

# Noter til EM2 på KU (Elektromagnetisme 2)

af Nikolai Plambeck Nielsen, LPK331. Version 1.0

28. oktober 2016

## Indhold

<b>1</b>	<b>Komplekse Tal (Noter kapitel 1)</b>	<b>3</b>
1.1	Den komplekse eksponentialfunktion . . . . .	3
1.2	Tidsudvikling (komplekse harmoniske svingninger) . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Grundlæggende elektronik (Noter kapitel 2)</b>	<b>5</b>
2.1	Passive komponenter . . . . .	5
2.1.1	Resistor . . . . .	5
2.1.2	Kapacitor . . . . .	5
2.1.3	Induktor . . . . .	6
2.1.4	Batterier og spændingsforsyninger . . . . .	6
2.2	Kirchhoffs love . . . . .	7
2.2.1	Kirchhoffs 1. lov . . . . .	7
2.2.2	Kirchhoffs 2. lov . . . . .	7
2.3	Eksempler (kun svingningskreds/RCL) . . . . .	8
2.3.1	Svingningskreds og vekselstrøm . . . . .	9
2.4	Vekselstrøm . . . . .	9
2.4.1	Kirchhoffs love på kompleks form . . . . .	10
2.5	Arbejde og energi . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Fouriertransformation og serier (Noter kapitel 3, egentlig EMM)</b>	<b>12</b>
3.1	Dirac $\delta$ -funktion . . . . .	13
3.2	Fouriertransformation . . . . .	13
3.2.1	Foldning . . . . .	13
3.2.2	Nyttige egenskaber ved Fouriertransformation . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Elektrodynamik (Griffiths kapitel 7)</b>	<b>15</b>
4.1	Elektromotorisk kraft . . . . .	15
4.1.1	Ohms lov . . . . .	15
4.1.2	Elektromotorisk kraft - der ikke er en kraft . . . . .	16
4.1.3	Bevægelses-emf . . . . .	17
4.2	Elektromagnetisk induktion . . . . .	17
4.2.1	Faradays lov . . . . .	17
4.2.2	Det inducerede E-felt . . . . .	18
4.2.3	Induktans . . . . .	19
4.2.4	Energi i magnetiske felter . . . . .	21
4.3	Maxwells ligninger . . . . .	22
4.3.1	Maxwells ligninger i stof . . . . .	23
4.3.2	Randbetingelser . . . . .	24
<b>5</b>	<b>Bevaringslove (Griffiths kapitel 8)</b>	<b>26</b>
5.1	Kontinuitetsligningen og ladningsbevarelse . . . . .	26
5.2	Poyntingvektoren og energibevarelse . . . . .	26

<b>6</b>	<b>Bølger (Griffiths kapitel 9, noter kapitel 4)</b>	<b>27</b>
6.1	Bølger i 1 dimension . . . . .	27
6.1.1	Sinusbølger . . . . .	27
6.1.2	Randbetingelser: refleksion og transmission . . . . .	28
6.1.3	Polarisation . . . . .	29
6.2	Elektromagnetiske bølger i vakuum og bølger i 3 dimensioner . . . . .	29
6.2.1	Monokromatiske planbølger . . . . .	30
6.2.2	Energi i elektromagnetiske bølger . . . . .	30
6.3	Elektromagnetiske bølger i materialer . . . . .	31
6.3.1	Vinkelret refleksion og transmission . . . . .	31
6.3.2	Ikkevinkelret refleksion og transmission (bølger polariseret i indfaldsplanen) . . . .	32
6.4	Absorbering og spredning, elektromagnetiske bølger i ledere . . . . .	34
6.4.1	Refleksion ved en ledende overflade . . . . .	35
<b>7</b>	<b>Mere om bølger (Noter kap 4)</b>	<b>36</b>
7.1	Stående bølger . . . . .	36
7.2	Bølger i 3 dimensioner . . . . .	36
7.3	Interferens . . . . .	37
7.3.1	Rumlig interferens og smarte tricks . . . . .	38
7.3.2	Tidslig interferens . . . . .	38
<b>8</b>	<b>Potentialer og felter (Griffiths kapitel 10)</b>	<b>39</b>
8.1	Gaugefriheder: Coulombs og Lorenz' gauges . . . . .	39
<b>A</b>	<b>Udregninger til kapitler</b>	<b>41</b>
A.1	Kapitel 2 . . . . .	41
A.1.1	Kraftfelter, der er konstante ledningens tværsnit . . . . .	41

## Forslag til andet layout

Jeg overvejer at opdele noterne i 3/4 forskellige dele:

- Kredsløb
- Bølger og anden elektrodynamik
- Andet (komplekse tal / Fourier)
- evt bilag/udregninger

Det kræver en lille omrokering af afsnittene, og kommer til at indebære enten »chapters« eller »parts« af dokumentet. Jeg ved ikke helt, hvilken jeg bruger endnu, og det er mest af alt for min egen skyld, jeg skriver dette ned. I behøver ikke lægge mærke til det. (med mindre, selvfølgelig, I har nogle vildt gode forslag).

# 1 Komplekse Tal (Noter kapitel 1)

Meget kort om komplekse tal:

De er en udvidelse af de reelle tal. Her består hvert komplekst tal af 2 led, hvor det ene er ganget med tallet  $i$ . Dette er et meget specielt talt, idet det har egenskaben:

$$i^2 = -1 \quad (1.1)$$

Et generelt komplekst tal  $z$  skrives da:

$$z = x + iy \quad (1.2)$$

hvor  $x$  kaldes den *reelle* del og  $y$  kaldes den *imaginære* del. Disse skrives også henholdsvis

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y \quad (1.3)$$

Man definerer også den *kompleks konjugerede*  $z^*$  ved

$$z^* = x - iy \quad (1.4)$$

Så man flipper bare fortegnet på den imaginære del. Den reelle og imaginære del kan udregnes ved hjælp af den konjugerede

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i} \quad (1.5)$$

Man definerer også modulus (størrelse) og argument (vinkel/retning) af komplekse tal:

$$|z| = \sqrt{z^* z} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arg z = \theta \quad (1.6)$$

hvor  $\theta$  kan findes ved trigonometri:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \theta = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{y}{|z|} \quad (1.7)$$

Men pas på med at bruge tan til at finde argumentet, idet den ikke altid giver det rigtige svar. Så brug helst cos eller sin (jeg har ikke en god forklaring på det, lige nu, så det må vente til et senere tidspunkt.)

Hvis man er nødt til at dividere komplekse tal på kartesisk form (eller har et  $i$  i nævneren og gerne vil af med det), så er der et smart trick: forlæng brøken med nævnerens konjugerede. Dette giver nemlig:

$$z = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \frac{c - id}{c - id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} \quad (1.8)$$

Eller mere generelt:

$$z = \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_2^* w_1}{|w_2|^2} \quad (1.9)$$

## 1.1 Den komplekse eksponentialfunktion

For imaginære tal ( $z = i\theta$ ) er eksponentialfunktionen defineret ved

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.10)$$

Størrelsen af denne kan findes på to måder:

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1, \quad |e^{i\theta}| = \sqrt{(e^{i\theta})^* e^{i\theta}} = \sqrt{e^{-i\theta} e^{i\theta}} = 1 \quad (1.11)$$

Den komplekse eksponentialfunktion for et komplekst tal er da

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (1.12)$$

Komplekse tal kan også skrives på en anden form, der gør brug af den komplekse eksponentialfunktion. Denne form kaldes for *polær form*.

$$z = |z| e^{i\theta} \quad (1.13)$$

Denne måde at skrive komplekse tal på, har en stor fordel når det kommer til multiplikation og division. For i stedet for at skulle gange hvert led sammen, så er multiplikation bare at gange/dividere modulus, og lægge argumenter sammen (eller trække dem fra):

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.14)$$

## 1.2 Tidsudvikling (komplekse harmoniske svingninger)

Den komplekse eksponentialfunktion bruges ofte til at beskrive harmoniske svingninger. Eksempelvis ses en tidsligt varierende emf, givet ved  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ . Dette kan skrives som den reelle del af den komplekse eksponentialfunktion:

$$\mathcal{E} = \operatorname{Re}(\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}) \quad (1.15)$$

Det negative fortegn i eksponenten er et arbitrært valg, men det er den konvention bøgerne, vi bruger, bruger.

Generelt har eksponenten både en reel og imaginær del. Eksempelvis:

$$f(t) = e^{-(\gamma+i\omega)t} = e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} \quad (1.16)$$

hvor den reelle del af dette udtryk er en eksponentielt dæmpet harmonisk svingning (se Mek2/MatF2 pensum for grundigere gennemgang af denne, med udledning):

$$\operatorname{Re}(f(t)) = e^{-\gamma t} \cos \omega t \quad (1.17)$$

## 2 Grundlæggende elektronik (Noter kapitel 2)

### 2.1 Passive komponenter

Passive komponenter er komponenter, der ikke kan forstærke strømmen i et kredsløb. Dette vil sige resistorer (modstande), kapacitorer (kondensatorer) og induktorer (spoler). Kapitlet omhandler også batterier, strømforsyninger og vekselstrømme, selvom dette ikke helt har med passive komponenter at gøre.

Elektronerne i en leder bevæger sig fordi de bliver påvirket af en spændingsforskel (også kendt som et elektrisk felt). Hvis materialet er helt rent, så der ingen andre typer atomer der er, og hvis atomerne i materialet overhovedet ikke bevægede sig, men sad helt fast i krystalgitteret, ville der ingen modstand være i materialet, og alle de frie atomer ville falde gennem materialet i frit fald (indtil bevægelsen skaber et stort nok elektrisk felt til at modvirke tyngdekraften, selvfølgelig)

#### 2.1.1 Resistor

Materialer er dog ikke perfekte, og det viser sig, at det elektriske felt og volumenstrømmen er lineært proportionelle, med proportionalitetskonstanten  $\sigma$ , kaldet for konduktiviteten:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.1)$$

Dette er en form af Ohms lov. Konduktiviteten er den inverse af *resistiviteten*  $\rho$ :  $\sigma = \rho^{-1}$ . I isolatorer er konduktiviteten høj, mens det omvendte er sandt for metaller og generelt ledere. Forskellen i konduktiviteten mellem et metal og en isolator er ofte i størrelsesordenen  $10^{22}$ . Derfor kan ledninger som oftest regnes for perfekte ledere, og man kan

Ohms lov er egentlig en approksimering, idet den egentlig har formen

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.2)$$

hvor  $\mathbf{f}$  er kræften per ladningsenhed. Som regel er de magnetiske kræfter mange størrelsesordener mindre end de elektriske kræfter (det er normalt kun i plasmaer, at approksimationen i Ohms lov bryder ned).

Ved at omregne volumenstrømmen til den samlede strøm med  $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$  og omregne det elektriske felt til potentialet med  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , fås den mere velkendte form af Ohms lov:

$$V = RI \quad (2.3)$$

Hvor proportionalitetskonstanten selvfølgelig er modstanden  $R$ . Denne er  $R = L/(\sigma A)$ , hvor  $L$  og  $A$  er henholdsvis ledningens længde og tværsnitsareal.

Når elektronerne passerer gennem en modstand, vil noget af deres energi blive omsat til varme, givet ved Joules varmelov:

$$P = VI = RI^2 \quad (2.4)$$

Hvis man sætter to (eller flere) modstande i serie, vil den samlede modstand være givet ved summen af de enkelte:

$$R_{\text{serie}} = \sum R_i \quad (2.5)$$

Men hvis man sætter dem i parallelforbindelse, er den inverse af den samlede modstand lig summen af de enkelte inverse modstande:

$$\frac{1}{R_{\text{parallel}}} = \sum \frac{1}{R_i} \quad (2.6)$$

#### 2.1.2 Kapacitor

En kapacitor er en komponent i et kredsløb, der tillader kontrolleret ophobning af ladninger, hvormed der dannes et elektrisk felt og en tilhørende spændingsforskel. Der er en lineær sammenhæng mellem ladningen der ophobes og spændingsforskellen der dannes. Proportionalitetskonstanten mellem disse kaldes kapacitansen  $C$ :

$$Q = CV \quad (2.7)$$

Denne afhænger af geometrien af kapacitoren, samt de materialer den er lavet af. For pladekondensatorer er denne givet ved

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.8)$$

hvor  $\epsilon_r$  er den relative permittivitet af materialet mellem pladerne,  $A$  er arealet af dem og  $d$  afstanden mellem dem.  $\epsilon_r$  er 1 for vakuum og lige omkring 1 for luft.

Der kan normalt set ikke passere strøm gennem en kapacitor, men mens den oplader, svarer det til at der løber en strøm gennem komponenten. Dette sker kun i ret kort tid, og det koster energi:

$$W = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.9)$$

Opladningen af en kondensator (eller afledningen) er bestemt af "Ohms lov" for denne komponent, givet ved

$$I = C \frac{dV}{dt}, \quad V = \frac{1}{C} \int I dt \quad (2.10)$$

Denne fås ud fra ligning (2.7) og definitionen af strøm:  $I = \frac{dQ}{dt}$ .

Sættes kapacitorer i serie er den samlede kapacitans givet ved

$$\frac{1}{C_{serie}} = \sum \frac{1}{C_i} \quad (2.11)$$

Altså som for modstande i parallelforbindelse. Ligeledes står det til med parallelforbindelse af kapacitorer (altså, at det er som modstande i serie):

$$C_{parallel} = \sum C_i \quad (2.12)$$

### 2.1.3 Induktor

Når vi har med vekselstrømme at gøre, vil der dannes et varierende magnetfelt, hvilket resulterer i et induceret elektrisk felt og emf. For at danne så kraftigt et magnetfelt som muligt, bruger man spoler eller *induktorer*. Den inducerede emf er beskrevet ved Faradays lov i integralform, og fluxreglen:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2.13)$$

Dette er et lukket kurveintegral, så der skal altså integreres rundt i hele kredsen. Størstedelen af den samlede emf i kredsløbet vil komme fra spolen, og ved hjælp af formelen  $\Phi = LI$ , hvor  $L$  er spolens induktans, kan man opstille en slags "Ohms lov" for spoler:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (2.14)$$

Det ses at hvis der løber en konstant strøm er  $\mathcal{E} = 0$ , præcis som forventet. Hvis man derimod vil ændre strømmen kræver det energi, idet der dannes et magnetfelt, der som bekendt lagrer energi. Denne er givet ved

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad (2.15)$$

Det skal huskes, at det ikke kun er spoler, der har en induktans. Ethvert kredsløb har en induktans, hvad end der er en spole til stede eller ej (et kredsløb kan ses som en spole med én vinding). Men så fremt antallet af vindinger i en spole er meget større end 1, vil induktansbidraget herfra være langt det største.

### 2.1.4 Batterier og spændingsforsyninger

Batterier og spændingsforsyninger er egentlig ikke passive komponenter, men det giver bedst mening at beskrive dem her, sammen med de passive komponenter. Batterier og spændingsforsyninger virker generelt ved at udføre en kraft per ladning  $\mathbf{f}$ , over en afstand, hvilket medfører en emf:

$$\mathcal{E}_0 = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.16)$$

hvor integralet er over hele kredsløbet, men  $\mathbf{f}$  er selvfølgelig kun forskellig fra 0 i batteriet/spændingsforsyningen (jeg skriver altså bare batteri herfra, jeg gider ikke skrive dem begge længere). Det samlede arbejde fås ved at gange  $\mathcal{E}_0$  med antallet af ladningsenheder  $Q$ . Og arbejdet per sekund (effekten) er da:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\mathcal{E}_0) = I\mathcal{E}_0 \quad (2.17)$$

## 2.2 Kirchhoffs love

Kirchhoffs 2 love, er love som alle elektriske kredsløb overholder (med den antagelse at signaler udbreder sig med uendelig hastighed, hvilket jo ikke er sandt, men mere om det, om lidt.). Disse love er direkte konsekvenser af lovene om ladningsbevarelse og energibevarelse.

### 2.2.1 Kirchhoffs 1. lov

Kirchhoffs 1. lov er en konsekvens af ladningsbevarelse. Denne siger, at enhver strøm der løber ind i kredsløbet, må nødvendigvis komme ud igen. Der kan ikke ophobe sig ladninger nogen steder i ledninger, og i knudepunkter, hvor 3 eller flere ledninger mødes, vil den samlede strøm, der løber ind i knudepunktet gennem nogle ledninger, løbe ud af de andre ledninger. Hvis man regner strømmens retning med fortegn kan dette beskrives ved

$$\sum_i I_i = 0 \quad (2.18)$$

Så al den strøm der løber ind (positivt fortegn) vil præcis modsvare den strøm der løber ud (negativt fortegn).

Hvis der et sted ophober sig ladninger i et kredsløb er dette ikke et knudepunkt, men betragtes som en del af en kapacitor.

