

# Noter til MatF på KU (Matematik for Fysikere 1)

af Nikolai Plambeck Nielsen, LPK331

Version 1.0

18. maj 2016

## Indhold

<b>I</b>	<b>Feltteori og vektoranalyse</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Introduktion og notation</b>	<b>3</b>
1.1	Felter generelt . . . . .	3
1.1.1	Skalarfelt . . . . .	3
1.1.2	Vektorfelt . . . . .	4
1.2	Taylor-approksimation for to variable . . . . .	4
1.3	Strømlinjer og feltlinjer . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Vektorfluks, cirkulation og strømfunctionen</b>	<b>5</b>
2.1	Vektorfluks . . . . .	5
2.2	Cirkulation . . . . .	5
2.3	$\nabla$ -operatoren . . . . .	5
2.3.1	Gradienten . . . . .	5
2.3.2	Divergens . . . . .	6
2.3.3	Rotation/virvling . . . . .	7
2.4	Strømfunctionen . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Kurve-, flade-, og volumenintegraler</b>	<b>8</b>
3.1	Kurveintegraler . . . . .	8
3.1.1	Kurveintegraler, gradientvektorer og konservative kraftfelter (rotationsfrie felter) . . . . .	9
3.1.2	Greens sætning (kurve til flade) . . . . .	10
3.1.3	Stokes' sætning (kurve til flade i 3 dimensioner) . . . . .	10
3.2	Flade- og volumenintegraler . . . . .	10
3.2.1	Simple flade- og volumenintegraler (fra Funktioner af Flere Variable) . . . . .	10
3.2.2	Volumenintegraler og Gauss' sætning (volumen til flade) . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Polarkoordinater</b>	<b>11</b>
4.1	Plane polarkoordinater . . . . .	12
4.2	Cylindriske koordinater . . . . .	13
4.3	Sfæriske koordinater . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Divergens- og rotationsfrie felter</b>	<b>14</b>
5.1	Hastighedspotentiale og Laplace-operatoren $\nabla^2$ . . . . .	14
5.1.1	Stagnationsstrøm . . . . .	14
5.1.2	Superposition af felter . . . . .	14
<b>6</b>	<b>Feltlinjer for fluider</b>	<b>15</b>
6.1	Partikeldifferentiation og acceleration . . . . .	15
6.2	Massebevarelse . . . . .	16
6.3	Bevægelsesligningen . . . . .	16
6.4	Bernoullis ligning . . . . .	17
6.5	Varmetransport . . . . .	17

<b>7 FV-Appendix A</b>	<b>18</b>
7.1 Navier-Stokes Ligning . . . . .	18
7.2 Maxwells ligninger . . . . .	18
 <b>II Essential Mathematical Methods</b>	 <b>18</b>
<b>8 Egenfunktionsmetoden til Differentialligninger</b>	<b>18</b>
8.1 Indre produkt for funktioner og Hilbertrum . . . . .	19
8.2 Adjungerede og Hermitiske operatorer . . . . .	20
8.3 Sturm-Liouvilleligninger . . . . .	20
<b>9 Fourierserier</b>	<b>21</b>
<b>10 Dirac <math>\delta</math>-funktion</b>	<b>23</b>
<b>11 Fouriertransformation</b>	<b>23</b>
11.1 Foldning . . . . .	24
11.2 Nyttige egenskaber ved Fouriertrasnformation . . . . .	24
<b>12 Partielle differentialligninger</b>	<b>24</b>
12.1 Generel løsningsform for 2 variable (parametrisering) . . . . .	25
12.2 Løsning af 1. ordens PDE . . . . .	26
12.3 Inhomogene ligninger og problemer . . . . .	26
12.4 Løsning af 2. ordens PDE . . . . .	27
12.4.1 Hyperbolske og elliptiske ligninger . . . . .	27
12.4.2 Parabolske ligninger . . . . .	27
12.5 Tabel over løsninger . . . . .	28
<b>13 Separation af de variable for PDE (kartesiske koordinater)</b>	<b>28</b>
13.1 Superposition af separerede løsninger . . . . .	29
13.2 Laplaces ligninger i polære koordinater . . . . .	29
13.2.1 Plane polarkoordinater . . . . .	29
13.2.2 Sfæriske koordinater . . . . .	30
<b>14 Kuglefunktioner</b>	<b>30</b>

