1 Rettlinjet bevegelse

1.1

a Vi kan derivere eller sammenlikne med posisjonslikning 2 for å finne fart og akselerasjon. Her velger vi å derivere:

$$v(t) = s'(t) = -2 \cdot 1{,}70t + 5{,}06 = -3{,}40t + 5{,}06 \quad \Rightarrow \quad v(0) = 5{,}06$$

$$a(t) = v'(t) = -3{,}40$$

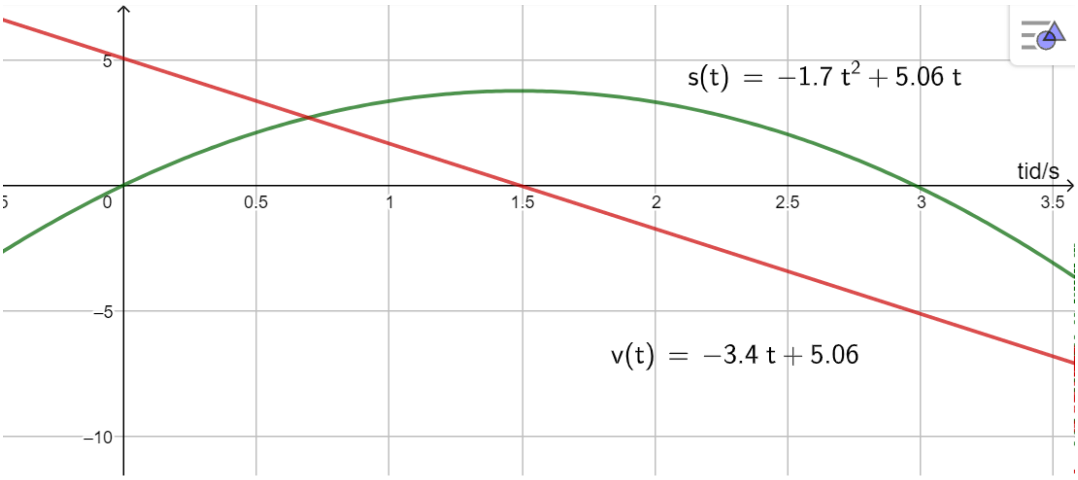
Startfarten er 5,06 m/s oppover skråplanet, og akselerasjonen er 3,40 m/s^2 nedover skråplanet.

b $s(2{,}00) = -1{,}70 \cdot 2{,}00^2 + 5{,}06 \cdot 2{,}00 = 3{,}32$

Vogna er 3,32 m fra startpunktet.

1.2

a



b Siden vi allerede har skrevet inn fartsfunksjonen i GeoGebra i oppgave a, velger vi å bruke denne til å løse oppgaven:

$s(t) = -1.7\,t^2 + 5.06\,t$

$v(t) = -3.4\,t + 5.06$

$a = v(2)$

$\rightarrow$ -1.74

Etter 2,00 s er farten er 1,74 m/s nedover skråplanet.

1.3

a Vi lar positiv retning være oppover, og vet at: $a = -g = -9{,}81$ m/s, $v_0 = 7{,}3$ m/s og $v = 0$ m/s i toppunktet. Vi bruker den tidløse formelen, og finner

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{(7{,}3\ \text{m/s})^2}{2 \cdot \left(-9{,}81\ \text{m/s}^2\right)} = \underline{\underline{2{,}7\ \text{m}}}$$

b $v = v_0 + at = 7{,}3\ \text{m/s} - 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}3\ \text{s} = \underline{\underline{-5{,}5\ \text{m/s}}}$

Siden farten har negativt fortegn og vi har definert positiv retning oppover, har ballen retning nedover ved dette tidspunktet.

c Når ballen er tilbake i utgangspunktet, er $s = 0$. Vi bruker posisjonsformel 2 og finner

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \left(v_0 + \frac{1}{2}at\right)\cdot t$. Da må $v_0 + \frac{1}{2}at = 0$ eller $t = 0$. Den siste likningen gir oss startpunktet, så vi løser den første likningen og finner

$$v_0 + \frac{1}{2}at = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 - \frac{1}{2}gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 7{,}3\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = \underline{\underline{1{,}5\ \text{s}}}.$$

For å sjekke svaret med en annen metode, kan vi f.eks. tegne grafen i GeoGebra og se at toppunktet er ved 1,5 s.

1.4

a **Vi bruker formelen for arealet av en trekant:** $A = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{50\ \text{s} \cdot 30\ \text{m/s}}{2} = \underline{\underline{750\ \text{m}}}$

b **Den rette linja har stigningstall** $-\frac{30}{50} = -0{,}60$ **og konstantledd** 30**. Dette gir funksjonsuttrykket** $v(t) = -0{,}60t + 30$**. Når vi regner ut bremselengden i CAS får vi:**

1	Integral(−0.60t + 30, 0, 50)
	→ **750**

1.5

Vi integrerer i GeoGebra, og finner at farten er 2,0 m/s.

1	$\int_0^2 0.01\, t^2 + 1\, dt$
	→ $\mathbf{\frac{152}{75}}$
2	$1
	≈ **2.03**

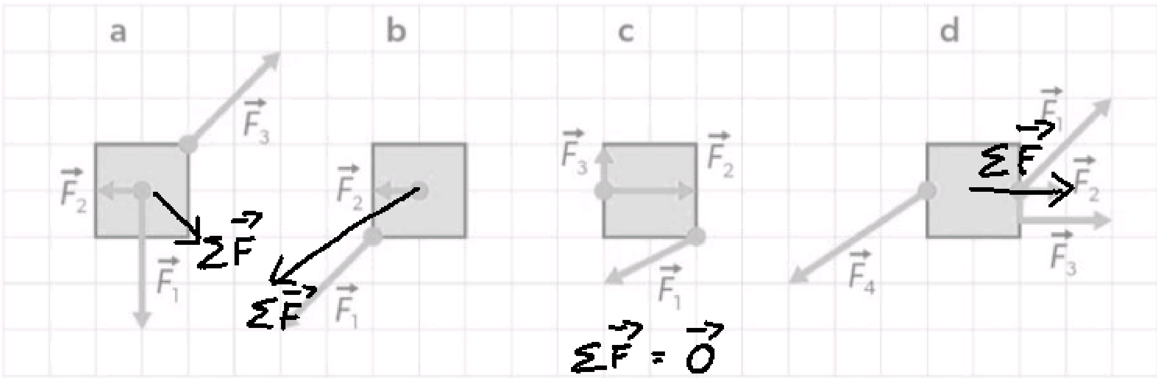
1.6

a Kraftsummen blir mindre. Hvis friksjonskraften blir større enn $G\sin\theta$, der θ er hellningsvinkelen til skråplanet, vil kraftsummen skifte retning og peke oppover skråplanet.

b Hvis bare normalkraften blir større, vil ikke kraftsummen lengre ligge langs skråplanet. Da vil klossen få en akselerasjon og en bevegelse normalt opp fra underlaget, noe som ikke er mulig.

1.7

Vi finner kraftsummen ved å telle antall ruter oppover/nedover og til høyre/venstre:



1.8

Pytagoras gir: $F^2 = F_x^2 + F_y^2 \quad \Rightarrow \quad F_x = \sqrt{F^2 - F_y^2} = \sqrt{(60\ \text{N})^2 - (30\ \text{N})^2} = \underline{\underline{52\ \text{N}}}$

1.9

Vi dekomponerer og finner kraftsummen i x- og y-retning:

$$\Sigma F_x = F_1 - F_2 \cos 30^\circ = 70\ \text{N} - 58\ \text{N} \cdot \cos 30^\circ$$

$$\Sigma F_y = F_2 \sin 30^\circ = 58\ \text{N} \cdot \sin 30^\circ$$

Vi bruker Pytagoras til å finne størrelsen til kraftsummen:

$$\Sigma F = \sqrt{\left(70\ \text{N} - 58\ \text{N} \cdot \cos 30^\circ\right)^2 + \left(58\ \text{N} \cdot \sin 30^\circ\right)^2} = \underline{\underline{35\ \text{N}}}$$

Vi finner retningen fra $\vec{F}_1$ ved å bruke trigonometri:

$$\tan\theta = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{58\ \text{N} \cdot \sin 30^\circ}{70\ \text{N} - 58\ \text{N} \cdot \cos 30^\circ} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\theta = 56^\circ}}$$

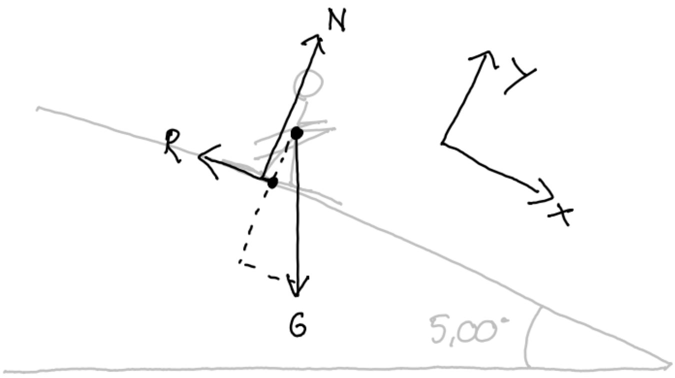
1.10

Siden $\vec{F}_2 \perp \vec{F}_1$ må $F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(4{,}0\ \text{N})^2 + (4{,}0\ \text{N})^2} = \underline{\underline{5{,}7\ \text{N}}}$.

Siden $F_1 = F_2$, må retningen være 45° ned fra vannrett.

1.11

a **Det virker en tyngdekraft, en normalkraft og en friksjonskraft på skiløperen.**



b **Tyngdekraften:** $G = 850\ \text{N}$

Normalkraften: $N = G_x = G \cdot \cos 5{,}00^\circ = 850 \cdot \cos 5{,}00^\circ = \underline{\underline{847\ \text{N}}}$

Friksjonskraften: $R = G_y = G \cdot \sin 5{,}00^\circ = 850 \cdot \sin 5{,}00^\circ = \underline{\underline{74\ \text{N}}}$

1.12

a $\tan\theta = \dfrac{S_x}{S_y} = \dfrac{\Sigma F}{G} = \dfrac{ma}{mg} = \dfrac{a}{g} \quad \Rightarrow \quad a = g\tan\theta = 9{,}81 \cdot \tan 5{,}0^\circ\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{0{,}86\ \text{m/s}^2}}$

b Absoluttverdien av akselerasjonen er $a = \dfrac{40\,/\,3{,}6}{8{,}0}\ \text{m/s}^2 = 1{,}3889\ \text{m/s}^2$.

Vi finner vinkelen med samme formel som vi fant i oppgave a, og har at

$$\tan\theta = \frac{a}{g} \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1{,}3889}{9{,}81}\right) = \underline{\underline{8{,}1^\circ}}.$$

Siden pendelkula må ha en komponent bakover for å kunne bremse, må den henge framover i bilen (foran opphengspunktet).

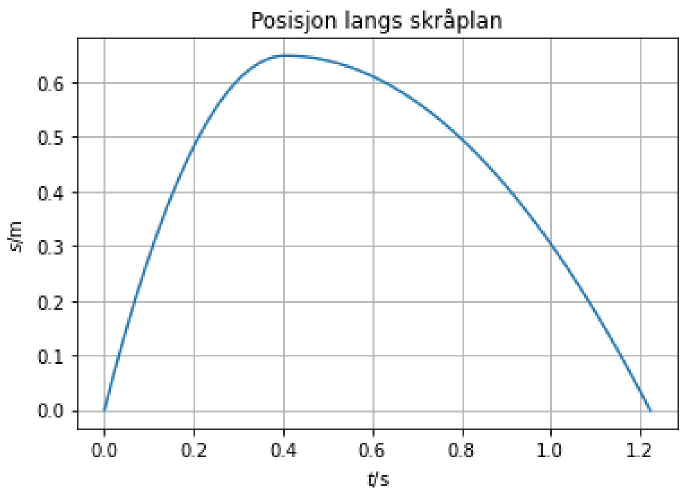
1.13

a Stigningstallet til fartsgrafen er det samme som akselerasjon. På vei oppover virker både tyngdekraften og friksjonskraften nedover. På vei nedover virker tyngdekraften nedover og friksjonskraften oppover langs skråplanet. Da vil kraftsummen, og dermed akselerasjonen, og dermed igjen stigningstallet være lavere.

b Vi endrer linjene 46, 48 og 49 slik at denne delen av koden ser slik ut:

```
45  # Plotter bevegelse
46  plot(t_verdier, s_verdier)
47  xlabel("$t$/s")
48  ylabel("$s$/m")
49  title("Posisjon langs skråplan")
50  grid()
51  show()
```

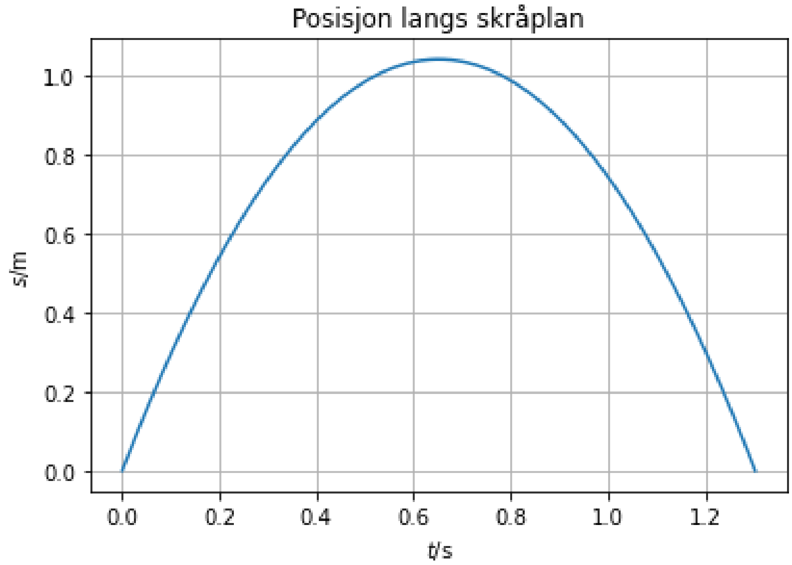
Det gir posisjonsgrafen:



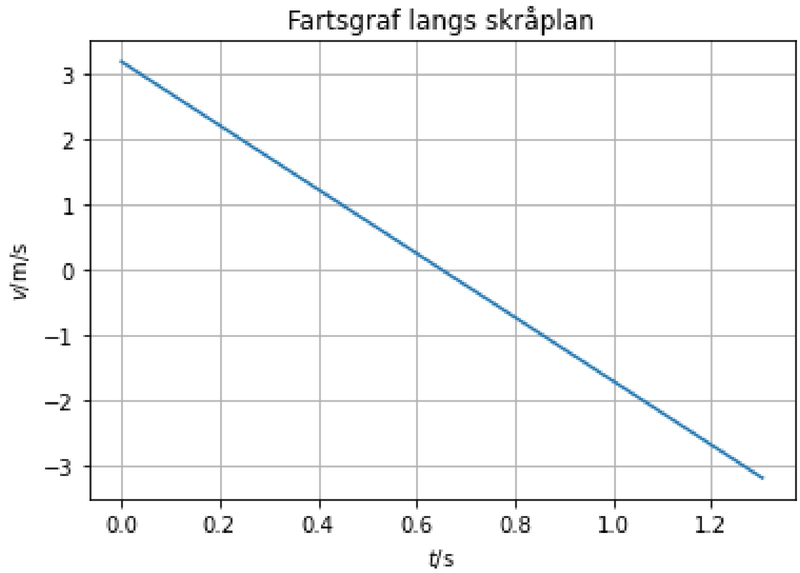
c Vi endrer linje 17 i koden i eksempelet (vi velger å bare kommentere ut uttrykket for friksjonskraften for å kunne bruke det igjen seinere).

```
16  def a(v):
17      R = 0 #-sign(v)*mu*N
18      sum_F = -Gx + R
```

Det gir denne posisjonsgrafen:



Og vi får denne fartsgrafen:



d Vi går tilbake til det opprinnelige uttrykket i linje 17, og øker friksjonstallet i linje 7. Vi ser at klossen stanser raskere, og bruker lengre tid på vei ned.

e Vi prøver oss fram med forskjellige verdier for vinkelen i linje 6. Hvis vinkelen blir mindre, kommer klossen lengre før den snur, og bruker lengre tid på vei tilbake. Hvis vinkelen blir større, kommer klossen litt kortere, og kommer raskere tilbake til utgangspunktet. Jo brattere skråplanet er, jo mindre er forskjellen i stigningstallet/akselerasjonen på vei opp og ned skråplanet.

f Hvis startfarten øker, kommer klossen lengre før den snur, men akselerasjonen er den samme som for startfarten i eksempelet. Hvis startfarten reduseres kommer klossen kortere, men akselerasjonen forblir den samme.

1.14

a Vi endrer startfarten i linje 24, og lar **while**-løkka stanse når tiden er større enn 2,0 s. I tillegg legger vi inn en linje som skriver ut posisjonen.

```
while t <= 2:
    v = v + a(v)*dt
    s = s + v*dt
    t = t + dt

    # Lagring av verdier:
    v_verdier.append(v)
    s_verdier.append(s)
    t_verdier.append(t)

print(s)
```

Når programmet kjører, skriver det ut: **3.4971360505322804.**

Etter 2,0 s er klossen på vei nedover, og er 3,5 m over startpunktet.

b Vi endrer kriteriet for når løkka skal stanse, og legger inn linjer som skriver ut tidspunktet og farten.

```
while s >= 0:
    v = v + a(v)*dt
    s = s + v*dt
    t = t + dt

    # Lagring av verdier:
    v_verdier.append(v)
    s_verdier.append(s)
    t_verdier.append(t)

print(t)
print(v)
```

Programmet skriver ut:

3.178999999999761

-4.108378402209965

Klossen er altså tilbake i utgangspunktet etter ca. 3,2 s, og har da farten 4,1 m/s nedover.

c Vi legger konstanten for luftmotstand inn i lista over konstanter, og legger luftmotstanden inn i akselerasjonsfunksjonen.

```
# Konstanter
m = 0.400               # massen til gjenstanden, kg
theta = radians(30)     # vinkel for skråplanet
mu = 0.35               # friksjonstall
g = 9.81                # tyngdeakselerasjon, m/s^2
k = 3.22*10**(-3)       # tall for luftmotstand
```

```
def a(v):
    R = -sign(v)*mu*N
```

```
    L = -sign(v)*k*v**2
    sum_F = -Gx + R + L
    aks = sum_F/m
    return aks
```

Når programmet kjører finner vi at klossen nå beveger seg 4,2 m oppover skråplanet.

d Vi endrer kriteriet i **while**-funksjonen og legger inn en linje som skriver ut tid til slutt i programmet.

```
while s >= 0:
    v = v + a(v)*dt
    s = s + v*dt
    t = t + dt

    # Lagring av verdier:
    v_verdier.append(v)
    s_verdier.append(s)
    t_verdier.append(t)

print(t)
```

Når programmer kjører, skriver det ut: **3.130999999999766**. Med luftmotstand tar det kortere tid før klossen er tilbake i utgangspunktet. Forskjellen er på rundt 0,05 s, eller 1,5 %.