### 2.2.2 Kirchhoffs 2. lov

Kirchhoffs 2. lov kommer fra energibevarelse i et kredsløb. Et større kredsløb kan som oftest betragtes som en masse mindre delkredsløb, kaldet for *masker*. Energien per ladning udført af alle krafter (elektriske og andre) er givet ved:

$$\int (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{J} \, d\tau \quad (2.19)$$

hvor dette volumenintegral er over hele den strømførende del af kredsen. I den *i*'te *gren* af masken (en gren er et understykke af masken, med eventuelle komponenter) vil energien til sidst blive afsat som varme, hvilket giver anledning til følgende ligning for lokal energibevarelse:

$$\int_i (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{J} \, d\tau = R_i I_i^2 \quad (2.20)$$

hvis det antages, at kraftfelterne er konstante over ledningens tværsnit, udtrykket omskrives til

$$\mathcal{E}_i + \int_i \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = R_i I_i \quad (2.21)$$

Udregningen af dette kan ses i appendiks. Her er  $\mathcal{E}_i$  den elektromotoriske kraft fra hvad end batterier der er i den *i*'te gren af masken. Hvis grenen indeholder en kapacitor, vil kurveintegralet ikke gå gennem kapacitorens plader. Så for at få bidraget fra eventuelle kapacitorer med, trækkes dette fra på venstre side:

$$\mathcal{E}_i + \int_i \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - V_{Ci} = R_i I_i \quad (2.22)$$

hvor  $V_{Ci} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  er spændingen over kapacitoren. Hvis bidragene fra alle grene i masken fås

$$\sum_{\text{batterier}} \mathcal{E}_i + \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \sum_{\text{kapacitorer}} V_{Ci} = \sum_{\text{modstande}} R_i I_i \quad (2.23)$$

Her ligner det lukkede kurveintegral jo noget, vi kender, nemlig Faradays lov i integralform! Indsættes denne:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \sum_{\text{spoler}} L_i \frac{dI_i}{dt} \quad (2.24)$$

Ved indsætning af dette fås den samlede, endelige ligning: Kirchhoffs 2. lov. Også kaldet maskeligningen:

$$\sum_{\text{batterier}} \mathcal{E}_i = \sum_{\text{spoler}} L_i \frac{dI_i}{dt} + \sum_{\text{kapacitorer}} V_{Ci} + \sum_{\text{modstande}} R_i I_i \quad (2.25)$$

hvor  $V_{Ci} = C^{-1} \int^t I(t') dt'$ . Denne ligning gælder for alle de steder i et kredsløb, hvor man kan tegne en lukket kurve (så generelt set rigtig, rigtig mange steder).

Der er en huskeregel for denne ligning, nemlig at hver komponent i en kreds bidrager med en emf, der er karakteristisk for den pågældende komponent. Den  $i$ 'te modstand bidrager med  $I_i R_i$ , den  $i$ 'te kapacitor bidrager med  $V_{Ci}$  og den  $i$ 'te spole bidrager med  $L_i dI_i/dt$ . Summen af alle disse bidrag vil da være lig den emf, som batteriet (eller batterierne) bidrager med.

## 2.3 Eksempler (kun svingningskreds/RCL)

De tre første, simple eksempler (en R, RL og RC kreds) vil jeg ikke beskrive her, da afsnittende er ret korte og simple, andet end selvfølgelig at skrive resultaterne derfra:

**Strømmen gennem en spole.** I et kredsløb, bestående af en spændingsforsyning,  $\mathcal{E}$ , en modstand  $R$  og en spole  $L$  i serie, fås at strømmen gennem spolen er givet ved differentialligningen med tilhørende løsning (begyndelsesbetingelse  $I(0) = 0$ )

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + RI, \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (2.26)$$

Og det tager ca tiden  $\tau = L/R$ , førend strømmen når sin slutværdi.

**Ladning på kapacitor.** I et lignende kredsløb, men med en kapacitor  $C$  i stedet for en spole, er ladningen på kapacitoren givet ved følgende differentialligning og løsning (med  $Q(0) = 0$ ):

$$\mathcal{E} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad \Rightarrow \quad Q(t) = \mathcal{E} C (1 - e^{-t/RC}) \quad (2.27)$$

Det tager ca tiden  $\tau = RC$  førend kapacitoren er opladt.

**Svingningskredsen.** Nu det sidste kredsløb: en RCL- eller svingningskreds. Denne kreds består af et batteri, serieforbundet med en spole, kapacitor og en modstand. Når batteriet tilsluttes vil der begynde at løbe en strøm, hvilket inducerer et magnetisk felt, der prøver at modvirke strømmen (tænk Lenz' lov). Dette sker indtil kapacitoren er ladt op, og der ikke længere kan løbe en strøm. Men så ændres fluxen i kredsløbet jo igen, hvilket inducerer en strøm, der løber den modsatte vej, hvilket aflader kapacitoren igen. Hvis der ikke var nogen modstand i kredsløbet ville systemet bare stå at oscillere frem og tilbage, oplade og aflade. Men idet der er en modstand vil der gradvist tabes energi i form af varme, indtil fænomenet ophører, og kapacitoren slutter med at være opladt.

Matematisk set er det en eksponentielt dæmpet, harmonisk oscillator, med svingningsfrekvens  $\omega_0 = \sqrt{LC}^{-1}$ , og dæmpningskoefficient  $R/2L$ . Dette giver anledning til tre tilfælde:  $\omega_0 > R/2L$ ,  $\omega_0 = R/2L$  og  $\omega_0 < R/2L$ . Det første tilfælde er *underdæmpning*, der har løsningen:

$$I(t) = e^{-Rt/2L} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (2.28)$$

Hvor  $A$  og  $B$  bestemmes ved randbetingelser. I dette tilfælde vil strømmen oscillere frem og tilbage, indtil ækvilibrummet er mødt. Denne oscillation vil dø ud i løbet af en tid  $\tau = 2L/R$ . Forholdet mellem denne og svingningstiden  $T = 2\pi/\omega_0$  kaldes for *godheden*  $Q$  (ikke at forveksle med ladningen...), og er givet ved

$$Q = \pi \frac{\tau}{T} = \frac{L\omega_0}{R} \quad (2.29)$$

Og læg også mærke til faktoren af  $\pi$ ! (ikke fakultet.)

Det andet tilfælde, hvor  $\omega_0 = R/2L$ , kaldes for *kritisk dæmpning* og har løsningen

$$I(t) = (A + Bt)e^{-Rt/2L} \quad (2.30)$$

hvor igen  $A$  og  $B$  er konstante, bestemt ved randbetingelser. Her svinger kredsen ikke frem og tilbage, men opnår blot ækvilibrum i løbet af én "periode".



Det sidste tilfælde kaldes for *overdæmpning* og resulterer i at systemet heller ikke oscillerer. Til gengæld vil det tage systemet længere tid at nå ækvilibrium, end ved kritisk dæmpning. Løsningen er:

$$I(t) = Ae^{-\lambda_+ t} + Be^{-\lambda_- t}, \quad \lambda_{\pm} = \frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (2.31)$$

Og du får selv lov at gætte, hvad  $A$  og  $B$  er.

Normalt bruges begyndelsesbetingelserne, at  $Q(0) = 0$  og  $I(0) = 0$ . **Der er noget sludder her. Figurerne i noterne stemmer ikke overens med hinanden. Jeg håber på at finde ud af det, på et tidspunkt**

### 2.3.1 Svingningskreds og vekselstrøm

Dette afsnit giver kun mening hvis du har læst det næste, men jeg har alligevel valgt at indsætte dette afsnit her, for at holde materialet om svingningskredsen samlet.

Med impedansen og den komplekse version af Kirchhoffs love i hånden, er maskeligningen for svingningskredsen givet ved

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 = \left( R - i\omega L + \frac{I}{\omega C} \right) \tilde{I}_0 \quad (2.32)$$

Hvor udtrykket i parentes er kredsens impedans. Det ses da, at strømmen i kredsen er frekvensafhængig, og for at finde den største strøm, skal den imaginære del af impedansen minimeres:  $\omega L - (\omega C)^{-1} = 0$ . Dette giver netop kredsens svingningsfrekvens:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (2.33)$$

Dette er også fænomenet kaldet resonans. Og jo større godhed svingningskredsen har, jo større gavn vil man få af resonansfrekvensen.

## 2.4 Vekselstrøm

Vekselstrøm er tilfælde, hvor den elektromotoriske kraft er tidsafhængig (den *veksler* mellem værdier, oftest positive og negative). Mest almindeligt er  $\mathcal{E}$  en harmonisk svingning:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (2.34)$$

hvor  $\mathcal{E}_0$  er amplituden,  $\theta$  er fasen og  $\omega$  er vinkelfrekvensen, der relaterer til signalets almindelige frekvens ved  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi T^{-1}$  ( $\nu$  er frekvensen og  $T$  er perioden). Denne type tidsafhængighed er både at finde i radiobølger og stikkontakter, så den er gængs. Den er forholdsvis nem at arbejde med, da integralet og differentialkvotienten af trigonometriske funktioner er forholdsvis nemme (ud over fortegnene, selvfølgelig). Endnu nemmere er det dog at differentiere og integrere eksponentialfunktionen, også hvis denne er kompleks! Grunden til dette bringes på banen, er fordi  $\cos \omega t$  netop er realdelen af den komplekse eksponentialfunktion (normalt er ses der bort fra  $\theta$ , men den er ret simpel at inkludere, bare gang  $e^{i\theta}$  på emf'en, så har du din faseforskydning). Da er den elektromotoriske kraft:

$$\mathcal{E}(t) = \text{Re}[\tilde{\mathcal{E}}(t)] = \text{Re}[\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}] = \text{Re}[\tilde{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t}] \quad (2.35)$$

hvor der indført den komplekse amplitude  $\tilde{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0$ . Grunden til dette, er egentlig bare for at holde notation og udregninger konsistente.

Hvis det nu antages, at strømmen kan skrives som den reelle del af en kompleks strømfunktion, på lignende form af emf'en, og det viser sig denne overholder Kirchhoffs love, så må denne form for strøm være gyldig (på samme måde, som enhver funktion der opfylder bølgeligningen er en bølge, hvad end det er hvad vi normalt tænker på som bølger). Det postuleres da, at strømmen har formen:

$$I(t) = \text{Re}[\tilde{I}(t)] = \text{Re}[\tilde{I}_0 e^{-i\omega t}] \quad (2.36)$$

Hvis der da ses på Kirchhoffs anden lov, uden kapacitorer fås

$$\tilde{\mathcal{E}}(t) = \left( L \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} + R\tilde{I}(t) \right) \quad (2.37)$$

Hvor det indses at da både differentiation og det at tage den reelle del af et komplekst tal er lineære operatorer, så er rækkefølgen hvori vi anvender dem lige meget (**følg lige op på dette, jeg er nemlig ikke helt sikker!**), i hvert fald hvis vi ikke skalerer med komplekse tal (for der ændrer realdelen af en størrelse). Hvis funktionerne for emf og strøm indsættes, og der differentieres samt forkortes, fås

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 = (-i\omega L + R)\tilde{I}_0 \quad (2.38)$$

hvilket jo minder ualmindeligt meget om Ohms lov, men med  $R \rightarrow R - i\omega L$ . På denne måde defineres *impedansen*  $Z = R - i\omega L$ , der kan ses som en form for "kompleks modstand". I jævnstrøms tilfældet ( $\omega = 0$ ) reducerer denne til den almindelige, reelle resistans  $R$ . Den imaginære del af impedansen kan ses som en form for ekstra modstand, som kun opstår i vekselstrøms tilfælde. I disse tilfælde vil der blive induceret strømme i kredsløbet selv (men i modsat retning, grundet Lenz lov), hvilket dermed modvirker den "eksterne" strøm, man tilfører systemet med et batteri eller lignende. På denne måde virker det netop som en modstand.

Med impedansen findes amplituden af den komplekse strøm:

$$\tilde{I}_0 = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_0}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0}{R - i\omega L} \quad (2.39)$$

Hvis impedansen skrives på polær form, med  $Z = |Z| \exp(i\phi)$ ,  $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$  og  $\tan \phi = -\omega L R^{-1}$ , kan den komplekse amplitude også skrives på polær form, med  $\tilde{I}_0 = |\tilde{I}_0| \exp(-i\phi)$  og

$$|\tilde{I}_0| = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad (2.40)$$

Og den reelle strøm er da

$$I(t) = \text{Re} \left[ |\tilde{I}_0| e^{-i(\omega t + \phi)} \right] = |\tilde{I}_0| \cos(\omega t + \phi) \quad (2.41)$$

### 2.4.1 Kirchhoffs love på kompleks form

Hvis der indføres en lignende form for kompleks ladning:  $Q(t) = \text{Re} [\tilde{Q}(t)] = \text{Re} [\tilde{Q}_0 e^{-i\omega t}]$ , kan begge Kirchhoffs love skrives på kompleks form. Fordelen ved dette er, at disse er rene, algebraiske ligninger, og der er ingen grimme differentialkvotienter eller integraler. Efter lidt regnehygge i stil med det fra første omgang af Kirchhoffs love (igen, se appendiks, når jeg engang får skrevet det), fås:

$$\sum_{\text{knudepunkt}} \tilde{I}_0 = 0 \quad (2.42)$$

og

$$\sum_{\text{batterier}} \tilde{\mathcal{E}}_{0,j} = \sum_{\text{spoler}} -i\omega L_j \tilde{I}_{0,j} + \sum_{\text{kapacitorer}} \frac{i\tilde{I}_{0,j}}{\omega C_j} + \sum_{\text{modstande}} R_j \tilde{I}_{0,j} \quad (2.43)$$

hvor der her bruges  $j$  som indeks, for ikke at forvirre mht den imaginære enhed.

Kapacitorer har impedansen  $(-i\omega C)^{-1}$ , altså høj impedans ved lave frekvenser, mens spoler har impedansen  $-i\omega L$ , altså høj impedans ved høje frekvenser (igen, fordi det er et mål for den modvirkende inducerede strøm i kredsløbet.). Hvis der optræder flere, forskellige impedanser i et kredsløb, adderes disse præcis som modstande (med tilhørende formler for serie-/parallelforbindelse).

**Høj-pas filter.** Et høj-pas filter er en kreds, der lader signaler med høj frekvens passere kreds, men blokerer lav-frekvenssignaler. Dette gøres med en variabel spændingsforsyning  $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}}$  forbundet til en kreds af ukendt impedans  $Z$ . Denne kreds er parallelforbundet med en modstand  $R$ , og tilsammen er den serieforbundet med en kapacitor  $C$ . Hvis der kigges på spændingen over den ukendte kreds med impedans  $Z$  fås:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{out}} = \frac{-i\omega RC}{1 + \frac{R}{Z} - i\omega RC} \tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}} \quad (2.44)$$

$$\approx \frac{-i\omega RC}{1 - i\omega RC} \tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}} \quad (2.45)$$

hvor, hvis  $|Z| \gg R$ , reducerer udtrykket til anden linje. For små frekvenser, med  $\omega RC \ll 1$  vil spændingen over komponenten være dæmpet, hvorimod de to spændinger er approksimativt ens i tilfældet  $\omega RC \gg 1$ . Fysisk set er det, der sker, at kun højfrekvente signaler kan "passere gennem" kapacitoren, idet hvis det går for lang tid, vil denne være opladt, og der kan ingen strøm løbe, og der vil dermed heller ikke være et spændingsfald.

**Lav-pas filter.** Byttes der om på kapacitoren og modstanden (så den ukendte kreds og kapacitoren er parallelforbundne, og de tilsammen sidder i serie med modstanden), fås et lav-pas filter. Her er spændingen  $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{out}}$  givet ved

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{out}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z} - i\omega RC} \tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}} \quad (2.46)$$

$$\approx \frac{1}{1 - i\omega RC} \tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}} \quad (2.47)$$

Hvor samme approksimation som sidst er brugt. I den lavfrekvente grænse,  $\omega RC \ll 1$ , er de to spændinger approksimativt ens, mens i den højfrekvente,  $\omega RC \gg 1$ , er spændingen over  $Z$  meget dæmpet. Fysisk set sker der det, at jo lavere frekvens signalet har, jo mere når kapacitoren at blive opladt, og dermed får den højere impedans. Dette medfører at mere af strømmen løber gennem den ukendte komponent. Men jo højere frekvens signalet har, jo lavere impedans har kapacitoren, og jo mere strøm løber der gennem denne (der løber selvfølgelig ikke en fysisk strøm, men you get the idea).

## 2.5 Arbejde og energi

I en kreds med harmonisk svingende spænding, hvor alle komponenterne samles i en samlet, effektiv impedans  $Z$ , vil denne være en funktion af  $\omega$ , og vil have en reel og imaginær del

$$Z = R + iX \quad (2.48)$$

hvor  $R$  kaldes resistansen, og  $X$  reaktansen (dette er den imaginære, frekvensafhængige del af impedansen). Jeg går kraftigt ud fra, at reaktansen har dette navn fordi det er kredsløbets »reaktion« på den varierende elektromotoriske kraft (selvinduktans, for eksempel).

Hvis der så kigges på den effekt, der bliver afsat i kredsløbet ( $P(t) = \mathcal{E}(t)I(t)$ ), integrerer den, over én periode  $T$ , og dividerer med  $T$ , for at få den gennemsnitlige effekt over én periode, fås:

$$\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2 R}{2|Z|^2} = \frac{1}{2} |\tilde{I}_0|^2 R, \quad \text{Kun ren harmonisk svingning} \quad (2.49)$$

hvor  $\mathcal{E}_0$  og  $\tilde{I}_0$  er amplituden for henholdsvis den elektromotoriske kraft og strømmen. Det ses, at der er en faktor  $1/2$  til forskel fra jævnstrømstilfældene, hvor  $P = \mathcal{E}I = \mathcal{E}^2/R = I^2 R$ . Derfor introduceres ofte de »effektive amplituder« for strømmen og den elektromotoriske kraft:

$$I_{\text{eff}} = \frac{|\tilde{I}_0|}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} \quad (2.50)$$

Dette gør nemlig, at faktoren, der var til forskel, forsvinder:

$$\langle P \rangle = I_{\text{eff}}^2 R \quad (2.51)$$

De 220V i vores stikkontakter (eller 110V i Amerika, eksempelvis) er også  $\mathcal{E}_{\text{eff}}$ , og ikke den egentlige amplitude.

