Simplex Algorithmus Aufbau

Nikolai Kiefer

09.01.2020

Einführung Dies ist eine Erklärung des Simplex Algorithmus
Zu allererst sollte geklärt werden wann der simplex überhaupt benutzt wird.

Wann wird der Simplex benutzt? Der Simplex wird benutzt um ein Maximierungsproblem zu lösen

Welche Bedingungen müssen vorherrschen?

- Das Problem muss in der **Normalform** vorliegen
- Die **rechten Seiten** dürfen **nicht negativ** sein
- Es muss eine **Einheitsmatrix** unter den Schlupfvariabeln vorliegen

Wie sieht die Normalform aus Zu erst unser Maximierungsproblem
$MaxF(x) = 81x_1 + 60x_2$

Dann unsere Nebenbedingungen auch Restriktionen genannt

1. $2x_1 + 2x_2 \leq 16$
2. $4x_1 + 2x_2 \leq 24$
3. $4x_1 + 6x_2 \leq 36$

   $x_1, x_2 \geq 0$

Dadurch sieht die Normalform also so aus

1. $2x_1 + 2x_2 + x_3 = 16$
2. $4x_1 + 2x_2 + x_4 = 24$
3. $4x_1 + 6x_2 + x_5 = 36$

   $x_1, x_2 \geq 0$

Nun haben wir auch schon den ersten Schritt fertig. Wir haben eine Normalform

Nun legen wir ein Simplex Tableu an

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}
(1)	x_3	2	2	1	0	0	16	
(2)	x_4	4	2	0	1	0	24	
(3)	x_5	4	6	0	0	1	36	
(3')	F	-80	-60	0	0	0	0	

Perfekt dies ist die Grundform von unserem Simplex Tableu

Nun suchen wir das sogenannte Pivot Element Dafür suchen wir in Zeile (3') nach dem kleinsten negativen Wert der BVs also in diesem Fall -80

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}
(1)	x_3	2	2	1	0	0	16	
(2)	x_4	4	2	0	1	0	24	
(3)	x_5	4	6	0	0	1	36	
(3')	F	-80	-60	0	0	0	0	

Es geht also um folgende Spalte (nun rot eingefärbt) auch genannt Pivotspalte

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}
(1)	x_3	2	2	1	0	0	16	
(2)	x_4	4	2	0	1	0	24	
(3)	x_5	4	6	0	0	1	36	
(3')	F	-80	-60	0	0	0	0	

Nun teilen wir die Werte der Spalte b_i durch die Werte der rot markierten Spalte und tragen es in die Spalte b_i/a_{is}

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}
(1)	x_3	2	2	1	0	0	16	$16/2 = 8$
(2)	x_4	4	2	0	1	0	24	$24/4 = 6$
(3)	x_5	4	6	0	0	1	36	$36/4 = 9$
(3')	F	-80	-60	0	0	0	0	

Nun suchen wir aus dieser Spalte den kleinsten Wert heraus und markieren ihn gelb

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}
(1)	x_3	2	2	1	0	0	16	$16/2 = 8$
(2)	x_4	4	2	0	1	0	24	$24/4 = 6$
(3)	x_5	4	6	0	0	1	36	$36/4 = 9$
(3')	F	-80	-60	0	0	0	0	

Wir haben nun also unsere Pivotzeile, nämlich die gelb eingefärbte

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}
(1)	x_3	2	2	1	0	0	16	$16/2 = 8$
(2)	x_4	4	2	0	1	0	24	$24/4 = 6$
(3)	x_5	4	6	0	0	1	36	$36/4 = 9$
(3')	F	-80	-60	0	0	0	0	

An dem Punkt wo sich Pivotzeile und Spalte treffen(grün eingefärbt) ist unser Pivot Element

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}
(1)	x_3	2	2	1	0	0	16	$16/2 = 8$
(2)	x_4	4	2	0	1	0	24	$24/4 = 6$
(3)	x_5	4	6	0	0	1	36	$36/4 = 9$
(3')	F	-80	-60	0	0	0	0	

Soweit so gut, nun fängt der Austauschschritt an wir haben unser Tableu mit dem Pivot Element

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}
(1)	x_3	2	2	1	0	0	16	$16/2 = 8$
(2)	x_4	4	2	0	1	0	24	$24/4 = 6$
(3)	x_5	4	6	0	0	1	36	$36/4 = 9$
(3')	F	-80	-60	0	0	0	0	

Nun legen wir ein neues Tableu an, mit dem ausgetauschten x_4 und x_1 und neuen Zeilennummern

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}
(4)	x_3							
(5)	x_1							
(6)	x_5							
(6')	F							

Nun wird das Pivotelement durch Teilen auf 1 gebracht und der Rest der Zeile wird durch den gleichen Betrag geteilt. Hier also 4. Wir färben es grün ein

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}	Operation
(4)	x_3								
(5)	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6		(2):4
(6)	x_5								
(6')	F								

Nun muss für die selbe Spalte wie das Pivot Element 0 eingetragen werden bzw. wird die Zeile so oft auf die anderen addiert bzw. subtrahiert bis es 0 ergibt. Dazu gleich mehr(wir haben es gelb eingefärbt)

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}	Operation
(4)	x_3	0							
(5)	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6		(2):4
(6)	x_5	0							
(6')	F								

Nun also für Zeile (4) bspw. muss Zeile(5) zweimal bzw. Zeile (2) ein halbes mal abezogen werden(wir färben es grün ein)

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}	Operation
(4)	x_3	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	4		(1)-2(5)
(5)	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6		(2):4
(6)	x_5	0							
(6')	F								

Das gleiche für Zeile (6) (wieder grün eingefärbt)

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}	Operation
(4)	x_3	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	4		(1)-2(5)
(5)	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6		(2):4
(6)	x_5	0	4	0	-1	1	12		(3)-4(5)
(6')	F								

Zu guter letzt natürlich noch die (6') Zeile (hier Blau gefärbt)

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}	Operation
(4)	x_3	0	1	1	$-\frac{1}{2}$	0	4		(1)-2(5)
(5)	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	6		(2):4
(6)	x_5	0	4	0	-1	1	12		(3)-4(5)
(6')	F	0	-20	0	20	0	480		(3')+20(5)

Wären nun in der (6') Zeile keine negativen Zahlen hätten wir eine optimale Lösung. Da aber noch die -20 drin stehen können wir weiter optimieren. Hätten wir bereits eine optimale Lösung müssten wir nur noch die Spalte b_i ablesen. Da dort die Werte zu den getauschten BVs stehen und der Gesamtwert.

Da dem aber nicht so ist müssen wir eine weitere Iteration machen und wieder schauen.
Dies habe ich hier gemacht und wie man sieht, gibt es keine negative Zahl mehr in Zeile (9'). Dies bedeutet dass es nichts mehr zu optimieren gibt. Wir können nun die optimale Lösung ablesen. Ich habe es hierfür grün eingefärbt.

Zeile	BV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i	b_i/a_{is}
(7)	x_3	0	0	1	$-\frac{1}{4}$	-$\frac{1}{4}$	1	
(8)	x_1	0	0	0	$\frac{3}{8}$	-$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{2}$	
(9)	x_2	0	1	0	-$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	3	
(9')	F	0	0	0	15	5	540	