1.15

a $F = kx \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F}{x} = \frac{240 \text{ N}}{0,30 \text{ m}} = 800 \text{ N/m} = \underline{\underline{0,80 \text{ kN/m}}}$

Vi kan også velge andre sammenhørende verdier for kraften og forkortelsen, og får da samme svar.

b Arbeidet er lik arealet under grafen:

$$W = \frac{0,20 \text{ m} \cdot 160 \text{ N}}{2} = \underline{\underline{16 \text{ J}}}$$

c Vi bruker at den potensielle energien som er lagret i fjæra går over til kinetisk energi. Den potensielle energien i fjæra, er lik arbeidet vi fant i oppgave b.

$$\frac{1}{2}mv^2 = W \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 16 \text{ J}}{8,0 \text{ kg}}} = \underline{\underline{4,0 \text{ m/s}}}$$

d Vi gjorde et arbeid på vogna da vi presset fjæra sammen. Dette blir til potensiell energi i fjæra, som blir omdannet til kinetisk energi når fjæra løses ut.

1.16

Vi legger nullnivået for potensiell energi ved hoppkanten. Den mekaniske energien på toppen er lik den potensielle energien: $E_p = mgh = 63 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot (200 \text{ m} - 135 \text{ m}) = 4,0 \cdot 10^4 \text{ J} = 40 \text{ kJ}$

Den mekaniske energien ved kanten er lik den kinetiske energien:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 63 \text{ kg} \cdot \left(\frac{100}{3,6}\right)^2 = 2,4 \cdot 10^4 \text{ J} = 24 \text{ kJ}$$

Siden energien ved hoppkanten er mindre enn energien på toppen, er den mekaniske energien ikke bevart.

1.17

Siden støtet skjer ved høyden $h = 0\ \text{m}$, er den mekaniske energien lik den kinetiske energien.

Før støtet: $E_\text{m} = E_\text{k} = \frac{1}{2} m_\text{A} v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}0\ \text{kg} \cdot (2{,}5\ \text{m/s})^2 = \underline{\underline{3{,}1\ \text{J}}}$

Etter støtet: $E_\text{m} = E_\text{k} = \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}0\ \text{kg} \cdot (0{,}8333\ \text{m/s})^2 = \underline{\underline{1{,}0\ \text{J}}}$

1.18

Vi bruker bevaring av bevegelsesmengde for å finne et uttrykk for farten v_etter rett etter støtet:

$$mv = (m + M) v_\text{etter} \quad \Rightarrow \quad v_\text{etter} = \frac{mv}{M + m}$$

Bevaring av mekaniske energi gir at den største mulige høyden er gitt ved:

$$\frac{1}{2}(M + m) v_\text{etter}^2 = (M + m) g h$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{v_\text{etter}^2}{2g} = \left(\frac{m}{M + m}\right)^2 \cdot \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{0{,}58}{150 + 0{,}58}\right)^2 \cdot \frac{(170\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 2{,}2 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = \underline{\underline{2{,}2\ \text{cm}}}$$

1.19

a Knut har størst nøyaktighet. Hans piler viser få systematiske feil.

b Knut har størst presisjon. Alle hans piler treffer nær målet, og viser få tilfeldige feil.

c En viktig forskjell er at vi i en dart-konkurranse vet hvor målet («fasiten») er. I fysikkforsøk prøver vi å treffe så godt vi kan, og bruker våre egne resultater – i overført betydning – til å forsøke å forutsi hvor målet er.

1.20

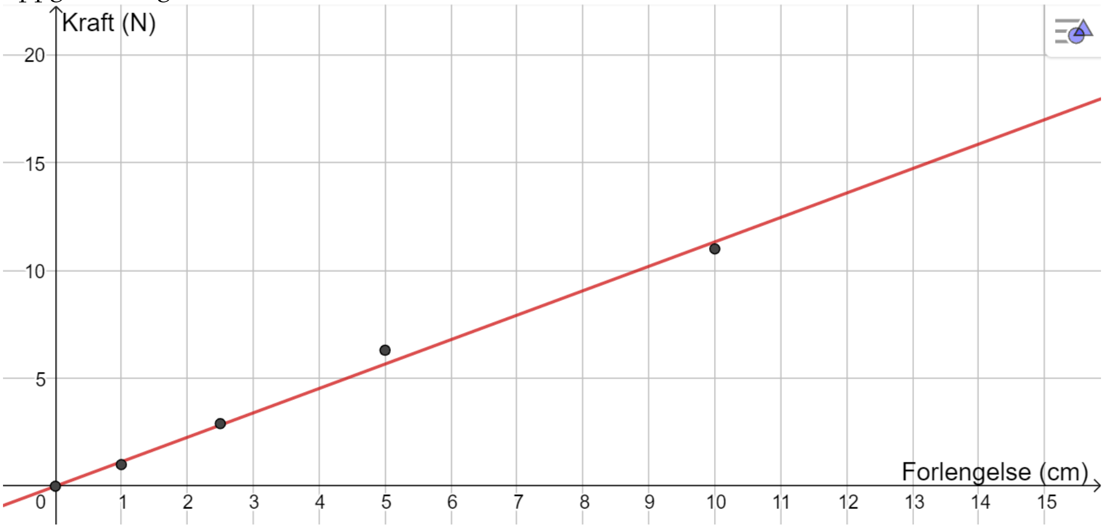
a $\frac{7{,}15 + 7{,}47 + 7{,}45 + 7{,}26 + 7{,}54 + 7{,}40}{6}\ \text{kN} = 7{,}3783\ \text{kN} = \underline{\underline{7{,}38\ \text{kN}}}$

b $\Delta F = \frac{7{,}54 - 7{,}15}{2}\ \text{kN} = 0{,}1950\ \text{kN} = \underline{\underline{0{,}20\ \text{kN}}}$

c $\frac{\Delta F}{F} = \frac{0{,}1950}{7{,}3783} = \underline{\underline{0{,}026}} = \underline{\underline{2{,}6\ \%}}$

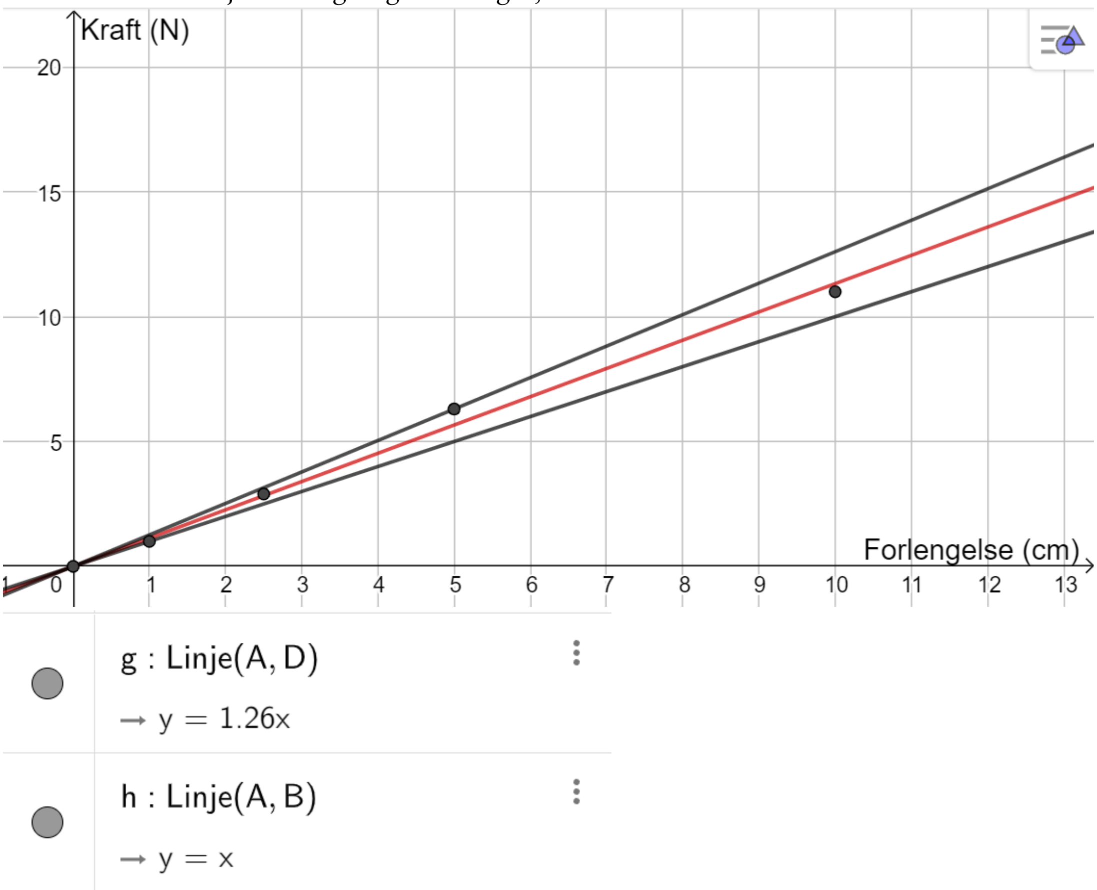
1.21

a Vi tegnet punktene i GeoGebra. I figuren under er også grafen til funksjonsuttrykket vi finner i oppgave b tegnet inn.



b Vi brukte funksjonen «regresjon» med funksjonsuttrykk på formen $y = ax$ for å tvinge grafen gjennom origo. Da fant vi at funksjonen som passer best er $F = 1{,}13x$.

c Vi prøver oss fram, og finner at linjene som går gjennom origo og de målepunktene som gir den mest avvikende linja har stigningstall 0 og 1,26.



Den absolutte usikkerheten blir da $\Delta F = \dfrac{1{,}26 - 1{,}00}{2}$ N/m = $\underline{\underline{0{,}13\ \text{N/m}}}$

1.22

a Vi vet: $v_0 = 4{,}5\ \text{m/s}$, $v = 9{,}5\ \text{m/s}$, $s = 35\ \text{m}$.

Vi bruker posisjonsformel 1 til å finne tiden:

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2s}{v_0 + v} = \frac{2 \cdot 35\ \text{m}}{4{,}5\ \text{m/s} + 9{,}5\ \text{m/s}} = \underline{\underline{5{,}0\ \text{s}}}$$

Vi bruker den tidløse formelen til å finne akselerasjonen:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{(9{,}5\ \text{m/s})^2 - (4{,}5\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 35\ \text{m}} = \underline{\underline{1{,}0\ \text{m/s}^2}}$$

b Vi vet: $v_0 = 9{,}5\ \text{m/s}$, $v = 0\ \text{m/s}$, $a = -0{,}57\ \text{m/s}^2$.

Vi bruker fartsformelen for å finne tiden: $v = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{v - v_0}{a} = \dfrac{0\ \text{m/s} - 9{,}5\ \text{m/s}}{-0{,}57\ \text{m/s}^2} = \underline{\underline{17\ \text{s}}}$

Vi bruker den tidløse formelen til å finne strekningen:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{(0\ \text{m/s})^2 - (9{,}5\ \text{m/s})^2}{2 \cdot \left(-0{,}57\ \text{m/s}^2\right)} = \underline{\underline{79\ \text{m}}}$$

1.23

a Vi vet: $v_0 = 1{,}0\ \text{m/s}$, $v = 5{,}0\ \text{m/s}$, $t = 10{,}0\ \text{s}$.

Vi bruker fartsformelen til å finne akselerasjonen:

$$v = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{5{,}0\ \text{m/s} - 1{,}0\ \text{m/s}}{10{,}0\ \text{s}} = \underline{\underline{0{,}40\ \text{m/s}^2}}$$

b Vi bruker posisjonsformel 1 for å finne strekningen:

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t = \frac{1}{2}(1{,}0\ \text{m/s} + 5{,}0\ \text{m/s}) \cdot 10{,}0\ \text{s} = \underline{\underline{30\ \text{m}}}$$

c Vi vet: $v_0 = 5{,}0\ \text{m/s}$, $v = 0\ \text{m/s}$, $t = 0{,}20\ \text{s}$.

Vi bruker fartsformelen til å finne akselerasjonen:

$$v = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0\ \text{m/s} - 5{,}0\ \text{m/s}}{0{,}20\ \text{s}} = \underline{\underline{-25\ \text{m/s}^2}}$$

1.24

Vi finner startfarten: $\quad v_0 = \dfrac{s}{t} = \dfrac{200\ \text{m}}{5\ \text{s}} = 40\ \text{m/s}$

Vi vet nå: $v_0 = 40\ \text{m/s}$, $s = 600\ \text{m}$, $v = 0\ \text{m}$.

Vi bruker den tidløse formelen til å finne akselerasjonen:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{(0\ \text{m/s})^2 - (40\ \text{m/s})^2}{2 \cdot 600\ \text{m}} = \underline{\underline{1{,}3\ \text{m/s}^2}}$$

Vi bruker posisjonsformel 2 til å finne tiden:

$$s = \frac{1}{2}(v_0 + v)t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2s}{v_0 + v} = \frac{2 \cdot 600\ \text{m}}{40\ \text{m/s} + 0\ \text{m/s}} = \underline{\underline{30\ \text{s}}}$$

1.25

a Vi velger positiv retning nedover. Da er: $s = 51{,}8\ \text{m}$, $v_0 = 0\ \text{m/s}$, $a = 9{,}81\ \text{m/s}$.

Vi bruker posisjonsformel 2 til å finne tiden. Formelen kan forenkles litt siden $v_0 = 0\ \text{m/s}$.

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 51{,}8\ \text{m}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}} = \underline{\underline{3{,}25\ \text{s}}}$$

b Vi bruker den tidløse formelen til å finne sluttfarten. Også her kan formelen forenkles.

$$v^2 = v_0^2 + 2as = 2as \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2as} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 51{,}8\ \text{m}} = 31{,}8797\ \text{m/s} = \underline{\underline{31{,}9\ \text{m/s}}}$$

c Vi vet: $t = 1{,}00\ \text{s}$, $v = 31{,}8797\ \text{m/s}$, $a = 9{,}81\ \text{m/s}^2$. Vi bruker først fartsformelen til å finne et uttrykk for startfarten: $v = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad v_0 = v - at$. Vi setter dette inn i posisjonsformel 2, og bruker dette til å finne strekningen:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = (v - at)t + \frac{1}{2}at^2 = vt - \frac{1}{2}at^2$$

$$= 31{,}8797\ \text{m/s} \cdot 1{,}00\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot (1{,}00\ \text{s})^2 = \underline{\underline{27{,}0\ \text{m}}}$$

1.26

a Vi velger positiv retning oppover. Da er: $s = 0\ \text{m}$, $a = -9{,}81\ \text{m/s}^2$, $t = 3{,}6\ \text{s}$.
Vi bruker posisjonsformel 2 til å finne startfarten. Siden vi er tilbake i utgangspunktet, har vi :

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \left(v_0 + \frac{1}{2}at\right)t = 0$. Siden $t \neq 0$, må vi ha $v_0 + \frac{1}{2}at = 0$. Dette gir at

$$v_0 = -\frac{1}{2}at = -\frac{1}{2} \cdot \left(-9{,}81\ \text{m/s}^2\right) \cdot 3{,}6\ \text{s} = 17{,}658\ \text{m/s} = \underline{\underline{18\ \text{m/s}}}.$$

Vi bruker den tidløse formelen med s som ukjent og for å finne høyden. I toppen er $v = 0\ \text{m/s}$, så vi har $v^2 = v_0^2 + 2as \quad \Rightarrow \quad s = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2a} = \dfrac{(0\ \text{m/s})^2 - (17{,}658\ \text{m/s})^2}{2 \cdot \left(-9{,}81\ \text{m/s}^2\right)} = 15{,}8922\ \text{m} = \underline{\underline{16\ \text{m}}}$

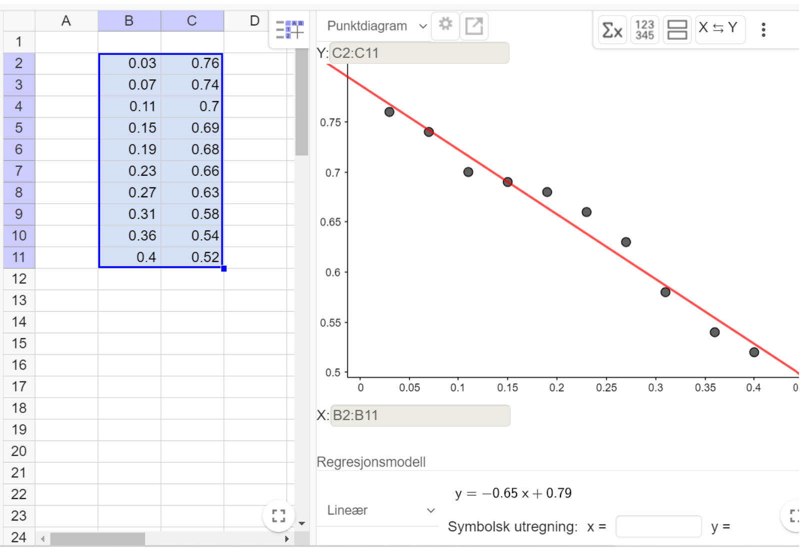
b Vi bruker $v_0 = 17{,}658\ \text{m/s}$, $a = -9{,}81\ \text{m/s}^2$, $t = 3{,}9\ \text{s}$ til å finne sluttposisjonen:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 17{,}658\ \text{m/s} \cdot 3{,}9\ \text{s} + \frac{1}{2} \cdot \left(-9{,}81\ \text{m/s}^2\right) \cdot (3{,}9\ \text{s})^2 = \underline{\underline{-5{,}7\ \text{m}}}$$

Siden vi satt nullnivået for høyden ved startpunktet, må det ligge 5,7 m over bakken.

1.27

a Siden vi vet at akselerasjonen er konstant, får vi en lineær funksjon. Vi velger å bruke **GeoGebra** til å gjøre regresjonen. Når vi sammenligner uttrykket $y = -0{,}65x + 0{,}79$ med fartsformelen $v = v_0 + at$ (med tiden som variabel), ser vi at $a = -0{,}65\ \text{m/s}^2$ og $v_0 = 0{,}79\ \text{m/s}$.



b Vi kopierer funksjonen over i grafikkfeltet, og leser av tiden når farten er blitt 0 m/s. Dette tilsvarer nullpunktet til fartsfunksjonen. Vi finner da at farten er lik null etter 1,2 s.

g(x) = RegPoly(l1, 1)
→ −0.65 x + 0.79

l1 = {(B2, C2), (B3, C3), (B4, C4), (B5, C5), (B6, C6), (B7, C7), (B8, C8), (B9, C9), (B10, C10), (B11, C11)}
→ {(0.03, 0.76), (0.07, 0.74), (0.11, 0.7), (0.15, 0.69), (0.19, 0.68), (0.23, 0.66), (0.27, 0.63), (0.31, 0.58), (0.36, 0.54), (0.4, 0.52)}

A = Nullpunkt(g)
→ (1.22, 0)

Strekningen vogna har beveget seg, tilsvarer den integrerte av fartsfunksjonen. Vi finner at den har beveget seg 0,48 m.

a = Integral(g, 0, 1.22)
→ 0.48

Vi kan også finne denne strekningen ved å finne arealet under grafen. Vi finner da arealet av en trekant med grunnlinje lik 1,22 s og høyde lik 0,79 m/s og får:

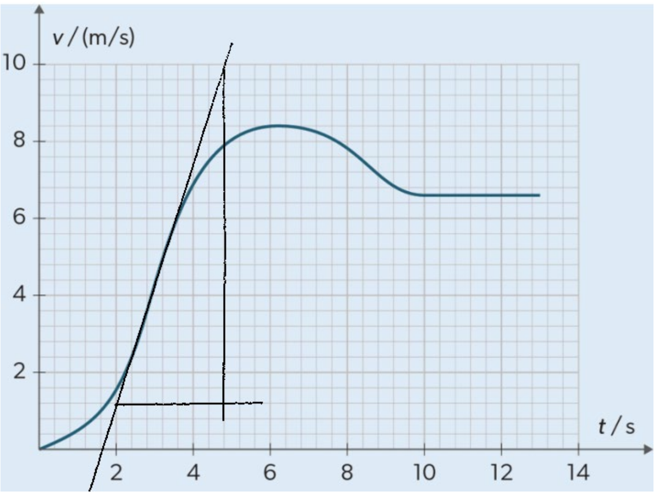
$$s = \frac{1{,}22\ \text{s} \cdot 0{,}79\ \text{m/s}}{2} = \underline{\underline{0{,}48\ \text{m}}}$$

1.28

a Sykkelen har positiv akselerasjon når fartsgrafen har positivt stigningstall. Dette er tilfellet når $0\ \text{s} < t < 6\ \text{s}$.

b Akselerasjonen er lik null når stigningstallet til fartsgrafen er lik null. Dette er tilfellet i toppunktet, der $t = 6\ \text{s}$, og når grafen er vannrett, altså for $t > 10\ \text{s}$.

c Akselerasjonen er størst der fartsgrafen er brattest. Dette ser ut til å være rundt $t = 3\ \text{s}$. Vi skisserer tangenten i dette punktet, og finner stigningstallet ved å lese av to punkter.