### 3 Fouriertransformation og serier (Noter kapitel 3, egentlig EMM)

Idet jeg allerede har skrevet om Fouriertransformation og Fourierserier (MatF1 Noter), gider jeg ikke gøre det igen. Jeg har til gengæld inkluderet en lettere modificeret udgave af afsnittene. Jeg har slettet afsnittet om den reelle Fourierserie, for med den komplekse skal man kun udregne et enkelt integral. Jeg har også inkluderet et lille skriv om, hvordan man omskriver til cos/sin funktioner fra den komplekse fourierserie.

Fourierserier er en måde at opskrive enhver, periodisk<sup>1</sup> funktion (givet nogle betingelser), som en uendelig række af harmoniske komponenter. De førnævnte betingelser går under navnet **Dirichletbetingelserne**, og er som følger:

1. Funktionen skal være periodisk (hvis den er defineret over et endeligt interval, kan den gøres periodisk)
2. Den skal være enkelt-værdiet og kontinuert (der må gerne være et endeligt antal af endelige diskontinuiteter)
3. Der skal være et endeligt antal ekstrema inden for én periode  $T$ .
4. Integralet over én periode af  $|f(x)|$  skal konvergere

Er alle disse betingelser opfyldt, kan funktionen skrives ved:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_n \exp(-in\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.1)$$

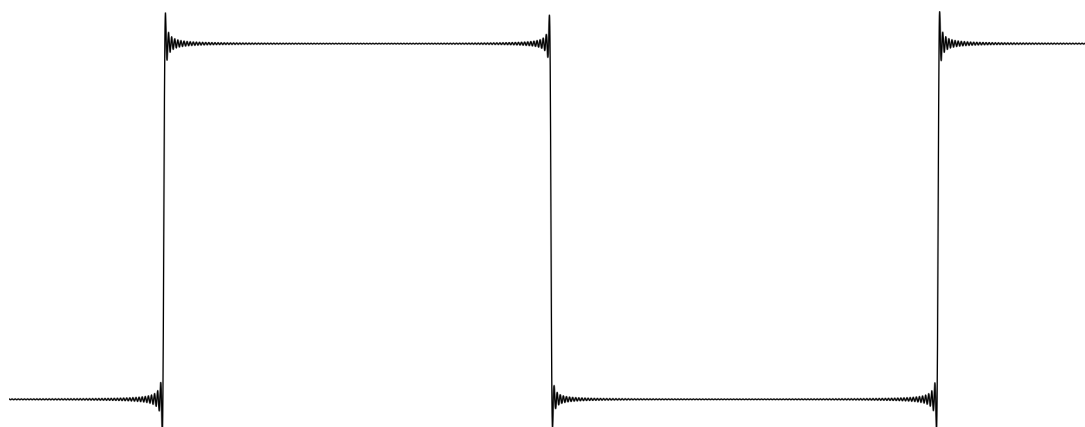
hvor

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(x) e^{in\omega t} dt \quad (3.2)$$

kaldes for Fourierkoefficienten, og  $t_0$  er arbitrært, men sættes ofte til 0 eller  $-T/2$ . Fourierkoefficienterne er da et integrale over én periode (med et smart valg af startpunkt). Læg også mærke til, at jeg har udskiftet  $\omega_n$  med  $n\omega$ , idet jeg synes dette er mindre forvirrende.

For funktioner defineret på et interval, der bliver lavet periodiske, er perioden af Fourierserien ikke altid den samme som intervallet, men et helt multiplum af denne ( $2T$ ,  $3T$ , etc).

Ved diskontinuiteter konvergerer Fourierserien mod gennemsnittet af de to grænseværdier. Der opstår også **Gibbs fænomenet**  $\delta$ , som er et ekstra ekstremum med amplitude  $\delta$  i begge grænser af diskontinuiteten. Fænomenet rykker tættere og tættere på grænserne, jo flere led der medtages, men denne forsvinder aldri. Et eksempel er følgende firkantbølge, approksimeret ved 125 led af Fourierserien.



Figur 1: Illustration af Gibbs fænomenet. Her vises Fourierserien for en firkantbølge, med 125 led. Gibbs fænomenet ses ved de "lodrette" dele, hvor der overskydes en smule. [Illustration fra Wikipedia, public domain.](#)

<sup>1</sup>De behøver ikke at være periodiske, faktisk, de kan nemlig gøres periodiske.

## Integration og differentiation

Ved (ledvis) integration af en Fourierserie konvergerer denne mod stamfunktionen af  $f(x)$ , med forskel i en integrationskonstant, der skal findes.

Ved (ledvis) differentiation af en Fourierserie konvergerer denne mod  $f'(x)$ , såfremt  $f'(x)$  opfylder Dirichletbetingelserne.

### 3.1 Dirac $\delta$ -funktion

Dirac  $\delta$ -funktionen er en funktion defineret ved:

$$\int_a^c f(t)\delta(t-b) dt = f(b) \quad (3.3)$$

hvor  $a \leq b \leq c$ . Ellers er integralet 0. Ydermere er  $\int \delta(t-a) dt = 1$ , hvis  $a$  ligger inden for integralgrænserne. Deltafunktionen kan også defineres som

$$\delta(t) = 0, t \neq 0 \quad (3.4)$$

Hvor funktionsværdien, når  $t = 0$ , er "uendelig". Nogle andre egenskaber ved denne funktion er:

$$\delta(-t) = \delta(t), \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \quad t\delta(t) = 0 \quad (3.5)$$

Dens stamfunktion er Heavyside-funktionen, der er defineret ved  $H(t) = 1$  til  $t > 0$  og  $H(t) = 0$  for  $t < 0$ . Dermed er  $H'(t) = \delta(t)$ .  $\delta$ -funktionen kan også beskrives ved integraler:

$$\delta(t-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)} d\omega, \quad \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (3.6)$$

### 3.2 Fouriertransformation

Fouriertransformationer er en generalisering af Fourierserier, hvor perioden tages til at være uendelig, og der dermed ikke er noget krav om periodicitet. Det eneste krav er faktisk følgende:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \neq \infty \quad (3.7)$$

altså at det uendelige integrale konvergerer. Selve transformationen er en lineær integraltransformation  $f(t) \rightarrow \tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$  defineret ved

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.8)$$

Og dens inverse

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (3.9)$$

Her ses ligheden med den komplekse Fourierserie, men i stedet for en diskret sum af harmoniske svingninger, fra negativ til positiv uendeligt, har vi her en kontinuert funktion, der beskriver summen af disse harmoniske svingninger - netop et integral.

#### 3.2.1 Foldning

Et emne der, som så, ikke omhandler Fouriertransformation, men som gøres nemmere ved brug af denne, er foldning. Målinger af fysiske fænomener medbringer ofte en eller anden form for støj grundet måleapparatet. Hvis det, der måles gives navnet  $h(z)$ , mens det fysiske fænomen er givet ved  $f(x)$ , så fås følgende sammenhæng mellem dem:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x) dx \quad (3.10)$$

hvor  $g(z - x)$  er støjen introduceret af måleapparatet. Dette kan også bruges til at introducere ”falske” måleinstrumenter, som for eksempel filtre, for at frafiltrere støj. Ligningen (3.10) kaldes for **foldning** af  $f$  og  $g$ , og benævnes også  $f * g$ . Foldning er både **kommutativt** ( $f * g = g * f$ ), **associativt** og **distributivt**.

Måden dette relaterer til Fouriertransformation, er ved at foldningen nemt kan skilles ad i frekvensdomænet, givet **foldeteoremet**, der siger:

$$\mathcal{F}[h(z)] = \tilde{h}(k) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k) \quad (3.11)$$

Altså bliver det grimme, uegentlige integral til et simpelt produkt i frekvensdomænet. Ligeledes gælder der omvendt:

$$\mathcal{F}[f(x)g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k) * \tilde{g}(k) \quad (3.12)$$

### 3.2.2 Nyttige egenskaber ved Fouriertransformation

For Fouriertransformationer gælder **Parseval's teorem** også:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (3.13)$$

Der er også følgende transformationer:

Funktion	Fouriertransformation
$f(at)$	$a^{-1} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$f(t - b)$	$e^{-ib\omega} \tilde{f}(\omega)$
$e^{\alpha t} f(t)$	$\tilde{f}(\omega + i\alpha)$
$f'(t)$	$i\omega \tilde{f}(\omega)$
$f''(t)$	$-\omega^2 \tilde{f}(\omega)$
$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n \tilde{f}(\omega)$
$\int^t f(u) du$	$(i\omega)^{-1} \tilde{f}(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$
$f(t) * g(t)$	$\sqrt{2\pi} \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(\omega) * \tilde{g}(\omega)$

## 4 Elektrodynamik (Griffiths kapitel 7)

### 4.1 Elektromotorisk kraft

#### 4.1.1 Ohms lov

For at få en strøm til at strømme skal der skubbes til ladningerne. For det meste er strømmen  $\mathbf{J}$  proportional med kraften per enhed af ladning (i vores tilfælde oftest elektromagnetiske krafter):

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.1)$$

hvor  $\sigma$  kaldes materialets ledeevne (denne gang ikke en overfladeladningsdensitet, husk det). Oftest opgives den inverse af ledeevnen, kaldet resistiviteten  $\rho = \sigma^{-1}$  (igen, ikke volumenladningsdensiteten, sorry)<sup>2</sup> Typiske værdier er tabuleret i næste tabel. Selv materialer der kaldes isolatorer leder faktisk en lille smule strøm, men det er nærmest uhåndgribeligt små mængder i forhold til metal. Typisk er forskellen af størrelsesordenen  $10^{22}$ , så til en god approksimation er metaller **perfekte ledere** med  $\sigma = \infty$ .

Normalt set er hastighederne så små, at bidraget fra magnetiske felter kan ses bort fra, hvormed Ohms lov optræder:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (4.2)$$

Det ses da, at i en leder er  $\mathbf{E}$ -feltet faktisk ikke altid 0! (det er bare et almindelig udråbstegn, ikke 0 fakultet). Det gælder kun for stationære ladninger, hvor  $\mathbf{J} = 0$ . Dog for en perfekt leder er  $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma = 0$ , og som oftest er metallers ledeevne så stor, at der kan ses bort fra  $\mathbf{E}$ , og den bare kan regnes som værende 0. Omvendt, så laves resistorer (modstande) af materialer, med stor resistivitet (altså en lille / dårlig ledeevne).

Materiale	Resistivitet	Materiale	Resistivitet
<i>Ledere:</i>		<i>Halvledere:</i>	
Sølv	$1.59 \cdot 10^{-8}$	Saltvand (mættet)	$4.4 \cdot 10^{-2}$
Kobber	$1.68 \cdot 10^{-8}$	Germanium	$4.6 \cdot 10^{-1}$
Guld	$2.21 \cdot 10^{-8}$	Diamant	2.7
Aluminium	$2.65 \cdot 10^{-8}$	Silicium	$2.5 \cdot 10^3$
Jern	$9.61 \cdot 10^{-8}$	<i>Isolatorer:</i>	
Kviksølv	$9.58 \cdot 10^{-7}$	Vand (rent)	$2.5 \cdot 10^5$
Nichrome	$1.00 \cdot 10^{-6}$	Træ	$10^8 - 10^{11}$
Mangan	$1.44 \cdot 10^{-6}$	Glas	$10^{10} - 10^{14}$
Grafit	$1.4 \cdot 10^{-5}$	Kvartsglas	$\approx 10^{16}$

Tabel 1: Resistiviteter i Ohm-meter. Alle værdier er ved 1 atm og 20° C. Fra *Handbook of Chemistry and Physics*, 78. udgave.

En mere kendt udgave af Ohms lov er selvfølgelig, at den samlede strøm mellem to elektroder er proportional med potentialforskellen mellem dem:

$$V = IR \quad (4.3)$$

hvor  $R$  er resistansen (modstanden) i kredsløbet, og denne afhænger af geometrien af resistoren, samt materialet den laves af. Dette er ikke en fundamental lov på fod Ampères lov eller Gauss lov, men nærmere en tommelfingerregel, der ser ud til at holde for ret mange materialer.

For jævne strømme med homogen ledeevne fås at divergensen af  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{J}$  er 0:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (4.4)$$

Dette betyder, at alle ubalancerede ladninger sidder på overfladen, og at Laplaces ligning holder i homogen ohmske materiale, hvor der løber en jævnstrøm. (og dermed kan teknikkerne fra kapitel 3 i EL1 noterne bruges)

<sup>2</sup>Og selvom hr Griffiths siger, at »vi er ved at løbe tør for græske bogstaver« så er det **fuldstændig løgn**. Jeg har talt, og der er brugt godt og vel 14 forskellige græske symboler, 12 små og 2 stort, så der er stadig masser tilbage! Hvad med  $\xi$  (lille xi), eller  $\zeta$  (lille zeta)? Sure,  $\sigma$  og  $\rho$  er kendte og ser godt ud, men der er stadig en masse, helt og aldeles fine bogstaver tilbage.

Når en strøm løber gennem en komponent med resistans  $R$ , vil der blive afsat en effekt som varme i materialet givet ved **Joules varmelov**

$$P = VI = I^2 R = V^2 / R \quad (4.5)$$

Et par eksempler er som følger:

### Eksempler

**En Cylindrisk resistor** med tværsnitareal  $A$ , længde  $L$  og ledeevne  $\sigma$ . Tværsnittet behøver ikke nødvendigvis at være rundt, så længe det er ens hele vejen gennem resistoren. Hvis potentialet er konstant i hver ende, og forskellen er  $V$ , hvilken strøm løber der da?

Det elektriske felt er homogent i resistoren, hvilket kan ses ved følgende: siden det er et homogent ohmsk materiale, hvor der løber en jævn strøm, gælder Laplaces ligning og entydighedssætningerne! Hvis potentialet i den ene ende sættes til at være 0, og i den anden ende til at være  $V_0$ , så er en løsning (og dermed den *eneste* løsning), at potentialforskellen er givet ved  $V(z) = V_0 z / L$ , hvor  $z$  er afstanden langs akse, fra den ene ende. Idet potentialforskellen er lineær, må E-feltet nødvendigvis være homogent.

Idet E-feltet er homogent, må ladningstætheden også være homogent, og der fås:

$$I = JA = \sigma EA = \frac{\sigma A}{L} V$$

Her er resistansen da givet ved  $L/(\sigma A)$ .

**To lange cylindre** med radier  $a$  og  $b$  ( $a < b$ ) er adskilt af et materiale med ledeevne  $\sigma$ . Hvis der er en potentialforskel  $V$  mellem dem, hvilken strøm løber der så mellem dem, i en længde af  $L$ .

Feltet er her givet ved

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{\mathbf{s}}$$

Hvor  $\lambda$  er ladningstætheden på den indre cylinder. Dermed er strømmen

$$I = \int \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \sigma \int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \sigma E \int da = \sigma \frac{\lambda 2\pi\epsilon_0 s 2\pi s L}{2\pi\epsilon_0 s} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \lambda L$$

Og potentialforskellen

$$V = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a)$$

Ved isolering af  $\lambda$  i udtrykket for strømmen fås

$$\lambda = I \frac{\epsilon_0}{\sigma L} \Leftrightarrow V = I \frac{\epsilon_0}{\sigma L} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a)$$

Og strømmen er da

$$I = \frac{2\pi\sigma L}{\ln(b/a)} V$$

med resistans  $\ln(b/a)/2\pi\sigma L$ .

#### 4.1.2 Elektromotorisk kraft - der ikke er en kraft

I et typisk elektrisk kredsløb, eksempelvis et batteri forbundet til en komponent, er strømmen i praksis ens hele vejen rundt. Grunden til dette er, at hvis det ikke var tilfældet, ville den ophobning af ladning et sted i kredsløbet gøre, at der bliver dannet et elektrisk felt (Gauss lov,  $\rho \neq 0$  og dermed  $\mathbf{E} \neq 0$ ). Dette elektriske felt udfører en kraft der i strømmens retning får ladninger til at bevæge sig hurtigere, og imod strømmens retning får dem til at bevæge sig langsommere. Dette bevirker, at systemet udligner sig selv, så der til sidst er en ens ladningsfordeling ( $\rho = 0$ ). Dette sker så hurtigt, at i systemer, der oscillerer med radiofrekvenser (3 KHz til 300 GHz), kan man roligt antage, at strømmen er konstant hele vejen rundt.