## Del I

# Feltteori og vektoranalyse

## 1 Introduktion og notation

I disse noter bruges følgende notation for vektorer:

$$\vec{v} = \mathbf{v}, \quad \hat{i} = \mathbf{i}, \dots$$

hvor  $\mathbf{i}$  er standardenhedsvektoren i x-retningen, med koordinater  $(1, 0, 0)$ , ligeledes for  $\mathbf{j}$  og  $\mathbf{k}$  (y og z)

Vektorproduktet (krydsproduktet) af to vektorer i 3 dimensioner er givet ved en  $3 \times 3$  determinant:

$$\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad \mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$$
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (1.2)$$

hvor  $\theta$  er vinklen mellem de to vektorer.

For vektorer kun med  $x$ - og  $y$ -komponenter bliver produktet

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = (A_x B_y - A_y B_x) \mathbf{k} \quad (1.3)$$

### 1.1 Felter generelt

Felter er en konstruktion, hvor der til ethvert punkt knyttes en eller anden værdi (en skalar eller en vektor). Disse felter kan også variere i tiden, men hvis de ikke gør dette, kaldes de for **stationære**.

#### 1.1.1 Skalarfelt

Med et skalarfelt menes, at der til ethvert punkt i rummet  $(x, y, z)$  knyttes en værdi  $\beta$ . Dette kan da opfattes som en almindelig funktion af flere variable:

$$\beta = \beta(x, y, z, t)$$

I rummet kan der tegne flader med en konstant værdi af  $\beta$ , kaldet ækviskalarflader (niveauflader fra MatIntro). Disse betegnes:

$$\beta(x, y, z) = \beta_0 = \text{konstant}$$

Hermed kan  $z$  findes som en funktion af  $x$ ,  $y$  og  $\beta_0$ :  $z = z(x, y, \beta_0)$ .

En måde at plotte 3d-flader i et 2d-koordinatsystem, er ved at tegne konturlinjer, hvor én værdi (eksempelvis  $z$  eller  $\beta_0$ ) indtegnes ved hver konturlinje.

Eksempler på skalarfelter, der ikke er stationære, er temperatur eller tryk, hvor disse ændres både forskellige steder på jordkloden, samt i højden over jordoverfladen, og tiden.

### Skalering

I stedet for at beskrive ethvert punkt med SI-enheder, kan det nogle gange være gavnligt, at gøre det i en anden målestok, der er knyttet til fænomenet man nu beskriver. Eksempelvis kan  $x$  og  $y$  til højden af et bjerg beskrives ved radius  $R$  af bjerget. Her skalerer man så feltet, så akseindelingene bliver:

$$x^* = \frac{x}{R}, \quad y^* = \frac{y}{R} \quad (1.4)$$

Dette har fordelen at være enhedsløst, idet både  $x$ ,  $y$  og  $R$  har samme enhed (som oftest meter), hvilket kan forenkle nogle udtryk. Eksempelvis bliver et idealiseret, isoleret bjerg til:

$$h = \frac{h_0}{1 + \frac{x^2+y^2}{R^2}} \rightarrow h = \frac{h_0}{1 + x^{*2} + y^{*2}}$$

Skaleres højden så  $h^* = h/h_0$ , bliver formlen endnu enklere:

$$h^* = \frac{1}{1 + x^{*2} + y^{*2}}$$

### 1.1.2 Vektorfelt

Til et vektorfelt knyttes der, som navnet antyder, en entydig vektor, til ethvert punkt i rummet. Disse vektorer afhænger altså af positionen (og tiden, hvis feltet ikke er stationært), og der kan ikke "bare" rykkes rundt på dem. Vektorfeltet kan da opfattes som en funktion:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z, t)$$

Som oftest snakkes der om enten *strømfelter* eller *kraftfelter*, hvor den første beskriver strømmingen i et medium (vindhastighed, vandstrømning og lignende), mens den anden beskriver kraften i ethvert punkt (elektriske/magnetiske felter, tyngdefelter).

