

Noter til LinAlgNat på KU (Lineær Algebra i Naturvidenskab)

Nikolai Plambech Nielsen, LPK331

Version 1.0

2. april 2016

Indhold

1	Introduktion, lineære afbildninger og matricer	3
1.1	Talrum (\mathbb{R} & \mathbb{C})	3
1.2	Afbildninger	3
1.3	Vektorer	4
1.3.1	Regneregler	4
1.3.2	Krydsprodukt	4
1.4	Matricer	5
1.5	Lineære afbildninger	6
2	Matrixalgebra og lineære ligningssystemer	8
2.1	Regneregler	9
2.2	Invers, transponeret og adjungeret matrix	10
2.3	Række- og søjleoperationer	11
2.4	Operationsmatricer	11
2.5	Trappematricer	12
2.6	Regulære matricer og matrixinversion	12
2.7	Lineære ligningssystemer	14
2.7.1	Opskrift på løsning af lineære ligningssystemer	14
2.7.2	Løsning med determinanter (Cramers formler)	16
3	Determinanter	17
3.1	Determinanter for 2x2 og 3x3 matricer	17
3.2	Determinant af vilkårlig matrix	17
3.2.1	Række/søjle-operationer	17
3.2.2	Udvikling af determinant	18
3.2.3	Opskrift på beregning determinant	18
3.3	Egenskaber ved determinanter	18
3.4	Invers matrix og determinant	18
3.5	Determinant af en endomorfi	19
4	Vektorrum	20
4.1	Definition	20
4.2	Lineære afbildninger og isomorfi	20
4.3	Endeligdimensionalitet, basis, underrum, span, kerne	20
4.4	Lineær (u)afhængighed	22
4.5	Udtyndings-/udvidelsesalgoritmen	22
4.6	Rang og dimensionssætningen	23
5	Koordinattransformationer	24
5.1	Lineære afbildninger og matricer	24
5.1.1	den generelle søjleregul	24
5.1.2	Opskrift for at finde koordinattransformationsmatricer:	24
5.1.3	Opskrift på at finde $\mathcal{B}[f]_{\mathcal{A}}$ for $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$:	24

6	Diagonalisering af matricer	25
6.1	Diagonaliserbare matricer, egenverdier/vektorer	25
6.2	Opskrift på at finde egenvektorer og egenverdier	26
6.3	Opskrift på diagonalisering af en kvadratisk matrix	26
6.4	Potensopløftning af matricer	27
6.5	Diagonalisering af reelle symmetriske matricer	27
7	Skalarprodukt og ortonormalbaser	27
7.1	Gram-Schmidt ortogonalisering	28
7.2	Ortogonale matricer	29
7.3	Ortogonalkomplement og ortogonalprojektion	29
7.4	Kvadratiske former	29

1 Introduktion, lineære afbildninger og matricer

1.1 Talrum (\mathbb{R} & \mathbb{C})

Disse noter omhandler lineær algebra, og derfor også n -dimensionale rum. Mængden \mathbb{R} er de reelle tal, mens \mathbb{C} er de komplekse tal. I denne bog, og dermed også disse noter, defineres mængden \mathbb{F} til enten at være de komplekse tal \mathbb{C} eller \mathbb{R} . Mængden \mathbb{F} bruges da i definitioner og sætninger, for at specificere, at det er lige meget, hvilket af de to rum, man arbejder med.

1.2 Afbildninger

Ved en **afbildning** af en mængde X , ind i en mængde Y (eller en **funktion** fra X til Y) forstås en forskrift, hvorved der til hvert element $x \in X$ knyttes et element $y \in Y$. X og Y kan altså være enhver mængde, eksempelvis kendes funktioner af én variabel, hvor $X = Y = \mathbb{R}$, hvis funktionen er ubegrænset og defineret i hele \mathbb{R} . Mængden X kaldes for **definitionsområdet**, mens Y kaldes for **dispositionsområdet**.

Normalt betegnes en afbildning (som en funktion) ved ét bogstav. Notationen er:

$$f: X \rightarrow Y$$

Elementet tilsvarende x kaldes $f(x)$ og kaldes **billedet** af x ved f eller den tilhørende **funktionsværdi**. At $f(x)$ svarer til x skrives som

$$x \rightarrow f(x)$$

Der kan også tages et billede af en hel delmængde af X . Eksempelvis udgør billederne for alle $x \in A \subseteq X$ en delmængde af Y , der kaldes billedet af A ved f , og betegnes $f(A)$. Dette skrives:

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Billedet af *hele* mængden X (kaldet $f(X)$) kaldes for **billedmængden** eller **værdimængden** for f . Dette kendes også fra funktioner for én variabel, hvor værdimængden er mængden af alle y -værdier, mens dispositionsområdet (som ikke altid er den samme), for det meste er hele \mathbb{R} . Altså gælder:

$$f(X) \subseteq Y$$

En afbildning $f: X \rightarrow Y$ kaldes **surjektiv** eller en afbildning af X **på** Y , hvis $f(X) = Y$, altså at værdimængden er lig hele dispositionsområdet. Afbildningen kaldes **injektiv**, hvis der for vilkårlige valg af x -værdier er forskellige funktionsværdier, altså at $f(x_1) = f(x_2)$ kun hvis $x_1 = x_2$. Til sidst kaldes en afbildning **bijektiv**, hvis denne både er surjektiv og injektiv, og hvis der altså til ethvert billed $y \in Y$ findes ét og kun ét $x \in X$.

Disse egenskaber kan også beskrives, hvis der for en afbildning $f: X \rightarrow Y$ er givet et $x \in X$ og $y \in Y$, og ligningen $f(x) = y$ betragtes. Da gælder det:

1. Ligningen har *mindst* en løsning for hvert y , hvis f er surjektiv
2. Ligningen har *højst* en løsning for hvert y , hvis f er injektiv
3. Ligningen har *kun* en løsning for hvert y , hvis f er bijektiv

Til bijektive afbildninger $f: X \rightarrow Y$ hører den **omvendte** eller **inverse** afbildning $f^{-1}: Y \rightarrow X$. Denne afbildning er også bijektiv, og der hører et $x \in X$ til ethvert billed af $y \in Y$: $f^{-1}(y) = x$. Yderligere gælder $(f^{-1})^{-1} = f$.

Sammensatte afbildninger er som følger: lad X, Y, Z være mængder og lad $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow Z$ være afbildninger. Deres sammensatte afbildning $g \circ f: X \rightarrow Z$ knytter et element $g(f(x)) \in Z$ til hvert element $x \in X$. For sammensatte afbildninger gælder den associative regel: Lad X, Y, Z, W være mængder, og lad $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$. Da gælder:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

Yderligere gælder det, at hvis både f og g er enten surjektive, injektive eller bijektive, så er den sammensatte afbildning $g \circ f$ også henholdsvis surjektiv, injektiv eller bijektiv. Og for bijektive, sammensatte afbildninger gælder at $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Identiske afbildninger er afbildninger $\text{id}_X: X \rightarrow X$ af en mængde X ind i sig selv, hvor billedet af $x \in X$ er lig $x \in X$. Altså $\text{id}_X(x) = x$. For enhver bijektiv afbildning $f: X \rightarrow Y$ gælder at $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$ og $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$.

Hvis $f: X \rightarrow Y$ og $g: Y \rightarrow X$ er afbildninger så $g \circ f = \text{id}_X$ og $f \circ g = \text{id}_Y$, da er begge afbildninger bijektive, og $f^{-1} = g$, $g^{-1} = f$.

1.3 Vektorer

Vektorer er en konstruktion i \mathbb{F}^n , der har en størrelse og retning i n dimensioner. Eksempelvis kendes vektorer i planen som \mathbb{R}^2 . Disse skrives som

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{a} = \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Hvor den sidste notation bruges i denne bog. Her noteres en vektor altså med en enkelt understregning, mens de enkelte værdier x_1 og x_2 viser hvilken dimension/række de tilhører. Dette muliggør nem udvidelse til mere end 3 dimensioner. Generelt er vektorformen for en vektor \underline{x} i \mathbb{F}^n

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

De mest almindelige operationer er skalering af vektorer, eller multiplicering med en skalar, og addition/subtraktion. Skalering er at gange en vektor \underline{x} i \mathbb{F}^n med en skalar (et tal i \mathbb{F}). Negative vektorer defineres som en vektor ganget med -1:

$$a \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix}, \quad -\underline{x} = (-1)\underline{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

Addition og subtraktion defineres som:

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \quad \underline{x} - \underline{y} = \underline{x} + (-\underline{y}) = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix}$$

Et udtryk på formen $a\underline{x} + b\underline{y}$ kaldes en **linearkombination** af \underline{x} og \underline{y} . Til sidst, inden regnereglerne for vektorer opskrives, defineres nulvektoren \underline{o} i \mathbb{F}^n som:

$$\underline{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(altså med bogstavet "o")

1.3.1 Regneregler

Regnereglerne for vektorer er således:

V1 $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$	V5 $a(\underline{x} + \underline{y}) = a\underline{x} + a\underline{y}$
V2 $\underline{x} + \underline{o} = \underline{x}$	V6 $(a + b)\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{x}$
V3 $\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{o}$	V7 $(ab)\underline{x} = a(b\underline{x})$
V4 $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$	V8 $1\underline{x} = \underline{x}$

1.3.2 Krydsprodukt

Krydsproduktet af to vektorer i \mathbb{R}^3 er givet ved:

$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

1.4 Matricer

En **matrix** (en matrix, matricen, flere matricer, alle matricerne) er en tabel med talværdier, og har formen:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Dette er den **generelle** matrix, hver værdi a_{ij} kaldes en **indgang**, og ligger i \mathbb{F} . Hvis $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ kaldes matricen reel, og hvis $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ kaldes matricen kompleks. Den i 'te række henholdsvis j 'te søjle, i $\underline{\underline{A}}$ betegnes $\underline{\underline{A}}[i, *]$ henholdsvis $\underline{\underline{A}}[* , j]$, og er

$$(a_{i1} \quad \cdots \quad a_{in}) \quad \text{henholdsvis} \quad \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

Hvis disse er en adskilt matrix, kaldes de for henholdsvis en **rækkematrix** og en **søjlematrix**. Indgangen a_{ij} , som står i den i 'te række og j 'te søjle, betegnes da $\underline{\underline{A}}[i, j]$. Matricen $\underline{\underline{A}}$ har m rækker og n søjler (men ikke nødvendigvis flere søjler end rækker). Matricen består da af $m \cdot n$ indgange fra \mathbb{F} , og kaldes for en $m \times n$ -matrix.

Matricen $\underline{\underline{A}}$ kan også opfattes som bestående af n m -dimensionelle vektorer, der skrives:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Disse vektorer kaldes for matricens **søjlevektorer**.

Søjlematricer og vektorer bruges i forskellige sammenhænge, men der er ingen stor forskel på dem, ud over sammenhæng og notation.