Dette betyder også, at der er to kræfter, der driver strømmen rundt i et kredsløb: både kraften fra kilden  $\mathbf{f}_s$  og kraften fra eventuelle elektrostatiske felter grundet ophobning af ladning  $\mathbf{E}$ . Den samlede kraft per ladning er da

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E} \quad (4.6)$$



Lige meget hvad der driver kredsløbet (batteri, piezoelektrisk element, Van de Graaff, whatever), defineres kurveintegralet af  $\mathbf{f}$  rundt i kredsløbet som den **elektromotoriske kraft** (electromotive force, eller »emf«):

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} \quad (4.7)$$

(idet  $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$  er det lige meget, om der bruges  $\mathbf{f}$  eller  $\mathbf{f}_s$  i definitionen). For en ideel emf-kilde (et batteri uden intern modstand, eksempelvis) er den samlede kraft på ladningerne 0 (Ohms lov med  $\sigma = \infty$ ). Da er  $\mathbf{E} = -\mathbf{f}_s$  og potentialforskellen mellem de to terminaler (kaldet  $a$  og  $b$ ) givet ved

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \quad (4.8)$$

idet  $\mathbf{f}_s = 0$  inde i kilden, kan integralet gøres til et kurveintegral uden problemer. Idet emf er linjeintegralet af  $\mathbf{f}_s$ , kan det ses som det udførte arbejde, per ladningsenhed:

$$\mathcal{E} = \frac{\partial W}{\partial Q} \quad (4.9)$$

### 4.1.3 Bevægelses-emf

Den mest almindelige kilde til emf er en generator, der udnytter **bevægelses-emf**, som opstår når en leder bevæges gennem et magnetfelt. Et eksempel er en rektangulær løkke, med bredde  $h$ , hvor en del af den,  $x$  er inden for et homogent magnetisk felt  $B$ . Løkken trækkes da ud af lederen med en hastighed  $v$ . Emf'en er her:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{l} = vBh \quad (4.10)$$

Dette integral evalueres i et enkelt øjeblik. Tag, så at sige, et billede af kredsen og udregn emf'en til netop dette øjeblik. Den kan også regnes ud fra arbejdsbetragtninger (hvem trækker i løkken, og hvordan påvirker det kredsløbet), men det er noget af en omvej, så det er nemmere at bruge definitionen på emf, og bruge øjebliksbilledet.

Der er dog en anden, også virkelig smart måde at udregne emf på. Den magnetiske flux gennem en løkke er givet ved

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da \quad (4.11)$$

Så for den rektangulære løkke er

$$\Phi = Bhx, \quad \frac{d\Phi}{dt} = Bh \frac{dx}{dt} = -Bhv \quad (4.12)$$

(hvor fortegnet kommer ved, at løkken trækkes *ud* af magnetfeltet). Da ses det, at i dette tilfælde er den tidsafledte af fluxen lig den negative emf, eller:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (4.13)$$

Dette kaldes **fluxreglen**, og den relation gælder faktisk ikke kun for dette tilfælde: **fluxreglen gælder altid!** Der vil dog være tidspunkter hvor den ikke er brugbar, og der skal Lorentzloven bruges.

Den rigtige integrationsvej i definitionen for den magnetiske flux, er som altid givet ved højrehåndsreglen: hvis fingrene på din højre hånd angiver den positive omløbsretning, vil din tommelfinger angive retningen på  $\hat{\mathbf{n}}$ .

## 4.2 Elektromagnetisk induktion

### 4.2.1 Faradays lov

En gang i atten-hundrede-og-grønlangkål udførte Michael Faraday 3 eksperimenter, der foregik nogenlunde således:

1. Han trak en ledning gennem et magnetisk felt, og der løb en strøm.
2. Han bevægede det magnetiske felt i modsat retning, og igen løb der en strøm.

3. Med begge dele stående stille ændrede han styrken af det magnetiske felt, og igen igen løb der en strøm.

Det første giver ret god mening - det er jo emf som vi kender det. Men i det andet bevæger ledningen sig jo ikke, så der er jo ingen magnetisk kraft! Det giver selvfølgelig god mening for os, at det er den *relative* bevægelse af magnetfeltet, i forhold til ledningen, der skaber emf'en, men på hans tid kendte man ikke til speciel relativitetsteori, så det var da noget spøjst! I det sidste forsøg er der endda ingen bevægelse, men igen er der emf.

Faradays forklaring på det andet forsøg var, at **et ændrende magnetfelt inducerer et elektrisk felt**, og at det var dette elektriske felt, der stod for den opståede emf. Fra fluxreglen fås

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

Resultatet er

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (4.14)$$

Dette er **Faradays lov** i integralform. Ved Stokes sætning kan dette omdannes til differentialform:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (4.15)$$

I det tredje eksperiment er det igen et ændrende magnetfelt - men denne gang er det styrken og ikke en bevægelse relativ til magnetfeltet, der giver anledning til en emf. Igen er det fluxreglen på spil

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.16)$$

Det vil sige at **når den magnetiske flux gennem et kredsløb ændres, lige meget hvad årsagen er, opstår en emf**. For at hjælpe med at holde styr på ens fortegn i sine udregninger med Faradays lov (hvilket kan være lidt af en pain in the ass) findes **Lenz Lov**, der siger at **Naturen hader en ændring i flux**. Det vil sige at den inducerede strøm vil prøve at lave et magnetisk felt, således at ændringen i flux slukkes. I praksis vil det sige at hvis en løkke oplever et magnetfelt, der stiger i styrke, vil den inducerede strøm løbe i en retning, således at der skabes et modsvarende B-felt, således at ændringen i flux bliver så lille som muligt. Og hvis der slukkes for magnetfeltet vil den inducerede strøm i ledningen lave et magnetfelt *i samme retning* som det slukkede magnetfelt, igen således at ændringen i flux bliver så lille som mulig.

#### 4.2.2 Det inducerede E-felt

Til udregningen af det magnetisk inducerede E-felt, kan parallellen mellem E-feltet og B-feltet bruges. Rotationerne er nemlig

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (4.17)$$

Og hvis det er et rent Faraday-felt (altså magnetisk induceret), så er divergensen 0:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.18)$$

Dermed kan alle tricks forbundet med Ampères lov til udregning af B-felter også bruges i disse tilfælde. Her er  $\mu_0 I_{\text{enc}}$  dog udskiftet med  $-d\Phi/dt$ :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (4.19)$$

Der er dog et lille problem, at Ampères lov jo kun dur i magnetostatik, mens her er E-feltet skyldt af et ændrende magnetfelt. Så denne metode er faktisk kun en approksimation, men med mindre der er ekstremt hurtige fluktuationer, så er det intet stort problem. Selv i tilfældet af en ledning, der bliver klippet over af en saks, er det statisk nok til, at disse metoder dur. Det er normalt set kun når der ses på elektromagnetiske bølger og stråling, at man skal være påpasselig.

Situationer hvor det magnetostatiske metoder kan bruges, uden det rent faktisk er magnetostatik, kaldes for **quasistatik** (lige som tilfældene fra termodynamik, hvor en process kan regnes som tilnærmelsesvist adiabatisk, hvis den er quasistatisk).

## Eksempler

**Et homogent B-felt**  $\mathbf{B}(t)$  peger vinkelret gennem en cirkulær region. Hvis  $\mathbf{B}(t)$  ændres i tiden, hvad bliver det inducerede elektriske felt så?

Dette svarer til det magnetiske felt produceret af en lige ledning, der har en jævn strøm, og det elektriske felt løber da tangentielt rundt om B-feltet. Ved en cirkulær Ampereløkke vinkelret på B-feltet, med radius  $s$  fås

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi s E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi s^2 B(t) = -\pi s^2 \frac{dB}{dt}$$

Og E-feltet er da

$$\mathbf{E} = -\frac{s}{2} \frac{dB}{dt} \hat{\phi}$$

**En linjeladning  $\lambda$  på en cirkel** med radius  $b$ , der frit kan rotere. Inden for cirklen er en mindre cirkel med radius  $a$ , hvori der er et homogent magnetisk felt  $B_0$ , der står vinkelret på cirklerne. B-feltet slukkes og der induceres et elektrisk felt, der roterer rundt om cirklernes akse. Dette elektriske felt vil der påvirke linjeladningen med en kraft, hvilket får den til at rotere og danne et magnetisk felt. Lenz lov giver da retningen af denne strøm, da den prøver at gendanne fluxen fra magnetfeltet. Set ovenfra vil ladningen rotere i positiv omløbsretning, sådan så det inducerede magnetfelt peger opad igen.

Kvalitativt fås

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

Og der opstår et kraftmoment på hjulet, hvor hvert linjeelement  $d\mathbf{l}$  oplever  $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = b\lambda E d\mathbf{l}$ . Det samlede kraftmoment er da kurveintegralet hele vejen rundt:

$$B = b\lambda \oint E d\mathbf{l} = -b\lambda \pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

Og impulsmomentet er

$$\int N dt = -\lambda \pi a^2 b \int_{B_0}^0 dB = \lambda \pi a^2 b B_0$$

Så lige meget hvor hurtigt magnetfeltet slukkes, vil hjulet rotere med den samme vinkelhastighed. Hvor impulsmomentet kommer fra vides ikke, endnu, det kommer først i kapitel 8 i bogen, som først er pensum i EL2.

### 4.2.3 Induktans

Hvis man har to løkker af ledning, der begge er i hvile, og man lader en jævn strøm  $I_1$  gennem den ene, vil den danne et magnetfelt, noget af hvilken, der giver anledning til en flux gennem den anden ledning:  $\Phi_2$ . Fra Biot-Savart-loven ses det, at det magnetiske felt er proportionalt med strømmen:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Dermed er fluxen gennem den anden løkke også proportional med strømmen:

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot \hat{\mathbf{n}} da_2 = M_{21} I_1 \quad (4.20)$$

hvor  $M_{21}$  er proportionalitetskonstanten, kaldet den »gensidige induktans« for de to løkker. En formel for denne kan findes ved at skrive fluxen ved vektorpotentialen, og så bruge Stokes sætning. Da fås

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l}_1 \cdot d\mathbf{l}_2}{r} \quad (4.21)$$

Denne kaldes for **Neumannformlen** og er et dobbelt kurveintegral. Først langs den ene, så langs den anden. Den er ikke særlig praktisk, men den viser dog to ting:

1.  $M_{21}$  er en ren geometrisk størrelse
2. Hvis der byttes om på de to integralers roller i formlen er resultatet uændret. Det vil sige at  $M_{21} = M_{12}$ , så vi smider bare tallene væk, så formlen for fluxen bliver

$$\Phi_2 = M I_1$$

Dette betyder altså, at lige meget hvilken udformning eller position de to løkker har, så vil fluxen gennem løkke 2, når der løber en strøm  $I$  gennem løkke 1, være den samme, som fluxen gennem løkke 1, hvis strømmen  $I$  løb gennem løkke 2. Eller:

$$\Phi_2 = MI = \Phi_1$$

Hvis strømmen gennem den første løkke varieres (quasistatisk), vil fluxen gennem løkke 2 også ændres, så der induceres en emf i løkken:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M\frac{dI_1}{dt} \quad (4.22)$$

Det vil sige, at hvis strømmen gennem løkke 1 ændres, vil der løbe en strøm gennem løkke 2, også selvom der ingen ledninger er mellem dem. Det sker faktisk også, at der induceres en emf i løkke 1, når strømmen ændres (i løkke 1). Her er fluxen igen proportionel med strømmen

$$\Phi = LI \quad (4.23)$$

hvor  $L$  kaldes **selvinduktansen** (eller bare **induktansen**) af løkken. Den måles i **henries** (H), der er et volt-sekund per ampere. Induktansen er, lige som  $M$ , ren geometrisk, og den er, lige som kapacitansen  $C$ , en udelukkende positiv størrelse. Den inducerede emf er givet ved

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} \quad (4.24)$$

Denne emf kaldes også for **modspænding** (back emf), da den har en retning, der modstrider ændringen i strøm. Der skal altså kæmpes mod denne modspænding, når strømmen skal ændres. Dermed svarer  $L$  lidt til en »elektrisk masse«, idet en større induktans gør at et kredsløb er sværere at drive, ligesom en større masse, gør det sværere at accelerere et objekt.

## Eksempler

**To solenoider, én kort inde i en meget lang.** Den indre solenoide har radius  $a$ , længde  $l$  og  $n_1$  vindinger per enhedslængde. Den ydre har radius  $b$  og  $n_2$  vindinger per enhedslængde. Hvis der løber en strøm  $I$  gennem den indre, korte solenoide, vil det være utrolig svært at regne fluxen gennem den ydre, idet feltet fra den korte solenoide er ret kompliceret. Til gengæld er fluxen gennem den lange solenoide, som fluxen gennem den korte, hvis der løber en strøm  $I$  gennem den lange solenoide ( $\Phi_2 = \Phi_1 = MI$ , fra før). Dette er en betydeligt lettere situation at regne på, idet feltet inde i den lange solenoide er homogent. B-feltet og fluxen gennem én vinding er:

$$B = \mu_0 n_2 I, \quad \Phi_i = B\pi a^2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2$$

Da der er  $n_1 l$  løkker i den korte solenoide, er den samlede flux

$$\Phi = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l I$$

og dette er dermed også fluxen gennem den lange solenoide, hvis der løber en strøm  $I$  gennem den korte! Den gensidige induktans er i dette eksempel

$$M = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l$$

**Selvinduktansen af en firkantet toroide** med indre radius  $a$ , ydre radius  $b$ , højde  $h$  og  $N$  vindinger. Det magnetiske felt og fluxen gennem én vinding er

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s}, \quad \Phi_i = \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} h \int_a^b \frac{1}{s} ds = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Den samlede flux er da  $N$  gange større, så selvinduktansen er

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

**En kreds slutes til et batteri.** Kredsen har resistans  $R$  og induktans  $L$ . Batteriet leverer en konstant emf  $\mathcal{E}_0$ . Den samlede strøm, der løber gennem kredsen når batteriet sættes til er givet ved

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = IR \quad (4.25)$$

Dette er en førsteordens differentiaalligning, og løsningen er

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + ke^{-(R/L)t} \quad (4.26)$$

hvor  $k$  er en konstant, som bestemmes ud fra begyndelsesbetingelserne. Hvis batteriet slutes til kredsen til tiden  $t = 0$ , så  $I(0) = 0$ , bliver  $k = -\mathcal{E}_0/R$ , og løsningen er

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left[ 1 - e^{-(R/L)t} \right] \quad (4.27)$$

Det ses, at hvis  $L = 0$ , og der dermed ingen induktans er, vil strømmen med det samme nå  $\mathcal{E}_0/R$ , men i praksis har alle kredsløb en eller anden induktans, hvormed de når strømmen  $\mathcal{E}_0/R$  asymptotisk.

#### 4.2.4 Energi i magnetiske felter

For at få en strøm til at løbe gennem en kreds, skal der udføres et arbejde mod modspænding'en. Dette arbejde er en konstant værdi for en given kreds, og den bliver frigjort igen, når strømmen slukkes. For at få en ladningsenhed gennem kredsen skal der bruges  $-\mathcal{E}$  (negativt, da det er dig, der udfører arbejdet mod modspænding'en). Ladningen der løber gennem kredsen per tidsenhed er  $I$ . Dermed er det samlede arbejde per tidsenhed, og det samlede arbejde, givet ved:

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}I = LI \frac{dI}{dt}, \quad W = \int_0^I LI \frac{dI}{dt} dt = \frac{1}{2} LI^2 \quad (4.28)$$

Som det ses, afhænger det ikke af tiden, men kun af strømmen og induktansen. Denne kan generaliseres til volumen/overfladestrømme, ved at huske at  $\Phi = LI$  for kredsen, samt

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (4.29)$$

hvor  $\mathcal{P}$  er kurven langs kredsen, og  $S$  er enhver overflade med  $\mathcal{P}$  som grænse. Indsættes dette i formelen for arbejdet, og vektor-retningen flyttes fra  $d\mathbf{l}$  til  $\mathbf{I}$  fås

$$W = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) dl \quad (4.30)$$

Og for overflade/volumenstrømme:

$$W = \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{K}) da, \quad W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau \quad (4.31)$$

Ved brug af Ampères lov kan  $\mathbf{J}$  skrives som  $\nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$ , og med lidt smart regning fås

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[ \int_V B^2 d\tau - \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \right] \quad (4.32)$$

hvor  $S$  er overfladen af volumenet  $V$ . I integralet med volumenstrømmen integreres der over den volumen, som  $\mathbf{J}$  befinder sig i. Men man kan sagtens integrere over en større volumen, da  $\mathbf{J} = 0$  uden for den oprindelige volumen. Det samme gør sig gældende for ligning (4.32). Her bliver bidraget fra volumenintegralet kun større, mens bidraget fra overfladeintegralet bliver mindre ( $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$  går som  $r^{-3}$ , mens arealet går som  $r^2$ , så integralet konvergerer mod 0, des større arealet bliver). Hvis der integreres over hele rummet bliver overfladeintegralet 0, så

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau, \quad \text{Integrer over hele rummet} \quad (4.33)$$

På denne måde kan arbejdet ses som værende indeholdt i det magnetiske felt, med et energiindhold af  $B^2/2\mu_0$  per volumenenhed. Dette er dog spøjst, idet et magnetisk felt ikke kan udføre et arbejde. Men

for at skabe et magnetisk felt induceres der et elektrisk felt, der kan udføre arbejde. Når det magnetiske felt »slukkes« igen, skabes det samme elektriske felt - bare i modsat retning, og arbejdet har da negativt fortegn.

Det ses også, at de to formler er ualmindeligt lig hinanden:

$$W_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \int (V\rho) \, d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 \, d\tau \quad (4.34)$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) \, d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, d\tau \quad (4.35)$$

Denne formel giver også en smart måde at udregne selvinduktansen på:

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, d\tau, \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{2W}{I^2} = \frac{1}{\mu_0 I^2} \int B^2 \, d\tau \quad (4.36)$$

hvor det huskes at  $I = \int_{\mathcal{S}} J \, da_{\perp}$ , hvor  $da_{\perp}$  er overfladeelement, der står vinkelret på  $J$ , og  $\mathcal{S}$  er den samlede overflade.