## 1.2 Taylor-approximation for to variable

Taylor-approximationen for én variabel kendes, og er givet ved summen:

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (1.5)$$

Hvor  $a$  er udviklingspunktet,  $n$  er graden og  $f^{(k)}$  er den  $k$ 'te afledte ( $f^{(0)}(a) = f(a)$ )

For to variable bliver andenordensapproximationen ( $n = 2$ ) om punktet  $(x_0, y_0)$  til

$$\begin{aligned} T_n f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)_{x_0, y_0} (x - x_0) + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_0, y_0} (y - y_0) + \\ & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)_{x_0, y_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)_{x_0, y_0} (y - y_0)^2 + \\ & \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)_{x_0, y_0} (x - x_0)(y - y_0) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Læg mærke til det sidste led, hvor der *ikke* indgår  $1/2!$  Dette er fordi der er to led med samme form, fordi  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ .

Ud fra dette, kan det ses, hvordan Taylor-approximationen fungerer for 3 variable (i hvert fald for  $n = 1$ : der kommer 4 led, i stedet for 3. Ét med hver variabel, plus funktionsværdien i udviklingspunktet)

## 1.3 Strømlinjer og feltlinjer

Feltlinjer er linjer hvor feltvektorerne altid tangerer linjen. Det er kun muligt at lave kontinuerlige feltlinjer hvis der er tale om et kontinuerligt felt (og der dermed er en gradvis ændring i vektorværdierne). Strømlinjer er specielbetegnelsen, når der er tale om et strømhastighedsfelt.

I et **todimensionalt, stationært** strømhastighedsfelt, hvor strømhastighedsvektoren er givet ved

$$\mathbf{v} = v_x(x, y)\mathbf{i} + v_y(x, y)\mathbf{j} \quad (1.7)$$

hvor  $v_x$  og  $v_y$  er vektorkomponenterne i  $x$ - og  $y$ -retningen, og som afhænger af rumkoordinaterne. For en strømlinje gælder at

$$v_x dy = v_y dx \quad (1.8)$$

Der integreres henholdsvis med hensyn til  $y$  og  $x$ , hvormed et udtryk for strøm-linjerne kan findes.

## 2 Vektorfluks, cirkulation og strømfunktionen

### 2.1 Vektorfluks

Vektorfluksen  $Q$  er et mål for, hvor stor en strømning der er, gennem en flade  $\sigma$ . Fladen inddeles i  $N$  fladeelementer, hvor  $\Delta\sigma_i$  er arealet af fladeelementet,  $\mathbf{n}_i$  er fladenormalen til dette fladeelement og  $\mathbf{v}_i$  er strømhastigheden gennem elementet. Den samlede vektorfluks er da summen af vektorfluksen for alle de små fladeelementer:

$$Q = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_i \Delta\sigma_i \quad (2.1)$$

Lader vi arealet af fladeelementet gå mod 0, bliver denne sum til et fladeintegral:

$$Q = \int_{\sigma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (2.2)$$

$Q$  er da volumenstrømmen/vektorfluksen for strømmen  $\mathbf{v}$  gennem fladen  $\sigma$ . Denne har enheden  $m^3/s$ .

### 2.2 Cirkulation

For en lukket kurve  $\lambda$  lader vi  $\Delta\mathbf{r}_i$  beskrive et lille vektorielt buelement af kurven, og  $\mathbf{v}_i$  beskrive vektorstrømmen gennem dette buelement. Hvis der er  $N$  buelementer i kurven defineres cirkulationen  $C$  ved summen af  $N$  prikprodukter af vektoriale buelementer  $\Delta\mathbf{r}_i$  og strømvektoren  $\mathbf{v}_i$ :

$$C = \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i \cdot \Delta\mathbf{r}_i \quad (2.3)$$

Lader vi antallet af buelementer gå mod uendeligt, og lader hvert buelements længde gå mod 0, vil dette blive til et kurveintegral (regnes i positiv omløbsretning):

$$C = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (2.4)$$

### 2.3 $\nabla$ -operatoren

$\nabla$ -operatoren (nabla-operatoren), der blandt andet bruges til at beskrive gradienten, kan opfattes som en vektor:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.5)$$