En matrix hvor alle elementer er lig 0 kaldes en **nulmatrix** og betegnes $\underline{\underline{0}}$ eller $\underline{\underline{0}}_{m,n}$ (altså med tallet "0")

Matricen $\underline{\underline{A}}$ kan også opskrives på en kortere måde, end ved en tabel:

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = (a_{ij})_{m,n},$$

Og disse skrivemåder er altså ækvivalente med opskrivning ved en tabel.

En $n \times n$ -matrix, der altså har lige mange rækker og søjler, kaldes en **kvadratisk matrix**, og alle indgange a_{ij} hvor $i = j$ siges at stå i diagonalen, mens alle andre indgange (hvor $i \neq j$) siges at stå uden for diagonalen. En kvadratisk matrix, hvor alle indgange uden for diagonalen er lig 0, kaldes for en **diagonalmatrix**.

En kvadratisk matrix hvor $a_{ij} = 0$ for alle i og j med $i < j$ kaldes en **nedre trekantsmatrix**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ligeledes kaldes en kvadratisk matrix, hvor alle indgange under diagonalen er lig 0 ($a_{ij} = 0$ for alle $i > j$), for en **øvre trekantsmatrix**:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

De forskellige indgange med a 'er kan sagtens være 0. Kravet er kun, at alle indgange over (eller under) diagonalen er lig 0.

Fra en $m \times n$ -matrix $\underline{\underline{A}}$ og en $m \times p$ matrix $\underline{\underline{B}}$ kan der dannes en $m \times (n+p)$ -matrix $\underline{\underline{C}}$ ved at opskrive $\underline{\underline{B}}$'s søjler efter $\underline{\underline{A}}$'s søjler. Matricen $\underline{\underline{C}}$ kaldes for en **blokmatrix** og skrives:

$$\underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}})$$

Det samme kan gøres for flere matricer. For eksempel kan $\underline{\underline{A}}$ dannes ud fra sine søjlematricer:

$$\underline{\underline{A}} = (\underline{\underline{A}}_1 \quad \cdots \quad \underline{\underline{A}}_n)$$

Det samme kan gøres med søjlevektorer.

Enhedsmatricer og elementære matricer

En diagonalmatrix hvor alle indgange på diagonalen er lig 1 kaldes for en **enhedsmatrix**. Disse betegnes enten \underline{E} eller $\underline{E}_{n,n}$, hvis antallet af rækker/søjler ønskes specificeret. Hvis der ikke specificeres antal rækker/søjler følger enhedsmatricens størrelse af kontekst.

Enhedsmatricen kan også ses opbygget af **standard enhedssøjlematricer** eller **standard enhedsvektorerne**:

$$e_1 = \underline{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \underline{E}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

En matrix hvor alle indgange (eller elementer) på en plads (j, k) , der er lig 1, kaldes for en **elementær-matrix**. Denne ser sådan ud:

$$\underline{I}_{j,k} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

hvor 1 altså er i række j og søjle k . Elementærmatricens størrelse defineres normalt ikke, andet end med kontekst (hvis der arbejdes med en $m \times n$ -matrix \underline{A} , så har dens elementærmatricer også størrelsen $m \times n$).

En vilkårlig $m \times n$ -matrix \underline{A} kan opbygges som en sum af skalerede elementærmatricer: (se regnereglerne for matricer, i afsnittet Matrixalgebra)

$$\underline{A} = \sum_{j,k} a_{jk} \underline{I}_{j,k}$$

Og for to elementærmatricer, der kan multipliceres (igen, se regneregler for matricer) gælder følgende:

$$\underline{I}_{j,k} \underline{I}_{m,n} = \delta_{km} \underline{I}_{j,n}, \text{ hvor } \delta_{km} = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor δ_{km} kaldes Kroneckers delta. Eksempelvis multipliceres 5×5 matricen $\underline{I}_{2,4}$ (altså 1 i anden række, fjerde søjle) med sig selv, fås følgende:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{2,4} \underline{I}_{2,4} &\Rightarrow j = m = 2, \quad k = n = 4 \Rightarrow k \neq m \Rightarrow \delta_{km} = 0 \\ &= 0 \underline{I}_{2,4} = \underline{0} \end{aligned}$$

Men hvis matricerne $\underline{I}_{2,4}$ og $\underline{I}_{4,4}$ multipliceres fås:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{2,4} \underline{I}_{4,4} &\Rightarrow j = 2, \quad k = m = n = 4 \Rightarrow k = m \Rightarrow \delta_{km} = 1 \\ &= 1 \underline{I}_{2,4} = \underline{I}_{2,4} \end{aligned}$$

Samme resultat kan også opnås ved almindelig matrixmultiplikation.

1.5 Lineære afbildninger

Vi lader en $m \times n$ matrix \underline{A} , med indgange i \mathbb{F} , der har formen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

knyttes til en afbildning $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, ved fastsættelsen af

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

En afbildning $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, der på denne måde har en matrix knyttet til sig, kaldes **lineær**. Hvis $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ kaldes den reelt lineær, og hvis $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ kaldes den komplekts lineær.

Linearitetsbetingelserne

Lad $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ være en lineær afbildning. Da gælder

L1: $f(a\underline{x}) = af(\underline{x})$ for alle $\underline{x} \in \mathbb{F}^n$, $a \in \mathbb{F}$

L2: $f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y})$ for alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{F}^n$

Hvis omvendt $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ er en afbildning så L1 og L2 er opfyldt, da er f en lineær afbildning.

Søjlereglen

Den j 'te søjlevektor i \underline{A} er lig billedet ved f af den j 'te standard enhedsvektor.

Altså at $f(\underline{e}_j) = \underline{A}_j$. Dette betyder, at hvis man kender resultatet af en afbildning kan man opskrive matricen for denne, som en sum af skalerede vektorer

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Yderligere gælder der for en lineær afbildning $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ knyttet til matricen $\underline{A} = (a_{ij})_{m,n}$ at

$$a_{ij} = f(\underline{e}_j) \cdot \underline{e}_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (1.4)$$

Hvis vi definerer $\underline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, kan den lineære afbildning udtrykkes ved matrixmultiplikation:

$$f(\underline{X}) = \underline{A} \underline{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (1.5)$$

For **sammensatte lineære afbildninger** gælder:

Hvis $f: \mathbb{F}^p \rightarrow \mathbb{F}^m$ og $g: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^p$ er lineære afbildninger, så er den sammensatte afbildning $h = f \circ g: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ også lineær. Hvis f svarer til $m \times p$ -matricen \underline{A} og g svarer til $p \times n$ -matricen \underline{B} , da svarer $h = f \circ g$ til $m \times n$ -matricen $\underline{C} = \underline{A} \underline{B}$.

2 Matrixalgebra og lineære ligningssystemer

Regneoperationer

Her defineres 3 regneoperationer for matricer: multiplikation med en skalar (skalering), addition af matricer og multiplikation af matricer.

For matricen

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \quad (2.1)$$

defineres **multiplikation med en skalar** som

$$\lambda \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = (\lambda a_{ij}). \quad (2.2)$$

Altså hvert element skaleres med faktoren λ .

For to $m \times n$ matricer $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ defineres **addition af matricer**:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij} + b_{ij}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Altså lægges to matricer sammen, ved at lægge deres individuelle indgange sammen parvis.

Matrixmultiplikation defineres som:

For en $m \times p$ -matrix $\underline{\underline{A}}$ og en $p \times n$ -matrix $\underline{\underline{B}}$, der har formene

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix},$$

defineres $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$, der er en $m \times n$ -matrix på formen

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

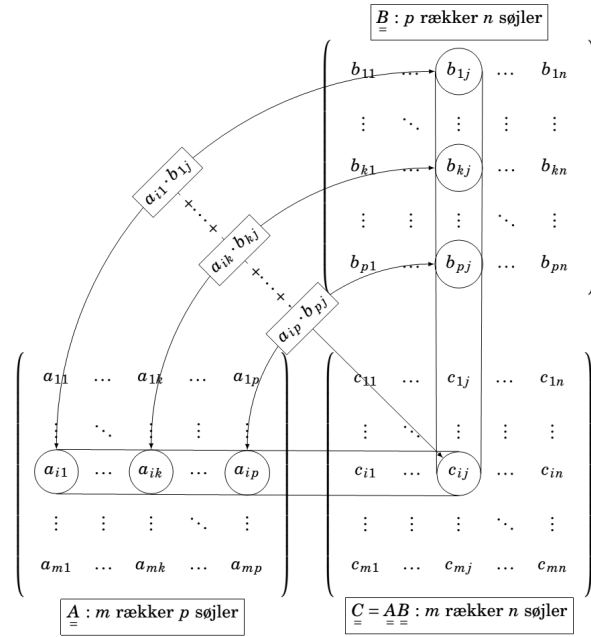
for hvilken

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^p a_{ik}b_{kj}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n. \quad (2.4)$$

Hvis indgangene i $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er reelle, så er indgangen $c_{ij} = \underline{\underline{A}}[i, *] \cdot \underline{\underline{B}}[*, j]$. Altså skalarproduktet mellem den i 'te række i $\underline{\underline{A}}$ og den j 'te søjle i $\underline{\underline{B}}$.

Den første matrix skal altså have lige så mange *rækker* som den anden matrix har *søjler*, førend matrixmultiplikation er defineret. Det er altså **ikke lige meget, hvilket rækkefølge faktorerne står!**. $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ gælder altså almindeligvis **ikke!**

Herunder er en illustration af, hvordan matrixmultiplikation kan visualiseres (taget fra bogen Lineær Algebra, som disse noter er udarbejdet efter.)



Figur 1: Matrixmultiplikation

2.1 Regneregler

For matrixregning gælder følgende regneregler:

M1	$(\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C} = \underline{A} + (\underline{B} + \underline{C})$	M7	$(\lambda\mu)\underline{A} = \lambda(\mu\underline{A})$
M2	$\underline{A} + \underline{0} = \underline{A}$	M8	$1\underline{A} = \underline{A}$
M3	$\underline{A} + (-\underline{A}) = \underline{0}$	M9	$\lambda(\underline{A}\underline{B}) = (\lambda\underline{A})\underline{B} = \underline{A}(\lambda\underline{B})$
M4	$\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$	M10	$\underline{A}(\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A}\underline{B} + \underline{A}\underline{C}$
M5	$\lambda(\underline{A} + \underline{B}) = \lambda\underline{A} + \lambda\underline{B}$	M11	$(\underline{A} + \underline{B})\underline{C} = \underline{A}\underline{C} + \underline{B}\underline{C}$
M6	$(\lambda + \mu)\underline{A} = \lambda\underline{A} + \mu\underline{A}$	M12	$(\underline{A}\underline{B})\underline{C} = \underline{A}(\underline{B}\underline{C})$

For at operationerne i M1-M12 skal være definerede, skal de individuelle matricer have passende størrelse (samme størrelse ved addition, samme antal rækker for den ene, som søjler for den anden).