**Et eksempel.** Et langt coaxialt kabel, hvor der løber en strøm  $I$  gennem (ned langs den indre ledning, og op langs den ydre). Den indre cylinder har radius  $a$  og den ydre har radius  $b$ . Den magnetiske energi i en længde  $l$  findes som følger:

Fra Ampères lov fås at feltet mellem cylindrene er

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

Og 0 alle andre steder. Det vil sige, at energien per volumenenhed er

$$\frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$$

Dermed er energien i en cylindrisk skal af længde  $l$ , radius  $s$  og tykkelse  $ds$

$$\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} 2\pi l s \, ds = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left( \frac{ds}{s} \right)$$

Og den samlede energi fås ved at integrere fra  $a$  til  $b$ :

$$W = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left( \frac{ds}{s} \right) = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

Her er induktansen givet ved

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right)$$

### 4.3 Maxwells ligninger

Der er fundet 4 love, der specificerer divergensen og rotationen af elektriske og magnetiske felter. De er som følger:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Gauss's lov})$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Intet navn})$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradays lov})$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampères lov})$$

Men hov! Der er da kommet et ekstra led på Ampères lov! Dette er Maxwells rettelse til Ampères lov, og den kommer af, at  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  kun er 0 for jævne strømme. For generelle strømme kan  $\nabla \cdot \mathbf{J}$  regnes fra kontinuitetsligningen:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left( \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (4.37)$$

Hvis denne sidste faktor lægges sammen med  $\mathbf{J}$  i Ampères lov, fås et udtryk hvor divergensen af  $\mathbf{J}$  altid er 0. Dermed lyder Ampères lov altså

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.38)$$

Dette betyder så også, at **et ændrende elektrisk felt inducerer et magnetisk felt**, præcis som det omvendte! I integralform lyder ligningerne

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}} && \text{(Gauss's lov)} \\ \text{(ii)} \quad & \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = 0 && \text{(Intet navn)} \\ \text{(iii)} \quad & \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da && \text{(Faradays lov)} \\ \text{(iv)} \quad & \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da && \text{(Ampères lov)} \end{aligned}$$

Hvor overfladeintegralerne i de to første er over enhver overflade  $\mathcal{S}$ , mens overfladeintegralerne i de to sidste, er over enhver overflade  $\mathcal{S}$  med  $\mathcal{P}$  som grænse.

### 4.3.1 Maxwells ligninger i stof

I stof der har tendens til at blive enten elektrisk eller magnetisk polariseret, og som dermed oplever enten en mængde bundne ladninger eller strømme, er det oftest smartere at arbejde med en version af Maxwells ligninger, der kun refererer til de frie ladninger i materialet.

Maxwells love er i dette tilfælde

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f && \text{(Gauss's lov)} \\ \text{(ii)} \quad & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 && \text{(Intet navn)} \\ \text{(iii)} \quad & \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} && \text{(Faradays lov)} \\ \text{(iv)} \quad & \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} && \text{(Ampères lov)} \end{aligned}$$

Med

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \mathbf{M}$$

og for lineære medier

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e), \\ \mathbf{M} &= \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \end{aligned}$$

Og i integralform

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = Q_{f_{\text{enc}}} && \text{(Gauss's lov)} \\ \text{(ii)} \quad & \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = 0 && \text{(Intet navn)} \\ \text{(iii)} \quad & \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da && \text{(Faradays lov)} \\ \text{(iv)} \quad & \oint_{\mathcal{P}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{f_{\text{enc}}} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da && \text{(Ampères lov)} \end{aligned}$$

Hvor overfladeintegralerne i de to første, som før, er over enhver overflade  $\mathcal{S}$ , mens overfladeintegralerne i de to sidste, er over enhver overflade  $\mathcal{S}$  med  $\mathcal{P}$  som grænse.

Det ses da, at der er lidt flere ting, end sidst. De ekstra ting er som følger: I statiske tilfælde af polarisation, opstår der en bunden ladningstæthed

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4.39)$$

I *ikke*statistiske tilfælde opstår der også en volumenstrøm som følge af ændring i polarisation. Denne kaldes **polarisationsstrømmen**  $\mathbf{J}_p$  og er givet ved

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (4.40)$$

Grunden til denne ekstra strøm er, at der er en overfladeladning i hver ende af et polariseret materialet,  $+\sigma_b$  i den ene ende og  $-\sigma_b$  i den anden. Hvis polariseringen stiger vil ladningerne på hver ende også stige (i størrelse), hvilket giver anledning til en strøm. Det er netop denne strøm, der er polarisationsstrømmen.

Der sker ikke noget ekstra i *ikke*statistiske magnetisation. Her er det stadig

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad (4.41)$$

Det vil sige, at den samlede ladningstæthed kan skrives som

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4.42)$$

Og den samlede volumenstrøm kan skrives som

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_p = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (4.43)$$

Dermed kan Gauss's lov skrives som

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}(\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (4.44)$$

Eller

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.45)$$

Ampères lov (den fulde), med polarisationsstrømmen, bliver nu

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left( \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (4.46)$$

Eller

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (4.47)$$

Hverken Faradays lov eller  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  ændres, idet de ikke involverer  $\rho$  eller  $\mathbf{J}$ .

### 4.3.2 Randbetingelser

Generelt set er de fire vektorfelter diskontinuerte i grænsen mellem to materialer, og ved overfladeladninger/strømme. Mængden de er diskontinuerte med ses nemmest ved integralformen af Maxwells ligninger. Ved at benytte integralform (i) og (ii) på en infinitesimal Gaussdåse, der lige er inden for begge materialer, fås for (i):

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_f \quad (4.48)$$

Det vil sige, at komponenterne af  $\mathbf{D}$ , der står normalt på grænsen mellem de to medier, er diskontinuerte. For (ii) fås

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0 \quad (4.49)$$

Og ved at bruge en infinitesimal Ampereløkke, der igen ligger lige inden for begge materialer, fås for (iii)

$$\mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel = 0 \quad (4.50)$$

Dette er altså komponenterne af  $\mathbf{E}$ , der er parallelle med grænsen mellem de to medier, der er kontinuerte. For (iv) fås

$$\mathbf{H}_1^\parallel - \mathbf{H}_2^\parallel = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} \quad (4.51)$$



Så komponenterne af  $\mathbf{H}$ , der er *parallelle* med grænsen, der er diskontinuerte. For **lineære medier** kan disse skrives ved kun  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f & \mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel &= 0 \\ B_1^\perp - B_2^\perp &= 0 & \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} \end{aligned}$$

Og i tilfældet hvor der hverken er nogen fri ladning eller strøm bliver alle højresiderne i disse ligninger 0.

## 5 Bevaringslove (Griffiths kapitel 8)

Der er flere forskellige bevaringslove i universet. Både energi, ladnings, impuls og impulsmomentsbevarelse. I dette afsnit beskrives kun de to første, nemlig energibevarelse og ladningsbevarelse (i omvendt rækkefølge. Ladningen først).

### 5.1 Kontinuitetsligningen og ladningsbevarelse

Fra EL1 kan vi måske huske kontinuitetsligningen, der beskriver ladningsbevarelsen. Den siger noget i retning af, at den samlede mængde ladning, der forsvinder (eller kommer ind) i et givent volumen, må nødvendigvis komme ind gennem den omsluttende overflade. I formel lyder den:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (5.1)$$

Denne ligning holder for enhver volumen, og der kan frit integreres over disse (eller integralet af divergensen af volumenstrømmen kan laves om til et overfladeintegral over volumenstrømmen prikket med arealet, ved hjælp af divergenssætningen).

### 5.2 Poyntingvektoren og energibevarelse

Energien, der indeholdes af elektromagnetiske felter er givet ved

$$U_{em} = \frac{1}{2} \int \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau \quad (5.2)$$

hvor første led er det elektriske felts energi, og det andet led er det magnetiske felts energi.

En mere generel udledning af denne formel fås ved at kigge på energien, der bliver brugt på at flytte en ladning  $q$  er infinitesimalt stykke (Lorentz's kraftlov, prikket med  $d\mathbf{l}$ ). Efter en god gang udregninger fås følgende:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}, \quad (5.3)$$

hvor  $S$  er det omsluttende areal af volumenet  $V$ . Det første led er den negative ændring i energien i felterne, mens det andet led er den energi, der flyttes ud af volumenets overflade (igen, energibevarelse). Dette kaldes for **Poyntings Teorem**. Energien per enheds tid, per enheds areal, der transporteres af felterne, kaldes for **Poyntingvektoren**:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (5.4)$$

Al den energi, der bliver ført ud af volumenet, må nødvendigvis blive til mekanisk energi (potentiel, kinetisk, what ever). Hvilket giver

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u_{em} d\tau - \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial t} \int_V u_{mek} d\tau \quad (5.5)$$

hvor  $u_{mek}$  er den mekaniske energitæthed og  $u_{em}$  er den elektromagnetiske energitæthed, givet ved

$$u_{em} = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right). \quad (5.6)$$

Ved at rykke lidt om, bruge divergensteoremet på overfladeintegralet og se bort fra de nu tre volumenintegraler (som det altid gøres), fås:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{mek} + u_{em}) = -\nabla \cdot \mathbf{S}, \quad (5.7)$$

der er Poyntings Teorem i differentialform. Læg mærke til ligheden mellem denne og kontinuitetsligningen. Det giver, at  $\mathbf{S}$  svarer til energistrømmen, på samme måde som  $\mathbf{J}$  svarer til ladningsstrømmen.

## 6 Bølger (Griffiths kapitel 9, noter kapitel 4)

### 6.1 Bølger i 1 dimension

Bølger er svære at definere, men en start er (direkte oversat fra kapitlet): *En forstyrrelse af et kontinuert medium, der udbredes med en bestemt, fast form, og konstant hastighed.* Der er dog flere forskellige »variationer« her: Hvis der er absorbering i mediet, så vil bølgens størrelse formindskes, som den udbredes. Hvis der er spredning vil bølger med forskellige frekvenser bevæge sig med forskellige hastigheder. Hvis det er i to eller tre dimensioner, vil amplituden af bølgen mindskes, som bølgen spredes ud i rummet (eller planen). Og til sidst findes stående bølger, der slet ikke udbreder sig.

Det nemmeste er dog endimensionale bølger med fast form og konstant hastighed. Disse kan beskrives ved enhver funktion, der afhænger af variabelen  $z - vt$ . Hvor  $z$  er bevægelsesretningen og  $v$  er udbredelseshastigheden. Minusset er til for at sørge for udbredelsen af bølgen, langs bevægelsesretningen. Det kan virke spøjst, at det er et minus, og ikke et plus, der giver bevægelse i positiv retning. Man skulle jo tro, det var omvendt (plus giver positiv, ikke?). Men i mit hoved virker det kun spøjst, hvis man kigger på origo, og forventer at se fremtiden. Hvis man derimod står et sted langs  $z$ -aksen (for bekvemmelighedens skyld), og skal se, hvordan man ser ud, så kigger man *tilbage* langs  $z$ -aksen for at se, hvordan bølgen så ud på et tidligere tidspunkt. Grundet bølgens faste form, vil dette så også være den form, man selv vil have, når bølgen når det punkt man befinder sig ved.

Det viser sig at dette egentlig ikke er den eneste type funktion, der kan beskrive bølgebevægelse. Disse er defineret ved funktioner, der løser *bølgeligningen*:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (6.1)$$

hvor  $v$  igen er udbredelseshastigheden. For bølger på en streng, er  $v = \sqrt{T/\mu}$ , hvor  $T$  er snorkraften i strengen og  $\mu$  er strengens masse per længdeenhed.

Bølgeligningen tillader alle funktioner af formen  $g(z - vt)$ , men idet den involverer  $v^2$ , ses det også, at den tillader funktioner af formen  $h(z + vt)$ , der er lignende bølger, men som bevæger sig i *negativ* retning. Ydermere, idet det er en *lineær* differentialligning, så er superpositionen af to løsninger også en løsning til den oprindelige ligning. Dermed er den mest generelle løsning (af disse former):

$$f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt) \quad (6.2)$$

#### 6.1.1 Sinusbølger

Den mest kendte funktion af den førnævnte type er sinusbølgen (eller cosinus. Den bruges mere). Det er primært denne, vi beskæftiger os med i kurset. Dennes generelle form er

$$f(z, t) = A \cos[k(z - vt) + \delta] \quad (6.3)$$

hvor  $A$  er bølgens *amplitude*,  $k$  er *bølgetallet*,  $v$  er *udbredelseshastigheden* og  $\delta$  er *faseforskydningen*. Af disse, er  $A$ ,  $v$  og  $k$  **altid positive**, mens  $\delta$  kan være enten positiv eller negativ (eller selvfølgelig 0). Generelt er størrelsen  $\delta/k$  den afstand, hvormed bølgen er forsinket, i forhold til origo (dette fås ved at sætte  $t = 0$  og sætte det resterende udtryk lig 0). Ud over disse introducerede størrelser, er der nogle flere, der relaterer sig til  $k$  og  $v$ . Disse er *bølgelængden*  $\lambda$ , *perioden*  $T$  (ikke at forveksle med snorkraften!), *frekvensen*  $\nu$  (græsk bogstav »nu«) og *vinkelfrekvensen*  $\omega$ . Nedenunder ses en række småformler for, hvordan disse størrelser relaterer til hinanden:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{v}{\nu} = Tv = \frac{2\pi v}{\omega}, \quad (6.4)$$

$$T = \frac{2\pi}{kv} = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{v} = \frac{2\pi}{\omega}, \quad (6.5)$$

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} = \frac{\omega}{2\pi}, \quad (6.6)$$

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = kv = \frac{2\pi v}{\lambda}. \quad (6.7)$$

lige som  $v$  og  $k$ , er disse størrelser **altid positive**! Normalt skrives sinusbølger med  $\omega$  i stedet for  $v$ , så man slipper for parenteser inde i argumentet af cosinus:

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta) \quad (6.8)$$

En bølge der bevæger sig den anden vej kan beskrives ved blot at skifte fortegn på  $k$  (dette er fordi cosinus er en *lige* funktion):

$$f(z, t) = A \cos(-kz - \omega t + \delta) \quad (6.9)$$

Bølger af disse typer kan også skrives på kompleks form (som før i kurset):

$$\tilde{f}(z, t) = \tilde{A}e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{A} = Ae^{i\delta}, \quad f(z, t) = \text{Re} [\tilde{f}(z, t)] \quad (6.10)$$

### 6.1.2 Randbetingelser: refleksion og transmission

En stor del af det, der sker med bølgerne på en streng, afhænger af, hvordan denne er fastgjort i enden. Generelt vil der i enden ske to ting: Der vil opstå en **reflekteret bølge** og en **transmitteret bølge**. Hvis der ses på en streng med  $\mu_1$ , bundet til en streng med  $\mu_2$ , i punktet  $z = 0$ , vil  $T$  være konstant for strengene. Da vil den indkommende bølge være

$$\tilde{f}_I(z, t) = \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0), \quad (6.11)$$

den reflekterede bølge vil være

$$\tilde{f}_R(z, t) = \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0), \quad (6.12)$$

og den transmitterede bølge vil være

$$\tilde{f}_T(z, t) = \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, \quad (z > 0), \quad (6.13)$$

hvor alle bølger svinger med samme frekvens  $\omega$ , og har gjort det i al uendelighed. Med andre ord, så gælder disse ligninger **kun**, hvis det er uendeligt lange bølger. En bølgepuls kan ikke beskrives på denne måde, idet den ikke har en veldefineret frekvens. Den skal opbygges af en uendelig serie af sinusbølger (Fouriertransformation), men såfremt bølgen har oscilleret i lang tid, vil den langt dominerende frekvens være den ønskede. Dermed kan disse ligninger *tilnærmelsesvist* bruges i dette tilfælde.

Idet de to strenge har forskellige masser, vil hastigheden, bølgelængden og bølgetallet være forskellige:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (6.14)$$

Den samlede bølge vil da være summen af disse tre bølger (eller rettere, den indkomne og reflekterede for  $z < 0$  og den transmitterede for  $z > 0$ ). I selve knuden må de være kontinuerte (ellers er de jo ikke bundet sammen!), så  $f(0^+, t) = f(0^-, t)$ , og hvis knuden har negligibel masse, vil den rumligt afledte også være kontinuert i punktet 0:  $f'(0^+, t) = f'(0^-, t)$ . Dette gælder også for den komplekse bølgeform. Dermed kan to ligninger for amplituderne opstilles:

$$\tilde{A}_I + \tilde{A}_R = \tilde{A}_T, \quad k_1(\tilde{A}_I + \tilde{A}_R) = k_2 \tilde{A}_T, \quad (6.15)$$

Og dermed:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_R &= \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \tilde{A}_I = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \tilde{A}_I, \\ \tilde{A}_T &= \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \tilde{A}_I = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \tilde{A}_I. \end{aligned}$$

og de reelle amplituder er

$$A_R e^{i\delta_R} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} A_I e^{i\delta_I}, \quad A_T e^{i\delta_T} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} A_I e^{i\delta_I}. \quad (6.16)$$

Hvis den første streng er *lettere* end den anden, så  $\mu_1 < \mu_2$  og  $v_1 > v_2$  vil alle tre bølger være i fase, og de reflekterede og transmitterede bølger vil begge have amplituder, der er *mindre* end den indgående bølges amplitude.