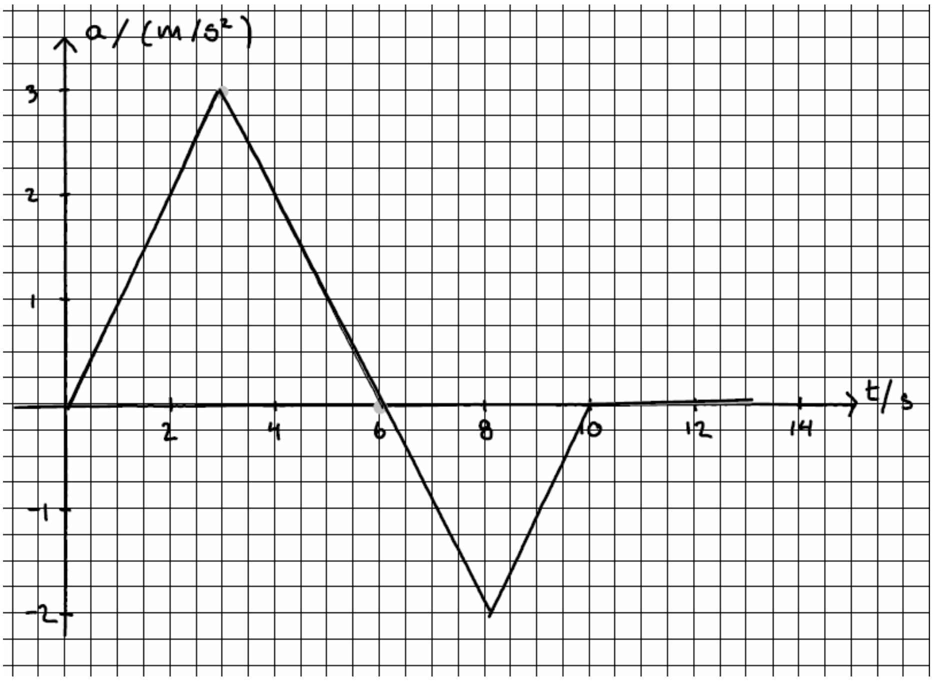
Punktene (2, 1,2) og (4,8, 10) ser ut til å ligge på tangenten. Dette gir stigningstallet:

$$a = \frac{10\ \text{m/s} - 1{,}2\ \text{m/s}}{4{,}8\ \text{s} - 2\ \text{s}} = \underline{\underline{3\ \text{m/s}^2}}$$

Siden det er vanskelig å få presise verdier når vi tegner en tangent for hånd, velger vi å oppgi svaret med bare ett gjeldende siffer.

d Vi bruker informasjonen vi fant om akselerasjonen fra oppgave a-c. Vi ser også at akselerasjonen er liten (fartsgrafen er ganske slak) i starten, og at hoveddelen av fartsgrafen kan minne om en annengradsfunksjon. Vi skisserer derfor denne akselerasjonsgrafen:

e

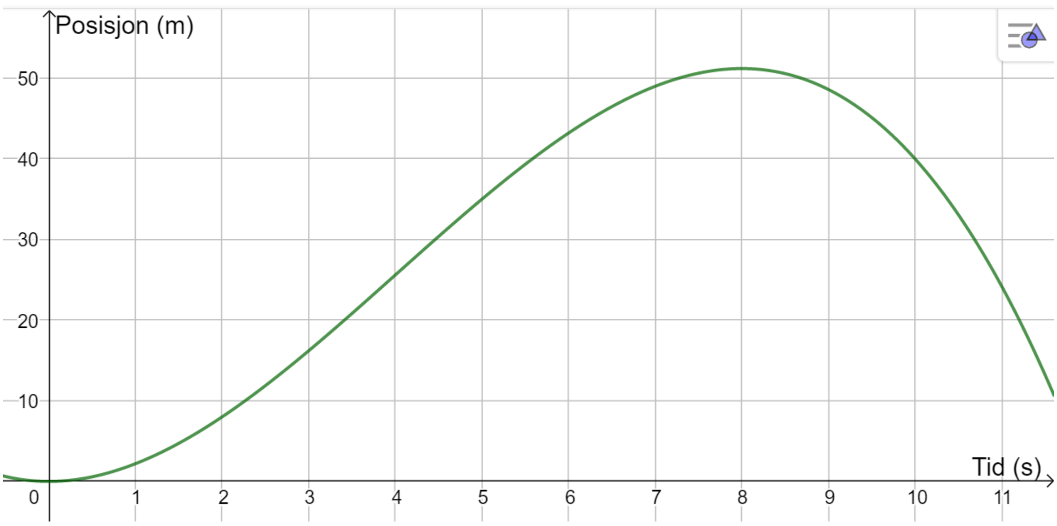


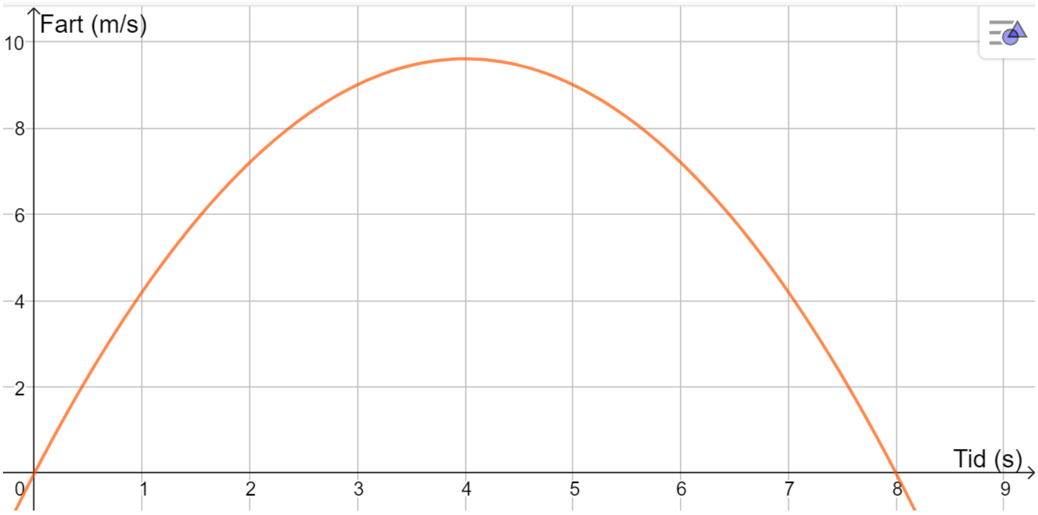
1.29

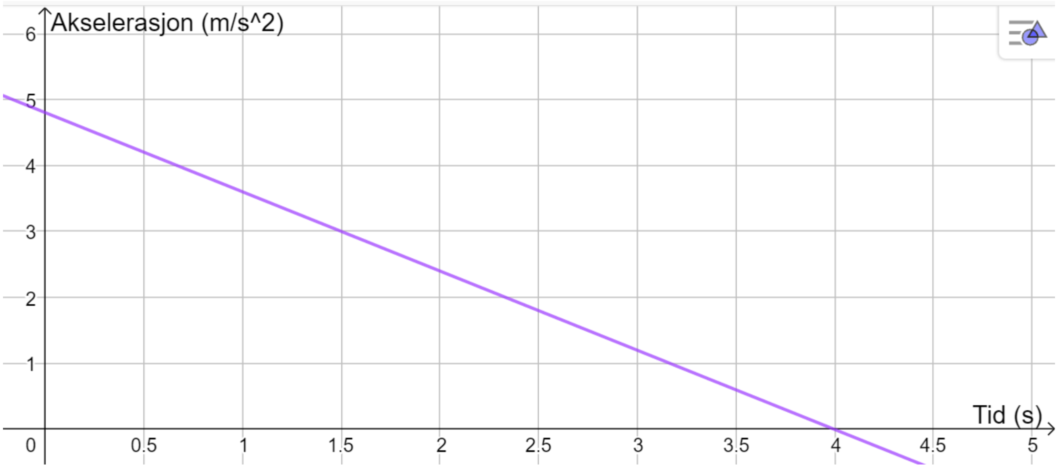
a $v(t) = s'(t) = 2 \cdot (2{,}40\ \text{m/s}^2) \cdot t - 3 \cdot (0{,}20\ \text{m/s}^3) \cdot t^2 = (4{,}80\ \text{m/s}^2) \cdot t - (0{,}60\ \text{m/s}^3) \cdot t^2$

$a(t) = v'(t) = (4{,}80\ \text{m/s}^2) - 2 \cdot (0{,}60\ \text{m/s}^3) \cdot t = (4{,}80\ \text{m/s}^2) - (1{,}20\ \text{m/s}^3) \cdot t$

b Vi bruker **GeoGebra** til å tegne grafene:







c Vi bruker funksjonene i GeoGebra til å finne verdiene, og finner at $s(2{,}00\ \text{s}) = 8{,}0\ \text{m}$, $v(2{,}00\ \text{s}) = 7{,}2\ \text{m/s}$ og $a(2{,}00\ \text{s}) = 2{,}4\ \text{m/s}^2$.

b = s(2)
→ 8

c = v(2)
→ 7.2

d = a(2)
→ 2.4

d Siden løperen holder toppfarten helt inn, vil akselerasjonen aldri bli negativ. Vi finner nullpunktet til akselerasjonsgrafen, og ser at akselerasjonsfasen varer i 4,0 s.

A = Nullpunkt(a)
→ (4, 0)

Tiden $t = 4{,}0\ \text{s}$ svarer til toppfarten, vi ser fra fartsfunksjonen at farten da er 9,6 m/s:

e = v(4)
→ 9.6

Vi kan også løse oppgaven ved å finne toppunktet til fartsfunksjonen, og ser at vi får samme svar:

D = Ekstremalpunkt(v)
→ (4, 9.6)

e Vi finner først ut hvor langt løper kommer i akselerasjonsfasen, ved å finne $s(4{,}0\ \text{s})$:

f = s(4)
→ 25.6

I resten av løpet har løperen konstant fart på 9,6 m/s. Vi bruker formelen

$$s = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{s}{v} = \frac{100 - s(4{,}0)}{v(4{,}0)}$$

For å slippe unødvendig avrunding gjør vi utregningen i GeoGebra:

$$f = \frac{100 - s(4)}{v(4)}$$
→ 7.75

Til sammen bruker løperen $4{,}0\ \text{s} + 7{,}75\ \text{s} = 11{,}75\ \text{s} = \underline{\underline{12\ \text{s}}}$ på hele løpet.

1.30

a Vi velger positiv retning oppover, slik at $v_0 = 26{,}5\ \text{m/s}$, $a = -g = -9{,}81\ \text{m/s}^2$.
Posisjonsformel 2 blir da

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = (26{,}5\ \text{m/s}) \cdot t - \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{2} \cdot t^2$$

Når vi setter inn de tre tidspunktene, får vi:

$$s(1{,}0\ \text{s}) = (26{,}5\ \text{m/s}) \cdot 1{,}0\ \text{s} - \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{2} \cdot (1{,}0\ \text{s})^2 = \underline{\underline{22\ \text{m}}}$$

$$s(3{,}0\ \text{s}) = (26{,}5\ \text{m/s}) \cdot 3{,}0\ \text{s} - \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{2} \cdot (3{,}0\ \text{s})^2 = \underline{\underline{35\ \text{m}}}$$

$$s(1{,}0\ \text{s}) = (26{,}5\ \text{m/s}) \cdot 5{,}0\ \text{s} - \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{2} \cdot (5{,}0\ \text{s})^2 = \underline{\underline{9{,}9\ \text{m}}}$$

b Farten er den tidsderiverte av posisjonen:

$$v(t) = s'(t) = 26{,}5\ \text{m/s} - 2 \cdot \frac{9{,}81\ \text{m/s}^2}{2} \cdot t = 26{,}5\ \text{m/s} - 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot t$$

Dette gir:

$$v(1{,}0\ \text{s}) = 26{,}5\ \text{m/s} - 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}0\ \text{s} = \underline{\underline{17\ \text{m/s}}}$$

$$v(3{,}0\ \text{s}) = 26{,}5\ \text{m/s} - 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 3{,}0\ \text{s} = \underline{\underline{-2{,}9\ \text{m/s}}}$$

$$v(5{,}0\ \text{s}) = 26{,}5\ \text{m/s} - 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 5{,}0\ \text{s} = \underline{\underline{-23\ \text{m/s}}}$$

Fra fortegnene ser vi at kula er på vei oppover ved $t = 1{,}0\ \text{s}$, og nedover ved $t = 3{,}0\ \text{s}$ og $t = 5{,}0\ \text{s}$.

c Vi ser fra fortegnene at kula må være på vei nedover ved $t = 3{,}0\ \text{s}$. Absoluttverdien til farten er så lav at den nettopp må ha snudd. Fra oppgave a ser vi at kula må ha sitt høyeste punkt litt over 35 m.
Siden vi kjenner startfarten og akselerasjonen, og vet at kula har farten $v(t) = 0\ \text{m/s}$ i det høyeste punktet, kan vi bruke den tidløse formelen til å finne den nøyaktige høyden:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad \Rightarrow \quad s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{(26{,}5\ \text{m/s})^2}{2 \cdot \left(-9{,}81\ \text{m/s}^2\right)} = \underline{\underline{35{,}8\ \text{m}}}$$

d Vi bruker fartsformelen med $v = 0\ \text{m/s}$:

$$v = v_0 + at = v_0 - gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_0}{g} = \frac{26{,}5\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = \underline{\underline{2{,}70\ \text{s}}}$$

e I startpunktet er posisjonen $s(t) = 0\ \text{m}$. Vi bruker posisjonsformel 2 til å finne tiden:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \left(v_0 + \frac{1}{2}at\right) \cdot t = \left(v_0 - \frac{1}{2}gt\right) \cdot t0\,.$$

Denne har to løsninger. $t = 0$ svarer til startpunktet, vi finner sluttiden ved å sette:

$$v_0 - \frac{1}{2}gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 26{,}5\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = \underline{\underline{5{,}40\ \text{s}}}$$

Farten er da $v = v_0 + at = v_0 - gt = 26{,}5\ \text{m/s} - 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 5{,}40\ \text{s} = \underline{\underline{-26{,}5\ \text{m/s}}}$. Farten er altså like stor som startfarten, men har retning nedover.

1.31

a Grafen viser høyde som funksjon av tid. Vi leser av, og ser at starthøyden er 2,0 m.

b Vi antar at steinen er i fritt fall på den nye planeten. Det betyr at høyden kan uttrykkes som

$$h(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + h_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + 2{,}0 .$$

Fra grafen ser vi at:

$$(i) \qquad h(1) = v_0 \cdot 1 + \frac{1}{2}a \cdot 1^2 + 2{,}0 = v_0 + \frac{1}{2}a + 2{,}0 = 4{,}0 \quad \Rightarrow \quad v_0 + \frac{1}{2}a = 2{,}0$$

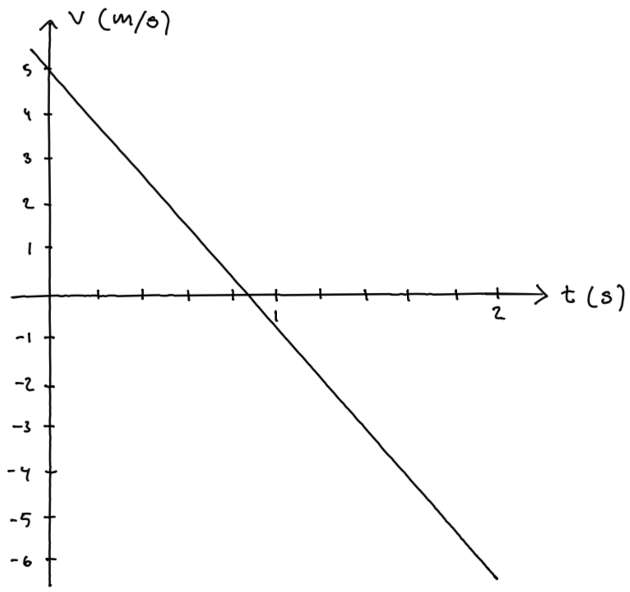
$$(ii) \qquad h(2) = v_0 \cdot 2 + \frac{1}{2}a \cdot 2^2 + 2{,}0 = 2v_0 + 2a + 2{,}0 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_0 + a = -1{,}0$$

Vi løser likningssettet for startfarten. Her velger vi å ta $2 \cdot (i) - (ii)$, og får:

$$(2v_0 + a) - (v_0 + a) = 4{,}0 - (-1{,}0) \quad \Rightarrow \quad v_0 = 5{,}0$$

Startfarten er 5,0 m/s oppover.

c Siden vi ennå ikke har funnet akselerasjonen, velger vi i første omgang å skissere grafen for hånd. Siden steinen er i fritt fall og positiv retning er oppover, vil fartsgrafen være lineær med konstantledd 5,0 m/s og negativt stigningstall. Vi ser at høydegrafen har et toppunkt i nærheten av $t = 0{,}85$ s . Fartsgrafen vil ha sitt nullpunkt ved samme tid. Vi kan bruke dette til å tegne en skisse av grafen:



Siden vi allerede har et likningssett som gjør det mulig å finne tyngdeakselerasjonen, kan vi også velge å finne denne (vi gjør dette i oppgave d) og tegne grafen i GeoGebra. Dette gir følgende graf:

d Vi løser likningssettet fra b for akselerasjon, f.eks. ved å ta $(ii)-(i)$, og får:

$$(v_0+a)-\left(v_0+\frac{1}{2}a\right)=-1{,}0-2{,}0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}a=-3 \quad\Rightarrow\quad a=-6$$

Tyngdeakselerasjonen på planeten er 6 m/s².