Potenser defineres som følger:

- $\underline{A}^k = \underline{A} \dots \underline{A}$ (k faktorer).
- $\underline{A}^{-k} = (\underline{A}^{-1})^k$
- $\underline{A}^1 = \underline{A}$, $\underline{A}^0 = \underline{E}$.
- $\underline{A}^{k_1} \underline{A}^{k_2} = \underline{A}^{k_1+k_2}$

For diagonalmatricer gælder:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}, \quad \underline{A}\underline{B} = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix} = \underline{B}\underline{A}$$

$$\underline{A}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix}, \quad \underline{A}^{-k} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}^{-k} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^k} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n^k} \end{pmatrix}$$

2.2 Invers, transponeret og adjungeret matrix

Invers matrix

Definitionen på en **regulær**, eller **invertibel** matrix er som følger:

En $n \times n$ -matrix \underline{A} kaldes regulær eller invertibel, hvis den tilhørende lineære afbildning $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ er bijektiv. Da kaldes den til f^{-1} hørende $n \times n$ -matrix for den inverse til \underline{A} , og betegnes \underline{A}^{-1} .

For **omvendte** eller **inverse** afbildninger gælder:

1. Hvis $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ er bijektiv og lineær, er $f^{-1}: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ også bijektiv og lineær.
2. Enhedsmatricen \underline{E} er regulær og $\underline{E}^{-1} = \underline{E}$
3. Hvis \underline{A} er regulær, er \underline{A}^{-1} regulær, og $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$
4. Hvis \underline{A} er regulær, er $\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{A}\underline{A}^{-1} = \underline{E}$
5. Hvis \underline{A} og \underline{B} er regulære, da er $\underline{A}\underline{B}$ regulær, og $(\underline{A}\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$
6. Hvis \underline{A} og \underline{B} er $n \times n$ -matricer, så $\underline{A}\underline{B} = \underline{E}$. Da er \underline{A} og \underline{B} regulære, og $\underline{A}^{-1} = \underline{B}$, $\underline{B}^{-1} = \underline{A}$

Transponeret og adjungeret matrix

For en $m \times n$ -matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

defineres den **transponerede** matrix \underline{A}^t , som den $n \times m$ matrix

$$\underline{A}^t = \begin{pmatrix} a'_{11} & \cdots & a'_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m1} & \cdots & a'_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Hvor

$$a'_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Den transponerede matrix fås altså ved at skrive den første *række* i \underline{A} , som den første *søjle* i \underline{A}^t , den anden række, som den anden søjle, osv. Altså $\underline{A}^t[i, j] = \underline{A}[j, i]$.

Den **adjungerede** matrix \underline{A}^* defineres som den konjugerede, transponerede matrix:

$$\underline{A}^* = \overline{\underline{A}^t}$$

Hvis matricen \underline{A} er reel, er $\overline{\underline{A}} = \underline{A}$, og $\underline{A}^* = \underline{A}^t$.

For vilkårlige $m \times p$ -matricer \underline{A} og $p \times n$ -matricer \underline{g} gælder det:

- $(\underline{A}^t)^t = \underline{A}$, $(\underline{A}^*)^* = \underline{A}$
- $(\underline{A}\underline{B})^t = \underline{B}^t \underline{A}^t$, $(\underline{A}\underline{B})^* = \underline{B}^* \underline{A}^*$
- For regulære matricer er $(\underline{A}^t)^{-1} = (\underline{A}^{-1})^t$, $(\underline{A}^*)^{-1} = (\underline{A}^{-1})^*$. Alle disse matricer er regulære.

For lineære afbildninger $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, der har den tilhørende $m \times n$ -matrix \underline{A} , defineres den **transponerede** lineære afbildning $f^t: \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$, der har den transponerede matrix \underline{A}^t som tilhørende matrix. Den **adjungerede** lineære afbildning $f^*: \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$ har adjungerede matrix \underline{A}^* som tilhørende matrix.

Om adjungerede lineære afbildninger gælder:

- $f(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot f^*(\underline{y})$
- og hvis $f(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot g(\underline{y})$ er $g = f^*$

En matrix \underline{A} kaldes **symmetrisk**, hvis $\underline{A}^t = \underline{A}$. Dette betyder også, at den er $n \times n$ og at $a_{ij} = a_{ji}$ for alle $i, j \leq n$. En lineær afbildning f kaldes **symmetrisk**, hvis den tilhørende matrix er symmetrisk. Dette betyder at $f^t = f$.

En matrix \underline{A} kaldes **hermitisk**, hvis $\underline{A}^* = \underline{A}$. Dette betyder igen, at det er en $n \times n$ -matrix. Her er dog $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ for alle $1 \leq i, j \leq n$. En lineær afbildning f , hvis tilhørende matrix er hermitisk, kaldes **selvadjungeret**. Dette betyder også $f^* = f$.

For en selvadjungeret lineær afbildning $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ gælder det at

$$f(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot f(\underline{y})$$

2.3 Række- og søjleoperationer

Tre typer af **rækkeoperationer**

- Type M: Multiplikation af en række med et tal $c \neq 0$
- Type B: Ombytning af to rækker
- Type S: Addition af et multiplum af en række til en anden række (læg én række, ganget med et tal c , sammen med en anden række).

Der er også omvendte rækkeoperationer, der "ophæver" de førnævnte rækkeoperationer:

- Den omvendte type M: At gange en række med tallet $1/c$
- Den omvendte type B: Bytte om på to rækker igen
- Den omvendte type S: læg den samme række fra før, dog ganget med $-c$, til den samme anden række

Der findes også disse tilsvarende tre typer (plus deres omvendte) søjleoperationer.

En søjleoperation kan også udføres ved at transponere matricen, udføre den tilsvarende rækkeoperation, og transponere den resulterende matrice tilbage. Med andre ord, svarer en søjleoperation til en transponeret rækkeoperation. Dette bliver især tydeligt når der ses på operationsmatricer.

2.4 Operationsmatricer

En **operationsmatrice** er matricen der fås ved at udføre en rækkeoperation på enhedsmatricen. Der er en operationsmatrix til hver af de tre typer rækkeoperationer:

- Type M: Matricerne $\underline{M}_i(c)$ ($c \neq 0$), der forekommer ved at gange den i 'te række i enhedsmatricen med c . Rækkeoperationerne betegnes $M_i(c) = \underline{E} + (c-1)\underline{I}_{i,i}$
- Type B: Matricerne \underline{B}_{ij} ($i \neq j$), der fremkommer ved at ombytte den i 'te og j 'te række i enhedsmatricen. Rækkeoperationerne betegnes $B_{ij} = \underline{E} - \underline{I}_{i,i} - \underline{I}_{j,j} + \underline{I}_{i,j} + \underline{I}_{j,i}$
- Type S: Matricerne $\underline{S}_{ij}(c)$ ($i \neq j$), der fremkommer ved at gange den j 'te række med c og dernæst lægge den til den i 'te række. Rækkeoperationerne betegnes $S_{ij}(c) = \underline{E} + c\underline{I}_{i,j}$.

Disse operationsmatricer bruges ved at multiplicere operationsmatricen \underline{P} (som er en af typerne M, S eller B) med matricen \underline{A} . Dette udtrykkes også ved følgende sætning:

Lad \underline{A} være en $m \times n$ -matrix. Hvis \underline{A} ved rækkeoperationen P (som er en af de tre førnævnte typer) omdannes til $\underline{B} = P(\underline{A})$, da er $\underline{B} = \underline{P}\underline{A}$, hvor \underline{P} er den til P svarende operationsmatrix (som er $m \times m$).

Ligeledes kan dette gøres flere gange:

Lad \underline{A} være en $m \times n$ -matrix. Hvis \underline{A} ved successive rækkeoperationer P_1, \dots, P_k omdannes til \underline{B} , da er $\underline{B} = \underline{P}_k \cdots \underline{P}_1 \underline{A}$, hvor $\underline{P}_k, \dots, \underline{P}_1$ er de tilsvarende operationsmatricer (alle $m \times m$).

De omvendte rækkeoperationer fås ved at invertere operationsmatricerne, og er givet ved:

- $\underline{M}_i(c)^{-1} = \underline{M}_i(\frac{1}{c})$
- $\underline{B}_{ij}^{-1} = \underline{B}_{ij}$
- $\underline{S}_{ij}(c)^{-1} = \underline{S}_{ij}(-c)$

Operationsmatricerne for søjleoperationer er de transponerede operationsmatricer for rækkeoperationerne (ligesom sidste kapitel). Hvis $M_i(c)^s$ betegner søjleoperationen af type M, og $\underline{\underline{M}}_i(c)^s$ betegner den tilhørende matrix (og ligeledes for de to andre typer), da er operationsmatricerne lig:

- Type M: $\underline{\underline{M}}_i(c)^s = \underline{\underline{M}}_i(c)^t = \underline{\underline{M}}_i(c)$
- Type B: $\underline{\underline{B}}_{ij}^s = \underline{\underline{B}}_{ij}^t = \underline{\underline{B}}_{ij}$
- Type S: $\underline{\underline{S}}_{ij}(c)^s = \underline{\underline{S}}_{ij}(c)^t = \underline{\underline{S}}_{ji}(c)$

For søjleoperationer gælder det samme som ved rækkeoperationer:

Lad $\underline{\underline{A}}$ være en $m \times n$ -matrix. Hvis $\underline{\underline{A}}$ ved successive søjleoperationer Q_1, \dots, Q_k omdannes til $\underline{\underline{B}}$, da er $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{Q}}_k \cdots \underline{\underline{Q}}_1 \underline{\underline{A}}$, hvor $\underline{\underline{Q}}_k, \dots, \underline{\underline{Q}}_1$ er de tilsvarende operationsmatricer (alle $n \times n$).

2.5 Trappematricer

Lad $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}$ være en $m \times n$ -matrix.

Matricen $\underline{\underline{A}}$ kaldes en **trin-1** matrix, hvis den har formen:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a & \star & \dots & \star \\ 0 & & 0 & 0 & \star & & \star \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \star & \dots & \star \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

hvor $a \neq 0$ og \star betyder, at disse indgange kan have vilkårlige værdier. Tallet a kaldes matrixens første trin. Positionen (i, j) for de første trin i en trin-1 matrix er $(1, j_1)$ for $1 \leq j_1 \leq n$. Matricen $\underline{\underline{A}}_1$, kaldet **restmatricen for trin-1 matricen $\underline{\underline{A}}$** , fremkommer ved at slette den første række af $\underline{\underline{A}}$. Hvis restmatricen $\underline{\underline{A}}_1$ også er en trin-1 matrix, kaldes $\underline{\underline{A}}$ for en **trin-2** matrix. I givet fald kaldes *første trin* i $\underline{\underline{A}}_1$ for *andet trin* i $\underline{\underline{A}}$. Positionen af andet trin i en trin-2 matrix er $(2, j_2)$, $j_1 < j_2 \leq n$. Restmatricen $\underline{\underline{A}}_2$ for trin-1 matricen $\underline{\underline{A}}_1$ kaldes også restmatricen for trin-2 matricen $\underline{\underline{A}}$. Ligeledes defineres trin-3, trin-4 og så videre.

Matricen $\underline{\underline{A}}$ kaldes en **trappematrix**, hvis den er en trin- d matrix for et $d = 1, 2, 3, \dots$, og hvis dens restmatrix enten er *tom* eller en nulmatrix.