Hvis den første streng er *tungere* end den anden, så  $\mu_1 > \mu_2$  og  $v_1 < v_2$  vil den reflekterede bølge være 180° ude af fase, hvilket ses matematisk ved, at den komplekse amplitude bliver negativ i størrelse, netop

fordi  $v_1 < v_2$ . Men fordi amplituden ikke må være negativ, så trækkes et  $-1 = e^{i\pi}$  ud fra størrelsen, og lægges til fasen. Dermed er de reelle amplituder:

$$\mu_1 < \mu_2, v_1 > v_2, \Rightarrow A_R = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} A_I, \quad A_T = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} A_I, \quad (6.17)$$

$$\mu_1 > \mu_2, v_1 < v_2, \Rightarrow A_R = \frac{v_1 - v_2}{v_2 + v_1} A_I, \quad A_T = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} A_I. \quad (6.18)$$

I grænsen hvor  $\mu_2 = \infty$  (hvor den sidder fast i en væg), fås  $v_2 = 0$  og:

$$\mu_2 = \infty, \Rightarrow A_R = A_I, \quad A_T = 0 \quad (6.19)$$

### 6.1.3 Polarisation

Der findes i grunden to forskellige typer bølger, når man ser på »hvordan« de svinger. Enten kan de svinge parallelt med bevægelsesretningen (lydbølger, eksempelvis, der er trykbølger i luften), ellers kan de svinge vinkelret på bevægelsesretningen (bølger på en streng, eller elektromagnetiske bølger). Disse kaldes for henholdsvis longitudinale og transverse bølger. I dette kursus arbejdes der kun med transverse bølger, idet dette indebærer elektromagnetiske bølger. Hvis en bølge udbreder sig i  $z$ -retningen, kan den svinge i to, lineært uafhængige retninger: lodret og vandret ( $x$  og  $y$ . Hvad, der er hvad, kan man egentlig selv bestemme, så længe man vælger et højrehåndskoordinatsystem til at beskrive dem med), eller en superposition af disse retninger. Dette kaldes for bølgen *polarisation* (ikke at forvirre med polariserede materialer, der er isolatorer i et elektrisk felt, oh no!) Hvis en bølge er lodret polariseret fås

$$\tilde{f}_v(z, t) = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}. \quad (6.20)$$

Er den vandret polariseret fås

$$\tilde{f}_h(z, t) = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}. \quad (6.21)$$

hvis den svinger i en hvilken som helst anden retning (i  $xy$ -planen) er den givet ved

$$\tilde{f}(z, t) = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{n}} \quad (6.22)$$

hvor  $\hat{\mathbf{n}}$  kaldes for *polarisationsvektoren*. Idet den er vinkelret på bevægelsesretningen gælder det også at  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0$ . Udtrykt ved polarisationsvinklen  $\theta$  ( $0^\circ$  ved  $\hat{\mathbf{x}}$  og  $90^\circ$  ved  $\hat{\mathbf{y}}$ ) er polarisationsvektoren givet ved

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}}, \quad (6.23)$$

hvilket giver, at en tilfældig polariseret bølge kan skrives som en superposition af to lodret og vandret polariserede bølger, ved hjælp af polarisationsvinklen:

$$\tilde{f}(z, t) = (\tilde{A} \cos \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} + (\tilde{A} \sin \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}} \quad (6.24)$$

## 6.2 Elektromagnetiske bølger i vakuum og bølger i 3 dimensioner

I vakuum reduceres Maxwells ligninger til (**Layout fixes senere**)

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, (iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.25)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, (iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6.26)$$

der er et sæt koblede, *lineære*, førsteordens differentiaalligninger. For at afkoble dem tages curlen af Faradays (iii) og Ampères (iv) lov. Hermed fås

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (6.27)$$

der nu er afkoblede, *lineære*, andenordens differentiaalligninger. De er faktisk et eksempel på den tredimensionale bølgeligning:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (6.28)$$

med udbredelseshastigheden  $v = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = c$ .

### 6.2.1 Monokromatiske planbølger

Som ved bølger i én dimension, begrænser vi os her til sinusbølger med en enkelt frekvens  $\omega$ . Idet forskellige frekvenser af lysbølger svarer til forskellige farver (såfremt vi er i det synlige område), kaldes disse for *monokromatiske* bølger (enkeltfarvede, fra latin). En liste over det elektromagnetiske spektrum ses tabuleret herunder **indsæt tabel**.

Ydermere begrænser vi os lige til bølger der kun bevæger sig i én retning ( $z$  for nemhedens skyld), og som dermed ikke afhænger af andre koordinater, vinkelret på bevægelsesretningen ( $x$  og  $y$  i det simple tilfælde). Disse kaldes for **planbølger** fordi det kan ses som planer med samme fase (altså altid bølgedal/bølgetop eller lignende), der står vinkelret på bevægelsesretningen. Disse har formen

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (6.29)$$

hvor  $\tilde{\mathbf{E}}_0$  og  $\tilde{\mathbf{B}}_0$  er de komplekse amplituder, og de fysiske felter selvfølgelig er den reelle del af disse komplekse felter.

Disse ligninger overholder de respektive felters bølgeligning, men idet de også er nødt til at overholde Maxwells ligninger for at være elektriske/magnetiske felter, kommer der yderligere restriktioner på, der relaterer felterne til hinanden.

For det første skal divergensen af begge felter være 0. Dette giver at **elektromagnetiske bølger er transverse**. Og Faradays lov giver følgende resultat, efter lidt hyggelig differentiation og gode ideer:

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{k}{\omega} (\hat{\mathbf{z}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0). \quad (6.30)$$

(Ampères lov giver helt samme resultat). Dette vil altså sige at  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{B}$  er **i fase**, og **vinkelrette på hinanden og bevægelsesretningen**. Den reelle amplitude af  $B$ -bølgen er

$$B_0 = \frac{k}{\omega} = \frac{1}{c} E_0 \quad (6.31)$$

For at generalisere dette resultat, skal **bølgevektoren**  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{k}}$  indføres. Denne har størrelsen  $k$  (bølgetallet) og peger i bevægelsesretningen. Da er  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  generaliseringen af  $kz$  og generaliseringen af de monokromatiske planbølger er

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{n}}, \quad (6.32)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}, \quad (6.33)$$

hvor  $\hat{\mathbf{n}}$  som før er polarisationsvektoren. Og fordi  $\mathbf{E}$  er transvers er  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$ . Man kan så spørge sig selv om, hvorfor  $\hat{\mathbf{n}}$  defineres ud fra  $\mathbf{E}$ -bølgen: dette er tradition, idet det er  $\mathbf{E}$ -felter, der accelerer partikler, og  $\hat{\mathbf{n}}$  beskriver den retning de ladede partikler vil begynde at svinge i, hvis de bliver ramt af elektromagnetiske bølger.

De egentlige, reelle felter for monokromatiske planbølger er givet ved

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = E_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) \hat{\mathbf{n}}, \quad (6.34)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \delta) (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}). \quad (6.35)$$

### 6.2.2 Energi i elektromagnetiske bølger

Energien per volumenenhed i elektromagnetiske felter er

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (6.36)$$

og idet  $B^2 = (E/c)^2 = \mu_0 \epsilon_0 E^2$  indeholder felterne fra elektromagnetiske bølger lige meget elektrisk og magnetisk energi, dermed er  $u = \epsilon_0 E^2$ . Energifluxen af denne bølge er givet ved Poyntingvektoren,  $\mathbf{S} = \mu_0^{-1} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ . Hvis bølgen bevæger sig i  $z$ -retningen, fås

$$\mathbf{S} = c \epsilon_0 E^2 \hat{\mathbf{z}} = cu \hat{\mathbf{z}}, \quad E = E_0 \cos(kz - \omega t + \delta) \quad (6.37)$$

Men idet bølgerne har så høj en frekvens, giver det ikke rigtig mening at opgive disse størrelser, idet de svinger så hurtigt. Derfor bruger man igen tidsligt midlede størrelser. Den tidsligt midlede størrelse af  $\cos^2$  er  $1/2$ , og den tidsligt midlede energi og Poyntingvektor er da

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2, \quad \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (6.38)$$

Størrelsen af Poyntingvektoren kaldes også for intensiteten  $I$  (igen må man endelig ikke forveksle den med andre størrelser. Navnlig strøm):

$$I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2. \quad (6.39)$$

### 6.3 Elektromagnetiske bølger i materialer

I materialer, hvor der ingen fri ladning eller strøm er, og som er både *lineære* (så  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  og  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ , med  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  og ligeledes for  $\mu$ ) og *homogene* (så  $\epsilon$  og  $\mu$  ikke varierer i rummet), bliver Maxwells ligninger (**Layout Layout Layout...**)

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, (iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.40)$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, (iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (6.41)$$

Altså er der kun den forskel, at  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$  og  $\mu_0 \rightarrow \mu$ , hvilket egentlig er ret cool! Det vil sige at elektromagnetiske bølger bevæger sig gennem lineære, homogene medier med hastigheden

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}, \quad n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (6.42)$$

hvor  $n$  kaldes **refraktionsindekset**. Som oftest er  $\mu \approx \mu_0$ , så  $n \approx \sqrt{\epsilon_r}$ , og da  $\epsilon_r$  (næsten) altid er større end 1, så er  $n$  det også, og lys bevæger sig dermed næsten altid langsommere i materialer, som i vakuum.

Med disse ting på plads, kan alle ligninger for sidste afsnit direkte kopieres med  $\epsilon_0 \rightarrow \epsilon$ ,  $\mu_0 \rightarrow \mu$  og  $c \rightarrow v$ . Dermed er energidensiteten

$$u = \frac{1}{2} \left( \epsilon E^2 + \frac{1}{\mu} B^2 \right) \quad (6.43)$$

og Poyntingvektoren

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (6.44)$$

og amplituderne af felterne er

$$B_0 = \frac{1}{v} E_0 \quad (6.45)$$

Og da er intensiteten

$$I = \frac{1}{2} \epsilon v E_0^2 \quad (6.46)$$

#### 6.3.1 Vinkelret refleksion og transmission

Som i det endimensionale tilfælde, opstår der refleksion og transmission, når elektromagnetiske bølger når randen mellem to materialer. I dette tilfælde skal de dog overholde nogle lidt andre randbetingelser. Der er 4 randbetingelser, hvoraf de to første har med vinkelrette komponenter at gøre (altså i bevægelsesretningen) og de to sidste har med parallelle komponenter at gøre (parallel på randen, og dermed vinkelret på bevægelsen). Da elektromagnetiske bølger er transverse, er det kun de sidste to, der er interessante. Disse lyder

$$\mathbf{E}_1^{\parallel} = \mathbf{E}_2^{\parallel}, \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^{\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^{\parallel}. \quad (6.47)$$

I det simple tilfælde for bølger, der bevæger sig i  $z$ -retningen, med randen i  $xy$ -planen ( $z = 0$ ), er de indkomne bølger

$$\tilde{\mathbf{E}}_I(z, t) = \tilde{E}_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_I(z, t) = \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (6.48)$$

de reflekterede bølger

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(z, t) = \tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_R(z, t) = -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (6.49)$$

og de transmitterede bølger

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(z, t) = \tilde{E}_{0T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_T(z, t) = \frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (6.50)$$

hvor minuset i den reflekterede magnetiske bølger kommer af, at bølgen (og dermed også Poyntingvektoren) peger i den anden retning, og de skal udgøre et højrehåndskoordinatsystem. I randbetingelserne er  $\mathbf{E}_1 = \tilde{\mathbf{E}}_I + \tilde{\mathbf{E}}_R$  og  $\mathbf{E}_2 = \tilde{\mathbf{E}}_T$ . De to randbetingelser giver henholdsvis:

$$\tilde{E}_{0I} + \tilde{E}_{0R} = \tilde{E}_{0T}, \quad \frac{1}{\mu_1} \left( \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0I} - \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0R} \right) = \frac{1}{\mu_2} \frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0T} \quad (6.51)$$

hvor den anden betingelse kan skrives som

$$\tilde{E}_{0I} - \tilde{E}_{0R} = \beta \tilde{E}_{0T}, \quad \beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \quad (6.52)$$

Dette giver amplituderne

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{1 + \beta} \tilde{E}_{0I}, \quad (6.53)$$

og hvis  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ , hvilket ofte er tilfældet, er  $\beta = v_1/v_2$ , og resultaterne er *identiske* med de endimensionale tilfælde:

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \tilde{E}_{0I}. \quad (6.54)$$

I dette tilfælde er den reflekterede bølge **i fase**, hvis  $v_2 > v_1$  og  $180^\circ$  **ude af fase**, hvis  $v_2 < v_1$ . De reelle amplituder er

$$E_{0R} = \left| \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \right| E_{0I} = \left| \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right| E_{0I}, \quad E_{0T} = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} E_{0I} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} E_{0I}. \quad (6.55)$$

Intensiteten af lyset er  $I = \epsilon v E_0^2/2$ , og hvis igen  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$  fås at brøkdelen af energi, som reflekteres er:

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left( \frac{E_{0R}}{E_{0I}} \right)^2 = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2, \quad (6.56)$$

og brøkdelen der transmitteres er

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2}{\epsilon_1 v_1} \left( \frac{E_{0T}}{E_{0I}} \right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}, \quad (6.57)$$

hvor disse kaldes for henholdsvis **refleksionskoefficienten** og **transmissionskoefficienten**. Det ses også at  $R + T = 1$ , hvilket stemmer overens med energibevarelse. Et eksempel på størrelserne er for overgangen mellem luft ( $n_1 = 1$ ) og glas ( $n_2 = 1.5$ ). Da er  $R = 0.04$  og  $T = 0.96$ , hvilket giver god mening, da glas er gennemsigtigt.

### 6.3.2 Ikkevinkelret refleksion og transmission (bølger polariseret i indfaldsplanen)

Nu kommer det sjove! Nu er det en bølge, der kommer mod randen mellem to materialer (for simpelhedens skyld er randen stadig i  $xy$ -planen, hvor  $z = 0$ ). Her er bølgerne

$$\tilde{\mathbf{E}}_I(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0I} e^{i(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_I \times \tilde{\mathbf{E}}_I), \quad (6.58)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0R} e^{i(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_R \times \tilde{\mathbf{E}}_R), \quad (6.59)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0T} e^{i(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} (\hat{\mathbf{k}}_T \times \tilde{\mathbf{E}}_T). \quad (6.60)$$



Hvor den indkomne bølge kommer med en eller anden vinkel  $\omega_I$ , i forhold til vinkelret på overgangen mellem de to materialer. Alle bølgerne svinger med samme frekvens  $\omega$ , bestemt af bølgernes kilde, der i sin tid producerede dem. Da  $\omega = kv$  fås

$$\omega = k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2, \quad k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T. \quad (6.61)$$

Felterne  $\tilde{\mathbf{E}}_I + \tilde{\mathbf{E}}_R$  og  $\tilde{\mathbf{B}}_I + \tilde{\mathbf{B}}_R$  i det første materiale skal nu sammenføres med  $\tilde{\mathbf{E}}_T$  og  $\tilde{\mathbf{B}}_T$  i det andet materiale, i overensstemmelse med de samme randbetingelser som før.

Først kigges der dog kun på, at de skal være kontinuerte: Idet alle felterne har en ens struktur, hvor alle rumlige og tidslige størrelser står i eksponenten, og at de skal sammenføres i alle punkter i  $xy$ -planen, til alle tider, giver at eksponenterne nødvendigvis må være ens. De tidslige er altid ens, da de svinger med samme frekvens. Dette giver bare:

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}, \quad \text{for } z = 0. \quad (6.62)$$

Dette kan kun lade sig høre, hvis alle vektorerne  $\mathbf{k}_j$  ligger i samme plan. Dette giver den første lov: (**Laven eller anden form for fremhævelse**)

De indkomne, reflekterede og transmitterede bølger danner et plan, kaldet **indfaldsplanen**, der også inkluderer normalvektoren til overfladen.

Dette giver også at

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T, \quad (6.63)$$

og da  $k_I = k_R$  fås den anden lov, også kaldet refleksionsloven:

Den indkomne bølges vinkel er lig den reflekterede bølges vinkel:

$$\theta_I = \theta_R. \quad (6.64)$$

Og for den transmitterede bølges vinkel fås den tredje lov, kaldet for refraktionsloven eller Snell's lov:

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (6.65)$$

Disse tre love er den geometriske optiks fundamentale love.

Nu skal de 4 randbetingelser fra Maxwells ligninger behandles. Hvis det antages, at bølgerne polariseres i indfaldsplanen (altså at  $\hat{\mathbf{n}}$  ligger i samme plan som alle  $\mathbf{k}_j$ ), kan man med en dejlig gang algebra få et par ligninger ud, der giver den komplekse amplitude for de reflekterede og transmitterede bølger:

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{\alpha + \beta} \tilde{E}_{0I}, \quad \alpha \equiv \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}, \quad \beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \quad (6.66)$$

Disse ligninger kaldes **Fresnel's ligninger** for polarisering i indfaldsplanen. Hvis  $\alpha > \beta$  er den reflekterede bølge **i fase** med de to andre, men hvis  $\alpha < \beta$  er den reflekterede bølge **180° ude af fase**. Størrelsen  $\alpha$  kan også udtrykkes kun ved refraktionsindeksene og indfaldsvinklen  $\theta_I$ :

$$\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = \frac{\sqrt{1 - [(n_1/n_2) \sin \theta_I]^2}}{\cos \theta_I} \quad (6.67)$$

hvor det ses, at ved  $\theta_I = 0$  er  $\alpha = 1$  og de vinkelrette amplituder igen opnås. Ved  $\theta_I = 90^\circ$  divergerer  $\alpha$  og hele bølgen reflekteres. Der er også en vinkel mellem disse to, hvor  $\alpha = \beta$ , hvor den reflekterede bølge helt udslukkes. Denne kaldes for **Brewster's vinkel**,  $\theta_B$ , og er givet ved

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2}. \quad (6.68)$$

Typisk er  $\mu_1 \approx \mu_2$ , og  $\beta \approx n_2/n_1$ , hvormed  $\sin^2 \theta_B \approx \beta^2/(1 + \beta^2)$ . Dermed fås

$$\tan \theta_B \approx \frac{n_2}{n_1} \quad (6.69)$$

Effekten per enhedsareal, der rammer overgangen mellem de to materialer er prikproduktet mellem Poyntingvektorerne og fladenormalen:  $\mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{k}}$ . For de tre bølger er disse:

$$I_I = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0I}^2 \cos \theta_I, \quad (6.70)$$

$$I_R = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0R}^2 \cos \theta_R, \quad (6.71)$$

$$I_T = \frac{1}{2} \epsilon_2 v_2 E_{0T}^2 \cos \theta_T. \quad (6.72)$$

Refleksions- og refraktionskoefficienterne for bølger polariseret i indfaldsplanen er da

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} = \left( \frac{E_{0R}}{E_{0I}} \right)^2 = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2, \quad (6.73)$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2 \cos \theta_T}{\epsilon_1 v_1 \cos \theta_I} \left( \frac{E_{0T}}{E_{0I}} \right)^2 = \alpha \beta \left( \frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2. \quad (6.74)$$

Og det ses igen, at summen af disse giver 1, i overensstemmelse med energibevarelse.

