≈ **{{F = 17987482114.45, r = 33275349.91}}**

Vi finner altså at $F = 17{,}987 \cdot 10^{9}\ \text{N} = \underline{\underline{18 \cdot 10^{9}\ \text{N}}} = \underline{\underline{18\ \text{GN}}}$

3.40

a $G = \gamma \dfrac{Mm}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \dfrac{2{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{kg} \cdot 70\ \text{kg}}{(5001\ \text{m})^2} = 0{,}4667\ \text{N} = \underline{\underline{0{,}47\ \text{N}}}$

b Vi finner sirklingsfarten i en bane 1,0 m over overflaten av Toro:

$$\Sigma F = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\gamma \frac{M}{r}} = \sqrt{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{2{,}5 \cdot 10^{15}\ \text{kg}}{5001\ \text{m}}} = 5{,}774\ \text{m/s} = \underline{\underline{5{,}8\ \text{m/s}}}$$

Sirklingsfarten i banen er 5,8 m/s, så om vi ser bort fra praktiske problemer vil det i prinsippet være mulig å løpe med denne hastigheten.

c $s = vt \quad \Rightarrow \quad t = \dfrac{s}{v} = \dfrac{2\pi r}{v} = \dfrac{2\pi \cdot 5001\ \text{m}}{5{,}774\ \text{m/s}} = 5442\ \text{s} = \underline{\underline{91\ \text{min}}}$

3.41

a Gravitasjonskraft: $G = \gamma \dfrac{Mm}{r^2}$

Potensiell energi: $E_\text{p} = -\gamma \dfrac{Mm}{r}$

Den potensielle energien er lik null når $r = \infty$.

b Mars har en gjennomsnittlig avstand på $2{,}3 \cdot 10^{11}$ m fra sola.

$$E_\text{p} = -\gamma \frac{Mm}{r} = -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{1{,}99 \cdot 10^{30}\ \text{kg} \cdot 10\,000\ \text{kg}}{2{,}3 \cdot 10^{11}\ \text{m}} = -5{,}771 \cdot 10^{12}\ \text{J} = -\underline{\underline{5{,}8\ \text{TJ}}}$$

c Den mekaniske energien er:

$$E_\text{m} = E_\text{k} + E_\text{p} = \frac{1}{2} mv^2 - 5{,}771 \cdot 10^{12}\ \text{J}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10\,000\ \text{kg} \cdot \left(40 \cdot 10^3\ \text{m/s}\right)^2 - 5{,}771 \cdot 10^{12}\ \text{J} = 2{,}229 \cdot 10^{12}\ \text{J} = \underline{\underline{2{,}2\ \text{TJ}}}$$

3.42

1: $\Sigma F = \dfrac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \gamma \dfrac{Mm}{r^2} = \dfrac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \gamma \dfrac{M}{r}$

Større radius gir mindre banefart, så A har mindre banefart enn B, og påstanden er sann.

2: $\Sigma F = ma_\text{s} \quad \Rightarrow \quad \gamma \dfrac{Mm}{r^2} = ma_\text{s} \quad \Rightarrow \quad a_\text{s} = \gamma \dfrac{M}{r^2}$

Større radius gir lavere sentripetalakselrasjon, så A har mindre sentripetalakselrasjon enn B, og påstanden er usann.

3: Vi jobber videre med formelen vi fant i situasjon 1, og bruker at $v = \dfrac{s}{t} = \dfrac{2\pi r}{T}$. Da er

$$v^2 = \gamma \frac{M}{r} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \gamma \frac{M}{r} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{\gamma M}}$$

Større radius gir større omløpstid. A har lengre omløpstid enn B, og påstanden er sann.

Vi kan også argumentere for at omløpstiden må være størst for A direkte fra svaret vi fikk i situasjon 1. Hvis banefarten til A er lavere og strekningen satellitten tilbakelegger er større, må nødvendigvis omløpstiden være lengre.