1.32

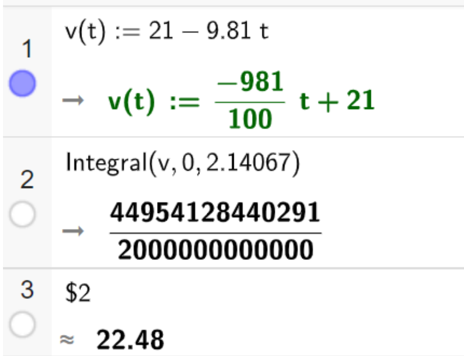
a Vi vet at $v_0=21{,}0\ \text{m/s}$ og $a=-9{,}81\ \text{m/s}^2$. Dette gir fartsfunksjonen

$v(t)=v_0+at=21{,}0\ \text{m/s}-9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot t$

b I toppunktet er farten lik null. Dette gir

$$v(t)=21{,}0\ \text{m/s}-9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot t_1=0\ \text{m/s} \quad\Rightarrow\quad t_1=\frac{21{,}0\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}=2{,}14067\ \text{s}=\underline{\underline{2{,}14\ \text{s}}}$$

c Vi integrerer fartsfunksjonen i CAS, og finner at ballen når en høyde på 22,5 m.



d Vi vet at $v_0=21{,}0\ \text{m/s}$ og $a=-9{,}81\ \text{m/s}^2$, og vil finne tiden det tar fra starten til ballen er tilbake til utagangspnktet, der $s(t)=0$. Vi har da:

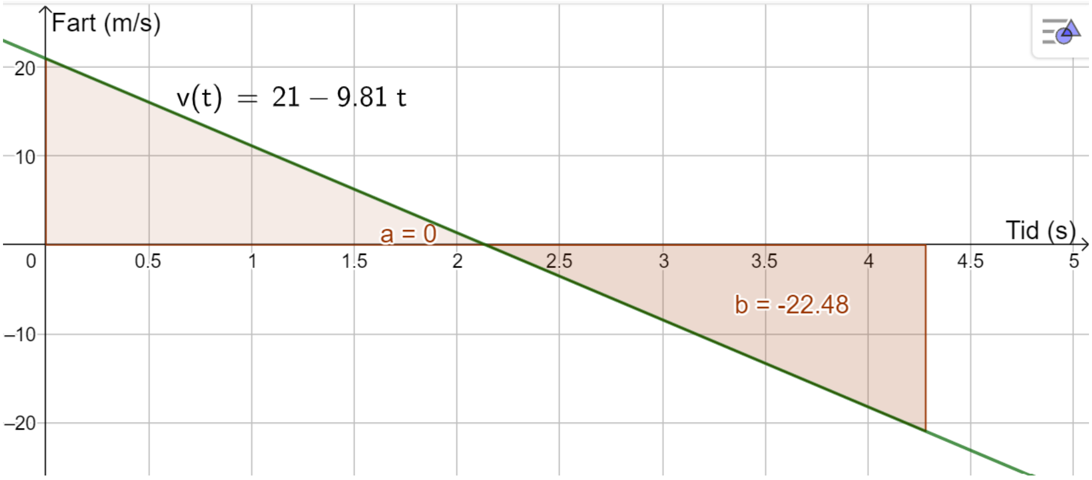
$$s=21{,}0\ \text{m/s}\cdot t-\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot t^2=t\left(21{,}0\ \text{m/s-}\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot t\right)=0\ \text{m}\,.$$

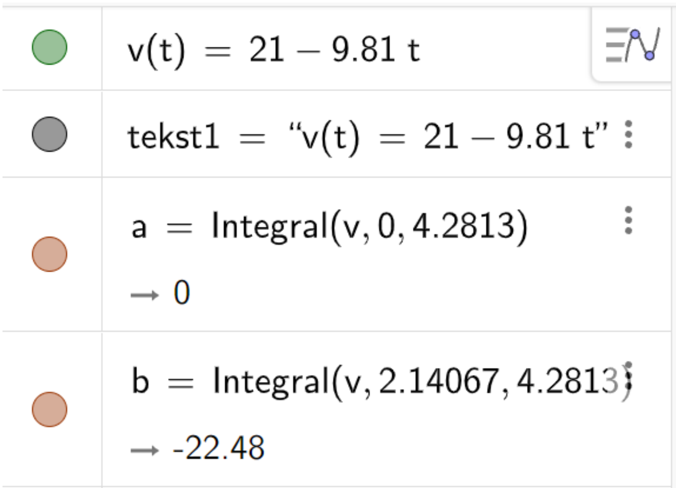
Løsningen $t=0$ s svarer til starttiden. Vi finner sluttiden ved å sette

$$21{,}0\ \text{m/s}-\frac{1}{2}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot t_2=0\ \text{m} \quad\Rightarrow\quad t_2=\frac{2\cdot 21{,}0\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2}=4{,}2813\ \text{s}=\underline{\underline{4{,}28\ \text{s}}}$$

e Vi tegner fartsgrafen (funksjonen fra oppgave a) i **GeoGebra:**

Vi finner også integralene i **GeoGebra:**





Vi ser fra det første integralet at ballen kommer tilbake til utgangspunktet etter en tid t_2. Fra det andre integralet ser vi at ballen beveger seg like langt i negativ retning som den først bevegde seg oppover (sammenlikn det andre integralet med svaret i oppgave c).

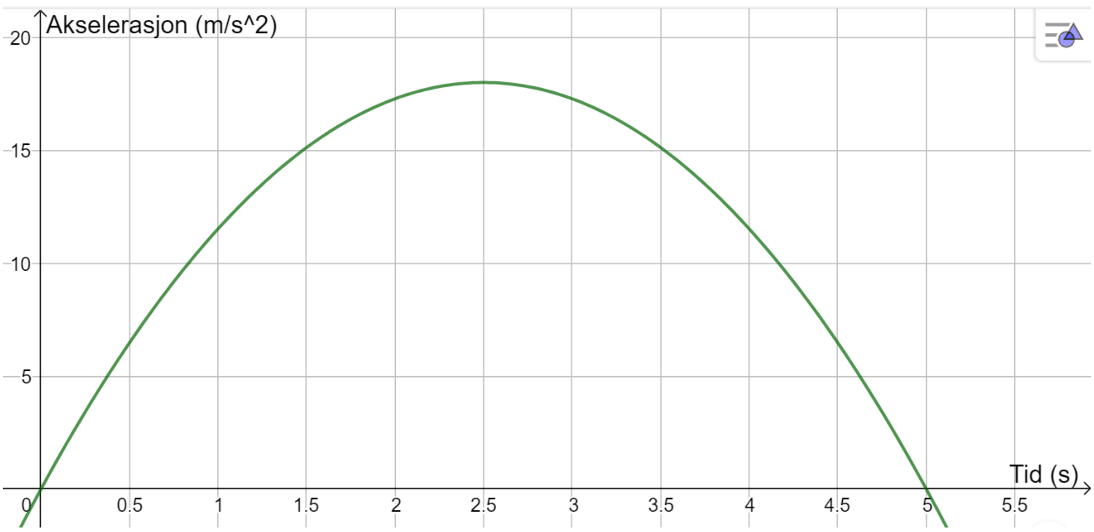
f Fra integralene i oppgave e, ser vi at ballen må ha beveget seg $22,48\ \text{m} + 22,48\ \text{m} = 44,96\ \text{m} = \underline{\underline{45,0\ \text{m}}}$. Vi kan også finne dette ved å regne ut summen av to integraler:

$$c = \text{Integral}(v, 0, 2.14067) - \text{Integral}(v, 2.14067, 4.2813)$$
$$\rightarrow 44.95$$

Det lille avviket skyldes avrunding.

1.33

a Vi tegner grafen i **GeoGebra**:



b Akselerasjonen er størst ved toppunktet til akselerasjonsgrafen. Vi bruker funksjonen «ekstremalpunkt» og finner at akselerasjonen er størst etter 2,50 s. Da er akselerasjonen 18,0 m/s^2.

$$a(t) = -2.88\ t^2 + 14.4\ t$$

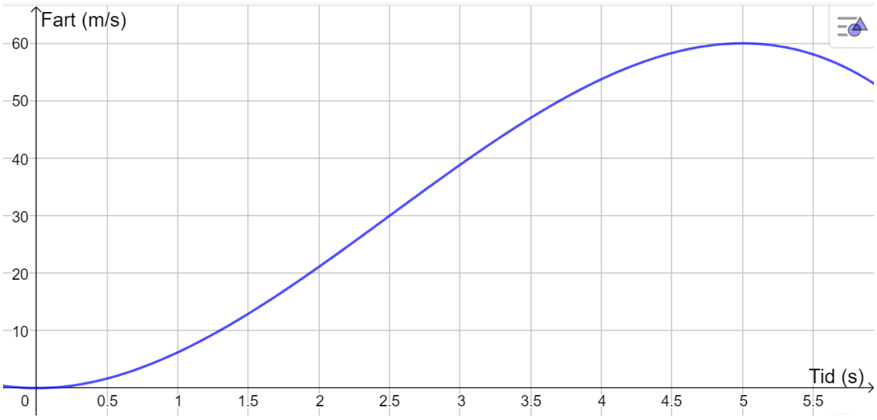
$$A = \text{Ekstremalpunkt}(a)$$
$$\rightarrow (2.5,\ 18)$$

c Vi integrerer akselerasjonsfunksjonen:

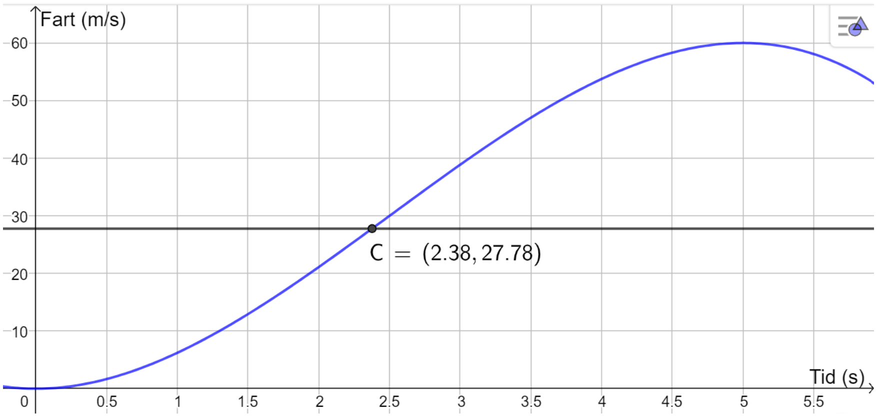
$$v(t) = \text{Integral}(a, t)$$
$$\rightarrow -0.96\ t^3 + 7.2\ t^2$$

Siden motorsykkelen starter fra ro, trenger vi ikke å legge til noe konstantledd. Fartsgrafen er da $v(t) = -0.96t^3 + 7,20t^2$.

Grafen ser slik ut:

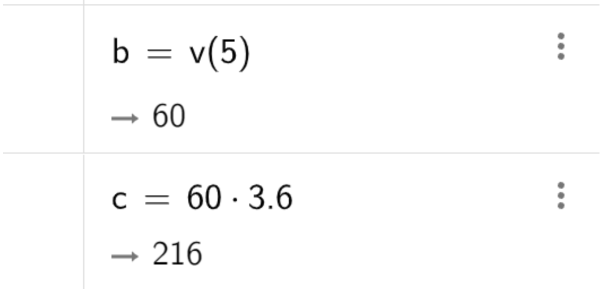


d Vi vet at 100 km/h er 100/3,6 m/s. Vi finner skjæringspunktet mellom fartsgrafen og linja $y = 100 / 3{,}6$ i **GeoGebra**.



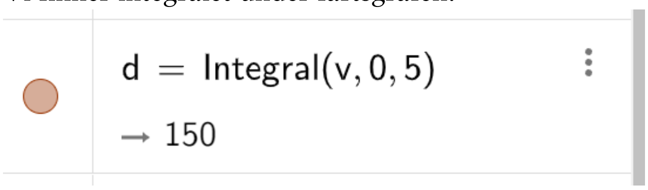
Linja skjærer grafen i tre punkter, men det er bare punktet $(2{,}38,\ 27{,}78)$ som ligger i intervallet $0\ \text{s} < t < 5\ \text{s}$, så det er dette vi må se på. Motorsykkelen bruker 2,38 s på å akselererer opp til 100 km/h.

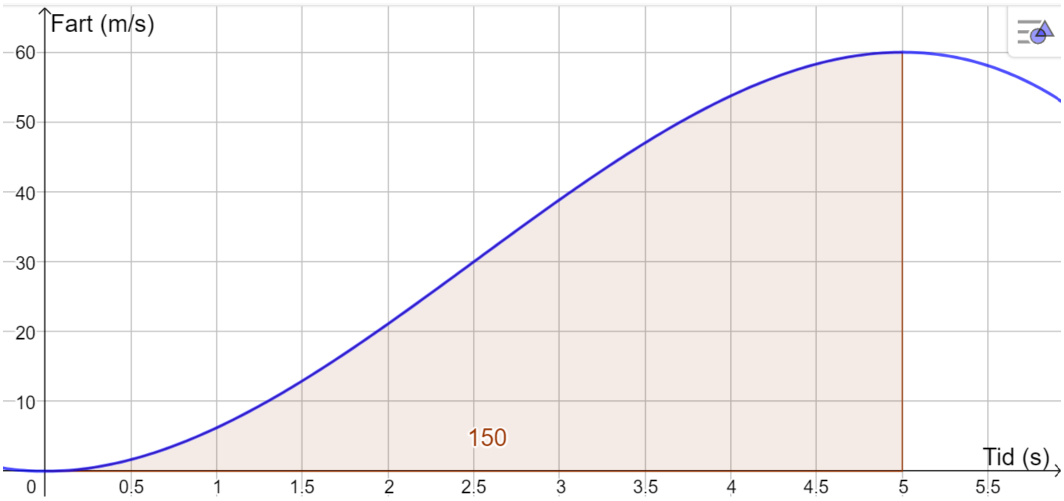
e Vi finner $v(5{,}0)$ med funksjonen vi har brukt i **GeoGebra**:



Etter 5,0 s har motorsykkelen er fart på 60 m/s, eller 216 km/h.

f Vi finner integralet under fartsgrafen:





Etter 5,0 s har motorsykkelen kjørt en strekning på $150\ \text{m} = \underline{\underline{0{,}15\ \text{km}}}$

1.34

a Vi finner kraftsummen:

$$\Sigma F = \sqrt{(60\ \text{N})^2 + (25\ \text{N})^2} = \underline{\underline{65\ \text{N}}}$$

Vi finner retningen:

$$\tan\phi = \frac{25}{60} \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{25}{60}\right) = \underline{\underline{23°}} \text{ fra kraften på 60 N.}$$

b Vi legger x-aksen i samme retningen som kraften på 60 N, dekomponerer kreftene og finner kraftsummen i *x*- og *y*-retning:

$$\Sigma F_x = 60\ \text{N} + 25\ \text{N} \cdot \cos 60^\circ = 72{,}5\ \text{N}$$

$$\Sigma F_y = 25\ \text{N} \cdot \sin 60^\circ = 21{,}6506\ \text{N}$$

Vi finner kraftsummen:

$$\Sigma F = \sqrt{(72{,}5\ \text{N})^2 + (21{,}6506\ \text{N})^2} = \underline{\underline{76\ \text{N}}}$$

Vi finner retningen:

$$\tan\phi = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{21{,}6506\ \text{N}}{72{,}5\ \text{N}}\right) = \underline{\underline{17°}} \text{ fra kraften på 60 N.}$$

c Vi legger x-aksen i samme retningen som kraften på 60 N, dekomponerer kreftene og finner kraftsummen i *x*- og *y*-retning:

$$\Sigma F_x = 60\ \text{N} + 25\ \text{N} \cdot \cos 120^\circ = 47{,}5\ \text{N}$$

$$\Sigma F_y = 25\ \text{N} \cdot \sin 120^\circ = 21{,}6506\ \text{N}$$

Vi finner kraftsummen:

$$\Sigma F = \sqrt{(47{,}5\ \text{N})^2 + (21{,}6506\ \text{N})^2} = \underline{\underline{52\ \text{N}}}$$

Vi finner retningen:

$$\tan\phi = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \quad \Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{21{,}6506\ \text{N}}{47{,}5\ \text{N}}\right) = \underline{\underline{25°}} \text{ fra kraften på 60 N.}$$

1.35

Vi lar positiv x-retning ligge langs kraften på 79 N, og finner kraftsummen i *x*- og *y*-retning:

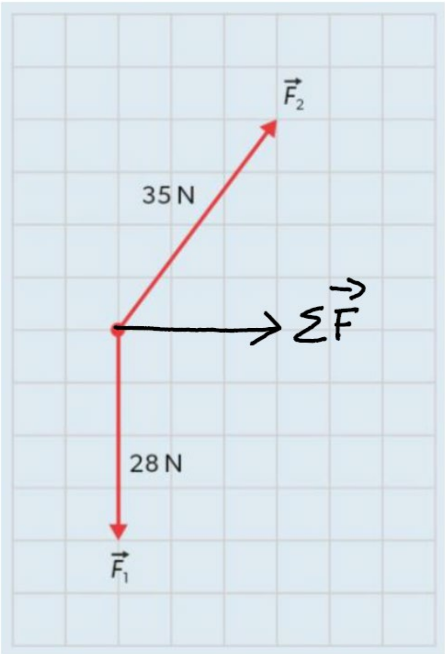
$\Sigma F_x = 79\ \text{N} - 84\ \text{N} \cdot \sin 71^\circ = -0,42\ \text{N}$

$\Sigma F_y = 27\ \text{N} - 84\ \text{N} \cdot \cos 71^\circ = -0,35\ \text{N}$

Kraftsummen er: $\Sigma F = \sqrt{(0,42\ \text{N})^2 + (0,35\ \text{N})^2} = 0,55\ \text{N} \approx 0\ \text{N}$

Kraftsummen er svært liten sammenliknet med de tre kreftene, så vi sier at den er tilnærmet lik null. Ifølge Newtons første lov ligger klossen i ro, eller har konstant fart langs ei rett linje.

1.36



Vi lar $\vec{F}_1$ ligge i negativ y-retning, og teller firkanter med utgangspunkt i punktet der $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_2$ møtes. Da ser vi at vektorene kansellerer hverandre i y-retning, og at kraftsummen må være tre ruter i positiv x-retning. Fra vektorene $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_2$ ser vi at sidekanten av én rute må tilsvare 7 N. Dette gir en kraftsum på $\Sigma F = 21\ \text{N}$.

1.37

Vi legger x-aksen midt mellom kreftene fra de to båtene. Da vil kreftene kansellere hverandre i y-retning. I x-retning er bidraget fra hver slepebåt:

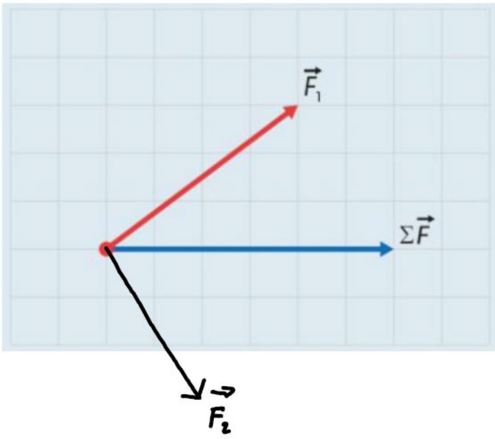
$\Sigma F = 2 \cdot 5,0\ \text{MN} \cdot \cos 20^\circ = \underline{\underline{9,4\ \text{MN}}}$

1.38

Vi teller ruter. Det mangler én rute mot venstre og to ruter nedover for at vi skal ha $\Sigma F = 0\ \text{N}$. Dette passer med vektor $\vec{F}$.

1.39

a Figuren viser enkeltkreftene og kraftsummen.



b Siden kraftsummen har en lengde på seks ruter, må hver rute tilsvare 2 N.