Hvis $\underline{\underline{A}}$ er en trappematrix kaldes tallene $j_1 < \dots < j_d$ for **trinpositionerne** for $\underline{\underline{A}}$.

Nulmatricen $\underline{\underline{0}}$ defineres til at være en trappematrix.

En **reduceret trappematrix** er en trappematrix hvor alle trinnene har værdien 1, og hvor der både er 0 *over* og *under* trinnet (til forskel fra almindelige, hvor der kun er 0 *under* trinnet)

Antallet af trin d i en $m \times n$ -trappematrix er altid mindre end, eller lig antallet af søjler og rækker. I tilfældet hvor $m = d$ er den sidste række ikke en nulrække. I tilfældet $d = n$ er $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_d = n = d$

Enhver $m \times n$ -matrix kan ved hjælp af rækkeoperationer omdannes til en trappematrix, og videre til en reduceret trappematrix.

2.6 Regulære matricer og matrixinversion

Definitionen på en regulær $n \times n$ -matrix $\underline{\underline{A}}$ er at ligningen $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{Y}}$ har netop én løsning $\underline{\underline{X}}$ for hvert valg af $\underline{\underline{Y}}$. Dette er ækvivalent med at den tilhørende lineære afbildning $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ er bijektiv (eller injektiv/surjektiv, da disse er ækvivalente).

For regulære $n \times n$ -matricer gælder også følgende:

- Hvis der foretages en rækkeoperation på en regulær matrix $\underline{\underline{A}}$, er den nye matrix $\underline{\underline{A}}'$ også regulær.
- En $n \times n$ -trappematrix er regulær hvis den har n trin.
- En matrix er regulær, hvis den kan overføres i enhedsmatricen ved rækkeoperationer
- Hvis $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ er $n \times n$ -matricer, og $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}$ er regulær, da er både $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ regulære.
- Hvis $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{E}}$ da er både $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ regulære og $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{B}}$ samt $\underline{\underline{B}}^{-1} = \underline{\underline{A}}$

Og der er følgende opskrift på matrixinversion af en $n \times n$ -matrix $\underline{\underline{A}}$

1. Opskriv totalmatricen $(\underline{\underline{A}} | \underline{\underline{E}})$

2. Omskriv til en reduceret trappeform $(\underline{\underline{A}}'|\underline{\underline{B}}')$ ved rækkeoperationer.
3. Hvis $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{E}}$ er $\underline{\underline{A}}$ regulær og $\underline{\underline{B}}' = \underline{\underline{A}}^{-1}$.
4. Hvis $\underline{\underline{A}}' \neq \underline{\underline{E}}$ er $\underline{\underline{A}}$ ikke regulær.

2.7 Lineære ligningssystemer

Et lineært ligningssystem med m ligninger og n ubekendte er en række linjer givet på formen:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

Et sådan ligningssystem kan også beskrives ved matricer, hvor matricen $\underline{\underline{A}}$ kaldes for **koefficientmatricen**, og søjlematricen $\underline{\underline{B}}$ kaldes for **konstantsøjlen**:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

Blokmatricen $\underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}})$ kaldes for ligningssystemets **totalmatrix**, og har formen:

$$\underline{\underline{C}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

der er en $m \times (n+1)$ -matrix, og hvor den lodrette linje er tilføjet for overskuelighed. Sættes $\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ kan ligningssystemet skrives som

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}} \quad (2.6)$$

Løsning af lineære ligningssystemer

For at løse et lineært ligningssystem på matrixform, bruges Gauss-elimination, der består i at bruge rækkeoperationer for at omdanne totalmatricen til en trappematrix.

Matrix til trappematrix (Gauss-elimination)

For at omdanne en matrix til en trappematrix findes den første søjle, der ikke er en nulsøjle. Denne omdannes ved rækkeoperationer til at have nuller i denne søjle, ud over første position. Herved er en trin-1 matrix opnået. Restmatricen behandles nu på samme måde, så en trin-2 matrix opnås. Dette gentages for en trin-3 matrix og så videre, indtil der nås en trappematrix.

Nogle gange bruges Gauss-Jordan elimination, hvor trappematricen omdannes til en reduceret trappematrix:

Trappematrix til reduceret trappematrix (Gauss-Jordan elimination)

For at gå fra en trappematrix til en reduceret trappematrix arbejdes der nedefra og op: Det sidste trin multipliceres med $1/a$, så værdien af trinnet bliver 1. Herefter trækkes denne række fra de øvre rækker, så den sidste søjle bliver til en enhedssøjlematrix (altså at der er 0 over og under trinnet). Herefter gøres det samme for andet trin og den tilhørende søjle, og så fremdeles.

Selve løsningsmetoden kan opsummeres i følgende opskrift

2.7.1 Opskrift på løsning af lineære ligningssystemer

1. Opskriv blokmatricen $\underline{\underline{C}} = (\underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}})$
2. Omdan ved hjælp af rækkeoperationer $\underline{\underline{C}}$ til en trappematrix

$$\underline{\underline{C}}' = (\underline{\underline{A}}' \quad \underline{\underline{B}}')$$

3. Hvis der er trin i sidste søjle af $\underline{\underline{C'}}$ er der *ingen* løsning
4. Hvis der ikke er trin i sidste søjle, og antallet af trin i $\underline{\underline{C'}}$ er lig antallet af søjler i $\underline{\underline{A}}$, er der en entydig løsning, som findes ved substitution (hvis ikke der er foretaget Gauss-Jordan elimination)
5. Hvis der ikke er trin i sidste søjle, og antallet af trin i $\underline{\underline{C'}}$ er mindre en antallet af søjler i $\underline{\underline{A}}$ er der uendeligt mange løsninger. Disse findes ved at sætte de **frie variable** (de variable der *ikke* er i en trinposition) lig parametrene t_1, \dots, t_{n-d} , hvor d er antallet af trin. Dernæst udtrykkes variablerne x_{j1}, \dots, x_{jd} svarende til trinpositioner (kaldet ledende variable), ved parametrene t_1, \dots, t_{n-d} .

Sammenhængen mellem antallet af trin d i en $m \times n$ -koefficienttrappematrix $\underline{\underline{A'}}$ og antallet af søjler/rækker i samme er som følger:

1. hvis $m > d$ findes der en søjle $\underline{\underline{B}}$, så ligningssystemet $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ ingen løsning har.
2. hvis $n > d$ har ligningen $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}}$ en løsningsmængde givet ved en parameterfremstilling med $n - d$ parametre, og ligningen har altså uendeligt mange løsninger.
3. hvis $m = n = d$ har ligningssystemet $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ netop én løsning for hvert valg af $\underline{\underline{B}}$.

Og omvendt:

1. Hvis ligningssystemet $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ har mindst én løsning for hvert valg af $\underline{\underline{B}}$, da er $d = m$. (f er surjektiv)
2. Hvis ligningssystemet $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{0}}$ kun har én løsning (nemlig $\underline{\underline{0}}$), da er $d = n$ (f er injektiv)
3. Hvis ligningssystemet $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ har netop én løsning for hvert valg af $\underline{\underline{B}}$, da er $d = m = n$. (f er bijektiv)

For at bestemme in-/sur-/bijektivitet kan matricen omdannes til en trappematrix med d trin. Der er følgende sammenhæng mellem antal trin, rækker og søjler:

1. Hvis $d = n$ (#trin = #søjler), så er f injektiv
2. Hvis $d = m$ (#trin = #rækker), så er f surjektiv
3. Hvis $d = m = n$ (#trin = #rækker = #søjler), så er f bijektiv

Lineære ligningssystemer og lineære afbildninger

Et ligningssystem af typen $\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{B}}$ kan også beskrives ved lineære afbildninger. Hvis vi lader $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ være den lineære afbildning, der hører til $\underline{\underline{A}}$, sætter $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{X}}$, $\underline{\underline{b}} = \underline{\underline{B}}$, så bliver ligningssystemet

$$f(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{b}} \quad (2.7)$$

For lineære afbildninger gælder følgende om injektivitet:

- En lineær afbildning f er injektiv når ligningen $f(\underline{\underline{x}}) = \underline{\underline{0}}$ kun har løsningen $\underline{\underline{x}} = \underline{\underline{0}}$

Og følgende gælder om dimensionerne for en lineær afbildning $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$:

1. Hvis f er surjektiv er $m \leq n$
2. Hvis f er injektiv er $m \geq n$
3. Hvis f er bijektiv er $m = n$

Og hvis $m = n$ gælder følgende: for en lineær afbildning $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ er surjektiv, injektiv og bijektiv ækvivalente, og hvis en afbildning dermed er det ene, så er den også de andre.

2.7.2 Løsning med determinanter (Cramers formler)

For et regulært/bijektivt ligningssystem med n ligninger og n ubekendte fås følgende udtryk for de ubekendte, kaldet Cramers formler

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \overset{j}{\downarrow} b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(\underline{\underline{A}})}, j = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

Hvor den øverste determinant er matricen $\underline{\underline{A}}$, hvor den j 'te søjle er udskiftet med konstantsøjlen \underline{b} . Eksempelvis er x_3 til $n = 3$:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \quad (2.9)$$

3 Determinanter

En determinant er et tal, der knyttes til enhver kvadratisk matrix. Notationen er som følger. For en $n \times n$ -matrix $\underline{\underline{A}}$ er determinanten $\det(\underline{\underline{A}})$ skrevet som:

$$\det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| \quad (3.1)$$

Determinanten for en $n \times n$ -matrix har $n!$ led, hver med n faktorer.

3.1 Determinanter for 2x2 og 3x3 matricer

For en 2×2 -matrix $\underline{\underline{A}}$ er determinanten

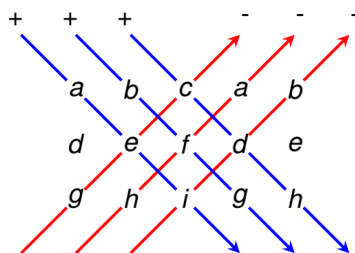
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det(\underline{\underline{A}}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Og for 3×3 -matricen $\underline{\underline{A}}$ er determinanten

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad \det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

$$|\underline{\underline{A}}| = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

Denne kan også findes ved hjælp af pilereglen, hvor værdierne skrives op, og de to første søjler skrives igen, denne gang efter den sidste søjle.



De tre første pile lægges til, og de tre sidste pile trækkes da fra.

3.2 Determinant af vilkårlig matrix

Definitionen på en determinant for en $n \times n$ matrix $\underline{\underline{A}}$ er

$$\det \underline{\underline{A}} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sign}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad (3.2)$$

Denne bruges i praksis ikke, da den bruger permutationer, som ikke er en del af pensum.