4: Den kinetiske energien er avhengig av massen til satellittene. Vi vet ikke om disse, så vi kan ikke avgjøre hvilken satellitt som har størst kinetisk energi.

3.43

a Vi finner et uttrykk for unnslippingsfarten ved å sette den mekaniske energien lik null ved overflaten av asteroiden:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \gamma \frac{Mm}{r} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}$$

Massetettheten til asteroiden er

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi r^3}{3}} = \frac{3M}{4\pi r^3}.$$

Vi finner massen som funksjon av massetettheten:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^3} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Vi setter så uttrykket for massen inn i uttrykket for unnslippingsfart og rydder opp:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{2\gamma \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r}} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi\gamma\rho} \cdot r$$

b $v_{0\text{B}} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi\gamma\rho_\text{B}} \cdot r_\text{B} = \sqrt{\frac{8}{3}\pi\gamma\rho_\text{A}} \cdot (3r_\text{A}) = 3 \cdot \sqrt{\frac{8}{3}\pi\gamma\rho_\text{A}} \cdot r_\text{A} = 3v_{0\text{A}} = 3 \cdot 12\ \text{m/s} = \underline{\underline{36\ \text{m/s}}}$

3.44

a Massen til Mars er $M = 6{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{kg}$, og radius til Mars er $r = 3{,}40 \cdot 10^6\ \text{m}$. Den mekaniske energien til en sonde med masse *m*, er gitt ved $E_\text{m} = E_\text{k} + E_\text{p} = \frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{Mm}{r}$. Sonden vil passere Mars hvis $E_\text{m} > 0$. Vi setter inn tall, men regner uten enheter for å gjøre utregningen ryddig.

$$\frac{1}{2} m v^2 - \gamma \frac{Mm}{r} = \frac{1}{2} \cdot (5200)^2 \cdot m - 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{6{,}42 \cdot 10^{23}}{3{,}40 \cdot 10^6 + 650 \cdot 10^3}\right) \cdot m$$
$$= 2{,}9 \cdot 10^6 \cdot m$$

Siden massen ikke kan være negativ, vil $E_\text{m} > 0$, og sonden vil passere Mars.

b Vi finner sirklingsfarten:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 6{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{3{,}39 \cdot 10^6\ \text{m} + 650 \cdot 10^3\ \text{m}}} = 3252\ \text{m/s} = \underline{\underline{3{,}25\ \text{km/s}}}$$

c Vi bruker fartsformelen til å finne akselerasjonen:

$$v = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad a = \frac{(v - v_0)}{t} = \frac{(3,3 - 5,2)\cdot 10^3\ \text{m/s}}{130\ \text{s}} = \underline{\underline{-15\ \text{m/s}^2}}$$

d I sirkelbanen har landingsmodulen mekanisk energi

$$\begin{aligned} E_\text{m} &= \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{Mm}{r} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 1200\ \text{kg}\cdot(3252\ \text{m/s})^2 - 6,67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{6,42\cdot 10^{23}\ \text{kg}\cdot 1200\ \text{kg}}{3,40\cdot 10^6\ \text{m} + 650\cdot 10^3\ \text{m}} \\ &= -6,3425\cdot 10^9\ \text{J} \end{aligned}$$

Når modulen står på bakken, har den mekaniske energi:

$$\begin{aligned} E_\text{m} &= \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{Mm}{r} \\ &= 0\ \text{J} - 6,67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{6,42\cdot 10^{23}\ \text{kg}\cdot 1200\ \text{kg}}{3,40\cdot 10^6\ \text{m}} \\ &= -15,1134\cdot 10^9\ \text{J} \end{aligned}$$

Modulen må kvitte seg med en mekanisk energi lik

$$\Delta E_\text{m} = -6,3425\cdot 10^9\ \text{J} - \left(-15,1134\cdot 10^9\ \text{J}\right) = \underline{\underline{8,77\cdot 10^9\ \text{J}}} = \underline{\underline{8,77\ \text{GJ}}}$$

