Noter til Analytisk Mekanik 2017

Nikolai Plambech Nielsen, LPK331. Version 1.0

Indhold

1 Grundprincipper **3**
1.1 Newtons love . . . 3
1.1.1 Bevarelseslove . . . 3
1.2 Partikelsystemer . . . 4
1.2.1 Massemidtpunktsbevægelse . . . 4
1.2.2 Impulsmoment . . . 5
1.2.3 Energi . . . 5
1.3 Centrale kræfter . . . 5
1.4 To-legemesbevægelse med centralt potentiale . . . 5
1.5 Spredning . . . 5

Eksamensspørgsmål

Eksamensspørgsmålene er som følger

1. **Newtons love og Kepler-problemet** [Første indgang til bevarelseslove, konservative kræfter, $1/r$ potentialet, planetbaner, spredning, tværsnit]
2. **Accelererede koordinatsystemer** [Rotation og translation, bevægelse på den roterende jord]
3. **Lagrangedynamik** [Holonomiske constraints, generaliserede koordinater, d'Alemberts Princip, Langrange-ligningerne, generaliserede kræfter]
4. **Variationsregning** [Lagrange-ligningerne fra et variationsprincip (Hamiltons Princip), Lagrange-multiplikatorer og constraint-kræfter]

Kapitel 1

Grundprincipper

1.1 Newtons love

Fra Mek1 kender vi Newtons tre love. Den første lyder

Newtons første lov. I et inertialsystem forbliver ethvert legeme i hvile, eller bevæger sig med konstant hastighed, medmindre legemet udsættes for en kraft $\mathbf{F}$. Hvis $\mathbf{F} = 0$, vil et legeme da have konstant hastighed $\mathbf{v}$ og impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Og et inertialsystem er et koordinatsystem, der *ikke* er accelereret, hvormed Newtons tre love gælder (i denne form, i hvert fald). Den anden lov lyder

Newtons anden lov. I et inertialsystem vil et legeme, der oplever en kraft, også opleve en ændring i impuls, givet ved

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \equiv \dot{\mathbf{p}}. \tag{1.1.1}$$

Hvis massen af et legeme forbliver konstant, reduceres den anden lov til den kendte form af $\mathbf{F} = m\, d\mathbf{v}/dt = m\mathbf{a}$.

Newtons tredje lov. Påvirkes et legeme, 1, af et andet legeme, 2, med en kraft $\mathbf{F}_{21}$, vil legeme 1 påvirke legeme 2 med en lige stor, men modsatrettet kraft:

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} \tag{1.1.2}$$

og begge disse kræfter virker langs legemernes adskillelseslinje.

Et vigtigt resultat af dette er galileisk relativitet, der siger, at ethvert referencesystem, der bevæger sig med konstant hastighed i forhold til et inertialsystem, er selv et inertialsystem. Et bevis for dette er som følger:

Lad $\mathbf{r}$ og $\mathbf{r}'$ være koordinaterne i to forskellige referencesystemer, der bevæger sig med hastigheden $\mathbf{V}$ i forhold til hinanden. Da fås $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{V}t$, hvormed to partikler i og j, har separationen $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j = \mathbf{r}'_i - \mathbf{r}'_j$ og kræfterne $\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}'_{ij}$ i de to referencesystemer. Ydermere ses det, at idet koordinatsystemerne bevæger sig med konstant hastighed i forhold til hinanden, vil $d^2\mathbf{r}/dt^2 = d^2\mathbf{r}'/dt^2$, hvormed accelerationen også er ens i de to koordinatsystemer.

1.1.1 Bevarelseslove

Her fremhæves tre vigtige bevarelseslove, nemlig dem om impuls-, impulsmoments-, og energibevarelse:

Impulsbevarelse. Ud fra Newtons anden lov ses det, at såfremt et legeme ikke påvirkes af en kraft, så vil dets impuls være bevaret

Impulsmomentsbevarelse. Impulsmomentet defineres ved

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \tag{1.1.3}$$

hvor det antages, at m er konstant. Den tidsligt afledte af denne størrelse er

$$\dot{L} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + m\mathbf{r} \times \mathbf{a} = m\mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \equiv \mathbf{\Gamma}, \tag{1.1.4}$$

hvor produktreglen, Newtons anden lov og det faktum at krydsproduktet mellem to ens vektorer er 0, er brugt. Størrelsen $\mathbf{\Gamma}$ kaldes for *kraftmomentet*. Det ses da, at hvis en eller flere af kraftmomemtets komponenter er 0, vil denne/disse samme komponente/r af impulsmomentet være bevaret. Det noteres dog, at i modsætning til impulsen, så afhænger impulsmomentet af valget af koordinatsystem, idet, hvis origo transformeres, så $\mathbf{r} \to \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$, transformeres $\mathbf{L}$ til $\mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mathbf{r}_0 \times \mathbf{p}$, under antagelse at $\dot{\mathbf{r}}_0 = 0$, og at de to koordinatsystemer ikke bevæger sig i forhold til hinanden.