3.2.1 Række/søjle-operationer

For en $n \times n$ -matrix $\underline{\underline{A}}$, hvor matricen $\underline{\underline{B}}$ fremkommer ved en række- eller søjleoperation på $\underline{\underline{A}}$ gælder følgende:

- Type M (multiplikation med skalar c): $\det \underline{\underline{B}} = c \det \underline{\underline{A}}$
- Type B (ombytning af to rækker/søjler): $\det \underline{\underline{B}} = -\det \underline{\underline{A}}$
- Type S (addering af række/søjle, multipliceret med skalar c , til en anden række/søjle): $\det \underline{\underline{B}} = \det \underline{\underline{A}}$

3.2.2 Udvikling af determinant

Udviklingen af en determinant for matricen $\underline{\underline{A}}$ er givet ved

$$\begin{aligned}\det \underline{\underline{A}} &= a_{i1}A_{i1} + \dots + a_{in}A_{in} = (-1)^{i+1}a_{i1} \det \underline{\underline{A}}_{i1} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in} \det \underline{\underline{A}}_{in} \\ &= a_{1i}A_{1i} + \dots + a_{ni}A_{ni} = (-1)^{1+i}a_{1i} \det \underline{\underline{A}}_{1i} + \dots + (-1)^{n+i}a_{ni} \det \underline{\underline{A}}_{ni}\end{aligned}$$

Hvor $1 \leq i \leq n$ og hvor $\underline{\underline{A}}_{ij}$ er den $n-1 \times n-1$ -matrix der fremkommer ved at slette den i -te række og den j -te søjle. A_{ij} kaldes for *komplementet* til a_{ij} og er givet ved $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \underline{\underline{A}}_{ij}$.

Denne metode kaldes for udviklingen af den i -te række (første linje) eller i -te søjle (anden linje)

3.2.3 Opskrift på beregning determinant

For at udregne determinanten $\det \underline{\underline{A}}$ bruger man i praksis følgende opskrift

1. Lav række/søjleoperationer på $\underline{\underline{A}}$, så der kommer flere 0'er i en række eller søjle (og hold øje med, om determinantens værdi ændres, hvis der for eksempel bruges operationer af typen M eller B)
2. Uregn den nye determinant ved brug af udvikling af determinanten efter en række eller søjle, der har mange 0'er.

Man kan godt komme ud for at skulle bruge denne opskrift flere gange, før den endelige værdi er fundet.

3.3 Egenskaber ved determinanter

Determinanter har følgende egenskaber

- $\det(\underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{A}}^t)$
- For en trekantsmatrix (øvre, såvel som nedre, og **diagonalmatricer**) er $\det(\underline{\underline{A}})$ lig produktet af diagonalelementerne.
- for to $n \times n$ -matricer $\underline{\underline{A}}$ og $\underline{\underline{B}}$ gælder: $\det(\underline{\underline{A}} \underline{\underline{B}}) = \det \underline{\underline{A}} \det \underline{\underline{B}}$
- En $n \times n$ matrix er **regulær**, hvis $\det \underline{\underline{A}} \neq 0$
- For en regulær matrix gælder: $\det(\underline{\underline{A}}^{-1}) = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}}$

3.4 Invers matrix og determinant

For en $n \times n$ -matrix $\underline{\underline{A}}$ forstås **komplementet** til indgangen a_{ij} som

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \leftarrow i$$

\uparrow
 j

(3.3)

Denne kan også udregnes ved

$$A_{ij} = A_{ij} = (-1)^{i+j} \det \underline{\underline{A}}_{ij} \quad (3.4)$$

hvor $\underline{\underline{A}}_{ij}$ er den $n-1 \times n-1$ -matrix, der fremkommer ved at slette den i -te række og den j -te søjle i $\underline{\underline{A}}$.

Komplementmatricen $K(\underline{\underline{A}})$ er

$$K(\underline{\underline{A}}) = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Og for denne gælder

$$\underline{\underline{A}}K(\underline{\underline{A}})^t = (\det \underline{\underline{A}})\underline{\underline{E}} \quad (3.6)$$

For en regulær matrix $\underline{\underline{A}}$ gælder

$$\underline{\underline{A}}^{-1}[i, j] = \frac{A_{ji}}{\det \underline{\underline{A}}} = \frac{(-1)^{i+j} \det \underline{\underline{A}}_{ji}}{\det \underline{\underline{A}}} \quad (3.7)$$

Den inverse matrix er altså givet på formen:

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{\underline{A}}} K(\underline{\underline{A}})^t \quad (3.8)$$

3.5 Determinant af en endomorfi

En **endomorfi** er en afbildning $f: V \rightarrow V$ på sig selv. Denne er da givet ved en kvadratisk matrix ($n \times n$, hvis $\dim V = n$). Hvis $\mathcal{A} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ er en basis for V er determinanten $\det f$ af endomorfin $f: V \rightarrow V$ defineret som $\det_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}}$. Denne afhænger da ikke af basen, og hvis \mathcal{A}' er en ny basis i V , er $\det_{\mathcal{A}'}[f]_{\mathcal{A}'} = \det_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}}$. **Determinanten af en matrix er altså ens, lige meget hvilken basis denne er repræsenteret i.**

4 Vektorrum

4.1 Definition

Et vektorrum er en mængde V , hvori der er givet to operationer: addition af to elementer og multiplikation med en skalar. For $\underline{x}, \underline{y} \in V$ og $\lambda \in \mathbb{F}$ gælder

$$\lambda \underline{x} \in V, \quad \underline{x} + \underline{y} \in V \quad (4.1)$$

Ud fra disse fås (som ved regneregler for vektorer og matricer):

$$\begin{array}{ll} \text{V1} & (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) \\ \text{V2} & \underline{x} + \underline{0} = \underline{x} \\ \text{V3} & \underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0} \\ \text{V4} & \underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x} \\ \text{V5} & a(\underline{x} + \underline{y}) = a\underline{x} + a\underline{y} \\ \text{V6} & (a + b)\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{x} \\ \text{V7} & (ab)\underline{x} = a(b\underline{x}) \\ \text{V8} & 1\underline{x} = \underline{x} \end{array}$$

Vi definerer $\mathbb{F}^0 = \{0\}$, altså at denne mængde kun indeholder nul-vektoren. Vi siger også at V er defineret over talrummet \mathbb{F} . Talrummene $\mathbb{F}^n, n \in \mathbb{N}_0$ er vektorrum over \mathbb{F} . Hvis $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ kaldes vektorrummet reelt, og hvis $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ kaldes vektorrummet komplekst. $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ er mængden af $m \times n$ -matricer med indgange i \mathbb{F} , og er ligeledes et vektorrum. $\text{Pol}(\mathbb{F})$ er mængden af polynomier med én variabel og koefficienter i \mathbb{F} . Altså polynomier på formen

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad x \in \mathbb{F} \quad (4.2)$$

4.2 Lineære afbildninger og isomorfi

Vi kalder f en lineær afbildning fra U til V , hvis linearitetsbetingelserne er opfyldt:

$$\text{L1: } f(\lambda \underline{x}) = \lambda f(\underline{x}) \text{ for alle } \underline{x} \in U, \lambda \in \mathbb{F}$$

$$\text{L2: } f(\underline{x} + \underline{y}) = f(\underline{x}) + f(\underline{y}) \text{ for alle } \underline{x}, \underline{y} \in U$$

En lineær afbildning kaldes også for en **homomorfi**, og der gælder, at hvis $f: W \rightarrow V$ og $g: U \rightarrow W$ er lineære afbildninger, da er $f \circ g: U \rightarrow V$ også lineær.

For en afbildning $f: \mathbb{F}^n \rightarrow V$ givet ved

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = x_1 \underline{a}_1 + \cdots + x_n \underline{a}_n \quad (4.3)$$

hvor $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ er vektorer i V , er denne lineær, og alle lineære afbildninger $f: \mathbb{F}^n \rightarrow V$ har denne form. Yderligere gælder at $\underline{a}_j = f(\underline{e}_j)$.

En bijektiv, lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ kaldes for en **isomorfi** fra U til V , og de to vektorrum U og V kaldes **isomorfe**, hvis der findes blot én isomorfi fra U til V . For isomorfier gælder:

- Den identiske afbildning $\text{id}_U: U \rightarrow U$ er en isomorfi
- Hvis $f: U \rightarrow V$ er en isomorfi gælder at $f^{-1}: V \rightarrow U$ er en isomorfi
- Hvis $f: W \rightarrow V$ og $g: U \rightarrow W$ er isomorfier, da er $f \circ g: U \rightarrow V$ en isomorfi.

4.3 Endeligdimensionalitet, basis, underrum, span, kerne

Endeligdimensionalitet

Et vektorrum kaldes **endeligdimensionalt**, hvis det er isomorft med et talrum $\mathbb{F}^n, n \in \mathbb{N}_0$. Dimensionen $\dim V$ defineres da til at være n . Og hvis \mathbb{F}^m er isomorft med \mathbb{F}^n , da er $m = n$.

Basis

En **basis** for et vektorrum V er et ordnet sæt vektorer, $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$, hvor hver vektor \underline{a} i V kan skrives som en linearkombination af basisvektorerne:

$$\underline{a} = x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n \quad (4.4)$$

Basen betegnes $\mathcal{A} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ og koordinaterne x_1, \dots, x_n for vektoren \underline{a} med hensyn til \mathcal{A} , betegnes $_{\mathcal{A}}[\underline{a}] = (x_1, \dots, x_n)$. Bemærk, at den j 'te basisvektors (\underline{a}_j) koordinater i basen \mathcal{A} er den j 'te standardenhedsvektor, altså $_{\mathcal{A}}[\underline{a}_j] = \underline{e}_j$.

- Den lineære afbildning $f: \mathbb{F}^n \rightarrow V$ givet ved $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n$ er en isomorf, hvis $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ er en basis.
- Et vektorrum $V \neq \{\underline{o}\}$ har en basis, netop hvis det er endeligdimensionalt. I så fald indeholder enhver basis for V netop $\dim V$ elementer.
- et sæt $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ af n vektorer i \mathbb{F}^n er en basis hvis $n \times n$ -matricen $\underline{A} = (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n)$ er regulær
- For en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ hvor $\dim U = \dim V$ er følgende tre udsagn ækvivalente: f er surjektiv, injektiv og bijektiv.

Underrum

En ikke-tom delmængde $U \subseteq V$ kaldes for et **underrum**, hvis følgende to betingelser er opfyldt:

U1: Hvis $\underline{x} \in U$, $\lambda \in \mathbb{F}$ gælder $\lambda \underline{x} \in U$.

U2: Hvis $\underline{x}, \underline{y} \in U$ gælder $\underline{x} + \underline{y} \in U$.

Nulvektoren \underline{o} er da altid i et underrum, og et underrum kaldes stabilt ved vektoroperationerne, hvis U1 og U2 er opfyldt. V1-V8 gælder da også for underrum, da disse i sig selv er vektorrum. Ligeledes kan der bestemmes dimension og baser af U . V og $\{\underline{o}\}$ kaldes for *trivielle* underrum af V .

Span

For en ikke-tom delmængde M af V forstås **span** som mængden af alle linearkombinationer af vektorer i M . Dette betegnes $\text{span } M$. Hvis $\text{span } M = M$ er M et underrum.