3.45

a Vi bruker Newtons andre lov med sentripetalakselerasjon.

$$\Sigma F = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \gamma\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{rv^2}{\gamma} = \frac{2,5\cdot 10^{20}\ \text{m}\cdot\left(2,3\cdot 10^5\ \text{m/s}\right)^2}{6,67\cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2} = 1,9828\cdot 10^{41}\ \text{kg} = \underline{\underline{2,0\cdot 10^{41}\ \text{kg}}}$$

b Vi lar $R = 7\cdot 10^{20}$ m være radius til Melkeveien, og $r = 2,5\cdot 10^{20}$ m være radius til solas bane. Hvis massen er jevnt fordelt, vil forholdstallet mellom arealene av sirkelene som de to radiene definerer være lik forholdstallet mellom massen innenfor solbanen (sb) og massen til Melkeveien (Mv).

$$\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{M_\text{sb}}{M_\text{Mv}}$$

$$\Rightarrow \quad M_\text{sb} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2}\cdot M_\text{Mv} = \frac{r^2}{R^2}\cdot M_\text{Mv} = \frac{2,5^2}{7^2}\cdot 2\cdot 10^{41}\ \text{kg} = \underline{\underline{3\cdot 10^{40}\ \text{kg}}}$$

c Det må eksisterer masse som verken er gass, stjerner eller støv, men som påvirker sola med sin tyngdekraft. Denne ukjente massen kalles «mørk materie», og vi vet ennå ikke hva denne mørke materien består av.

d Legg merke til at massetettheten oppgis med enheter til «masse per areal», ikke «masse per volum» som er vanlig. Dette kan vi gjøre fordi vi antar at massen er jevnt fordelt i en skive med jevn tykkelse. Vi har da: $\rho = \frac{M_\text{Mv}}{\pi R^2} = \frac{2\cdot 10^{41}\ \text{kg}}{\pi\left(7\cdot 10^{20}\ \text{m}\right)^2} = 0,1299\ \text{kg/m}^2 = \underline{\underline{0,13\ \text{kg/m}^2}}$.

e Vi ser på en disk med høyde *h*. Stjerna har masse *m*, og følger en sirkelformet bane med radius *r*. Massetettheten i disken er ρ. Massen på innsiden av stjernas bane er *M*. Vi har:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad \gamma\frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}}$$

Disken har volum $V = \pi r^2 h$. Massetettheten til disken er da $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi r^2 h}$.

Når vi løser for M får vi $\rho = \frac{M}{\pi r^2 h} \quad \Rightarrow \quad M = \pi \rho r^2 h$.

Vi setter dette inn i uttrykket vi fant for farten, og får:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{\gamma \pi \rho r^2 h}{r}} = \sqrt{\gamma \pi \rho r h} = \sqrt{\gamma \pi \rho h} \cdot \sqrt{r} = k \cdot \sqrt{r}\,.$$

Legg merke til at størrelsen $\sqrt{\gamma \pi \rho h}$ er en konstant når tettheten og høyden er konstant.

Kapitteltest

Oppgave 1

a Både høyden til «Korset» og Marius' høyde er forsvinnende små i forhold til jordas radius. Vi kan derfor se bort fra disse når vi gjør utregningen:

$$G = \gamma \frac{Mm}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 0{,}150\ \text{kg}}{\left(6371 \cdot 10^3\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{1{,}47\ \text{N}}}$$

b Kraften fra eplet på jorda er like stor som kraften fra jorda på eplet, 1,47 N.

c $$g = \gamma \frac{M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{5{,}972 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{\left(6371 \cdot 10^3\ \text{m}\right)^2} = \underline{\underline{9{,}81\ \text{m/s}^2}}$$

d Vi lar R være avstanden til jordas massesenter slik at $g_R = \frac{g}{2}$. Vi løser for R:

$$\gamma \frac{M}{R^2} = \gamma \frac{M}{2r^2} \quad \Rightarrow \quad R^2 = 2r^2 \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{2} \cdot r = \sqrt{2} \cdot 6371\ \text{km} = 9010\ \text{km}$$

Høyden over jordoverflaten er da $h = R - r = 9010\ \text{km} - 6371\ \text{km} = 2639\ \text{km}$.