## 6.4 Absorbering og spredning, elektromagnetiske bølger i ledere

I tilfældet, hvor de elektromagnetiske bølger bevæger sig gennem ledere, er  $\mathbf{J}_f$  og  $\rho_f$  ikke nødvendigvis 0. I følge Ohms lov er  $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$  og Maxwells ligninger siger

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_f, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.75)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu \sigma \mathbf{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (6.76)$$

Kontinuitetsligningen, sammen med Ohms lov og Faradays lov, siger

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}, \quad \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = -\sigma(\nabla \cdot \mathbf{E}) = -\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_f. \quad (6.77)$$

Og i homogene, lineære ledere giver dette

$$\rho_f(t) = e^{-\sigma t/\epsilon} \rho_f(0), \quad (6.78)$$

der er et eksponentielt henfald, med karakteristisk tid  $\tau = \epsilon/\sigma$ . Dette vil sige, at hvis du smider noget fri ladning på en leder, så vil det bevæge sig ud i enderne af lederen.  $\tau$  siger, hvor lang tid dette tager. For en perfekt leder er  $\sigma = \infty$  og  $\tau = 0$ . For en *god* leder er  $\tau$  meget mindre end andre relevante tider (eksempelvis i oscillerende systemer er  $\tau \ll 1/\omega$ ) og for en *dårlig* leder er  $\tau$  meget større end disse tider (oscillerende systemer:  $\tau \gg 1/\omega$ ).

Men nok om det, resten af dette afsnit forudsætter at **al fri ladning er forsvundet**, så  $\rho_f = 0$ . Da bliver Faradays lov  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Og den eneste forskel der er fra elektromagnetiske bølger i lineære medier, er det ekstra led i Ampères lov. Hvis vi igen tager curlen af Faradays og Ampères lov, kan disse ligninger afkobles til en modificeret bølgeligning, hvor der inkluderes en førsteordensafledet:

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.79)$$

og identisk for  $\mathbf{B}$ . Denne ligning tillader stadig løsninger, der er planbølger. Dog er de modificerede, med komplekse bølgetal:

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{i(\tilde{k}z - \omega t)}, \quad \tilde{k}^2 = \mu \epsilon \omega^2 + i \mu \sigma \omega, \quad (6.80)$$

hvor bølgetallet fås ved at tage kvadratroden.

$$\tilde{k} = k + i\kappa, \quad k \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} + 1 \right]^{1/2}, \quad \kappa \equiv \omega \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\epsilon \omega} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} \quad (6.81)$$

den imaginære del  $\kappa$  af det komplekse bølgetal resulterer i en eksponentiel svækkelse af bølgen (som funktion af rummet):

$$\tilde{\mathbf{E}}(z, t) = \tilde{\mathbf{E}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \tilde{\mathbf{B}}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (6.82)$$

Den afstand det tager for bølgen at svækkes med en faktor  $e \approx 1/3$  kaldes for **hudtykkelsen** (eller noget i den dur), og er givet ved  $d \equiv \kappa^{-1}$ . Dette er et mål for, hvor langt ind i lederen som bølgerne trænger. Den reelle del  $k$  af det komplekse bølgetal bestemmer bølgelængden, udbredelseshastigheden og refraktionsindekset, som normalt:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad v = \frac{\omega}{k}, \quad n = \frac{ck}{\omega}. \quad (6.83)$$

Som før kommer der dog ekstra begrænsninger på bølgenes komplekse amplituder, der bestemmer den reelle amplitude, fase og polarisation, som følge af Maxwells ligninger. Gauss' lov siger at der ikke kan være noget udsving i bevægelsesretningen, og bølgerne er igen transverse. Da kan vi lige så godt orientere vores felter, så det elektriske felt er polariseret langs  $x$ -aksen:  $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{E}\hat{\mathbf{x}}$ . Da giver Faradays lov (og Ampères lov) at

$$\tilde{\mathbf{B}}(z, t) = \frac{\tilde{k}}{\omega} \tilde{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}. \quad (6.84)$$

De to felter er igen indbyrdes vinkelrette med bevægelsesretningen. De reelle amplituder og faser kan fås ved at skrive det komplekse bølgetal på polær form:

$$\tilde{k} = K e^{i\phi}, \quad K \equiv |\tilde{k}| = \sqrt{k^2 + \kappa^2} = \omega \sqrt{\epsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}}, \quad \phi \equiv \tan^{-1}(\kappa/k). \quad (6.85)$$

Da er de komplekse amplituder relaterede ved

$$B_0 e^{i\delta_B} = \frac{K e^{i\phi}}{\omega} E_0 e^{i\delta_E}. \quad (6.86)$$

Dermed er de to felter ikke længere i fase! faktisk fås  $\delta_B - \delta_E = \phi$ , hvilket giver at B-felter »halter bagefter« E-feltet. Forholdet mellem de reelle amplituder er givet ved

$$\frac{B_0}{E_0} = \frac{K}{\omega} = \sqrt{\epsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}}. \quad (6.87)$$

De reelle elektriske og magnetiske felter er da

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_E) \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{B}(z, t) = B_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \delta_B + \phi) \hat{\mathbf{y}}. \quad (6.88)$$

#### 6.4.1 Refleksion ved en ledende overflade

Randbetegnelserne, der blev brugt ved overgangen mellem to dielektriske materialer kan ikke bruges her. I stedet skal ligningerne fra slutningen af **afsnit 4** bruges:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f, & \text{(iii)} \quad \mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel &= 0, \\ \text{(ii)} \quad B_1^\perp - B_2^\perp &= 0, & \text{(iv)} \quad \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}. \end{aligned}$$

hvor  $\sigma_f$  er den frie overfladeladning (ikke at forveksle med ledeevnen!),  $\mathbf{K}_f$  den frie overfladestrøm og  $\hat{\mathbf{n}}$  en enhedsvektor der peger fra medium 2 ind i 1 (altså »modsatrettet« bevægelsen af bølgen. Ikke at forveksle med polarisationsvektoren!) . I Ohmske materialer (materialer, hvor Ohms lov gælder), kan der ikke være nogen overfladestrøm, så  $\mathbf{K}_f = 0$ .

Vi antager igen, at overgangen er i  $xy$ -planen, med første medium et lineært dielektrisk materiale (luft, eksempelvis) og det andet medium en leder. En monokromatisk planbølge bevæger sig i  $z$ -retningen, fra medium 1 mod medium 2. For nemhedens skyld er denne også polariseret i  $x$ -retningen, så de forskellige bølger er

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}_I(z, t) &= \tilde{E}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, & \tilde{\mathbf{B}}_I(z, t) &= \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \\ \tilde{\mathbf{E}}_R(z, t) &= \tilde{E}_{0_R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, & \tilde{\mathbf{B}}_R(z, t) &= -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0_R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \\ \tilde{\mathbf{E}}_T(z, t) &= \tilde{E}_{0_T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{x}}, & \tilde{\mathbf{B}}_T(z, t) &= \frac{\tilde{k}_2}{\omega} \tilde{E}_{0_T} e^{i(\tilde{k}_2 z - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

hvor den reflekterede bølge bevæger sig i den negative  $z$ -retning, og den transmitterede bølge er svækket som den udbreder sig i lederen. Randbetingelse (i) siger nu at  $\sigma_f = 0$ , og fordi  $\tilde{\mathbf{B}}$  er transvers, er (ii) automatisk overholdt. (iii) og (iv) (med  $\mathbf{K}_f = 0$ ) giver

$$\tilde{E}_{0_I} + \tilde{E}_{0_R} = \tilde{E}_{0_T}, \quad \tilde{E}_{0_I} - T \tilde{E}_{0_R} = \tilde{\beta} \tilde{E}_{0_T}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\mu_1 v_1 \tilde{k}_2}{\mu_2 \omega} \quad (6.89)$$

Det følger da at

$$\tilde{E}_{0R} = \frac{1 - \tilde{\beta}}{1 + \tilde{\beta}} \tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = \frac{2}{1 + \tilde{\beta}} \tilde{E}_{0I}. \quad (6.90)$$

Disse ligner da meget amplituderne fra refleksion og transmission mellem to dielektriske materialer. Forskellen er bare at  $\tilde{\beta}$  nu er kompleks i stedet for reel. I en perfekt leder, med  $\sigma = \infty$ , giver  $k_2 = \infty$  og  $|\tilde{\beta}| = \infty$ , og dermed

$$\tilde{E}_{0R} = -\tilde{E}_{0I}, \quad \tilde{E}_{0T} = 0. \quad (6.91)$$

Bølgen er da totalt reflekteret og oplever en faseforskydning på  $180^\circ$ . Dette betyder at gode ledere udgør gode spejle. For eksempel er **hudtykkelsen** af sølv i omegnen af  $100 \text{ \AA}$ , så der skal kun bruges en meget lille mængde sølv til at lave et godt spejl.

## 7 Mere om bølger (Noter kap 4)

### 7.1 Stående bølger

Stående bølger, er bølger der ikke bevæger sig, men som derimod »står stille« og oscillerer. Dette kendes for eksempel fra en guitar, og er kendetegnet ved, at strengen sidder fast i enderne:

$$f(0, t) = f(L, t) = 0, \quad (7.1)$$

hvor  $L$  er strengens længde. Ligesom før arbejder vi med komplekse bølgefunktioner, så  $f(z, t) = \text{Re}[\tilde{f}(z, t)]$ , og som er opbygget af sinusbølger. Den mest generelle bølge af denne type er

$$\tilde{f}(z, t) = \left( \tilde{A}_- e^{-ikz} + \tilde{A}_+ e^{ikz} \right) e^{-i\omega t}, \quad (7.2)$$

der er superpositionen af to bølger, der bevæger sig i hver sin retning, med  $v = \omega/k$ . Ved at indføre randbetingelserne fra (7.1), fås

$$f(0, t) = 0 \Rightarrow \tilde{A}_- = -\tilde{A}_+, \quad f(L, t) = 0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (7.3)$$

Og skrevet som frekvenser ses det, at det kun er meget bestemte frekvenser, der er tilladt, som følge af disse randbetingelser:

$$\omega_n = n \frac{v\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \quad (7.4)$$

Hvor  $\omega_1 = v\pi/L$  kaldes for strengens *grundfrekvens* og  $\omega_n$  kaldes for strengens  $n - 1$ 'te overtone (**Ret endelig, hvis det er forkert terminologi**). Når bølgen svinger med disse frekvenser, danner den en stående bølge, der kan skrives som

$$f_n(z, t) = A \sin(k_n z) \cos(\omega_n t), \quad k_n = \omega_n/v. \quad (7.5)$$

For  $n > 1$  er der steder på strengen, hvor  $f(z_0, t) = 0$ , til alle tider  $t$  (ud over enderne, selvfølgelig). Disse kaldes for *noder* eller *knudepunkter* (enderne er *trivielle noder*), mens der andre steder på strengen, hvor  $\sin(k_n z_0) = \pm 1$ . Her er oscillationerne størst, og punkterne kaldes for *antinoder*. Disse steder optræder med regelmæssig afstand, og fra Mek2 ved vi, at afstanden mellem to nærmeste noder er  $\lambda/2$  (UP, 13. udgave, side 492). Dette er også afstanden mellem en antinode og dennes nærmeste. Afstanden mellem en node og dennes tætteste antinode er halvdelen af afstanden mellem to noder, altså  $\lambda/4$ .

### 7.2 Bølger i 3 dimensioner

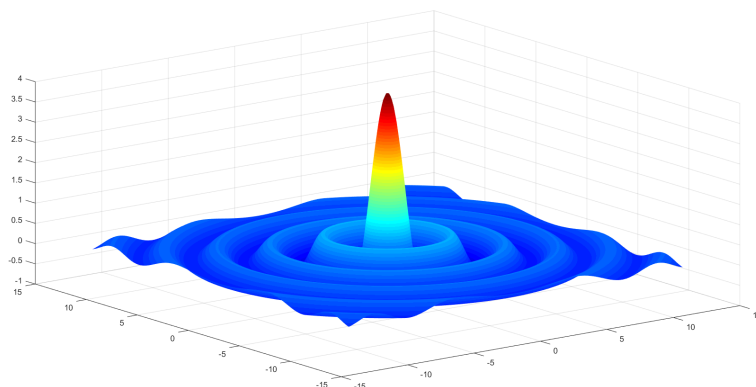
I dette afsnit behandles bølgeligningen i 3 dimensioner, samt to forskellige løsninger til denne: planbølger og sfæriske bølger. Idet planbølger allerede er beskrevet, vil jeg kun beskrive sfæriske bølger i dette afsnit.

Bølgeligningen i 3 dimensioner er, som bekendt:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (7.6)$$

hvor  $\nabla^2$  er Laplaceoperatoren (summen af de dobbelte rumafledte). Sfæriske bølger har dette navn fordi bølgefronten bevæger sig ud fra udbredelsespunktet som en sfære med aftagende amplitude.

Den todimensionale ækvivalent er bølgerne i vand, der kommer fra en sten smidt ned i pølen. Her udbredes bølgerne fra nedslagspunktet, med mindre amplitude som afstanden stiger. Et 2D plot af dette kan ses herunder:



Figur 2: Et plot af  $2 \sin(2r)/r$  for  $x, y = [-4\pi, 4\pi]$ . MATLAB-koden kan hentes fra min GitHub: <https://github.com/NikolaiNielsen/FysikNoter/blob/master/EDB/sphericalWave.m>

Her aftager bølgen som  $2/r$ , og hvis denne funktion blev lagt ind over bølgen, vil man tydelig kunne se, at alle bølgetoppene rører funktionen  $2/r$ . Dette bliver lagt som en øvelse til læseren, da det bliver ualmindelig grimt, med mindre man har interaktivitet (eller gider at gøre rigtig meget ved det, som gennemsigtighed og sådan noget). Det kan også visualiseres nemmere i én dimension, hvor koden til sådan et plot også ligger i filen på GitHub.

Men nok om kedelige én og to dimensioner. Vi har jo tre at gøre godt med! Den simpleste sfæriske bølge er givet ved

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, t) = \tilde{A} \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{r}, \quad (7.7)$$

der har en diskontinuitet i origo, hvor  $r = 0$ . Hvis der ses på bølgen et punkt langt væk fra origo, for eksempel  $z_0 \gg x, y$ , og  $z = z_0 + z'$  med  $z_0 \gg z'$ . Her bliver  $r$ :

$$r = \sqrt{(z_0 + z')^2 + x^2 + y^2} = (z_0 + z') \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{(z_0 + z')^2}} \approx z_0 + z' + \frac{x^2 + y^2}{2z_0} \approx z_0 \quad (7.8)$$

hvor det er udnyttet at  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ , for små  $x$  (Taylorudvikling af  $\sqrt{1+x}$  omkring 0, til første orden). Denne approksimation kan dog kun bruges uden for eksponenten, da eksponenter er dumme med approksimationer. Eksempelvis er  $kz_0 \gg kz'$ , men  $kz'$  kan sagtens være stort, og dermed have en stor indflydelse på eksponenten. Dette er dog ikke tilfældet for  $k(x^2 + y^2)/z_0$ , der er småt nok til at ignorere. Med alt dette fås

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, t) = \tilde{A}' e^{i(kz' - \omega t)}, \quad \tilde{A}' = \tilde{A} \frac{e^{ikz_0}}{z_0}, \quad (7.9)$$

der jo er en planbølge! Dette giver matematisk grundlag for, at når vi ser på en kugle meget tæt på dennes overflade, så ligner den et plan (eller omvendt, hvis kuglen bare er meget stor, og vi dermed er langt væk fra centrum. Det der betyder noget, er bare forholdet mellem afstanden af dig til overfladen og radius af kuglen).

### 7.3 Interferens

Idet bølgeligningen er lineær, er enhver sum af løsninger til ligningen også en løsning til ligningen. Det er netop dette vi udnytter i studiet af stående bølger, hvor det er to modsatte bølger, med samme frekvens amplitude og bølgetal, der producerer fænomenet. Dette er et eksempel på *interferens*. Der findes to typer: **konstruktiv** og **destruktiv**. Konstruktiv interferens er steder, hvor bølgerne er i fase, og der dermed er bølgetop/bølgedal for begge bølger. Dette resulterer i den dobbelte amplitude for den samlede bølge. Dette er jo præcis de steder på en streng, hvor der er antinoder! Destruktiv interferens

er der, hvor bølgerne er præcis en halv bølgelængde ude af fase. Her mødes bølgetop med bølgedal, og resultatet er en præcist udslukket bølge: noderne på en streng!