Kerne og billede

For en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ forstås **kernen** $\ker f$ som mængden

$$\ker f = \{\underline{x} \in U \mid f(\underline{x}) = \underline{o}\}$$

Og ved **billedet** $f(U)$ for f forstås mængden

$$f(U) = \{\underline{y} \in V \mid \underline{y} = f(\underline{x}) \text{ for et } \underline{x} \in U\}$$

- Kernen $\ker f$ for den lineære afbildning $f: U \rightarrow V$ er et underrum i U .
- Billedet $f(U)$ af U ved f er et underrum i V .
- Den lineære afbildning f er injektiv når $\ker f = \underline{o}$.
- Hvis den lineære afbildning er givet ved matricen \underline{A} , er billedet $f(U) = \text{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$

4.4 Lineær (u)afhængighed

Et sæt vektorer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ i V kaldes **lineært uafhængige**, hvis ligningen

$$x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{0}$$

kun har løsningen $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$. Ellers kaldes sættet **lineært afhængigt**

- En basis for V , eller et underrum heraf, består af lineært uafhængige vektorer.
- Et sæt af vektorer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ i V er lineært afhængige, hvis blot én vektor kan skrives som en linearkombination af de andre.
- $\{\underline{a}_1\}$ er lineært uafhængig, hvis $\underline{a}_1 \neq \underline{0}$.
- $\{\underline{a}_1, \underline{a}_2\}$ er lineært uafhængig hvis $\underline{a}_1 \neq \lambda \underline{a}_2$.
- Et sæt af vektorer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ i V er lineært uafhængige, hvis den lineære afbildning $f: \mathbb{F}^n \rightarrow V$, givet ved linearkombinationen af $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$, er injektiv.
- Et sæt af vektorer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ i V er lineært uafhængige, hvis de udgør en basis for $\text{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$
- for et endeligdimensionalt vektorrum V , med et sæt lineært uafhængige vektorer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$. Da er $n \leq \dim V$, og $n = \dim V$ når $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ er en basis for V .
- For et endeligdimensionalt vektorrum V , med et sæt vektorer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$, der frembringer V ; er $n \geq \dim V$ og hvis $n = \dim V$ er $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ en basis for V .
- Et sæt lineært uafhængige vektorer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ i V og en yderligere vektor \underline{a}_{n+1} er lineært afhængige, hvis $\underline{a}_{n+1} \in \text{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$.

Ved et **maksimalt lineært uafhængigt** sæt vektorer forstås et sæt lineært uafhængige vektorer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \in M \subseteq V$, der ikke kan udvides til et større lineært uafhængigt sæt $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{a}_{n+1} \in M$.

- Ethvert lineært uafhængigt sæt vektorer i M (der er en delmængde af det endeligdimensionale vektorrum V) kan udvides til et maksimalt lineært uafhængigt sæt af vektorer fra M .
- Ethvert maksimalt lineært uafhængigt sæt vektorer fra M (delmængde af e.dim rum V) udgør en basis for $\text{span } M$.
- Et underrum U af et endeligdimensionalt vektorrum V er endeligdimensionalt, og $\dim U \leq \dim V$.
- Et lineært uafhængigt sæt vektorer i det e.dim rum V kan udvides til en basis for V .

4.5 Udtyndings-/udvidelsesalgoritmen

Udtyndingsalgoritmen er en måde at reducere et sæt lineært afhængige vektorer til et sæt lineært uafhængige vektorer, mens udvidelsesalgoritmen er en metode til at udvide et sæt lineært uafhængige vektorer til et sæt maksimalt lineært uafhængige vektorer, og dermed en basis for et vektorrum. Givet et sæt vektorer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n \in \mathbb{F}^m$, der enten er lineært uafhængige (udvidelsesalgoritmen) eller lineært afhængige (udtyndingsalgoritmen) er algoritmerne som følger:

Udtyndingsalgoritmen

1. Lav matricen $\underline{A} = (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n)$, der altså har de givne vektorer som søjler.
2. Rækkerreducer \underline{A} til en trappematrix \underline{B}
3. Vælg de søjler i \underline{A} , hvor der er trinpositioner i \underline{B} (eksempelvis: trin i \underline{B} , i søjle 1, 2 og 4 $\rightarrow \underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4$ er lineært uafhængige, og udgør en basis for $\text{span}\{\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_4\}$).

Udvidelsesalgoritmen

1. Lav matricen $\underline{A} = (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n \underline{E})$, der har sættet af lineært uafhængige vektorer som de første n søjler, og $m \times m$ -enhedsmatricen \underline{E} som de næste søjler.
2. Reducer \underline{A} til trappematricen \underline{B} .
3. Vælg de søjler i \underline{A} , hvor der er trinpositioner i \underline{B} . De valgte søjlevektorer $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$, samt et sæt af standardenhedsvektorerne) udgør da en basis for \mathbb{F}^m

4.6 Rang og dimensionssætningen

For to endeligdimensionale vektorrum U og V forstås **rangen** $\text{rg } f$ af en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ som dimensionen af billedrummet $f(U)$:

$$\text{rg } f = \dim f(U) \quad (4.5)$$

Og ved rangen $\text{rg } \underline{A}$ af en $m \times n$ -matrix \underline{A} forstås rangen af den til \underline{A} hørende afbildning $f: \mathbb{F}^m \rightarrow \mathbb{F}^n$

$$\text{rg } \underline{A} = \dim(\text{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}) \quad (4.6)$$

Dimensionssætningen

For en lineær afbildning $f: U \rightarrow V$ gælder

$$\text{rg } f + \dim(\ker f) = \dim U \quad (4.7)$$

Egenskaber for rang

- Rangen af $m \times n$ -matricen $\underline{A} = (\underline{a}_1 \dots \underline{a}_n)$ er lig antallet af vektorer i et maksimalt lineært uafhængigt sæt af vektorer fra $\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$
- Rangen af en trappematrix \underline{A} er lig antallet af trin i denne.
- Rangen af en matrix ændres ikke ved udførelse af række-/søjle-operationer
- Rangen af en matrix er den samme som rangen af dens transponerede matrix: $\text{rg } \underline{A} = \text{rg } \underline{A}^t$

5 Koordinattransformationer

Givet to baser $\mathcal{A} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ (den gamle) og $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ (den nye) i V kan en koordinattransformationsmatrix opstilles, der omdanner en vektor \underline{v} fra én base til en anden:

$$\mathcal{B}[\underline{v}] = \mathcal{B}\mathbf{T}_{\mathcal{A}\mathcal{A}}[\underline{v}] \quad (5.1)$$

Transformationen skal læses bagfra - der omdannes fra \mathcal{A} til \mathcal{B} . Yderligere gør denne notation, at to ens baser altid står ved siden af hinanden. Så hvis to forskellige baser står ved siden af hinanden, så er der gjort noget galt.

For denne matrix gælder:

- $\mathcal{B}\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^{-1} = \mathcal{A}\mathbf{T}_{\mathcal{B}}$ og derfor:
- $\mathcal{A}[\underline{v}] = \mathcal{B}\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^{-1}\mathcal{B}[\underline{v}] = \mathcal{A}\mathbf{T}_{\mathcal{B}\mathcal{B}}[\underline{v}]$
- $\mathcal{A}'\mathbf{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}'[\text{id}_U]_{\mathcal{A}}$

5.1 Lineære afbildninger og matricer

For U og V , der er endeligdimensionale vektorrum, hvor $\mathcal{A} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ er en basis i U , $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m)$ er en basis i V , og med en given lineær afbildning $f: U \rightarrow V$, definerer vi afbildningen $\alpha: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$, hvor følgende $m \times n$ -matrix er tilknyttet:

$$\mathcal{B}[f]_{\mathcal{A}} = (\mathcal{B}[f(\underline{a}_1)] \quad \dots \quad \mathcal{B}[f(\underline{a}_n)])$$

Denne afbildning har inputs i \mathcal{A} og output i \mathcal{B} , og hvis $\mathcal{A}[\underline{x}]$ betegner \underline{x} i basen \mathcal{A} , og $\mathcal{B}[\underline{y}] = \mathcal{B}[f(\underline{x})]$ betegner $\underline{y} = f(\underline{x})$ i basen \mathcal{B} , giver dette anledning til den generelle søjleregul:

5.1.1 den generelle søjleregul

hvis $\mathcal{A}[\underline{x}]$ og $\mathcal{B}[\underline{y}] = \mathcal{B}[f(\underline{x})]$ er koordinatsøjlerne for henholdsvis \underline{x} og $\underline{y} = f(\underline{x})$ i deres respektive baser, er

$$\mathcal{B}[f(\underline{x})] = \mathcal{B}[f]_{\mathcal{A}\mathcal{A}}[\underline{x}] \quad (5.2)$$

Hvor $m \times n$ -matricen $\mathcal{B}[f]_{\mathcal{A}}$ er givet ved

$$\mathcal{B}[f]_{\mathcal{A}} = (\mathcal{B}[f(\underline{a}_1)] \quad \dots \quad \mathcal{B}[f(\underline{a}_n)]) \quad (5.3)$$

For sammensatte afbildninger gælder: for $f: W \rightarrow V$ og $g: U \rightarrow W$, med baserne \mathcal{A} i U , \mathcal{B} i V og \mathcal{C} i W , hvor f repræsenteres af $\mathcal{B}[f]_{\mathcal{C}}$ og g repræsenteres af $\mathcal{C}[g]_{\mathcal{A}}$, er den sammensatte afbildning $f \circ g: U \rightarrow V$ givet ved $\mathcal{B}[f \circ g]_{\mathcal{A}} = \mathcal{B}[f]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}\mathcal{C}[g]_{\mathcal{A}}$.

5.1.2 Opskrift for at finde koordinattransformationsmatricer:

Lad $\mathcal{A} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ være den gamle basis og $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ være den nye.

1. Dan $n \times 2n$ -blokmatrixen $(\underline{B}|\underline{A}) = (\underline{b}_1 \dots \underline{b}_n | \underline{a}_1 \dots \underline{a}_n)$, der har de ordnede basiselementer for \mathcal{B} og \mathcal{A} som søjler.
2. Omdan denne blokmatrix til en reduceret trappematrix af formen $(\underline{E}|\underline{C})$. Da er $\underline{C} = \mathcal{B}\mathbf{T}_{\mathcal{A}}$

5.1.3 Opskrift på at finde $\mathcal{B}[f]_{\mathcal{A}}$ for $f: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$:

Antag at $\mathcal{A} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ er en basis for \mathbb{F}^n og $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m)$ er en basis for \mathbb{F}^m .

1. Dan $m \times (n + m)$ blokmatrixen $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_m \mid f(\underline{a}_1), \dots, f(\underline{a}_n))$
2. Omdan denne til en reduceret trappematrix på formen $(\underline{E}|\underline{B})$. Da er $\underline{B} = \mathcal{B}[f]_{\mathcal{A}}$ matrixrepræsentationen af f med hensyn til baserne \mathcal{A} og \mathcal{B} .

Koordinattransformationer for lineære afbildninger

Lad U og V være endeligdimensionale vektorrum. Lad \mathcal{A} og \mathcal{B} være de gamle baser for henholdsvis U og V , og lad \mathcal{A}' og \mathcal{B}' være de nye baser for henholdsvis U og V . ${}_{\mathcal{A}'}T_{\mathcal{A}}$ og ${}_{\mathcal{B}'}T_{\mathcal{B}}$ betegner koordinattransformationsmatricerne for de respektive vektorrum og baser.

