MatF2 forelæsningsnoter på KU (Matematik for Fysikere 2)

af Nikolai Plambech Nielsen, LPK331
Version 1.0

10. maj 2016

Indhold

1 Tirsdag, 26/4, 9-10

Kort gennemgang af kurset:

- Komplekse variable (Kompelse funktioner, integraler, rækker afbildninger, potentialer og transformationer)
- Laplace-transformationer (og inverse)
- anvendelser, eksempler etc
- Kort afslutning om specielle funktioner (Bessel, Legendre, ...)

Eksamensform. 4 timers skriftlig eksamen. IKKE ITX-eksamen. Intern censur, alle tilladte hjælpemidler.

1.1 Komplekse variable

systematiske redskaber for at løse den harmoniske oscillator:

$$\begin{aligned}
m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + kx &= 0 \\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_0^2 x &= 0, \quad \omega_0^2 = k/m \\
\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_0^2\right) x &= 0 \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_0\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_0\right) x &= \text{Skriv ud!!} \ = 0 \\
\left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega_0\right) &= \hat{A}_+, \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} - i\omega_0\right) = \hat{A}_- \\
\hat{A}_+\hat{A}_- x(t) &= 0 = \hat{A}_-\hat{A}_+ x(t) \text{ Kummutation}
\end{aligned}$$

Kummutation gør at:

$$\hat{A}_- x(t) = 0, \quad x = k_1 \exp(i\omega_0 t) \tag{1.1}$$

$$\hat{A}_+ x(t) = 0, \quad x = k_2 \exp(-i\omega_0 t) \tag{1.2}$$

$$x(t) = k_1 \exp(i\omega_0 t) + k_2 \exp(-i\omega_0 t) \tag{1.3}$$

Parallel til LinAlg. Svarer til løsning af karakteristisk polynomium for egenvektorer.

1.2 Komplekse tal

$$z = x + iy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.4}$$

x kaldes reel del $\Re z$, y kaldes imaginær del $\Im z$. Skrives ofte i Argand-diagram (polær form), med norm $(r = \sqrt{x^2 + y^2})$ og argument $(\theta = r\cos x = r\sin y)$. **HUSK DIAGRAM**

$$z^* = x - iy, \quad |z|^2 = z\, z^* = x^2 + y^2 \tag{1.5}$$

Komplekse tal multipliceres ved at multiplicerer længder, og addere længder:

$$z_1 = r_1 \exp(i\,\theta_1), \quad z_2 = r_2 \exp(i\,\theta_2), \quad z_1 z_2 = r_1 r_2 \exp(i\,(\theta_1 + \theta_2)) \tag{1.6}$$

1.3 Komplekse funktioner

Kontinuitet defineres på samme måde som for funktioner af én variabel:

$f(z)$ siges at være kontinuert i z_0m hvis for alle $\epsilon > 0$ findes et $\delta > 0$, således at $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. f er kontinuert i et domæne R, hvis det er kontinuert i alle punkter z_0 i R

1.4 Regnehold 4

Underviser: Tobias Thune, mail: TobiasThune@gmail.com

2 Torsdag, 28/4, 9-10

2.1 Alternativ notation for kontinuitet

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \tag{2.1}$$

» for alle epsilon større end 0, eksisterer der et delta således at...«

2.2 Differentiabilititet

En funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ er differentiabelt i z, hvis

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \tag{2.2}$$

eksisterer og er unik. Forskellen fra reelle funktioner er, at der er uendelige måder hvorpå h kan gå mod 0 (uendelig mængde rette linjer, der har forskellige hældninger).

2.3 Geometrisk fortolkning af kompleks differentiabilitet

For $h >> 1$ er

$$\Delta f = f(z+h) - f(z) \approx f(z) + hf'(z) - f(z) = hf'(z) = h|f'(z)|\exp(i\theta), \quad \theta = \arg f'(z) \tag{2.3}$$

Det svarer altså til en rotation af θ og en forstrækning $|f'(z)|$ af rummet (»twist and stretch«)

3 Tirsdag, 10/5, 9-10

3.1 Leibnez og Bernoulli

1712-1713, lille venlig kampstrid. Hvad er $\ln(-x)$? imaginært, reelt eller udefineret?