Størrelsen til F_1 er $\sqrt{4^2+3^2}$ ruter $= 5$ ruter $= \underline{\underline{10\ \text{N}}}$

Størrelsen til $F2$ er $\sqrt{2^2+3^2}$ ruter $= 3{,}6$ ruter $= \underline{\underline{7{,}2\ \text{N}}}$

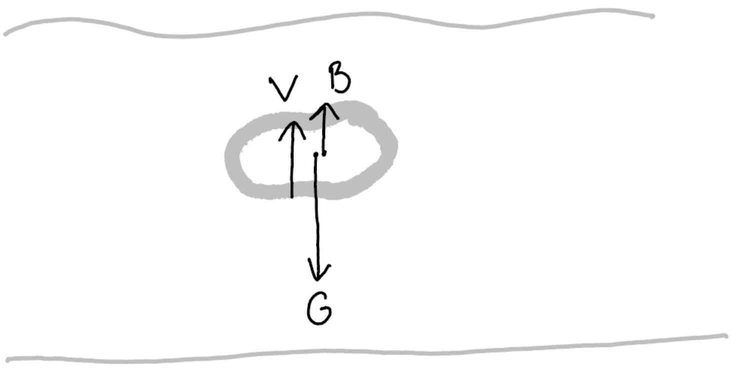
1.40

a Parallellkomponenten er: $G_p = G\cdot\sin 35^\circ = 775\ \text{N}\cdot\sin 35^\circ = \underline{\underline{445\ \text{N}}}$

Normalkomponenten er: $G_n = G\cdot\cos 35^\circ = 775\ \text{N}\cdot\cos 35^\circ = \underline{\underline{635\ \text{N}}}$

b Jo lengre ned ovarennet Espen kommer, jo flatere blir bakken, og jo mindre blir helningsvinkelen. Da vil parallellkomponenten bli mindre, mens normalkomponenten blir større. Når bakken er helt vannrett (helt på kanten), vil vi ha $G_p = 0\ \text{N}$ og $G_n = G = 775\ \text{N}$.

1.41



Tyngdekraften, G, vil trekke steinen nedover, oppdriften, B, vil presse den oppover, og den vil møte motstand, V, i vannet som virker mot fartsretningen, i dette tilfellet virker den oppover (tilsvarende luftmotstanden for en stein som faller gjennom luft). Siden steinen beveger seg med konstant fart, må Newtons første lov være oppfylt, og vi må ha at $G = B + V$.

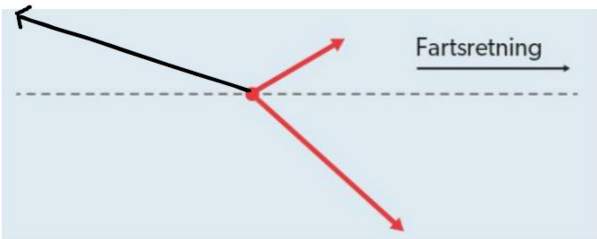
1.42

Tyngdekraften virker nedover. Størrelsen er $G = mg = 0{,}215\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{2{,}11\ \text{N}}}$.

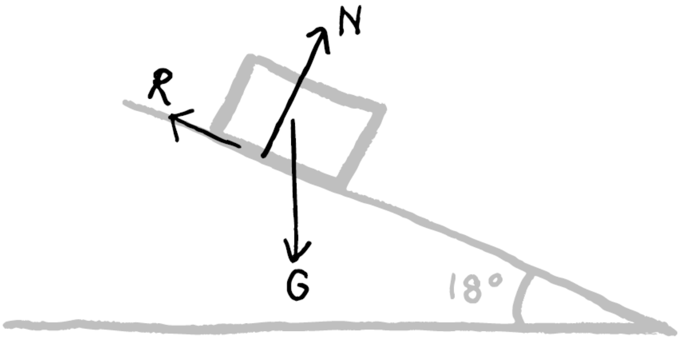
Luftmotstanden virker oppover. Siden farten er konstant, er $\Sigma F = 0\ \text{N}$, og vi må ha $L = G = \underline{\underline{2{,}11\ \text{N}}}$

1.43

Siden partikkelen beveger seg med konstant fart langs ei rett linje, må Newtons første lov være oppfylt, og kraftsummen må være lik null. Den siste kraften må da se slik ut:



1.44



Vi lar x-aksen peke oppover langs skråplanet.

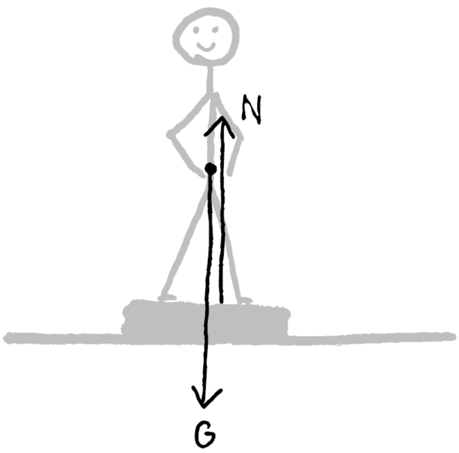
$$N = G_y = mg \cdot \cos 18^\circ = 0{,}32 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \cos 18^\circ = \underline{\underline{3{,}0 \text{ N}}}$$

$$R = G_x = mg \cdot \sin 18^\circ = 0{,}32 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 \cdot \sin 18^\circ = \underline{\underline{0{,}97 \text{ N}}}$$

$$\mu = \frac{R}{N} = \frac{mg \cdot \sin 18^\circ}{mg \cdot \cos 18^\circ} = \tan 18^\circ = \underline{\underline{0{,}32}}$$

1.45

a



Når personen står i ro, vil tyngdekraften og normalkraften (ifølge Newtons første lov) være like store. Fra figuren til venstre ser vi derfor at personen har tyngde
$G = mg = 54{,}5 \text{ kg} \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2 = \underline{\underline{535 \text{ N}}}$.

Fra figuren til høyre ser vi at normalkraften som virker på personen de første 5,0 s er:

$N = 52{,}5\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 = \underline{\underline{515\ \text{N}}}$

b Siden heisen starter i ro og kraftsummen peker nedover, peker også akselerasjonen nedover, og heisen må ha fart nedover. Vi finner akselerasjonen:

$$\Sigma F = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{535\ \text{N} - 515\ \text{N}}{54{,}5\ \text{kg}} = 0{,}367\ \text{m/s}^2$$

Vi vet nå: $v_0 = 0\ \text{m/s}$, $a = 0{,}367\ \text{m/s}^2$ og $t = 5{,}0\ \text{s}$. Vi bruker fartsformelen, og finner at toppfarten er $v = v_0 + at = at = 0{,}367\ \text{m/s}^2 \cdot 5{,}0\ \text{s} = \underline{\underline{1{,}8\ \text{m/s}}}$.

1.46

Siden mannen skyver på midtpunktet av tauet, må vinkelen mellom den stiplede linjen og tauet være 4° for at vinkelsummen i trekanten på figuren skal være lik 180°. Hvis punktet mannen skyver på er i ro, må kraftsummen i punktet være lik null. Hver av de to snorkreftene må bidra med hver sin like store komponent som til sammen er like stor som kraften *F*. Da må vi ha:

$$\sin 4^\circ = \frac{375\ \text{N}}{S} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{375\ \text{N}}{\sin 4^\circ} = 5376\ \text{N} = \underline{\underline{5{,}38\ \text{kN}}}$$

1.47

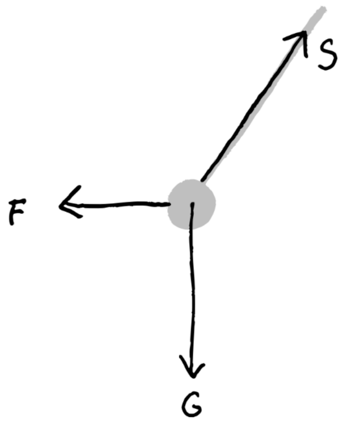
Vi lar x-aksen peke langs bjelken, og lar ϕ være vinkelen mellom vaieren og bjelken. Vi må da ha $2 \cdot S_y = 2 \cdot S \cdot \sin\phi = mg$. Dette gir vinkelen

$$\sin\phi = \frac{mg}{2S} \quad \Rightarrow \quad \phi = \sin^{-1}\left(\frac{mg}{2S}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{1340\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2 \cdot 16\ \text{kN}}\right) = 24{,}25^\circ.$$

Vaieren må da ha lengden *L*, der $\frac{L}{2} \cdot \cos 24{,}25^\circ = \frac{5{,}40\ \text{m}}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{5{,}40\ \text{m}}{\cos 24{,}25^\circ} = 5{,}9\ \text{m}$.

1.48

a Tyngdekraften $\vec{G}$, Snorkraften $\vec{S}$ og kraften $\vec{F}$ som vi holder med virker på kula. Siden kula henger i ro, må vektorsummen av kreftene være lik null: $\Sigma\vec{F} = \vec{G} + \vec{F} + \vec{S} = \vec{0}$.

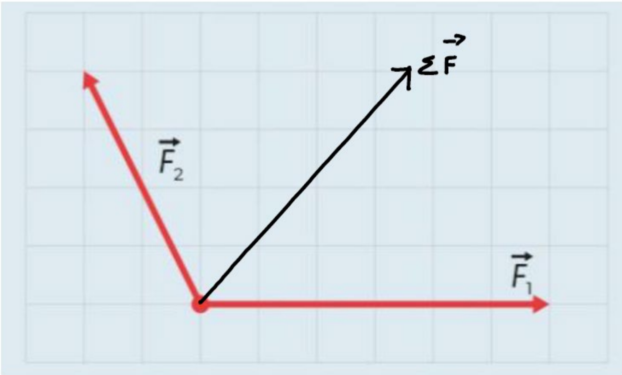


b Vi legger koordinatsystemet slik at kraften vi trekker med peker langs x-aksen.
Da er $S_x = F$ og $S_y = mg$. Vi ser fra figuren i a at $\tan\theta = \frac{S_x}{S_y} = \frac{F}{mg} \quad \Rightarrow \quad F = mg\tan\theta$.

Vi kan finne et uttrykk for snorkraften ved å se at $\cos\theta = \frac{S_y}{S} = \frac{mg}{S} \quad \Rightarrow \quad S = \frac{mg}{\cos\theta}$.

1.49

a Vi teller ruter, og finner at kraftsummen må ha retning fire ruter mot høyre, og fire ruter oppover. På figuren har vi tegnet inn kraftsummen, akselerasjonen har samme retning.



b A: $a = \dfrac{\Sigma F}{m} = \dfrac{3{,}0\ \text{N} + 5{,}0\ \text{N}}{3{,}0\ \text{kg}} = 2{,}7\ \text{m/s}^2$

B: $a = \dfrac{\Sigma F}{m} = \dfrac{11\ \text{N} - 2{,}0\ \text{N}}{4{,}0\ \text{kg}} = 2{,}3\ \text{m/s}^2$

C: $\Sigma F_x = 15\ \text{N} - 3{,}0\ \text{N} = 12\ \text{N}$ og $\Sigma F_y = 9{,}0\ \text{N}$.

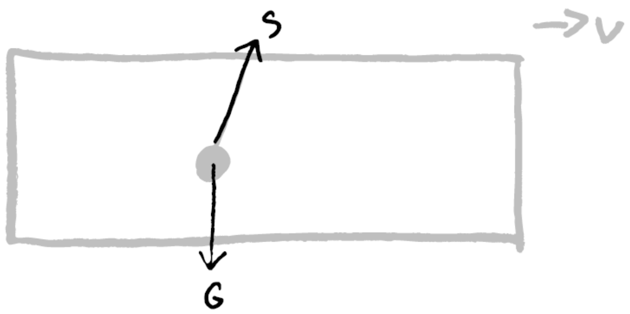
Dette gir kraftsummen $\Sigma F = \sqrt{(12\ \text{N})^2 + (9{,}0\ \text{N})^2} = 15\ \text{N}$.

Akselerasjonen blir da: $a = \dfrac{\Sigma F}{m} = \dfrac{15\ \text{N}}{4{,}0\ \text{kg}} = 2{,}5\ \text{m/s}^2$

Vi ser derfor at gjenstand A får størst akselerasjon, og gjenstand B minst akselerasjon.

1.50

a

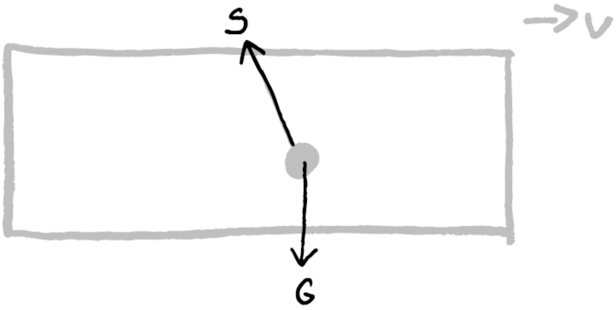


Vi legger koordinatsystemet slik at x-aksen er vannrett.
Da er $S_x = S\sin\phi = \Sigma F$ og $S_y = \cos\phi = mg$.

Trigonometri gir oss at $\tan\phi = \dfrac{S_x}{S_y} = \dfrac{\Sigma F}{mg}$, og på grunn av Newtons andre lov vet vi at

$$\tan\phi = \frac{S_x}{S_y} = \frac{\Sigma F}{mg} = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g} \quad \Rightarrow \quad a = g \cdot \tan\phi = 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \tan 5{,}3^\circ = \underline{\underline{0{,}91\ \text{m/s}^2}}.$$

b Pendelen ville hengt på skrå framover i vogna slik at snorkraften, og dermed kraftsummen, pekte bakover og bremset kula.



1.51

a Bare tyngdekraften og normalkraften virker på vognen. Vi legger x-aksen nedover langs skråplanet, og dekomponerer tyngdekraften. Trigonometri og Newtons andre lov, gir oss at $\Sigma F = G_x \quad \Rightarrow \quad ma = mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad a = g\sin\alpha$, der α er helningsvinkelen til planet.

På grunn av Pytagoras' setning må lengden av skråplanet være $\sqrt{h^2+l^2}$.

Da er $a = g\sin\alpha = \dfrac{gh}{\sqrt{h^2+l^2}}$, som var det vi skulle vise.

b Siden vogna starter fra ro og har konstant akselerasjon, er $s = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2 = \dfrac{1}{2}at^2$, der s er lengden langs skråplanet. Fra Pytagoras' setning vet vi at $s = \sqrt{h^2+l^2}$.

Vi løser uttrykket for tiden t, og setter inn uttrykket for akselerasjonen a som vi fant i a

$$t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2s}{\frac{gh}{\sqrt{h^2+l^2}}}} = \sqrt{\frac{2s\sqrt{h^2+l^2}}{gh}} = \sqrt{\frac{2\left(h^2+l^2\right)}{gh}}$$, som var det vi skulle vise.

c Vi finner tiden til vogna i bane a:

$$t_a = \sqrt{\frac{2\left(h^2+l^2\right)}{gh}} = \sqrt{\frac{2\left((0{,}20\ \text{m})^2+(0{,}80\ \text{m})^2\right)}{9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}80\ \text{m}}} = 0{,}8326\ \text{s}$$

Vi finner tiden for hver enkelt del av bane b:
For første del kan vi bruke formelen fra oppgave b:

$$t_{b1} = \sqrt{\frac{2\left(h^2+l^2\right)}{gh}} = \sqrt{\frac{2\left((0{,}30\ \text{m})^2+(0{,}40\ \text{m})^2\right)}{9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}30\ \text{m}}} = 0{,}4122\ \text{s}$$

I andre del har vogna konstant fart lik $v_{\text{b2}} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}30\ \text{m}}$. Tiden er da:

$$t_{b2} = \frac{s}{v_{\text{b2}}} = \frac{0{,}10\ \text{m}}{\sqrt{2\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}30\ \text{m}}} = 0{,}0412\ \text{s}$$

I fjerde del har vogna konstant fart lik $v_{\text{b4}} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}20\ \text{m}}$. Tiden er da:

$$t_{b4} = \frac{s}{v_{\text{b4}}} = \frac{0{,}20\ \text{m}}{\sqrt{2\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 0{,}20\ \text{m}}} = 0{,}1010\ \text{s}$$

I tredje del bruker vi fartsformelen, og setter inn farten i andre og fjerde del og bruker akselerasjonen fra oppgave a. Da får vi:

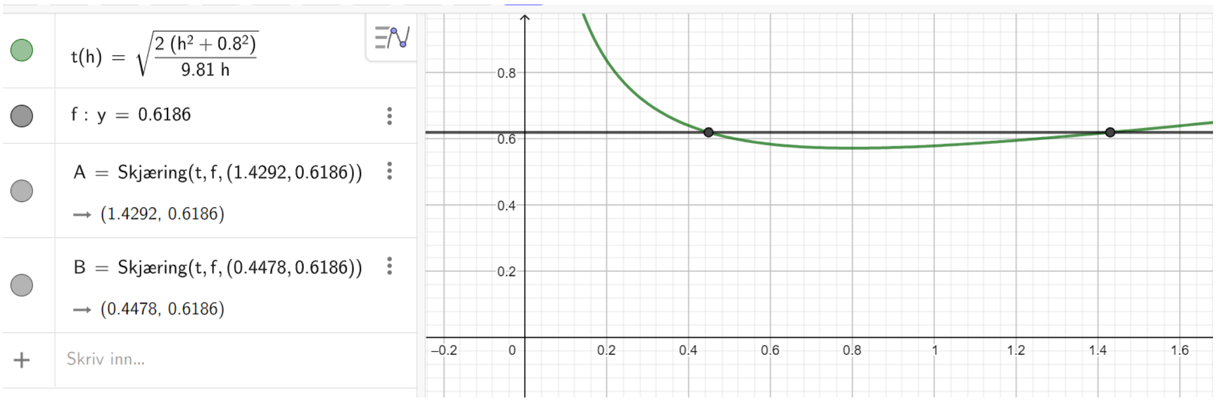
$$t_{b3} = \frac{v_{b4} - v_{b2}}{a} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}20\ \text{m}} - \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}30\ \text{m}}}{-\dfrac{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}10}{\sqrt{(0{,}10\ \text{m})^2 + (0{,}10\ \text{m})^2}}} = 0{,}0642$$

Til sammen gir dette tiden

$$t_\text{b} = t_{\text{b}1} + t_{\text{b}2} + t_{\text{b}3} + t_{\text{b}4} = 0{,}4122\ \text{s} + 0{,}0412\ \text{s} + 0{,}0642\ \text{s} + 0{,}1010\ \text{s} = 0{,}6186\ \text{s}$$

Vi må konkludere med at det er vogna i bane a som bruker lengst tid.

d Vi tegner grafen for tid som funksjon av høyde, og finner når den har samme verdi som tiden for bane a:



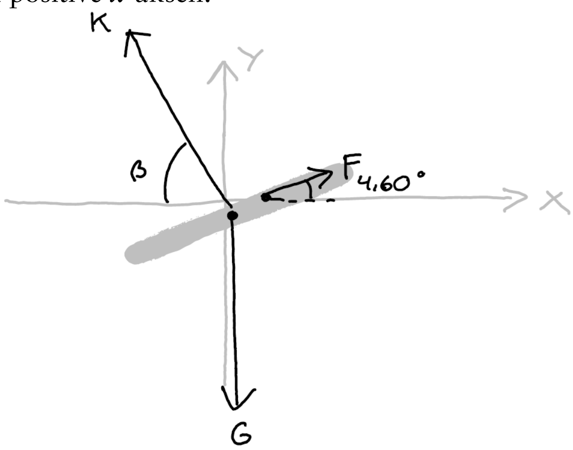
Vi ser at dette skjer når høyden er 0,4478 m = 45 cm eller 1,4292 m = 1,4 m.

1.52

a $\sqrt{(63{,}0\ \text{m/s})^2 + (6{,}00\ \text{m/s})^2} = \underline{\underline{63{,}3\ \text{m/s}}}$ Farten har absoluttverdi:

Vinkelen med horisontallinjen er $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{6{,}00\ \text{m/s}}{63{,}0\ \text{m/s}}\right) = \underline{\underline{5{,}44^\circ}}$

b Siden farten er konstant, er $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$. Vi kaller motorkraften for F, og legger x-aksen vannrett slik at F_x ligger langs den positive x-aksen.