Marius må befinne seg omtrent 2639 km, eller $2{,}64 \cdot 10^6$ m.o.h.

Oppgave 2

a $$g = \gamma \frac{M}{r^2} = \gamma \frac{M}{(d/2)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{6{,}42 \cdot 10^{23}\ \text{kg}}{\left(3{,}39 \cdot 10^6\ \text{m}\right)^2} = 3{,}72616\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{3{,}73\ \text{m/s}^2}}$$

b $$G = mg = 3{,}72616\ \text{m/s}^2 \cdot 4{,}0\ \text{kg} = \underline{\underline{14{,}9\ \text{N}}}$$

c $$s = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\ \text{m}}{3{,}72616\ \text{m/s}^2}} = \underline{\underline{7{,}33\ \text{s}}}$$

Oppgave 3

a Newtons andre lov i sirkelbevegelse sier at $\Sigma F = ma = \frac{mv^2}{r}$.

Det er bare tyngdekraften som virker på månen, så $\Sigma F = G = \gamma \frac{Mm}{r^2}$.

Vi setter de to uttrykkene sammen, og får at $\gamma \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{M}{r} = v^2$.

Siden månen går i en tilnærmet sirkelformet bane, har vi $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$.

Vi setter uttrykket for fart inn i formelen vi fant over: $\gamma \frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2$.

Når vi løser for jupiters masse, får vi $\gamma \frac{M}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2}$

b $M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (670\,900 \cdot 10^3 \text{ m})^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot (3{,}55 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s})^2} = \underline{\underline{1{,}90 \cdot 10^{27} \text{ kg}}}$

Oppgave 4

a $T = 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s} = 86\,400 \text{ s}$

b Vi bruker Newtons andre lov med sentripetalakselerasjon, og setter kraftsummen lik tyngdekraften:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad G = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{Mm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{M}{r} = v^2$$

Vi antar at satellitten går i sirkelbane. Da er $v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi r}{T}$.

Vi setter uttrykket for farten inn i formelen vi fant over:

$$\gamma \frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

Når vi løser for radius, får vi:

$$r = \left(\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = \left(\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot 5{,}972 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot (86\,400 \text{ s})^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$= 42{,}232 \cdot 10^6 \text{ m} = 42\,232 \text{ km}$$

Vi lar r_0 være jordradien og h være høyden over jordoverflaten. Da er

$$r = r_0 + h \quad \Rightarrow \quad h = r - r_0 = 42\,232 \text{ km} - 6371 \text{ km} = 35\,861 \text{ km} = \underline{\underline{3{,}6 \cdot 10^7 \text{ m}}}$$

c Vi bruker uttrykket fra oppgave b:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 42{,}232 \cdot 10^6 \text{ m}}{86\,400 \text{ s}} = 3071 \text{ m/s} = \underline{\underline{3{,}1 \text{ km/s}}}$$

Oppgave 5

a Vi kan legge nullpunktet for potensiell energi hvor vi vil. Når vi regner med himmellegemer, er det vanlig å legge nullpunktet ved $r = \infty$. I dette tilfellet vil den potensielle energien alltid være negativ.

b Siden $E_m = E_k + E_p$, og den potensielle energien er negativ (hvis vi velger nullpunktet på samme måte som i oppgave a), vil den totale mekaniske energien være negativ dersom absoluttverdien av den kinetiske energien er mindre enn absoluttverdien av den potensielle energien. Et eksempel på dette er hvis noe står i ro på overflaten av jorda eller et annet himmellegeme.

c Formelen for kinetisk energi er $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Siden masse ikke kan være negativ og farten er kvadrert, kan den kinetiske energien ikke være negativ.