Leibnez argument var at det er ikke-eksisterende. logaritmen er ikke defineret for negative tal (da man kan få imaginære tal ved at tage $1/2\ln(-1) = \ln i$).

Bernoullis argument var

$$\frac{dx}{x} = \frac{-dx}{-x} = \frac{d(-x)}{-x}$$
$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{d(-x)}{-x}, \quad u = -x, \quad ln(x) = ln(u) = ln(-x)$$

Og det er et rungende nej, der skal en integrationskonstant, så $\ln x = \ln(-x) + C$.

Regneregler:

$$-x = (-1)x = (e^{i\pi k})x, k = \text{ ulige} \tag{3.1}$$
$$ln(-x) = i\pi k + \ln x \tag{3.2}$$

3.2 potensrækker

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \rho^i \tag{3.3}$$

$$S_n - \rho S_n = 1 - \rho^{n+1} \tag{3.4}$$
$$S_n = \frac{1 - \rho^{n+1}}{1 - \rho} \tag{3.5}$$

hvis $|\rho| < 1$ er

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-\rho} \tag{3.6}$$

For komplekse rækker

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad a_n, z \in \mathbb{C} \tag{3.7}$$

Vi definerer en følge af partielle rækker

$$S_j = \sum_{n=0}^{j} a_n z^n \tag{3.8}$$

hvis vi tager følgerne $S_0, S_1, S_2, \ldots$, så siges rækken at være konvergent, hvis $\lim_{j\to\infty} S_j = S$. Alternativt:

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ M \in \mathbb{N}\ \forall\ j > M : |S - S_j| < \epsilon \tag{3.9}$$

Eksempel

$$S = 1+1-1+1-1+1-\cdots = 1/2, \quad 1-S = 1-(1-1+1-1+\ldots) = S \Leftrightarrow 2S = 1 \Leftrightarrow S = 1/2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \tag{3.10}$$

Kigger på partielle rækker

$$S_0 = 1 \tag{3.11}$$
$$S_1 = 0 \tag{3.12}$$
$$S_2 = 1 \tag{3.13}$$
$$S_3 = 0 \tag{3.14}$$
$$S_4 = 1 \tag{3.15}$$

Konvergerer ikke, da $\lim_{j\to\infty} S_j = \varnothing$

3.3 Absolut konvergens

En række er absolut konvergent hvis

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < \infty \tag{3.16}$$

For $S = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ er $\sum_{n=0}^{\infty} |(-1)^n| = \infty$, da der summeres en uendelig mængde af 1.

Hvis $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ er konvergent i z_0, vil rækken være absolut konvergent for alle $|z| < |z_0|$. ← Det virker ret vigtigt!

Kort bevis:

$$\sum |a_n z^n| = \sum |a_n||z|^n = \sum |a_n| \frac{|z_0|^n}{|z_0|^n} |z|^n = \sum |a_n||z_0|^n \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \tag{3.17}$$

hvis $\sum a_n z_0^n$ konvergerer opfylder alle led $|a_n z_0|^n$. Dvs at der findes $M > 0$ hvor $|a_n z_0^n|$, og

$$\sum |a_n||z_0|^n \frac{|z|^n}{|z_0|^n} < \sum M |\frac{z}{z_0}|^n = M \sum |\frac{z}{z_0}|^n = M \sum \rho^n, \quad \rho = |\frac{z}{z_0}| < 1 \tag{3.18}$$

$$M \sum \rho^n = \frac{M}{1-\rho} < \infty \tag{3.19}$$

3.4 Kvotientkriteriet

Række $\sum c_n$. Hvis $\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} < 1$ så er rækken konvergent.

$c_n = a_n z^n$, $\lim_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = \rho < 1$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n z^n|^{1/\infty} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/z} |z| = \rho < 1 \tag{3.20}$$

Rækken er konvergent, så længe

$$|z| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} \tag{3.21}$$

hvor højreside kaldes konvergentradius R.