Hvis den lineære afbildning $f: U \rightarrow V$ er repræsenteret ved matricen ${}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}}$ og ${}_{\mathcal{B}'}[f]_{\mathcal{A}'}$ i henholdsvis de gamle og nye baser, da er

$${}_{\mathcal{B}'}[f]_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{B}'}T_{\mathcal{B}} {}_{\mathcal{B}}[f]_{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}T_{\mathcal{A}'}, \quad (5.4)$$

hvor ${}_{\mathcal{A}}T_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{A}'}T_{\mathcal{A}}^{-1}$. Specielt for en afbildning $f: V \rightarrow V$, hvor \mathcal{A} og \mathcal{A}' er den gamle og nye base, gælder

$${}_{\mathcal{A}'}[f]_{\mathcal{A}'} = {}_{\mathcal{A}'}T_{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}[f]_{\mathcal{A}} {}_{\mathcal{A}}T_{\mathcal{A}'}^{-1} \quad (5.5)$$

6 Diagonalisering af matricer

6.1 Diagonaliserbare matricer, egenverdier/vektorer

For et endeligdimensionelt vektorrum defineres diagonaliserbare matricer som:

Diagonaliserbare matricer

En lineær afbildning $f: V \rightarrow V$ kaldes *diagonaliserbar*, hvis der findes en basis $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ således at f i denne basis repræsenteres som en diagonalmatrix. Hvis dette gælder, så er $f(\underline{a}_1) = \lambda_1 \underline{a}_1, \dots, f(\underline{a}_n) = \lambda_n \underline{a}_n$, hvor $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ er elementerne i diagonalmatricen. $f(\underline{a}_j)$ er altså proportional med \underline{a}_j , med proportionalitetsfaktoren λ_j .

Egenvektorer og -værdier

En egenvektor er en vektor, der er forskellig fra 0, og proportional med dens funktionsværdi: $f(\underline{x}) = \lambda \underline{x}$. Proportionalitetsfaktoren λ kaldes for den til egenvektoren \underline{x} hørende **egenværdi**. Dette giver anledning til følgende sætning:

Sætning 6.1.3 Den lineære afbildning $f: V \rightarrow V$ er diagonaliserbar, netop hvis der findes en basis for V bestående af egenvektorer for f .

Egenrum

Et egenrum V_λ hørende til $\lambda \in \mathbb{F}$ defineres som underrummet

$$V_\lambda = \{\underline{x} \mid f(\underline{x}) = \lambda \underline{x}\} = \{\underline{X} \in \mathbb{F}^n \mid (\underline{A} - \lambda \underline{E})\underline{X} = \underline{0}\} \quad (6.1)$$

Og **egenværdimultipliciteten** eller den **geometriske multiplicitet** defineres som $\text{em } \lambda = \dim V_\lambda$.

Vi lader $e: V \rightarrow V$ betegne den identiske afbildning $e: \underline{x} \rightarrow \underline{x}$. Vi definerer da afbildningen $f - \lambda e: V \rightarrow V$ som

$$(f - \lambda e)(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \lambda e(\underline{x}) = f(\underline{x}) - \lambda \underline{x} \quad (6.2)$$

Da gælder, per sætning 6.1.5

1. $V_\lambda = \ker(f - \lambda e)$
2. $\text{em } \lambda + \text{rg}(f - \lambda e) = \dim V = \text{em } \lambda + \text{rg}(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = n$

Og følgende er ækvivalente (sætning 6.1.6)

1. λ er egenværdi for f
2. $V_\lambda \neq \{0\}$
3. $\text{em } \lambda > 0$
4. $f - \lambda e$ er *ikke* bijektiv
5. $\det(f - \lambda e) = 0$

Karakteristiske polynomium

Det karakteristiske polynomium P_f hørende til $f: V \rightarrow V$ defineres som

$$P_f(\lambda) = \det(f - \lambda e) = P_{\underline{A}}(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) \quad (6.3)$$

Sætning 6.1.8 Hvor egenværdierne for f er \mathbb{F} -rødderne i det karakteristiske polynomium (følger af sætning 6.1.6)

Rodmultipliciteter

Ved rodmultipliciteter (eller **algebraisk multiplicitet** forstås tallet k , hvor polynomiet er deleligt med $(x - x_0)^k$ men ikke $(x - x_0)^{k+1}$. Altså hvor mange gange et tal er en rod (dobbel-rod, trippel-rod osv). Rodmultipliciteterne for hver rod x_0 betegnes $\text{rm } x_0 = k$.

Sætning 6.2.2 Lad $f: V \rightarrow V$ være en lineær afbildning og V være et $e.\dim$ vektorrum. For hvert tal $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ gælder at $\text{em } \lambda_0 \leq \text{rm } \lambda_0$

Sætning 6.2.3 Hvis summen af rodmultipliciteterne af \mathbb{F} -rødderne i P_f for f er (skarpt) mindre end $\dim V$, altså hvis der findes en egenværdi λ_0 med $\text{em } \lambda_0 < \text{rm } \lambda_0$, da er f **ikke** diagonaliserbar.

Sætning 6.3.1 Hvis summen af rodmultipliciteterne for \mathbb{F} -rødderne i P_f for f er $n = \dim V$, og der gælder $\text{em } \lambda_0 = \text{rm } \lambda_0$ for alle egenværdier λ_0 , da er f diagonaliserbar. En diagonaliserende basis fås i så fald, ved at vælge en basis for hvert af egenrummene og sammenstille disse baser.

Sætning 6.3.3 Hvis P_f for f har $n = \dim V$ forskellige \mathbb{F} -rødder $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, da er f diagonaliserbar. En diagonaliserende basis $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ fås i dette tilfælde ved, for hver rod λ_i , at vælge en egenvektor \underline{a}_i med egenværdien λ_i .

Bemærk at f godt kan være diagonaliserbar, selvom der ikke er n rødder (per sætning 6.3.1). Sætning 6.3.3 siger blot, at hvis der er n rødder, så er f med sikkerhed diagonaliserbar.

6.2 Opskrift på at finde egenvektorer og egenværdier

1. Beregn det karakteristiske polynomium $P_{\underline{A}}(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{E})$
2. Find \mathbb{F} -rødderne til $P_{\underline{A}}(\lambda)$. Dette er *egenværdierne*
3. For hver egenværdi λ_0 find den fuldstændige løsning til ligningssystemet $(\underline{A} - \lambda_0 \underline{E})\underline{x} = \underline{o}$.

De fundne løsninger (fraregnet \underline{o} -løsningen) er præcist egenvektorerne hørende til egenværdien λ_0 .

6.3 Opskrift på diagonalisering af en kvadratisk matrix

1. Bestem det karakteristiske polynomium $P_{\underline{A}}(\lambda) = \det(\underline{A} - \lambda \underline{E})$, og find dets rødder (egenværdier), samt de tilhørende rodmultipliciteter
2. Bestem baser for hvert egenrum V_{λ_0} (egenvektorer) samt de tilhørende egenværdimultipliciteter (= antal basiselementer i basen).
3. Matricen er diagonaliserbar *hvis og kun hvis* $\text{rm } \lambda_0 = \text{em } \lambda_0$ for *ALLE* λ_0 . I så tilfælde kan vi sætte \underline{S}^{-1} til at være den matrix der fremkommer ved at lade basiselementerne fra punkt 2 være søjler (altså en blokmatrix af basiselementer for egenrummene). Der gælder så at \underline{S} er koordinattransformationen ${}_{\mathcal{B}}T_{\mathcal{E}}$ fra basis \mathcal{E} til \mathcal{B} , hvor \mathcal{B} er basen bestående af egenvektorerne. Ydermere gælder at

$$\underline{S} \underline{A} \underline{S}^{-1} \quad (6.4)$$

er diagonal

Punkt 1 og 2 i denne opskrift er egentlig også punkterne i forrige opskrift 6.2. Opskrift 6.3 leder efter *kompleks* diagonalisering. Hvis man kun er interesseret i reel diagonalisering af en reel matrix kan man stoppe efter punkt 1, hvis en af rødderne er ikke-reel. Man kan også stoppe under punkt 2, hvis $\text{rm } \lambda_0 \neq \text{em } \lambda_0$, for bare ét λ_0 . Da er matricen slet ikke diagonaliserbar.

Med fordel kan følgende skema opsættes for diagonalisering af matricer:

Eigenvärderi	Rødmult.	Eigenvärderimult.	Basis

Hvor der så indsættes en ekstra række for hver eigenvärderi.

6.4 Potensopløftning af matricer

Hvis \underline{A} er diagonaliserbar, og $\underline{D} = \underline{S}\underline{A}\underline{S}^{-1}$ er en diagonalmatrix, så gælder der at

$$\underline{D}^k = \underline{S}\underline{A}^k\underline{S}^{-1} \quad (6.5)$$

$$\underline{A}^k = \underline{S}^{-1}\underline{D}^k\underline{S} \quad (6.6)$$

Hvor det kan udnyttes, at \underline{D}^k er nemt at udregne (se afsnit 2.1)

6.5 Diagonalisering af reelle symmetriske matricer

En reel symmetrisk matrix (hvor $\underline{A} = \underline{A}^t$, og den altså er $n \times n$), i et Euklidisk (reelt, indre-produkt rum) vektorrum, er reelt diagonaliserbar.

Følgende gælder for reelle symmetriske matricer og afbildninger

- En lineær afbildning $f: V \rightarrow V$ kaldes symmetrisk, hvis $f(\underline{x}) \cdot \underline{y} = \underline{x} \cdot f(\underline{y})$, for alle $\underline{x}, \underline{y} \in V$, og denne repræsenteres, i en ortonormalbasis, af en symmetrisk matrix
- Hvis \underline{x} og \underline{y} er egenvektorer til den samme *symmetriske* lineære afbildning, hørende til forskellige eigenvärderier, er \underline{x} og \underline{y} ortogonale.
- Det karakteristiske polynomium for en symmetrisk matrix har (mindst) én reel rod.
- En reel symmetrisk $n \times n$ matrix er *reelt* diagonaliserbar, og der findes en ortogonal, reel $n \times n$ -matrix \underline{S} , så $\underline{D} = \underline{S}\underline{A}\underline{S}^{-1}$ er en diagonalmatrix.
- Ligeledes: hvis \underline{A} er diagonaliserbar m.h.t en reel, ortogonal matrix \underline{S} , så er \underline{A} symmetrisk.

7 Skalarprodukt og ortonormalbaser

Skalarprodukt er en måde at knytte et tal til hvert par vektorer i et vektorrum V . For to vektorer $\underline{x}, \underline{y} \in V$ skrives skalarproduktet $\underline{x} \cdot \underline{y}$. Regneregler for skalarprodukt i V over \mathbb{F} er som følger:

S1: $(\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} = \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z}$

S2: $(\lambda \underline{x}) \cdot \underline{y} = \lambda(\underline{x} \cdot \underline{y})$

S3: $\underline{x} \cdot \underline{y} = \overline{\underline{y} \cdot \underline{x}}$

S4: $\underline{x} \cdot \underline{x} \geq 0$

S5: $\underline{x} \cdot \underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{o}$

Et vektorrum der er udstyret med skalarprodukt kaldes for et *indre produkt rum*, og hvis $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ kaldes det for et *euklidisk rum*.