Oppgave 6

a $g = \gamma \frac{M}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \cdot \frac{6{,}3 \cdot 10^{14} \text{ kg}}{(4{,}0 \cdot 10^3 \text{ m})^2} = 0{,}002626 \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{0{,}0026 \text{ m/s}^2}}$

b Den totale mekaniske energien er

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{m}} &= E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}}\\ &= \frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma\frac{Mm}{r}\\ &= \left(\frac{1}{2}v_0^2 - \gamma\frac{M}{r}\right)\cdot m\\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot(3{,}4\ \mathrm{m/s})^2 - 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}\cdot\frac{6{,}3\cdot10^{14}\ \mathrm{kg}}{4{,}0\cdot10^{3}\ \mathrm{m}}\right)\cdot m\\ &= -4{,}72525\ \mathrm{J/kg}\cdot m\\ &= -4{,}7\ \mathrm{J/kg}\cdot m\end{aligned}$$

For ordens skyld gjør vi også en enhetsanalyse for å vise at svaret har riktig enhet.
Vi viser først at det første leddet har samme benevning som svaret:

$$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s^2}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{kg}} = \mathrm{m^2/s^2} = (\mathrm{m/s})^2$$

Vi viser så at det andre leddet har riktig enhet:

$$\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}\cdot\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{kg}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}$$

c Vi bruker bevaring av mekanisk energi til å finne ut hvor høyt flaska kommer. I det høyeste punktet, er farten lik null. Vi finner først avstanden til asterodens sentrum:

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}mv^2 - \gamma\frac{Mm}{r} = 0 - \gamma\frac{Mm}{r} = -4{,}7\ \mathrm{J/kg}\cdot m \quad\Rightarrow\quad \gamma\frac{M}{r} = 4{,}7\ \mathrm{J/kg}$$

$$\Rightarrow\quad r = \frac{\gamma M}{4{,}7\ \mathrm{J/kg}} = \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}\cdot6{,}3\cdot10^{14}\ \mathrm{kg}}{4{,}7\ \mathrm{J/kg}} = 8941\ \mathrm{m} = 8{,}9\ \mathrm{km}$$

Høyden over overflaten blir $8{,}9\ \mathrm{km} - 4{,}0\ \mathrm{km} = \underline{\underline{4{,}9\ \mathrm{km}}}$

d Gravitasjonsfeltstyrken når flaska snur er

$$g = \gamma\frac{M}{r^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}\cdot\frac{6{,}3\cdot10^{14}\ \mathrm{kg}}{(8941\ \mathrm{m})^2} = \underline{\underline{5{,}3\cdot10^{-4}\ \mathrm{m/s^2}}}$$

e Når flaska akkurat er kommet utenfor asteroidens gravitasjonsfelt, er den potensielle energien lik null. Den minste farten den kan ha for å nå dette, er hvis den kommer dit og deretter stanser opp. Da er også den kinetiske energien lik null. Når både den potensielle og kinetiske energien er lik null, vil den mekaniske energien også være lik null.

f Vi må finne hvilken fart flaska må få ved overflaten for at den mekaniske energien skal være lik null:

$$E_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma\frac{Mm}{r_0} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}v_0^2 = \gamma\frac{M}{r_0}$$

$$\Rightarrow\quad v = \sqrt{2\gamma\frac{M}{r_0}} = \sqrt{2\cdot6{,}67\cdot10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}\frac{6{,}3\cdot10^{14}\ \mathrm{kg}}{4{,}0\cdot10^{3}\ \mathrm{m}}} = \underline{\underline{4{,}6\ \mathrm{m/s}}}$$