Der findes to »steder« hvor interferens kan opstå: i rummet og i tiden.

### 7.3.1 Rumlig interferens og smarte tricks

I stående bølger er det rumlig interferens der sker. Navnet kommer af, at interferensen sker i bestemte steder i rummet, og til alle tider (noderne og antinoderne er faste punkter i rummet, og interferensen sker så længe strengen vibrerer). Men stående bølger på en streng er uden tvivl det nemmeste tilfælde.

I notesættet behandler de eksemplet med to højttalere i  $x = \pm L/2$ , og de kigger på området omkring  $z_0$  for  $z_0 \gg x, y, L$ . Jeg vil ikke gå i dybden med udregningerne, men blot nævne nogle af de smarte tricks de bruger, så I selv kan få alle de der »gode ideer« man skal bruge, til at løse opgaverne.

For det første, skal to eksponentialfunktioner lægges sammen, hvilket er et helvede fordi det er meget nemmere at gange dem sammen. Og hvis der ikke lige er en fælles faktor, man *lige* kan trække ud, så er det endnu mere træls. Men frygt ej! Man kan *altid* finde en fælles faktor. Man skal blot indse følgende:

$$\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} = a_1, \quad \frac{a_1 + a_2}{2} - \frac{a_1 - a_2}{2} = a_2. \quad (7.10)$$

Regn selv gerne efter. Hvis vi nu antager at de to bølger har formen  $e^{ia_1}$  og  $e^{ia_2}$  hvor  $a_1$  og  $a_2$  afhænger af rum og tid, så er summen af disse:

$$e^{ia_1} + e^{ia_2} = e^{i(a_1/2+a_2/2)} \left( e^{i(a_1/2-a_2/2)} + e^{-i(a_1/2-a_2/2)} \right) = 2e^{i(a_1+a_2)/2} \cos\left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right). \quad (7.11)$$

Se nu, hvor pænt det blev! Da er den nye amplitude  $2 \cos((a_1 - a_2)/2)$ . Dette resultat kan direkte overføres til *alle* opgaver af denne type. Dette trick bliver brugt på side 81 i notesættet.

Det andet trick de bruger, er approksimationer. Jeg har benævnt den stort set lige før, i afsnittet om sfæriske bølger, men det er så smart, så det er værd at nævne en anden gang. Taylorudviklingen af funktionen  $a\sqrt{1+x}$  for små  $x$  (altså omkring punktet  $x = 0$ ) kan bruges til at komme af med drilske kvadratrødder, så man nemt kan lægge to af disse sammen:

$$a\sqrt{1+x} \approx a \left( 1 + \frac{1}{2}x \right), \quad x \approx 0 \quad (7.12)$$

Dette er en Taylorudvikling til første orden ( $x$  står i første potens). Dette trick bliver brugt både på side 79 og 82 i notesættet, når der snakkes om sfæriske bølger og interferens.

### 7.3.2 Tidslig interferens

Nu skal der ses på tidslig interferens. Denne type interferens sker kun til forskellige tidspunkter, i rummet. Et eksempel er to endimensionale bølger:

$$\tilde{f}_1(z, t) = \tilde{A}e^{i(k_1 z - \omega_1 t)}, \quad \tilde{f}_2(z, t) = \tilde{A}e^{i(k_2 z - \omega_2 t)}, \quad k_i = \frac{\omega_i}{v} \quad (7.13)$$

hvis der kigges på punktet  $z = 0$ , og samme trick som før bruges (med at finde en fælles koefficient) fås:

$$\tilde{f}(0, t) = \tilde{f}_1(0, t) + \tilde{f}_2(0, t) = \tilde{A}(e^{-i\omega_1 t} + e^{-i\omega_2 t}) = 2\tilde{A} \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t/2}. \quad (7.14)$$

Her er amplituden da harmonisk varierende i tid, med frekvensen  $\omega = (\omega_1 - \omega_2)/2$ . Hvis de to frekvenser er tætte på hinanden i størrelse, vil amplituden variere langsomt, og hvis de er ens ses det, at amplituden bliver konstant igen.

## 8 Potentialer og felter (Griffiths kapitel 10)

I dette kapitel findes de generelle løsninger til Maxwells fire ligninger. Så hvis  $\rho(\mathbf{r}, t)$  og  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$  kendes, hvad er så  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  og  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ ? I statiske tilfælde giver Coulombs lov og Biot-Savarts lov os svarene, men generaliseringen til dynamiske systemer er lidt mindre enkel.

I det elektrostatiske tilfælde, kan  $\mathbf{E}$ -feltet skrives som gradienten til en skalar, idet rotationen er 0. Men i dynamiske tilfælde spænder Faradays lov ben for os, idet rotationen af  $\mathbf{E}$ -feltet er den tidsligt afledte af  $\mathbf{B}$ -feltet:  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ . Men ved at bruge vektorpotential  $\mathbf{A}$  (der stadig kan bruges i dynamikken, idet divergensen af  $\mathbf{B}$  stadig er 0), kan disse kombineres, så man får:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}), \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (8.1)$$

Dermed kan denne størrelse skrives som gradienten af en skalar  $V$ . Hvis der rykkes lidt om fås:

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (8.2)$$

Men dette er jo bare at sparke lorten ned ad gaden - Nu skal vi finde potentialerne. Ved at smide denne formel ind i Gauss' lov, fås

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (8.3)$$

Dette er så afløseren til Poissons ligning, og formelen reduceres også til denne i det statiske tilfælde. Ved at smide potentialformuleringerne af  $\mathbf{B}$  og  $\mathbf{E}$  ind i Ampères lov fås også

$$\left( \nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} \right) - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (8.4)$$

hvormed vi nu har to (differential)ligninger med to ubekendte! Disse indeholder tilsammen *al* information fra Maxwells ligninger, men de er umådeligt grimme. Som den kære Steen så smugt sagde det, så er det lidt som at have en kæreste der både er dum og grim.

### 8.1 Gaugefriheder: Coulombs og Lorenz' gauges

Der er dog nogen frihed i disse ligninger, idet flere potentialer kan give samme fysiske felter. Disse friheder kaldes for **gaugefriheder**. Ved lidt fancy matematik kan man drage følgende konklusion:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \lambda, \quad V' = V - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (8.5)$$

Man kan lægge gradienten af enhver skalar  $\lambda$  til  $\mathbf{A}$ , såfremt man også trækker dennes tidsafledte fra  $V$ . Denne slags transformationer af  $V$  og  $\mathbf{A}$  kaldes for **gaugetransformationer**, og i magnetostatik var det ofte smartest at være skalar  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , hvilket dog ikke altid er tilfældet her. To af de mest berømte gauges er Coulombs og Lorenz (i bogen skriver de Lorentz, da alle andre bøger gør det, men man ved egentlig ikke om det stammer fra Lorenz eller Lorentz. Lorenz var dansker, så jeg skriver det uden t.).

**Coulombgauge.** Som i magnetostatik vælges, at  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Dette giver at ligning (??) reducerer til Poissons ligning:

$$\nabla^2 V = \frac{-\rho}{\epsilon_0}. \quad (8.6)$$

Man skal dog stadig kende både  $V$  og  $\mathbf{A}$ , førend  $\mathbf{E}$  kan regnes.  $V$  er da givet ved

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{z} d\tau'. \quad (8.7)$$

hvor  $z = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $r$  er afstanden til testpunktet  $\mathbf{r}$  og  $r'$  er afstanden til kildepunktet i integrationen. Det ses, at denne afhænger af ladningsfordelingen til netop *dette* tidspunkt (men nu dette! og så dette! Hold nu fast, hvad?) hvilket kan virke lidt spøjst med hvad vi ved fra det fremtidige kapitel om retarderede (forsinkede) potentialer. Men sådan er det nu engang. Til gengæld er der stadig en forsinkelse på  $\mathbf{E}$  idet det fysiske signal udbreder sig med lysets hastighed. Det vil altså sige, at selvom  $V$  ser ud til at bryde kausalitet, så bryder  $-\nabla V - (\partial \mathbf{A} / \partial t)$  det ikke. Det er da ret spøjst.

Det smarte ved denne gauge er, at skalarpotentialet er nemt at regne, men bagsiden af medajlen er så at  $\mathbf{A}$  stadig er grimt. Formlen for denne er

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left( \frac{\partial V}{\partial t} \right). \quad (8.8)$$

**Lorenzgaugen.** I denne gauge vælges

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}, \quad (8.9)$$

således at andet led i ligning (8.4) forsvinder. Dermed lyder ligningerne

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J}, \quad (8.10)$$

$$\nabla^2 V - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (8.11)$$

der er to ganske symmetriske ligninger. Faktisk er det **inhomogene bølgeligninger**. Grundet denne symmetri kan der indføres en differentialoperator kaldet for **d'Alembertianen**:

$$\square^2 = \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (8.12)$$

der i speciel relativitetsteori er generaliseringen af Laplaceoperatoren. Ligningerne bliver her

$$\square^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (8.13)$$

Disse ligninger kan også ses som de firedimensionale versioner af Poissons ligning.

## 8.2 Kontinuerte fordelinger og retarderede potentialer

I statiske tilfælde reducerer ligningerne (??) og (??) til fire kopier af Poissons ligning, med løsningerne

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathcal{Z}} d\tau', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathcal{Z}} d\tau'. \quad (8.14)$$

Idet elektromagnetiske signaler propagerer med lysets hastighed, vil den naturlige generalisering til ikke-statiske tilfælde være at potentialerne afhænger af ladnings/strømfordelingerne til et *tidligere* tidspunkt,  $t_r$  kaldet den retarderede tid. Idet signalet skal bevæge sig i afstanden  $\mathcal{Z}$ , må den tidslige forsinkelse være  $\mathcal{Z}/c$ , og den retarderede tid er

$$t_r \equiv t - \frac{\mathcal{Z}}{c}. \quad (8.15)$$

Og potentialerne lyder

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{Z}} d\tau', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{Z}} d\tau', \quad (8.16)$$

hvor  $\rho(\mathbf{r}', t_r)$  er ladningsfordelingen i punktet  $\mathbf{r}'$  til den retarderede tid  $t_r$ . Denne afhænger selvfølgelig af positionen grundet leddet med faktoren  $\mathcal{Z}$ . Disse potentialer kaldes for **retarderede potentialer**, og de reducerer til deres statiske versioner, i tilfældet af statiske ladningskonfigurationer.

Men når nu disse er fundet, betyder det ikke bare, at vi kan antage at det samme gør sig gældende for felterne. Disse kan ikke bare omskrives med retarderet tid!

For at vise at dette nu også er den rigtige generalisering, kan man lave en masse god matematik, og så se, at disse potentialer overholder de inhomogene bølgeligninger i Lorenzgaugen, hvilket jeg ikke vil gøre her. Men idet d'Alembertianen afhænger af  $t^2$ , så er denne tidsinvariant, så beviset for retarderede potentialer kan også bruges til at bevise fremtidige potentialer, der afhænger af den *fremtidige* tid:  $t_a \equiv t + \mathcal{Z}/c$ . Disse overholder dog ikke kausalitet, som vi nu engang ret godt kan lide. Derfor vælger vi at bruge retarderede potentialer.



### 8.3 Punktladninger og Liénard-Wiechertpotentialerne

Lad os antage, at en punktladning  $q$  bevæger sig i en given bane

$$\mathbf{w}(t) \equiv q\text{'s position til tiden } t. \quad (8.17)$$

Da der den retarderede tid defineret gennem ligningen

$$|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r), \quad (8.18)$$

idet venstre side er afstanden fra kildepartiklens retarderede position  $\mathbf{w}(t_r)$  til testpositionen  $\mathbf{r}$ , og højre side er  $c$  ganget med forskellen mellem nutid og retarderet tid. Da defineres en ny  $\mathbf{z}$ :

$$\mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r), \quad z = |\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r). \quad (8.19)$$

Det er værd at nævne, at testpositionen  $\mathbf{r}$  kun kan modtage signal fra ét punkt langs  $\mathbf{w}$  til ethvert tidspunkt. Grunden til dette er, at hvis der var to eller flere tidspunkter, så må ladningen nødvendigvis bevæge sig med mindst lysets hastighed, hvilket ikke kan lade sig gøre.

Man kan da tro, at potentialet for en punktladning i bevægelse er det samme som i det statiske tilfælde, blot med den nye definition af  $\mathbf{z}$ . Dette er dog ikke tilfældet, idet den »effektive volumen« af en ladning i bevægelse ændres med en faktor  $(1 - \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{v}/c)^{-1}$ . Grunden til dette gives i detaljer i **appendiks**, men den korte er, at det har noget med toge i bevægelse at gøre. Så tak opfinderen af toge for, at vi ikke har simple el-formler! På den anden side, er det nu nok meget godt, for før togenes opfindelse har elektromagnetismen tydeligvis ikke opført sig ordenligt. Det er også af den grund, at verden på det tidspunkt var i sort og hvid, som set på historiske film. At der er en periode, hvorfra toge blev opfundet, til verden var i farve, er fordi elektromagnetiske signaler bevæger sig med lysets hastighed, og derfor tog det noget tid, førend farven kom helt hertil.

Med dette sagt, så er skalarpotentialet givet ved

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qc}{z c - \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}}, \quad (8.20)$$

og vektorpotentialet

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qc\mathbf{v}}{z c - \mathbf{z} \cdot \mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{c^2} V(\mathbf{r}, t), \quad (8.21)$$

hvor  $\mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)$  og  $t_r$  implicit er givet ved  $|\mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)| = c(t - t_r)$ . Disse potentialer kaldes for **Liénard-Wiechertpotentialerne** for punktladninger i bevægelse.

#### 8.3.1 Felterne af punktladning i bevægelse

Ud fra Liénard-Wiechertpotentialerne kan man udlede felterne for en punktladning i bevægelse, ved hjælp af

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (8.22)$$

Dette er dog svært grundet den komplicerede relation mellem  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{r}$  og  $t_r$ . Udregningerne til dette fylder lige over to sider i bogen, og jeg det forventes heller ikke, at vi forstår dem. Så uden videre **omsvøb** (without further ado. Er det ikke den danske oversættelse?) er felterne

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})^3} [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{z} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})], \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (8.23)$$

hvor  $\mathbf{z} = \mathbf{r} - \mathbf{w}(t_r)$ ,  $\mathbf{u} \equiv c\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{v}$  og  $\mathbf{a}$  er kildepartiklen  $q$ 's accelerationsvektor. Det ses ud fra krydsproduktet i B-feltet, at dette altid er vinkelret på både det elektriske felt og vektoren fra det retarderede punkt.

Det første led i E-feltet går som  $z^{-2}$ , og hvis både hastigheden og accelerationen er 0, reducerer feltet til det elektrostatiske resultat. Derfor kaldes dette led ofte for det **generaliserede Coulombfelt** eller, fordi det ikke afhænger af accelerationen, for **hastighedsfeltet**. Det andet led er ansvarligt for elektromagnetisk stråling, og går som  $z^{-1}$ , og kaldes derfor for **strålingsfeltet** eller **accelerationsfeltet** (kan du gætte hvorfor?). De samme navne bruges om leddene i B-feltet.

Og med disse formler for elektriske og magnetiske felter, samt superpositionsprincippet, kan enhver elektromagnetisk kraft udregnes, ved hjælp af Lorentzkraften:

$$\mathbf{F} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(\mathbf{z} \cdot \mathbf{u})^3} \left\{ [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{z} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})] + \frac{\mathbf{V}}{c} \times [\hat{\mathbf{z}} \times [(c^2 - v^2)\mathbf{u} + \mathbf{z} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{a})]] \right\}, \quad (8.24)$$

hvor  $\mathbf{V}$  er  $Q$ 's hastighed og  $\mathbf{z}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  og  $\mathbf{a}$  alle sammen regnes ved den retarderede tid. Og dermed er al information i klassisk elektrodynamik indeholdt i én ligning.

## 9 Elektrisk dipolstråling

## A Udregninger til kapitler

### A.1 Kapitel 2

#### A.1.1 Kraftfelter, der er konstante ledningens tværsnit

Volumenintegralet kan splittes op i to mindre integraler: et planintegral over grenens tværsnit (ai), og et kurveintegral langs strømmens retning (li):

$$\int_i (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{J} \, d\tau = \int_{li} \int_{ai} (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{J} \, da \, dl \quad (\text{A.1})$$

Hvis kraftfelterne  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{f}$  da er konstante over tværsnittene (hvilket de i stort set alle tilfælde er, til en rigtig god approksimation. Enhver ledning har trods alt et ret lille tværsnit), så kan disse smides uden for planintegralet, hvorved dette kun er over volumenstrømmen. Men dette er jo bare den helt almindelige strøm  $I$ :  $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = I$ . Indsættes dette fås:

$$\int_{li} \int_{ai} (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{J} \, da \, dl = \int_{li} (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \int_{ai} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \, dl = \int_{li} I_i (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} \quad (\text{A.2})$$

hvor jeg har introducerede vektoriale arealer og kurver i andet skridt, for at få det hele til at gå op (det kan godt være det ikke er formelt korrekt, men det bør i hvert fald give en forståelse for, hvordan denne udregning foregår). Strømmen tages nu ud fra integralet, da denne ikke varierer langs grenen (ellers ville der jo være ophobning!). Til sidst bruges definitionen på emf:  $\mathcal{E} = \int \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l}$ , til at få det ønskede resultat:

$$I_i \int_i (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{l} = I_i \left( \int_i \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} + \int_i \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) = I_i \left( \mathcal{E}_i + \int_i \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \right) \quad (\text{A.3})$$