1 Fordi u & v spenner over V betyr det at u er lineært uavhengig fra v. Det vil si at,

$$w = u + v \text{ spenner over } V.$$

Siden w spenner over V vil,

$$w + u \text{ spenne over } V.$$

$$\Rightarrow w + u = (u+v) + u = \{u, u+v\}.$$

2 a) True b) False (kan være $\{0\}$).

c) False (kan være $\{0\}$ eller en linje også).

d) True e) True f) True

$\boxed{3}$ a) $\begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$

(1) Test etter linær uavhengighet,

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & -1 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \frac{1}{3}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & -1 & 2 \\ 7 & 3 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & 6 & 4 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Matrisene er linært avhengige.}}$

Svar a.

b) $$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \neq 0.$$

Svar b.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Matrisene er linært uavhengige.}}$

4 a) Test v_1 med v_2,

Om $v_1 = k v_2$ er de på samme linje.

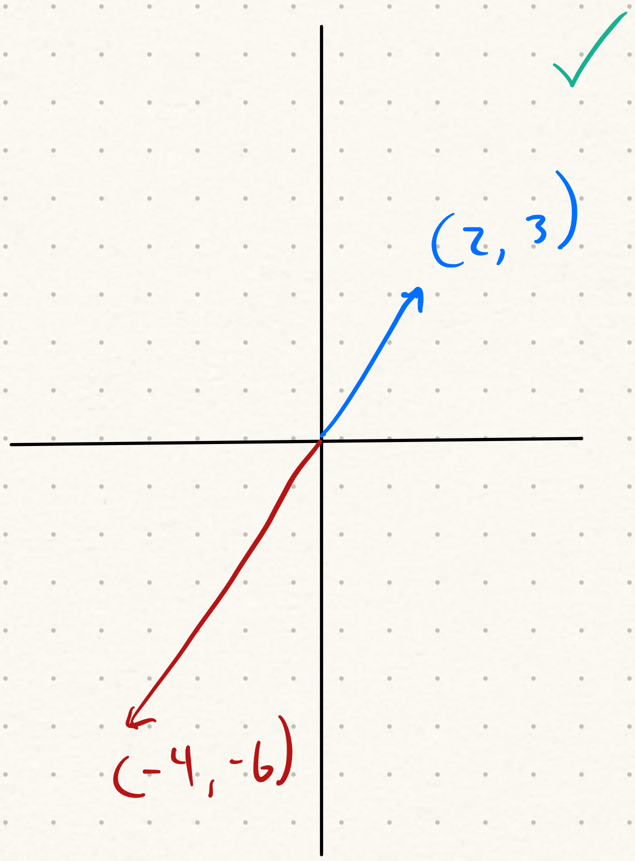
$$\frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{3}{-6} \rightarrow -\frac{1}{2} \checkmark$$

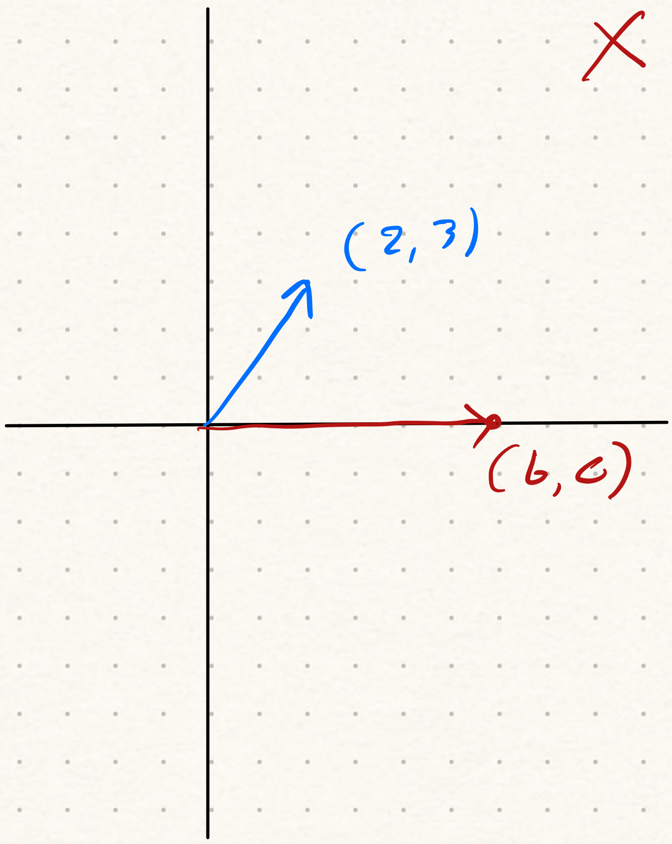
Og v_1 med v_3,

$$\frac{-1}{-3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{0} \rightarrow \times$$

$\boxed{\text{De ligger ikke på samme linje}}$

Svar a.





b) $\frac{2}{4} = \frac{-1}{2} = \frac{4}{3}$ X

$\boxed{\text{De ligger ikke på samme linje}}$

Svar b.

c) $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} \rightarrow \cdot 2$ ✓

$\frac{4}{-2} = \frac{6}{-3} = \frac{8}{-4} \rightarrow -2$ ✓

$\boxed{\text{De ligger på samme linje.}}$

Svar c.

$\boxed{5}$

Husk: $k_1 v_1 + \dots + k_n v_n = 0 \rightarrow$ lineært uavhengig.

a) om bare den trivielle løsningen: $k_i = 0$, eksisterer.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad (1) \quad (2)$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \leftarrow \frac{1}{6} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \quad (-4)$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \leftarrow \frac{1}{3} \\ \\ \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -7 & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} & 0 \end{array}\right] \quad (7)$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Siden vi får 0 = 0 på siste rad har vi vist av likningsystemet er lineært avhengig.

Svar a.

b)

(1) $v_1 = k_2 v_2 + k_3 v_3$

$$\begin{aligned} 0 &= 6k_2 + 4k_3 \rightarrow -4\left(-\tfrac{3}{7}\right) = 6k_2 \Rightarrow \underline{k_2 = \tfrac{2}{7}} \\ 3 &= -7k_3 \rightarrow \underline{k_3 = -\tfrac{3}{7}} \\ 1 &= 5k_2 + k_3 \\ -1 &= k_2 + 3k_3 \end{aligned}$$

$$\boxed{v_1 = \frac{2}{7} v_2 - \frac{3}{7} v_3}$$

Svar 1/3 b.

(2) $v_2 = k_1 v_1 + k_3 v_3$

$6 = 4k_3 \rightarrow \underline{k_3 = \frac{3}{2}}$

$0 = 3k_1 - 7k_3 \rightarrow 3k_1 = 7k_3 \Rightarrow k_1 = \frac{7}{2}$

$5 = k_1 + k_3$

$1 = -k_1 + 3k_3$

$$\boxed{v_2 = \frac{7}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_3}$$

Svar $\frac{2}{3}$ b.

(3) $v_3 = k_1 v_1 + k_2 v_2$

$4 = 6k_2 \rightarrow k_2 = \frac{2}{3}$

$-7 = 3k_1 \rightarrow k_1 = -\frac{7}{3}$

$1 = k_1 + 5k_2$

$3 = -k_1 + k_2$

$$\boxed{v_3 = -\frac{7}{3}v_1 + \frac{2}{3}v_2}$$

Svar $\frac{3}{3}$ b.

6 a) True b) True c) False

d) True e) False f) False