Hvis to vektorer $\underline{x}, \underline{y}$ har koordinaterne (x_1, \dots, x_n) og (y_1, \dots, y_n) i en ortonormalbasis (**specielt i \mathbb{F}^n kaldes dette for sædvanligt skalarprodukt**), regnes skalarproduktet ved

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} \quad (7.1)$$

Længden af vektor og normering

- Længden af en vektor \underline{x} er $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}}$
- Der gælder $|\lambda \underline{x}| = |\lambda| |\underline{x}|$, hvor $|\lambda| = \sqrt{\lambda \bar{\lambda}}$
- Hvis $|\underline{x}| = 1$ kaldes vektoren for en enhedsvektor
- En vektor $\underline{y} = \frac{1}{|\underline{x}|} \underline{x}$ er en enhedsvektor, fremstillet ved normering af $|\underline{x}|$
- Normering er at dividere en vektor med sin længde.
- For \mathbb{R}^n er $\underline{x} \cdot \underline{y} = \cos(\theta) |\underline{x}| |\underline{y}|$. Eller, \cos til vinklen mellem to vektorer er $\cos \theta = \frac{\underline{x} \cdot \underline{y}}{|\underline{x}| |\underline{y}|}$
- Cauchy-Schwarz's ulighed: $|\underline{x} \cdot \underline{y}| \leq |\underline{x}| |\underline{y}|$
- Trekantsuligheden: $|\underline{x} + \underline{y}| \leq |\underline{x}| + |\underline{y}|$

Ortogonal-/ortonormalsæt og skalarprodukter

- To vektorer siges at være ortogonale, hvis $\underline{x} \cdot \underline{y} = 0$. Dettet skrives også som $\underline{x} \perp \underline{y}$
- Et sæt vektorer $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ i V kaldes for et ortogonalsæt, hvis hver vektor er forskellig fra nulvektoren og deres indbyrdes skalarprodukter alle er lig 0. Altså $\underline{a}_i \neq \underline{0}$, $1 \leq i \leq n$ og $\underline{a}_i \cdot \underline{a}_j = 0$, for $1 \leq i, j \leq n$.
- Et ortogonalsæt, hvor $|\underline{a}_i| = 1$, $1 \leq i \leq n$ kaldes for et ortonormalsæt. Et ortogonalsæt (og ortonormalsæt) er altid lineært uafhængigt.

En basis $\mathcal{A} = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$ kaldes en ortonormalbasis, hvis sættet $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ er et ortonormalsæt og altså $\underline{a}_i \cdot \underline{a}_i = 1$, $\underline{a}_i \cdot \underline{a}_j = 0$, $i \neq j$. **Ethvert endeligdimensionalt indre produkt vektorrum V har en ortonormalbasis (sætning 7.1.10).** Koordinaterne for en vektor \underline{x} i denne base er givet ved

$$\mathcal{A}[\underline{x}] = \begin{pmatrix} \underline{x} \cdot \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{x} \cdot \underline{a}_n \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

Egenskaber ved ortogonalsæt $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$:

- For $\underline{a} \in \text{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$ gælder: $\underline{a} = \sum_{i=1}^n \frac{\underline{a} \cdot \underline{a}_i}{\underline{a}_i \cdot \underline{a}_i} \underline{a}_i$
- for $\underline{b} \in V$ sættes $\underline{a}_{n+1} = \underline{b} - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\underline{b} \cdot \underline{a}_i}{\underline{a}_i \cdot \underline{a}_i} \underline{a}_i \right)$
 - Hvis er $\underline{a}_{n+1} \neq \underline{0}$, er sættet $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}$ lineært uafhængigt, og \underline{a}_{n+1} er ortogonalt på $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$
 - er $\text{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\} = \text{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{a}_{n+1}\}$

7.1 Gram-Schmidt ortogonalisering

Egenskaberne for ortogonalsæt giver anledning til følgende opskrift på, hvordan man danner en ortonormal basis for et underrum U .

Opskrift: Lad sættet $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n$ i V være lineært uafhængige, og lad $U = \text{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$.

1. Lad $\underline{b}_1 = \underline{a}_1$
2. for $k = 2, \dots, n$ lad

$$\underline{b}_k = \underline{a}_k - \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\underline{a}_k \cdot \underline{b}_i}{\underline{b}_i \cdot \underline{b}_i} \underline{b}_i \right) \quad (7.3)$$

da er $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ en basis for U bestående af ortogonale vektorer.

3. for $i = 1, \dots, n$ lad $\underline{b}'_i = \frac{\underline{b}_i}{|\underline{b}_i|}$.

Da er $(\underline{b}'_1, \dots, \underline{b}'_n)$ en ortonormalbasis for U

Udtrykket $\frac{\underline{a}_{k+1} \cdot \underline{b}_i}{\underline{b}_i \cdot \underline{b}_i}$ ændres ikke, hvis \underline{b}_k erstattes af $c \underline{b}_k$, $c \neq 0$. Det kan derfor være bekvemt at gøre dette for et passende c (eksempelvis for at eliminere brøker).

7.2 Ortogonale matricer

Definitionen på orthogonalmatricer er som følger:

En $n \times n$ -matrix kaldes orthogonal, hvis dens søjler udgør en *ortonormalbasis* i \mathbb{F}^n . (en kompleks orthogonal matrix kaldes også for en *unitær* matrix).

Egenskaber for ortogonale matricer:

- Følgende betingelser er ensbetydende:
 - $\underline{\underline{S}}$ er orthogonal
 - $\underline{\underline{S}} * \underline{\underline{S}} = \underline{\underline{E}}$
 - $\underline{\underline{S}}$ er regulær og $\underline{\underline{S}}^{-1} = \underline{\underline{S}}^*$
- Koordinattransformationsmatricen for overgang fra én ortonormalbasis til en anden, er en orthogonalmatrix.

7.3 Ortogonalkomplement og orthogonalprojektion

Ortogonalkomplementet er defineret som følger:

For en delmængde $M \subseteq V$ sættes $M^\perp = \{\underline{x} \in V \mid \underline{x} \cdot \underline{y} = 0, \text{ for alle } \underline{y} \in M\}$.

Hvis M er et underrum af V , kaldes M^\perp for ortogonalkomplementet til M . Den eneste vektor, der både er en del af M og M^\perp er nulvektoren \underline{o} , da denne er den eneste, hvor $\underline{x} \cdot \underline{x} = 0$. Altså $M \cap M^\perp = \{\underline{o}\}$.

Hvis $M \subseteq V$, og $M^\perp = \{\underline{o}\}$, så er $\text{span } M = V$.

Ortogonalprojektion

Lad V være et endeligdimensionalt indre produkt vektorrum, og lad U være et underrum i V . Til $\underline{a} \in V$ findes en entydig bestemt vektor $\underline{x} \in U$, for hvilken $\underline{a} - \underline{x} \in U^\perp$. Vektoren \underline{x} kaldes for orthogonalprojektion af \underline{a} på U . Hvis $\dim U = p > 0$, og hvis $(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_p)$ er en ortonormalbasis for U , er orthogonalprojektion af \underline{a} på U givet ved

$$\underline{x} = (\underline{a} \cdot \underline{a}_1)\underline{a}_1 + \dots + (\underline{a} \cdot \underline{a}_p)\underline{a}_p \quad (7.4)$$

Dette kaldes også for projektionsafbildningen $P_U(\underline{a})$ for U , og den kræver en ortonormalbasis for U . For denne gælder at

$$\ker(P_U) = U^\perp, \quad P_U(V) = U \quad (7.5)$$

Altså at kernen for denne afbildning er ortogonalkomplementet, og at billedet af V er lig underrummet U .

Opskrift på orthogonalprojektion af \underline{a} på U

Lad V være et e -dim, indre produkt rum. Lad $\underline{a} \in V$ og lad U være et underrum defineret ved $U = \text{span}\{\underline{a}, \dots, \underline{a}_k\}$.

1. Find en basis for U ved hjælp af udtyndingsalgoritmen
2. Find, ved Gram-Schmidt, en ortonormalbasis $(\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_p)$
3. Da er orthogonalprojektion af \underline{a} på U givet ved

$$P_U(\underline{a}) = (\underline{a} \cdot \underline{b}_1)\underline{b}_1 + \dots + (\underline{a} \cdot \underline{b}_p)\underline{b}_p \quad (7.6)$$

7.4 Kvadratiske former

Lad $\underline{\underline{B}}$ være en reel, symmetrisk matrix. For $\underline{x} = \underline{\underline{X}} \in \mathbb{R}^n$ sættes

$$K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) = \underline{\underline{X}}^t \underline{\underline{B}} \underline{\underline{X}} = \sum_{i=1}^n b_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} b_{ij} x_i x_j \quad (7.7)$$

For denne gælder følgende definitioner og egenskaber

- $K_{\underline{\underline{B}}}$ er positivt definit, hvis $K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) > 0$ for alle $\underline{x} \neq 0$
- $K_{\underline{\underline{B}}}$ er positivt semidefinit, hvis $K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) \geq 0$ for alle \underline{x}
- $K_{\underline{\underline{B}}}$ er negativt definit, hvis $K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) < 0$ for alle $\underline{x} \neq 0$
- $K_{\underline{\underline{B}}}$ er negativt semidefinit, hvis $K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) \leq 0$ for alle \underline{x}
- Hvis ingen af disse betingelser er opfyldt, kaldes $K_{\underline{\underline{B}}}$ for *indefinit* (der findes et \underline{x} og \underline{y} , så $K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{x}) > 0, K_{\underline{\underline{B}}}(\underline{y}) < 0$).
- Hvis $K_{\underline{\underline{B}}}$ er positivt definit, er den også positivt semidefinit. Matricen $\underline{\underline{B}}$ kaldes da også for positivt definit. Det samme gør sig gældende for negativt definit, etc.
- Hvis $K_{\underline{\underline{B}}}$ er negativt definit, er $-K_{\underline{\underline{B}}}$ positivt definit, og omvendt.

Der er følgende måde at bestemme, hvorvidt en symmetrisk matrix $\underline{\underline{B}}$ er positivt definit, etc:

Bestemmelse af definitet

Den kvadratiske form $K_{\underline{\underline{B}}}$, hørende til $\underline{\underline{B}}$ er positivt definit (positivt semi, negativt, negativt semi) netop hvis alle egenverdier for $\underline{\underline{B}}$ er positive (positive eller nul, negative, negative eller nul), og den er indefinit, hvis der findes både negative og positive egenverdier.

Ved den i 'te ledende undermatrix forstås den $i \times i$ -matrix $\underline{\underline{B}}_i$, der fremkommer ved at slette de sidste $n - i$ rækker og søjler. Eksempelvis er $\underline{\underline{B}}_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$. Specielt er $\underline{\underline{B}}_n = \underline{\underline{B}}$.

En symmetrisk matrix er positivt definit, netop hvis alle dens ledende underdeterminanter (determinanter af ledende undermatricer) er positive.