Fra figuren ser vi at kraften fra lufta må virke oppover og bakover.
Kraften i x-retning er:

$$K_x = F_x = 120\ 000\ \text{N} \cdot \cos 4{,}60^\circ = 119\ 613\ \text{N}$$

Kraften i y-retning er:

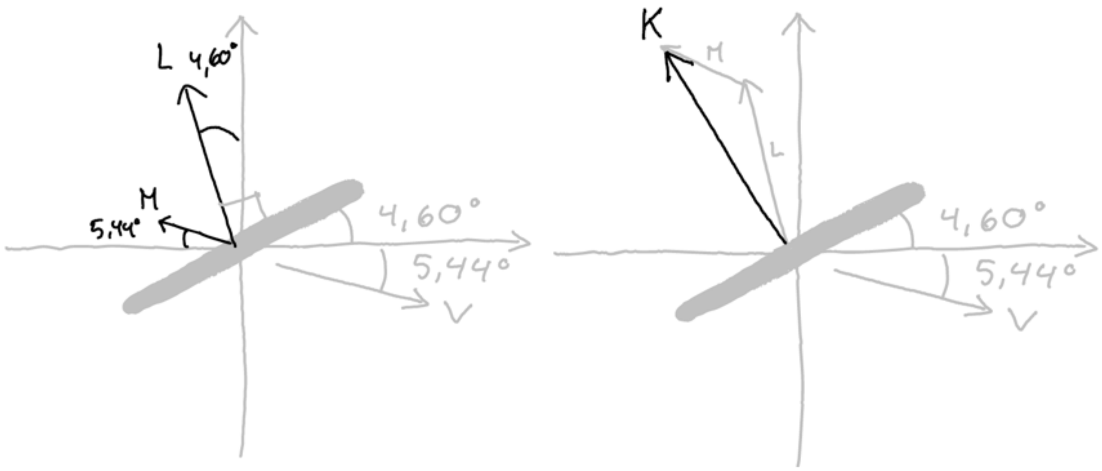
$$K_y = G_y - F_x = 70{,}0 \cdot 10^3\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 - 120\ 000\ \text{N} \cdot \sin 4{,}60^\circ = 677\ 076\ \text{N}$$

Kraften i fra lufta er da:

$$K = \sqrt{(119\,613\text{ N})^2 + (677\,076\text{ N})^2} = 687\,569\text{ N} = 688\text{ kN}$$

Vinkelen med horisontallinjen er $\beta = \tan^{-1}\left(\dfrac{677\,076\text{ N}}{119\,613\text{ N}}\right) = \underline{\underline{80{,}0^\circ}}$

c Siden flyets retning ikke er den samme som fartsretningen, vil de to kreftene ikke være vinkelrett på hverandre.



d Siden flyet beveger seg med konstant fart, er $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$. Fra figurene over ser vi at kraftsummen i x-og y-retning er:

x-retning: $K\cos 80^\circ = L\sin 4{,}60^\circ + M\cos 5{,}44^\circ$

y-retning: $K\sin 80^\circ = L\cos 4{,}60^\circ + M\sin 5{,}44^\circ$

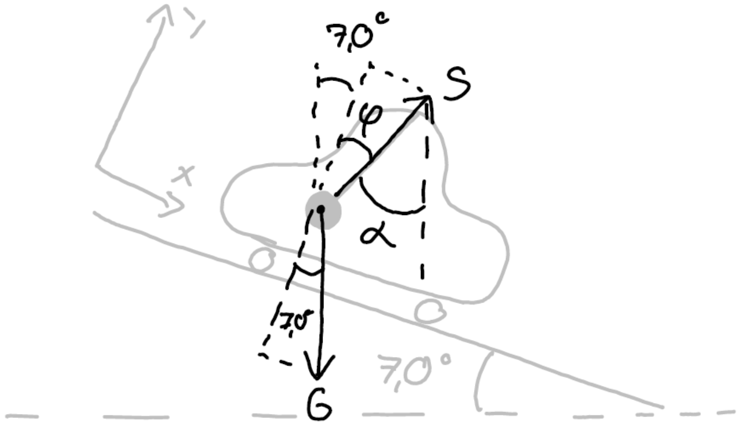
Vi løser likningssettet ved hjelp av CAS:

1	K := 687569 ≈ **K := 687569**
2	K cos(80°) = L sin(4.6°) + M cos(5.44°) → $\mathbf{687569\cos\left(\frac{4}{9}\pi\right) = L\sin\left(\frac{23}{900}\pi\right) + M\cos\left(\frac{34}{1125}\pi\right)}$
3	K sin(80°) = L cos(4.6°) + M sin(5.44°) → $\mathbf{687569\sin\left(\frac{4}{9}\pi\right) = L\cos\left(\frac{23}{900}\pi\right) + M\sin\left(\frac{34}{1125}\pi\right)}$
4	Løs({$2, $3}, {L, M}) ≈ **{{L = 673061.55, M = 65712.26}}**

Vi ser at L = 673 kN og M = 65,7 kN

1.53

a Vi velger å legge koordinatsystemet slik at positiv x-akse peker nedover langs skråplanet. Da er $a_x = 6{,}0\text{ m/s}^2$ og $a_y = 0\text{ m/s}^2$. Vi lar α være vinkelen mellom snora og loddlinja, og φ være vinkelen mellom snora og y-aksen. Vi ser fra figuren at $\alpha = \phi + 7{,}0^\circ$.



Fra Newtons andre lov får vi at:

$$\Sigma F_x = G_x + S_x = mg \cdot \sin 7{,}0^\circ + S \cdot \sin\phi = ma_x \quad \Rightarrow \quad S \cdot \sin\phi = ma_x - mg \cdot \sin 7{,}0^\circ$$

$$\Sigma F_y = S_y - G_y = S \cdot \cos\phi - mg \cdot \cos 7{,}0^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad S \cdot \cos\phi = mg \cdot \cos 7{,}0^\circ$$

Vi finner vinkelen φ:

$$\tan\phi = \frac{S \cdot \sin\phi}{S \cdot \cos\phi} = \frac{ma_x - mg \cdot \sin 7{,}0^\circ}{mg \cdot \cos 7{,}0^\circ} = \frac{a_x - g \cdot \sin 7{,}0^\circ}{g \cdot \cos 7{,}0^\circ} = \frac{6{,}0\ \text{m/s}^2 - 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 7{,}0^\circ}{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 7{,}0^\circ}$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{6{,}0\ \text{m/s}^2 - 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 7{,}0^\circ}{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 7{,}0^\circ}\right) = 26{,}263^\circ = 26^\circ$$

Vi finner vinkelen α:

$$\alpha = \phi + 7{,}0^\circ = 26^\circ + 7{,}0^\circ = \underline{\underline{33^\circ}}$$

Vi bruker uttrykket for ΣF_y til å finne størrelsen på snorkraften:

$$S \cdot \cos\phi = mg \cdot \cos 7{,}0^\circ \quad \Rightarrow \quad S = \frac{mg \cdot \cos 7{,}0^\circ}{\cos\phi} = \frac{0{,}50\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 7{,}0^\circ}{\cos 26{,}263^\circ} = \underline{\underline{5{,}4\ \text{N}}}$$

Snorkraften har altså en størrelse på 5,4 N og danner en vinkel på 33° med loddlinjen slik at kula henger bak opphengspunktet og snorkraften peker framover i bilen.

b Vi velger å ta utgangspunkt i samme figur og likningssett som over, og har $a_x = -6{,}0\ \text{m/s}^2$.

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{-6{,}0\ \text{m/s}^2 - 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 7{,}0^\circ}{9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 7{,}0^\circ}\right) = -36{,}464^\circ = -36^\circ$$

Vi finner vinkelen α:

$$\alpha = \phi + 7{,}0^\circ = -36^\circ + 7{,}0^\circ = \underline{\underline{-29^\circ}}$$

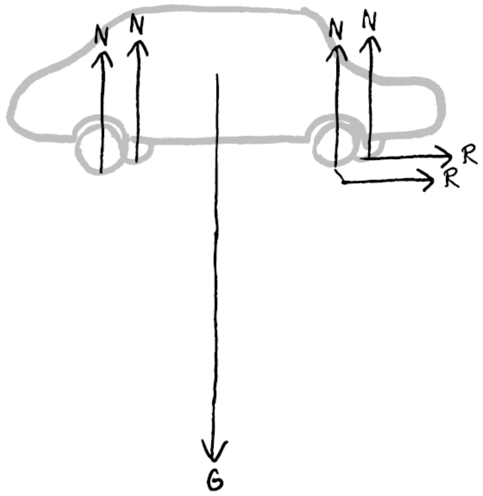
Vi bruker uttrykket for ΣF_y til å finne størrelsen på snorkraften:

$$S \cdot \cos\phi = mg \cdot \cos 7{,}0^\circ \quad \Rightarrow \quad S = \frac{mg \cdot \cos 7{,}0^\circ}{\cos\phi} = \frac{0{,}50\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \cos 7{,}0^\circ}{\cos(-36{,}464^\circ)} = \underline{\underline{6{,}1\ \text{N}}}$$

Snorkraften har altså en størrelse på 6,1 N og danner en vinkel på 29° med loddlinjen slik at kula henger foran opphengspunktet og snorkraften peker bakover i bilen.

1.54

a Det virker en tyngdekraft G, normalkrefter på hjulene og friksjonskraft på forhjulene.



b Når hjulet går rundt, vil hjulet ha fart bakover i forhold til bakken i kontaktpunktet. Da virker friksjonskraften framover og gir bilen akselerasjon.

c Vi lar R være friksjonskraften som virker på hvert av forhjulene. Da er $\Sigma F = 2R = ma$. Siden bilens tyngde er fordelt på alle fire hjul, vil vi ha at $R = \mu N = \dfrac{\mu mg}{4}$. Vi har da:

$$2R = ma \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot \frac{\mu mg}{4} = ma \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{2a}{g} = \frac{2 \cdot 2{,}8 \text{ m/s}^2}{9{,}81 \text{ m/s}^2} = \underline{\underline{0{,}57}}$$

1.55

Vi legger x-aksen langs den vannrette veien. Da er $W = F_x \cdot s \quad \Rightarrow \quad F_x = \dfrac{W}{s} = \dfrac{2400 \text{ J}}{75 \text{ m}} = \underline{\underline{32 \text{ N}}}$.

Vi finner den loddrette komponenten ved å først finne vinkelen ϕ mellom trekkraften og veien:

$\cos\phi = \dfrac{F_x}{F} \quad \Rightarrow \quad \phi = \cos^{-1}\left(\dfrac{F_x}{F}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{32 \text{ N}}{35 \text{ N}}\right) = 23{,}9^\circ$. Den loddrette komponenten blir da:

$$\sin\phi = \frac{F_y}{F} \quad \Rightarrow \quad F_y = F \cdot \sin\phi = 35 \text{ N} \cdot \sin 23{,}9^\circ = \underline{\underline{14 \text{ N}}}$$

1.56

a Siden veien er vannrett, er $N = G = mg$, og vi har $W_R = -Rs = -\mu Ns = -\mu mgs$

b Siden bare friksjonskraften gjør arbeid, har vi at $W_R = \Delta E_k = E_k - E_{k0}$.

Bilen stanser helt, så $W_R = -E_{k0} = -\dfrac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{-\dfrac{2 \cdot W_R}{m}} = \sqrt{-\dfrac{2 \cdot (-\mu mgs)}{m}} = \sqrt{2\mu gs}$

c Vi må f.eks. anta at akselerasjonen er konstant, og se bort fra andre krefter enn friksjon.

1.57

a Siden farten er konstant må kraftsummen være lik null, og den samlede motstanden må være lik motorkraften. Da er

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = Fv \quad \Rightarrow \quad F = \frac{P}{v} = \frac{7{,}5 \text{ kW}}{54 / 3{,}6 \text{ m/s}} = \underline{\underline{0{,}50 \text{ kN}}}$$

b Tyngden har nå en komponent mot fartsretningen. Den vil derfor også gjøre et (negativt) arbeid, som må motvirkes ved å øke motorkraften. Komponenten har lengde $G_p = mg\sin 4{,}0^\circ$.

Motorkraften må da være:

$$P = \left(500\ \text{N} + 1140\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot \sin 4{,}0^\circ\right) \cdot \frac{54}{3{,}6}\ \text{m/s} = 19\,202\ \text{W} = \underline{\underline{19\ \text{kW}}}$$

1.58

Siden det ikke virker friksjon, er det bare tyngdekraften som gjør arbeid, og den mekaniske energien er bevart. Da må begge banene gi samme fart ved samme høyde.

1.59

Arbeidet som er utført, er lik arealet under grafen. Dette arealet er et trapes, slik at $W = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (F_2 + F_1)$. Der F_1 og F_2 er strekkraften på starten og slutten av bevegelsen. Vi leser tallene for disse kreftene av på grafen, og får:

$$W_A = \frac{1}{2} \cdot (0{,}080\ \text{m} - 0{,}020\ \text{m}) \cdot (50\ \text{N} + 12\ \text{N}) = \underline{\underline{1{,}9\ \text{J}}}$$

$$W_B = \frac{1}{2} \cdot (0{,}080\ \text{m} - 0{,}020\ \text{m}) \cdot (94\ \text{N} + 24\ \text{N}) = \underline{\underline{3{,}5\ \text{J}}}$$

1.60

Vi velger positiv retning i fartsretningen til vogn A, og bruker loven om bevaring av bevegelsesmengde:

$$m_A v_{A0} = m_a v_A + m_B v_B$$

$$\Rightarrow \quad v_B = \frac{m_A v_{A0} - m_a v_A}{m_B} = \frac{m_A}{m_B}(v_{A0} - v_A) = \frac{100\ \text{g}}{250\ \text{g}} \cdot (2{,}0\ \text{m/s} - 0{,}40\ \text{m/s}) = \underline{\underline{0{,}64\ \text{m/s}}}$$

Vogn B får farten 0,64 m/s i samme retning som vogn A.

1.61

a Vi velger positiv retning oppover, og bruker disse symbolene:

h_0 er starthøyden

v_1 er farten til pendelkula rett før støtet

v_2 er farten til systemet pendelkule + kloss rett etter støtet

h er høyden vi ønsker å finne.

Vi deler bevegelsen inn i tre deler:

Del 1: Før støtet (mekanisk energi er bevart). Vi finner et uttrykk for farten rett før støtet:

$$mgh_0 = \frac{1}{2} m v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gh_0}$$

Del 2: Støtet (bevegelsesmengde er bevart). Vi bruker resultatet fra del 1, og finner et uttrykk for farten rett før støtet:

$$mv_1 = 2mv_2 \quad \Rightarrow \quad m\sqrt{2gh_0} = 2mv_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{gh_0}{2}}$$

Del 3: Etter støtet (mekanisk energi er bevart). Vi finner slutthøyden:

$$mgh = \frac{1}{2} m v_2^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{\left(\sqrt{\frac{gh_0}{2}}\right)^2}{2g} = \frac{h_0}{4} = \frac{1{,}2\ \text{m}}{4} = \underline{\underline{0{,}30\ \text{m}}}$$

b Magneten og klossen kan bli dratt litt mot hverandre og treffe hverandre i et annet punkt enn bunnpunktet i pendelbevegelsen.

1.62

Vi lar v_{A1} , v_{A2}, v_{B1} og v_{B2} være farten til kloss A og B rett før og rett etter støtet. $v_{B1} = 0$ m/s.

Vi bruker bevaring av mekanisk energi til å finne et uttrykk for farten til kloss A rett før støtet:

$$\frac{1}{2}mv_{A1}^2 = mgh_0 \quad \Rightarrow \quad v_{A1} = \sqrt{2gh}$$

Vi bruker den tidløse likningen til å finne et uttrykk for farten til kloss B rett etter støtet. Siden flaten der kloss B beveger seg er vannrett, vil tyngdekraften og normalkraften være like store, og vi har at $\Sigma F = -R = -\mu mg \quad \Rightarrow \quad ma = -\mu mg \quad \Rightarrow \quad a = -\mu g$.

Kloss B stanser helt, så den tidløse likningen gir at:

$$v_{B2}^2 + 2as = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{B2}^2 - 2\mu gs = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{B2} = \sqrt{2\mu gs}$$

Vi bruker bevaring av bevegelsesmengde til å finne farten til kloss A etter støtet. I andre linje bruker vi det at massen til B er dobbelt så stor som massen til A for å forenkle uttrykket.

$$\begin{aligned} & m_A v_{A2} + m_B v_{B2} = m_A v_{A1} + m_B v_{B1} \\ \Rightarrow \quad & mv_{A2} + 2m\sqrt{2\mu gs} = m\sqrt{2gh} + 2m \cdot 0 \\ \Rightarrow \quad & v_{A2} = \sqrt{2gh} - 2\sqrt{2\mu gs} \\ & \quad = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 1{,}5\ \text{m}} - 2\sqrt{2 \cdot 0{,}15 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 4{,}0\ \text{m}} = -1{,}4371\ \text{m/s} \end{aligned}$$

Vi bruker bevaring av mekanisk energi til å finne slutthøyden til kloss A:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_{A2}^2 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{v_{A2}^2}{2g} = \frac{(1{,}4371\ \text{m/s}^2)^2}{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2} = 0{,}11\ \text{m} = \underline{\underline{11\ \text{cm}}}$$

1.63

Vi lar m være massen til hver av vognene, og bruker bevaring av mekanisk energi til å finne farten til øverste vogn rett før støtet. Siden $v_0 = 0$ m/s, har vi:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + mg\left(\frac{h}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2g(h - \frac{h}{2})} = \sqrt{gh}$$

I støtet er bevegelsesmengden bevart. Vi finner farten v_2 til de to vognene etter støtet:

$$mv_1 = 2mv_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{v_1}{2} = \frac{\sqrt{gh}}{2}$$

Vi bruker igjen bevaring av mekanisk energi til å finne farten v i bunnen av bakken:

$$mg\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gh + v_2^2} = \sqrt{gh + \left(\frac{\sqrt{gh}}{2}\right)^2} = \sqrt{gh + \frac{gh}{4}} = \sqrt{\frac{5gh}{4}}$$

1.64

a Popcornet bør få fart rett oppover

b Siden popcornet ligger i ro før eksplosjonen, må bevegelsesmengden etter eksplosjonen også være lik null.

$$m_p v_p + m_s v_s = 0 \quad \Rightarrow \quad v_p = \frac{m_s}{m_p}v_s = \frac{0{,}10\ \text{g}}{1{,}0\ \text{g}} \cdot 29\ \text{m/s} = \underline{\underline{2{,}9\ \text{m/s}}}$$

c Vi finner høyden popcornet får hvis det bare er tyngdekraften som virker på det:

$v^2 = v_0^2 + 2as \quad \Rightarrow \quad v_0^2 - 2gs = 0$

$\Rightarrow \quad s = \dfrac{v_0^2}{2g} = \dfrac{(2{,}9 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9{,}81 \text{ m/s}^2} = 0{,}43 \text{ m} = 43 \text{ cm}$

Siden popcornet kan hoppe noen centimeter høyere enn kjelen, bør Sadia for sikkerhets skyld legge på lokk.

1.65

a Bevegelsesmengden er bevart i reaksjonen. Vi har da:

$m_{\text{Th}} v_{\text{Th}} + m_{\alpha} v_{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{\text{Th}} = \dfrac{m_{\alpha}}{m_{\text{Th}}} v_{\alpha} = \dfrac{4{,}002\,603\ u}{234{,}043\,600\ u} \cdot 1{,}4 \cdot 10^7 \text{ m/s} = \underline{\underline{2{,}4 \cdot 10^5 \text{ m/s}}}$

b Bevegelsesmengden må være null både i x- og y-retning. Dette er bare mulig dersom kjernene beveger seg i stikk motsatte retninger.