Energi For et statisk kraftfelt $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ vil en testpartikel, der bevæger sig fra punkt 1 til punkt 2 langs en given vej, være givet ved linjeintegralet af kraften:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \tag{1.1.5}$$

Hvis punkt 1 svarer til $\mathbf{r}_1$ og partiklen bevæger sig gennem punktet 2, svarende til $\mathbf{r}_2$, vil $d\mathbf{s} = \mathbf{v}dt$, og Newtons anden lov (for konstant masse) giver resultatet:

$$W_{1\to 2} = \int_1^2 \left(m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) \cdot d\mathbf{s} = m \int_1^2 \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} dt = m \int_1^2 \frac{1}{2} v^2 \frac{d}{dt} dt = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 \equiv T_2 - T_1 \tag{1.1.6}$$

hvor T er partiklens kinetiske energi. Hvis kraftfeltet ydermere kan beskrives som gradienten til en skalar U, kaldet potentialet, så $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$, kaldes kraftfeltet for *konservativt*, og da bliver arbejdet $W_{1\to 2} = -\int_1^2 \nabla U(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = -U_2 + U_1$ (hvilket du måske kan huske fra vektoranalysen i MatF1. Dette er nemlig gradientsætningen i aktion). Kombineres disse to resultater ($T_2 - T_1 = -U_2 + U_1$) fås energibevarelsen:

$$T_1 + U_1 = T_2 + U_2 \tag{1.1.7}$$

for konservative kraftfelter. Grundet gradientsætningen er der to yderligere ækvivalente kriterier for $\mathbf{F}(\mathbf{r})$:

$$\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = 0, \qquad \oint \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} = 0. \tag{1.1.8}$$

Altså at kraftfeltet er rotationsfrit (enten i differentialform eller integralform.)

1.2 Partikelsystemer

Betragt N partikler, med masserne m_i, der befinder sig i positionerne $\mathbf{r}_i$, i et inertialsystem. Da defineres *massemidtpunktet* $\mathbf{R}$ ved

$$\mathbf{R} = M^{-1} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i, \quad M = \sum_{i=1}^N m_i. \tag{1.2.1}$$

1.2.1 Massemidtpunktsbevægelse

Kraften på den i'te partikel kan skrives som summen af eksterne kræfter, og kræfter fra andre partikler $j \neq i$:

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1, j\neq i}^N \mathbf{F}_{ij} \tag{1.2.2}$$

Accelerationen af massemidtpunktet er da givet ved

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^N \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j\neq i}^N \mathbf{F}_{ij}. \tag{1.2.3}$$

Det sidste udtryk er ret grimt, men det hjælper at skrive det ud:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\mathbf{F}_{ij} = \mathbf{F}_{2,1} + \mathbf{F}_{3,1} + \dots + \mathbf{F}_{N,1}\\ + \mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{3,2} + \dots + \mathbf{F}_{N,2} + \dots\\ + \mathbf{F}_{1,N} + \mathbf{F}_{2,N} + \dots \mathbf{F}_{N-1,N}\end{aligned}$$

hvor jeg lige separerer indeksene med et komma for synlighed. Vis alle kraftpar ($\mathbf{F}_{21}$ og $\mathbf{F}_{12}$) samles fås

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\mathbf{F}_{ij} = (\mathbf{F}_{1,2} + \mathbf{F}_{2,1}) + (\mathbf{F}_{1,3} + \mathbf{F}_{3,1}) + \dots + (\mathbf{F}_{1,N} + \mathbf{F}_{N,1})\\ + (\mathbf{F}_{2,3} + \mathbf{F}_{3,2}) + \dots + (\mathbf{F}_{2,N} + \mathbf{F}_{N,2}) + \dots + (\mathbf{F}_{N-1,N} + \mathbf{F}_{N,N-1})\end{aligned}$$

Men idet $\mathbf{F}_{1,2} = -\mathbf{F}_{2,1}$ (Newtons tredje lov), giver hele denne sum 0. En anden måde at få dette udtryk på, er at definere $\mathbf{F}_{ii} = 0$, hvormed summen kan ændres til

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\mathbf{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\mathbf{F}_{ij} + \mathbf{F}_{ji}) \tag{1.2.4}$$

hvor faktoren af 2 kommer fra det faktum, at hvert kraftpar tælles dobbelt. Her ses det endnu lettere, at summen giver 0, idet hvert led i summen er 0. Det samlede resultat af dette er, at

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{F}_i^{(e)} \equiv \mathbf{F}^{(e)} \tag{1.2.5}$$

hvor $\mathbf{F}^{(e)}$ er den totale eksterne kraft. Dermed bevæger massemidtpunktet af en samling af partikler sig, som om al partiklernes masse var koncentreret i ét punkt, og påvirket med en kraft $\mathbf{F}^{(e)}$. Ydermere ses det, at den samlede impuls $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i$ er konstant, når $\mathbf{F}^{(e)} = 0$. Der er også følgende repræsentationer af dette

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i = M\dot{\mathbf{R}} = M\mathbf{V} \tag{1.2.6}$$

hvor $\mathbf{V}$ er massemidtpunktets hastighed.

1.2.2 Impulsmoment

1.2.3 Energi

1.3 Centrale kræfter

1.4 To-legemesbevægelse med centralt potentiale

1.5 Spredning