1.66

Sadia oppgir absolutt usikkerhet. Ifølge hennes svar er bredden av pulten et sted mellom 117 cm og 121 cm.

Martin oppgir relativ usikkerhet. 2 % av 119 cm er $0{,}02 \cdot 119 \text{ cm} = 2 \text{ cm}$. Ifølge Martin, er bredden av pulten også et sted mellom 117 cm og 121 cm.

Elias oppgir et svar uten usikkerhet. På grunn av reglene for avrunding, vil bredden av pulten ifølge ham være mellom 119,105 cm og 119,115 cm.

1.67

a $\dfrac{\Delta h}{h} = \dfrac{3 \text{ mm}}{1735 \text{ mm}} = 0{,}002 = \underline{\underline{0{,}2\ \%}}$

b Vi overlater svaret til diskusjonen, men det bør komme fram at den relative usikkerheten er langt mindre når man måler avstanden til månen dersom den absolutte usikkerheten er lik.

1.68

Kraftsummen uten usikkerhet er $\Sigma F = F_1 - F_2 = 50 \text{ N} - 20 \text{ N} = 30 \text{ N}$.

Usikkerheten til kraftsummen er $\Delta\Sigma F = \Delta F_1 + \Delta F_2 = 5 \text{ N} + 10 \text{ N} = 15 \text{ N}$.

Akselerasjonen uten usikkerhet er $a = \dfrac{\Sigma F}{m} = \dfrac{30 \text{ N}}{5{,}0 \text{ kg}} = 6{,}0 \text{ m/s}^2$

Den relative usikkerheten til akselerasjonen er $\dfrac{\Delta a}{a} = \dfrac{\Delta\Sigma F}{\Sigma F} + \dfrac{\Delta m}{m} = \dfrac{15 \text{ N}}{30 \text{ N}} + \dfrac{0{,}1 \text{ kg}}{5{,}0 \text{ kg}} = 0{,}5$

Den absolutte usikkerheten til akselerasjonen er $\Delta a = 0{,}5 \cdot a = 0{,}5 \cdot 6 \text{ m/s}^2 = 3 \text{ m/s}^2$

Akselerasjonen med usikkerhet kan da skrives som $a = (6 \pm 3) \text{ m/s}^2$

1.69

a $s = vt = 2{,}0 \text{ m/s} \cdot 0{,}01 \text{ s} = 0{,}020 \text{ m} = \underline{\underline{2{,}0 \text{ cm}}}$

$s = vt = 2{,}0 \text{ m/s} \cdot 0{,}001 \text{ s} = 0{,}0020 \text{ m} = \underline{\underline{2{,}0 \text{ mm}}}$

b Antall lengder utøverne må svømme er $N = \dfrac{1000 \text{ m}}{50 \text{ m}} = 20$. På disse 20 lengdene, må forskjellen mellom banene ikke være på mer enn 2,0 cm. Da må usikkerheten i banene være må mindre enn $\Delta s = \dfrac{2{,}0 \text{ cm}}{20} = 0{,}10 \text{ cm} = \underline{\underline{1{,}0 \text{ mm}}}$

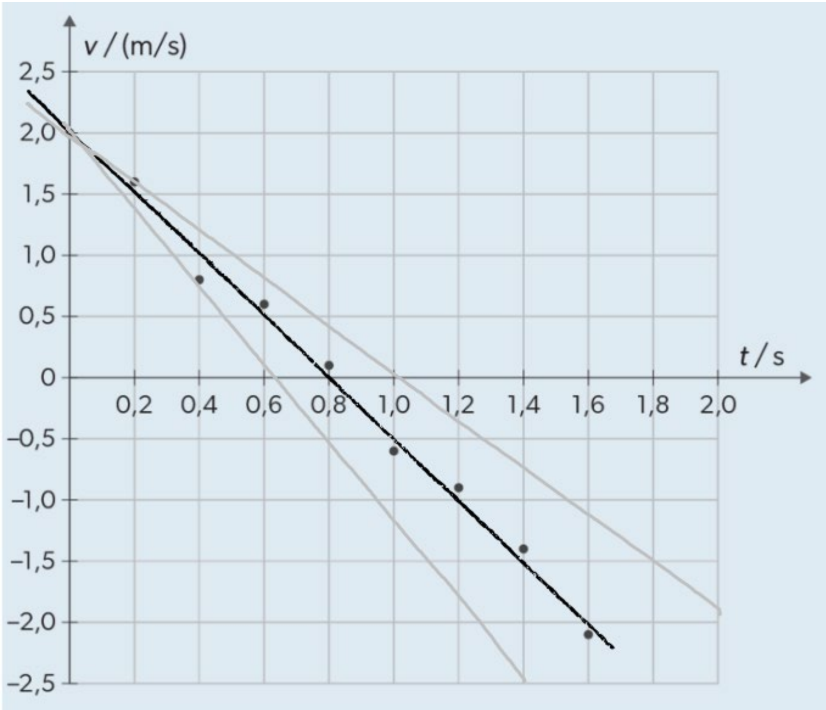
c Arrangørene bør ikke velge så mange desimaler at usikkerheten i lengden på banene kan påvirke målingen av tid i nevneverdig grad. Vi bør altså ha $\Delta s < v \cdot \Delta t$.

1.70

a Gjenstanden kastes oppover og faller ned igjen, så posisjonen kan illustreres med graf E.
b Siden vi ser bort fra luftmotstanden, er fartsfunksjonen lineær. Startfarten har retning oppover, så er derfor positiv. Deretter synker farten til null og blir negativ. Graf B kan da vise farten.
c Akselerasjonen er konstant lik tyngdeakselerasjonen. Denne peker i negativ retning. Graf A kan derfor vise akselerasjon.
d Den kinetiske energien er en funksjon av v^2, og derfor av t^2 (siden farten er en lineær funksjon). Den kinetiske energien synker inntil gjenstanden er i toppunktet. Deretter stiger den igjen. Dette kan illustreres av graf F.
e Den potensielle energien er proporsjonal med posisjonen, så graf E kan også vise potensiell energi.
f Siden vi ser bort fra luftmotstand, er den mekaniske energien er konstant og positiv (hvis vi legger nullpunktet ved punktet vi kaster gjenstanden fra). Graf D kan derfor vise mekanisk energi.

1.71

a Siden usikkerheten i fartsmålingene er $\Delta v = 0,2$ m/s og første punkt i koordinatsystemet viser en startfart på 2,0 m/s, er startfarten $v_0 = (2,0 \pm 0,2)$ m/s .
b Akselerasjonen er lik stigningstallet til fartsfunksjonen. Vi tegner den lineære funksjonen som passer best til punktene (sort linje), og finner stigningstallet. For å finne usikkerheten tegner vi også linjer fra startpunktet og gjennom de punktene som gir grafer med størst og minst stigningstall (grå linjer).



Vi ser at den sorte linja krysser x-aksen ganske nøyaktig i punktet 0,80. Vi bruker startpunktet og nullpunktet til å finne stigningstsallet:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0,0 \text{ m/s} - 2,0 \text{ m/s}}{0,8 \text{ s} - 0,0 \text{ s}} = -2,5 \text{ m/s}^2$$

Vi velger å brupe punktene $(0{,}8, -0{,}5)$ og $(1{,}0, 0)$ på de grå linjene til å finne usikkerheten til akselerasjonen:

$$a_{\text{min}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-0{,}5\ \text{m/s} - 2{,}0\ \text{m/s}}{0{,}8\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}} = -3\ \text{m/s}^2$$

$$a_{\text{maks}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0{,}0\ \text{m/s} - 2{,}0\ \text{m/s}}{1{,}0\ \text{s} - 0{,}0\ \text{s}} = -2\ \text{m/s}^2$$

$$\Delta a = \frac{1}{2}\left(a_{\text{maks}} - a_{\text{min}}\right) = \frac{1}{2}\left(-2-(-3)\right)\text{m/s}^2 = 0{,}5\ \text{m/s}^2$$

Akselerasjonen med usikkerhet blir da: $a = (-2{,}5 \pm 0{,}5)\ \text{m/s}^2$.

c Når klossen snur, er farten nøyaktig lik 0 m/s. Vi bruker posisjonsformel 1, og får at

$$v^2 = v_0^2 + 2as = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -\frac{v_0^2}{2a} = -\frac{(2{,}0\ \text{m/s})^2}{2\cdot\left(-2{,}5\ \text{m/s}^2\right)} = 0{,}8\ \text{m}$$

Vi finner usikkerheten i posisjonen:

$$\frac{\Delta s}{s} = 2\cdot\left(\frac{\Delta v_0}{v_0}\right) + \frac{\Delta a}{a} = 2\cdot\left(\frac{0{,}2\ \text{m/s}}{2{,}0\ \text{m/s}}\right) + \frac{0{,}5\ \text{m/s}^2}{2{,}5\ \text{m/s}^2} = 0{,}4$$

$$\Rightarrow \quad \Delta s = 0{,}4\cdot s = 0{,}4\cdot 0{,}8\ \text{m} = 0{,}3\ \text{m}$$

Posisjonen med usikkerhet er da $s = (0{,}8 \pm 0{,}3)\ \text{m}$

d Vi legger koordinatsystemet med positiv x-akse oppover langs skråplaet. Da vil summen av y-komponenten og normalkraften bli lik null, og kraftsummen blir $\Sigma F = G_x = mg\cdot\sin\theta$. Det følger da av Newtons andre lov at $ma = mg\cdot\sin\theta \quad\Rightarrow\quad a = g\cdot\sin\theta$.

e Vinkelen uten usikkerhet er gitt ved $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{a}{g}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{2{,}5\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2}\right) = 15^\circ$

Vi finner usikkerheten i vinkelen ved å regne ut hva den blir med den største og minste verdien for akselerasjone

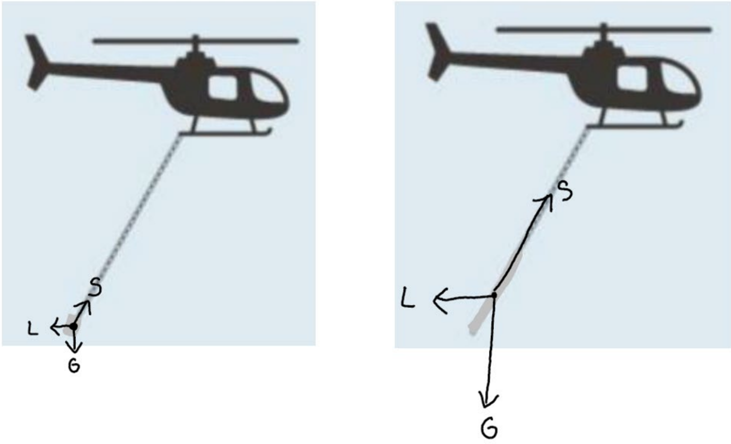
$$\theta_{\text{min}} = \sin^{-1}\left(\frac{2{,}5\ \text{m/s}^2 - 0{,}5\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2}\right) = 12^\circ$$

$$\theta_{\text{maks}} = \sin^{-1}\left(\frac{2{,}5\ \text{m/s}^2 + 0{,}5\ \text{m/s}^2}{9{,}81\ \text{m/s}^2}\right) = 18^\circ$$

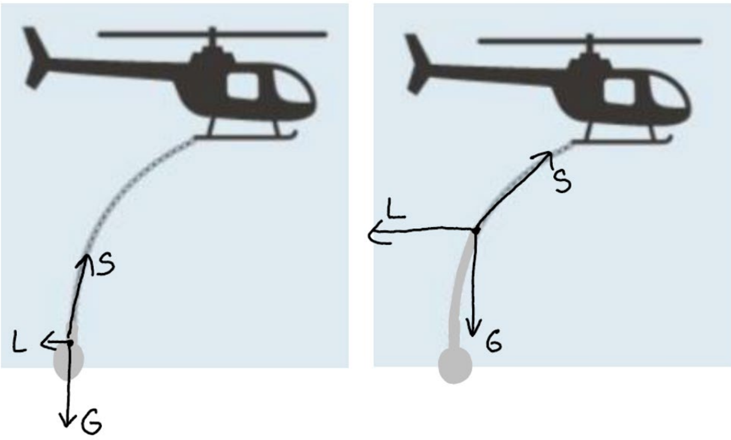
Vi kan derfor skrive vinkelen med usikkerhet som $\theta = 15^\circ \pm 3^\circ$

1.72

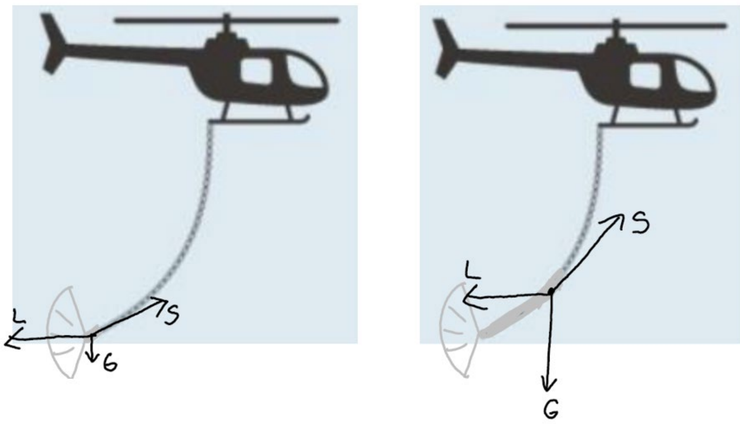
a Siden helikopteret flyr med konstant, vannrett fart, vil også hver del av kjettingen snart få samme konstante fart, og Newtons første lov gjelder.
Vi tenker oss at vi deler kjettingen opp i mange små, like deler. Siden hver del av lenka er lik (antar vi) og har samme fart, er tyngdekraften $\vec{G}$ og luftmotstanden $\vec{L}$ lik. På grunn av Newtons første lov må vi ha $\Sigma\vec{F} = \vec{G} + \vec{L} + \vec{S} = \vec{0}$, der $\vec{S}$ er snorkraften på nederste del. Kraftsummen på de to nederste delene må være lik $2\vec{G} + 2\vec{L} + 2\vec{S} = \vec{0}$, på de tre nederste delene $3\vec{G} + 3\vec{L} + 3\vec{S} = \vec{0}$, og så videre. Siden tyngdekreften og luftmostanden er proporsjonale med hverandre, må snorkraften ha samme retning hele tiden, så figur B må gi riktig svar.



b Hvis nederste ledd har mye større masse enn resten, vil tyngdekraften nederst være stor, og luftmotstanden øke mer enn tyngdekraften når vi beveger oss oppover kjettingen. Kjettingen får da få formen som vises i figur D.



c Hvis vi erstatter siste ledd med en fallskjerm vil luftmotstanden være stor nederst i kjettingen, og tyngden vil øke mer enn luftmotstanden når vi beveger oss oppover. Kjettingen får da formen som vises i figur C.



1.73

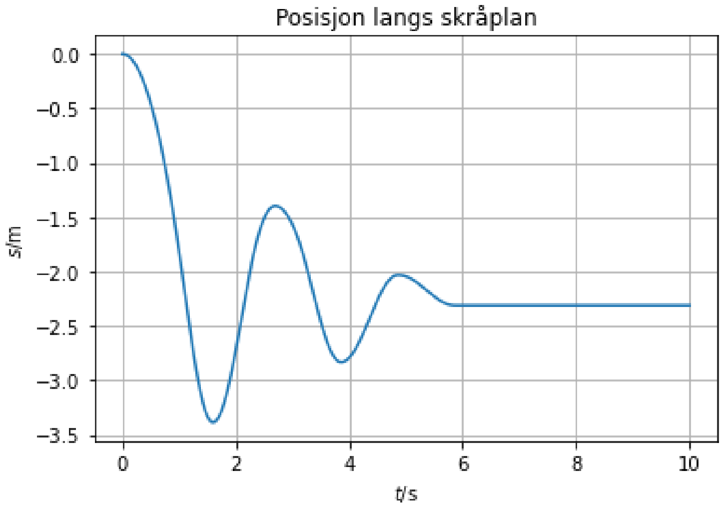
a

```
from pylab import *

# Konstanter
```

```
m = 0.450                # massen til gjenstanden, kg
l = 1.80                 # lengde på snor
theta = radians(30)      # vinkel for skråplanet
k = 4.4                  # fjærkonstant
mu = 0.15                # friksjonstall
g = 9.81                 # tyngdeakselerasjon, m/s^2

# Startverdier
s = 0                    # startposisjon, m
v = 0                    # startfart, m/s
t = 0                    # starttid, s

# Lister for lagring av data
s_verdier = [s]
v_verdier = [v]
t_verdier = [t]

# Konstante krefter
Gx = m*g*sin(theta)      # tyngdekraft langs skråplanet
Gy = m*g*cos(theta)      # tyngdekraft normalt på skråplan
N = Gy                   # normalkraft

# Variable krefter, utregning av kraftsum og akselerasjon
def a(v):
    R = -sign(v)*mu*N
    if s < -l:
        S = -k*(s + l)
    else:
        S = 0
    sum_F = -Gx + R + S
    aks = sum_F/m
    return aks


# Simulering av bevegelse
dt = 0.0001             # tidssteg, s
while t < 10:
    v = v + a(v)*dt
    s = s + v*dt
    t = t + dt

    # Lagring av verdier:
    v_verdier.append(v)
    s_verdier.append(s)
    t_verdier.append(t)

print(s)
# Plotter bevegelse
```

```
plot(t_verdier, s_verdier)
xlabel("$t$/s")
ylabel("$s$/m")
title("Posisjon langs skråplan")
grid()
show()
```

Når vi kjører programmet, får vi denne grafen:



b Klossen får en pendelbevegelse langs skråplanet. Bevegelsen dempes, og etter noen sekunder ligger klossen i ro. Dette skjer når x-komponenten av tyngdekraften er lik snorkraften:

$$mg\sin\alpha = kx \quad \Rightarrow \quad x = \frac{mg\sin\alpha}{k} = \frac{0{,}450\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot\sin 30^\circ}{4{,}4\ \text{N/m}} = 0{,}50\ \text{m}$$

Snora har da total lengde $1{,}80\ \text{m} + 0{,}50\ \text{m} = 2{,}30\ \text{m}$.

1.74

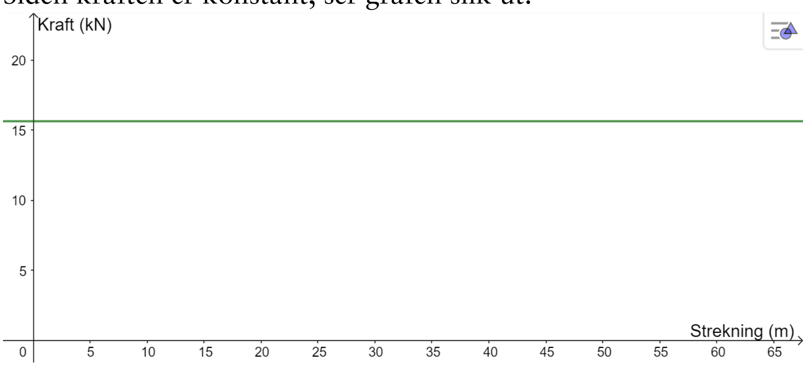
a $W = 147\cdot F\cdot v\cdot t = 147\cdot 75{,}0\ \text{kg}\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 1{,}00\ \text{m/s}\cdot 3{,}5\ \text{s} = 378\ 543\ \text{J} = \underline{\underline{379\ \text{kJ}}}$

b Fra fartsformelen ser vi at $v = v_0 + at \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{v}{t}$ hvis bilen starter fra ro. Newtons andre lov gir

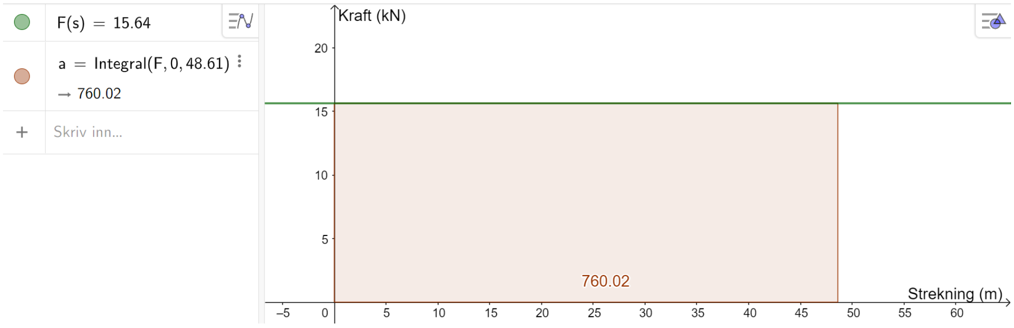
en kraft på $\Sigma F = ma = \dfrac{mv}{t} = \dfrac{1{,}97\cdot 10^3\ \text{kg}\cdot 100/3{,}6\ \text{m/s}}{3{,}5\ \text{s}} = 15\ 635\ \text{N} = \underline{\underline{16\ \text{kN}}}$

c Siden $v_0 = 0$ m/s er strekningen $s = \dfrac{1}{2}(v_0 + v)t = \dfrac{vt}{2} = \dfrac{(100/3{,}6)\ \text{m/s}\cdot 3{,}5\ \text{s}}{2} = 48{,}61\ \text{m} = \underline{\underline{49\ \text{m}}}$

Siden kraften er konstant, ser grafen slik ut:



d Vi finner arealet under kraft-strekning-grafen ved integrasjon i **GeoGebra**, og ser at det blir gjort et arbeid på $760\ \text{kJ} = \underline{\underline{0,76\ \text{MJ}}}$



e I oppgave a fant vi at hvert hjul kan gjøre et arbeid på rundt 0,38 MJ. Til sammen blir dette $4 \cdot 0,38 = 1,5\ \text{MJ}$. Vi ser at det kreves omtrent halvparten av denne energien for å tilbakelegge strekningen. Siden vi kan regne med at en del energi går til andre energiformer, virker dette ikke urimelig.

1.75

a Vi integrerer akselerasjonsfunksjonen for å finne farten etter 2,0 sekunder, og finner at den er 0,77 m/s.

1 $a(t) := 3.21^{-t}$

$\rightarrow \ a(t) := \left(\frac{321}{100}\right)^{-t}$

2 $\int_0^2 a\,dx$

$\approx \ 0.77$

b Akselerasjonen er positiv og går mot null når t går mot uendelig, så farten stiger for alle $t < \infty$. Vi bruker **GeoGebra** til å finne en funksjon for farten. Fra funksjonsuttrykket, ser vi at sluttfarten er lik integrasjonskonstanten c_1.

3 $v(t) := \int a\,dx$

$\approx \ v(t) := -0.86\,e^{-1.17t} + c_1$

4 $v(\infty)$

$\approx \ c_1$

Siden vi vet at gjenstanden akselererer fra ro, kan vi bruke startfarten til å finne c_1.

5 $v(0) = 0$

$\approx \ c_1 - 0.86 = 0$

6 Løs($5, c_1)

$\approx \ \{c_1 = 0.86\}$

Vi finner at den største farten gjenstanden kan få, er $v(\infty) = c_1 = \underline{\underline{0,86\ \text{m/s}}}$.

1.76

a Vi lar v_A og v_B være absoluttverdien til farten til kule A og B etter støtet, og lar α og β være vinkelen mellom fartsretningen og x-aksen. For at bevegelsesmengden skal være bevart i både x- og y-retning, må vi ha

$v_A \sin\alpha = v_B \sin\beta = 1{,}7 \text{ m/s} \cdot \sin 20^\circ = 0{,}5814 \text{ m/s}$, og

$v_A \cos\alpha + v_B \cos\beta = 3{,}0 \text{ m/s}$

$\Rightarrow \quad v_A \cos\alpha = 3{,}0 \text{ m/s} - v_B \cos\beta = 3{,}0 \text{ m/s} - 1{,}7 \text{ m/s} \cdot \cos 20^\circ = 1{,}4025 \text{ m/s}$

Vi finner vinkelen α:

$$\frac{v_A \sin\alpha}{v_A \cos\alpha} = \tan\alpha = \frac{0{,}5814 \text{ m/s}}{1{,}4025 \text{ m/s}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{0{,}5814 \text{ m/s}}{1{,}4025 \text{ m/s}}\right) = 22{,}516^\circ = \underline{\underline{23^\circ}}$$

Vi finner absoluttverdien til farten til kule A:

$$v_A \sin\alpha = 0{,}5814 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad v_A = \frac{0{,}5814 \text{ m/s}}{\sin\alpha} = \frac{0{,}5814 \text{ m/s}}{\sin 22{,}516^\circ} = 1{,}5 \text{ m/s}$$

b Hvis kule B fikk en retning på 90° fra den opprinnelige fartsretningen til kule A, måtte farten til kule A i y-retning være like stor som farten til kule B (og motsatt rettet), og i tillegg ha like stor fart i x-retning som den hadde før støtet. Bare slik kunne bevegelsesmengden være bevart. I dette tilfelle ville den kinetiske energien bli større enn før støtet, så situasjonen er ikke mulig.

c Den kinetiske energien ville også øke om kule B fikk en fartsretning større enn 90° fra den opprinnelige fartsretningen til kule A, så situasjonen er umulig.

1.77

a Den mekaniske energien er bevart, og de to sprettballene faller like langt, så rett før den nederste ballen treffer gulvet, har begge ballene farten $v = \sqrt{2gh_0}$.

I fortsettelsen lar vi store bokstaver (V, M) stå for den store ballen, og må bokstaver (v, m) stå for den lille ballen.

Etter første støt mot gulvet, skifter den nederste ballen fartsretning, mens størrelsen på farten forblir den samme siden støtet mot gulvet er elastisk. Vi velger positiv retning oppover. Rett før første støt mellom sprettballene er da:

Farten til den lille ballen før støtet: $v_1 = \sqrt{2gh_0}$

Farten til den store ballen før støtet: $V_1 = -\sqrt{2gh_0}$

Bevaring av bevegelsesmengde og kinetisk energi gir oss to likningssett:

(1) $mv_1 + MV_1 = mv_2 + MV_2$

(2) $mv_1^2 + MV_1^2 = mv_2^2 + MV_2^2$ (vi har fjernet faktoren ½ siden den er i alle ledd).

Vi løser likningssettet ved hjelp av CAS:

1	m := 0.05 $\rightarrow\ \mathbf{m := \frac{1}{20}}$
2	M := 0.5 $\rightarrow\ \mathbf{M := \frac{1}{2}}$
3	v1 := $\sqrt{2\ g\ h_0}$ $\rightarrow\ \mathbf{v1 := \sqrt{2}\ \sqrt{g\ h_0}}$
4	V1 := −v1 $\rightarrow\ \mathbf{V1 := -\sqrt{2}\ \sqrt{g\ h_0}}$
5	m v1 + M V1 = m v2 + M V2 $\rightarrow\ \mathbf{\frac{-9}{20}\ \sqrt{2}\ \sqrt{g\ h_0} = \frac{1}{2}\ V2 + \frac{1}{20}\ v2}$
6	m v1^2 + M V1^2 = m v2^2 + M V2^2 $\rightarrow\ \mathbf{\frac{11}{10}\ g\ h_0 = \frac{1}{2}\ V2^2 + \frac{1}{20}\ v2^2}$
7	Løs({$5, $6}, {v2, V2}) $\rightarrow\ \mathbf{\left\{\left\{v2 = -29\ \sqrt{g\ h_0}\cdot\frac{\sqrt{2}}{11}, V2 = -7\ \sqrt{g\ h_0}\cdot\frac{\sqrt{2}}{11}\right\}, \left\{v2 = \sqrt{2}\ \sqrt{g\ h_0}, V2 = -\sqrt{2}\ \sqrt{g\ h_0}\right\}\right\}}$

Den andre løsning over er farten ballene har før støtet. Når vi rydder litt opp i den første løsningen ser vi at de to sprettballene etter støtet har fart:

Liten ball: $v_2 = \dfrac{29}{11}\sqrt{2gh_0}$ nedover

Stor ball: $V_2 = \dfrac{7}{11}\sqrt{2gh_0}$ nedover

b Liten ball: $v_2 = \dfrac{29}{11}\sqrt{2gh_0} = \dfrac{29}{11}\sqrt{2\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 1{,}5\ \text{m}} = \underline{\underline{14\ \text{m/s}}}$ nedover

Stor ball: $V_2 = \dfrac{29}{11}\sqrt{2gh_0} = \dfrac{7}{11}\sqrt{2\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 1{,}5\ \text{m}} = \underline{\underline{3{,}5\ \text{m/s}}}$

c

```
from pylab import *

# konstanter og startbetingelser
g = 9.81                # tyngdeakselerasjonen, m/s^2
h = 1.5                 # starthøyde, m

vL1 = sqrt(2*g*h)       # startfart før første støt mellom baller
vS1 = -sqrt(2*g*h)      # startfart før første støt mellom baller

n = 0                   # teller antall støt mellom ballene

while vS1 <= vL1:
    vL2 = (-9*vL1 + 20*vS1)/11      # regner ut fart til liten ball etter støt
    vS2 = (2*vL1 + 9*vS1)/11        # regner ut fart til stor ball etter støt
    vL1 = -vL2                      # liten ball støter mot gulv og skifter
retning
```

```
    vS1 = vS2                       # farten til stor ball før neste støt

    n = n + 1

print("Sprettballene støter mot hverandre totalt", n, "ganger i løpet av bevegelsen.")
```

Når programmet kjører, skriver det ut:

`Sprettballene støter mot hverandre totalt 5 ganger i løpet av bevegelsen.`

KAPITTELTEST

Oppgave 1

a Vi vet: $s = 0{,}80\ \text{m}$, $a = -g = -9{,}81\ \text{m/s}^2$ og $v = 0\ \text{m/s}$ i toppunktet. Vi bruker den tidløse formelen til å finne startfarten:

$$v^2 = v_0^2 + 2as \quad \Rightarrow \quad 0 = v_0^2 - 2gs$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gs} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2 \cdot 0{,}80\ \text{m}} = 3{,}962\ \text{m/s} = \underline{\underline{4{,}0\ \text{m/s}}}$$

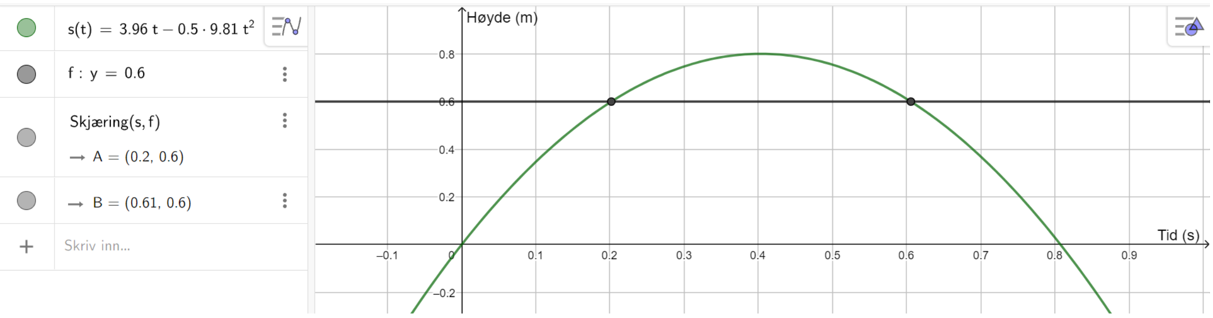
b

Vi bruker posisjonsformel 2 til å finne tiden før spilleren er tilbake på bakken. Da er $s = 0\ \text{m}$.

Vi bruker $v_0 = 3{,}962\ \text{m/s}$. $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(v_0 - \frac{1}{2}gt\right) \cdot t = 0$

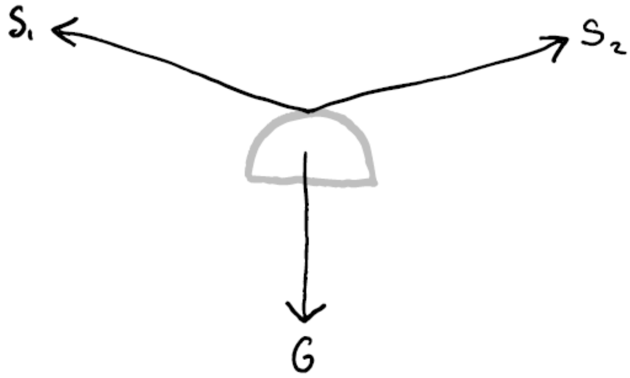
Vi finner sluttiden: $v_0 - \frac{1}{2}gt = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 3{,}962\ \text{m/s}}{9{,}81\ \text{m/s}^2} = \underline{\underline{0{,}81\ \text{s}}}$

c Vi velger å løse oppgaven grafisk ved å tegne grafen til $s(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 3{,}962 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot t^2$ i GeoGebra.



Hopperen er mer enn 0,60 m over gulvet fra i tidsrommet fra 0,2 s til 0,61 s, altså i 0,41 s.

Oppgave 2



Tyngdekraften er: $G = mg = 10{,}5\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2 = \underline{\underline{103\text{ N}}}$.

Snorkreftenes x-komponenter kansellerer hverandre. Siden vinkelen er lik, må de to snorkreftene være like for at dette skal være mulig (fordi $S_x = S\cos 12^\circ$).

Siden $\Sigma F = 0$, og vi vet at y-komponentene er like store, må $2S_y = mg$. Da er

$$2S_y = 2S\cdot\sin 12^\circ = mg \quad\Rightarrow\quad S = \frac{mg}{2\sin 12^\circ} = \frac{10{,}5\text{ kg}\cdot 9{,}81\text{ m/s}^2}{2\sin 12^\circ} = 248\text{ N} = \underline{\underline{0{,}25\text{ kN}}}$$

Oppgave 3

a Arbeidet er lik arealet under grafen. Vi ser at arealet de første to meterne kan beskrives som et rektangel og en trekant. Arbeidet er da:

$$W = 2{,}0\text{ m}\cdot 2{,}0\text{ N} + \frac{1}{2}\cdot 1{,}0\text{ m}\cdot(4{,}0-2{,}0)\text{ N} = \underline{\underline{5{,}0\text{ J}}}$$

b Siden gjenstanden starter fra ro, er $W = \Delta E_\text{k} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$. Vi bruker resultatet fra oppgave a, og får at $v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 5{,}0\text{ J}}{0{,}500\text{ kg}}} = 4{,}472\text{ m/s} = \underline{\underline{4{,}5\text{ m/s}}}$

c Vi finner arealet under grafen: $W = 5{,}0\text{ J} + (4{,}0-3{,}0)\text{ m}\cdot(-1{,}0\text{ N}) = \underline{\underline{4{,}0\text{ J}}}$

d Farten er: $v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 4{,}0\text{ J}}{0{,}500\text{ kg}}} = \underline{\underline{4{,}0\text{ m/s}}}$

Oppgave 4

a Vi bruker den tidløse formelen til å finne et uttrykk for farten til Gøril, v_{G1}, rett før hun hopper på akebrettet. Siden startfarten hennes er lik null, har vi:

$$v_{G1}^2 = v_{G0}^2 + 2as \quad\Rightarrow\quad v_{G1} = \sqrt{2as}$$

Vi bruker bevaring av bevegelsesmengde til å finne farten til Gøril og akebrettet. Siden startfarten til akebrettet er lik null, og Gøril og akebrettet får samme fart, kan vi skrive

$$m_G v_{G1} = (m_G + m_A)v_{G+A}$$

Dette gir:

$$_{G+A} = \frac{m_G}{m_G + m_A}v_{G1} = \frac{m_G}{m_G + m_A}\cdot\sqrt{2as}$$

$$= \frac{70\text{ kg}}{70\text{ kg} + 20\text{ kg}}\cdot\sqrt{2\cdot 1{,}0\text{ m/s}^2\cdot 10{,}0\text{ m}} = 3{,}478\text{ m/s} = \underline{\underline{3{,}5\text{ m/s}}}$$

b Den mekaniske energien er ikke bevart, så $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 + W$. Vi legger nullnivået for høyden ved bunnen av bakken, og løser for sluttfarten:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 + W \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2}{m}\cdot\left(\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_0 + W\right)} = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 + \frac{2W}{m}}$$

Når vi setter inn tall, får vi:

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 + \frac{2W}{m}} = \sqrt{(3{,}478\ \text{m/s})^2 + 2\cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2\cdot 9{,}0\ \text{m} - \frac{2\cdot 4000\ \text{J}}{90\ \text{kg}}} = \underline{\underline{10\ \text{m/s}}}$$

Oppgave 5

a Hvis vi ikke tar hensyn til usikkerheten, er farten:

$v = v_0 + at = 1{,}6\ \text{m/s} + 3{,}7\ \text{m/s}^2\cdot 5{,}0\ \text{s} = 20\ \text{m/s}$

Den absolutte usikkerheten i første ledd er 0,1 m/s.

Den absolutte usikkerheten i andre ledd er:

$$\left(\frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta t}{t}\right)\cdot at = \left(\frac{0{,}2}{3{,}7} + \frac{0{,}1}{5}\right)\cdot 3{,}7\ \text{m/s}^2\cdot 5{,}0\ \text{s} = 1{,}4\ \text{m/s}$$

Den absolutte usikkerheten til farten er da: $\Delta v = 0{,}1\ \text{m/s} + 1{,}4\ \text{m/s} = 1{,}5\ \text{m/s}$

Farten med usikkerhet er $v = (20 \pm 2)\ \text{m/s}$

b Hvis vi ikke tar hensyn til usikkerheten, er strekningen:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 1{,}6\ \text{m/s}\cdot 5{,}0\ \text{s} + \frac{1}{2}\cdot 3{,}7\ \text{m/s}^2\cdot(5{,}0\ \text{s})^2 = 54{,}25\ \text{m/s} = 54\ \text{m/s}$$

Den absolutte usikkerheten i første ledd er:

$$\left(\frac{\Delta v_0}{v_0} + \frac{\Delta t}{t}\right)\cdot v_0 t = \left(\frac{0{,}1}{1{,}6} + \frac{0{,}1}{5}\right)\cdot 1{,}6\ \text{m/s}\cdot 5{,}0\ \text{s} = 0{,}66\ \text{m}$$

Den absolutte usikkerheten i andre ledd er:

$$\left(\frac{\Delta a}{a} + 2\cdot\frac{\Delta t}{t}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot v_0 t^2 = \left(\frac{0{,}2}{3{,}7} + 2\cdot\frac{0{,}1}{5}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 3{,}7\ \text{m/s}^2\cdot(5{,}0\ \text{s})^2 = 4{,}35\ \text{m}$$

Den absolutte usikkerheten til strekningen er da: $\Delta s = 0{,}66\ \text{m} + 4{,}35\ \text{m} = 5\ \text{m}$

Strekningen med usikkerhet er da $s = (54 \pm 5)\ \text{m}$

c Tiden inngår i begge ledd, og i tillegg to ganger i andre ledd. Det er derfor tiden som har mest å si for den totale usikkerheten.