Nogle regneregler for denne (egentlig bare de almindelige regneregler for differentiation) er:

$$\nabla(\kappa + \beta) = \nabla\kappa + \nabla\beta \quad (2.6)$$

$$\nabla(\kappa\beta) = \kappa\nabla\beta + \beta\nabla\kappa \quad (2.7)$$

$$\nabla\left(\frac{1}{\beta}\right) = -\frac{1}{\beta^2} \nabla\beta \quad (2.8)$$

$$\nabla \cdot (\kappa \mathbf{A}) = \nabla\kappa \cdot \mathbf{A} + \kappa \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (2.9)$$

$$\nabla \times (\kappa \mathbf{A}) = \nabla\kappa \times \mathbf{A} + \kappa \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.10)$$

#### 2.3.1 Gradienten

Gradienten af et skalarfelt er en vektor, der har de partielt afledte, med hensyn til hver koordinat, som sine komponenter:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z} \mathbf{k} \quad (2.11)$$

Denne kan også ses som  $\nabla$ -vektoren ganget med skalar  $\beta$ :

$$\nabla\beta = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \beta = \frac{\partial\beta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z} \mathbf{k}$$

(Det er lidt omsonst, jeg ved det godt, men det illustrerer pointen)

Ved at tage prikproduktet af gradienten og en retningsvektor fås tilvæksten i gradientvektoren:

$$\Delta\beta = \nabla\beta \cdot \Delta\mathbf{r}$$

Lades  $\Delta\mathbf{r} \rightarrow 0$ , fås det *totale differentiale* af  $\nabla\beta$ :

$$d\beta = \nabla\beta \cdot d\mathbf{r} \quad (2.12)$$

Gradientvektoren har følgende egenskaber:

- Den står normalt på ækviskalarflader
- Den peger mod større værdier af skalar
- Den angiver stigningen af skalarværdien per længdeenhed i den retning, hvor øgningen er størst (hældningskoefficienten for den tredimensionelle linje, der går gennem punktet, i retning af gradientvektoren)

### Retningsaffledede

Ændringen i skalarværdien i en hvilken som helst retning  $\mathbf{r}$  kan findes ved prikproduktet af gradienten og en enhedsvektor  $\mathbf{a}$ , med samme retning som  $\mathbf{r}$ :

$$\frac{\partial\beta}{\partial r} = \mathbf{a} \cdot \nabla\beta \quad (2.13)$$

### Sådan findes $\beta$ , når $\nabla\beta$ kendes

Hvis gradienten til et skalarfelt kendes, kan skalarfeltet findes ved hjælp af integration - lige som for funktioner af én variabel. Metoden er en lille smule anderledes for flere variable, men ideen er som følger.

Gradienten  $\nabla\beta = \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\beta}{\partial z}\mathbf{k}\right)$  kendes, og skalarfeltet findes ved at integrere hver koordinat af gradienten med hensyn til dennes koordinat, sætte dem lig med hinanden og løse ligningen:

$$\beta = \int \frac{\partial\beta}{\partial x} dx = \int \frac{\partial\beta}{\partial y} dy = \int \frac{\partial\beta}{\partial z} dz \quad (2.14)$$

Forskellen kommer så i integrationskonstanten. For i den venstre del er konstanten en funktion af  $y$  og  $z$  (da disse jo er konstante, når der differentieres med hensyn til  $x$  igen). Ligeledes gør sig gældende for de to andre dele af ligningen.

Hvis  $\beta_x(x, y, z)$  betegner en vilkårlig stamfunktionen af  $\frac{\partial\beta}{\partial x}$ , og lignende for andre variable, kan ligningen skrives som følger

$$\beta_x(x, y, z) + f_1(y, z) = \beta_y(x, y, z) + f_2(x, z) = \beta_z(x, y, z) + f_3(x, y) \quad (2.15)$$

Integrationskonstanterne ( $f_1$ , etc.) behøver selvfølgelig ikke at afhænge af begge (eller bare én) variabel: de kan sagtens være lig  $C$ , den normale integrationskonstant.

Et eksempel på denne teknik er følgende gradient:  $\nabla\beta = (yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$ . Ligningen bliver som følger:

$$\begin{aligned} \beta &= \int yz dx = \int xz dy = \int xy dz \\ &= xyz + f_1(y, z) = xyz + f_2(x, z) = xyz + f_3(x, y) \end{aligned}$$

Her ses da, at hvis  $f_1 = f_2 = f_3 = C$  er ligningen løst, og skalarfeltet er  $\beta = xyz + C$ .

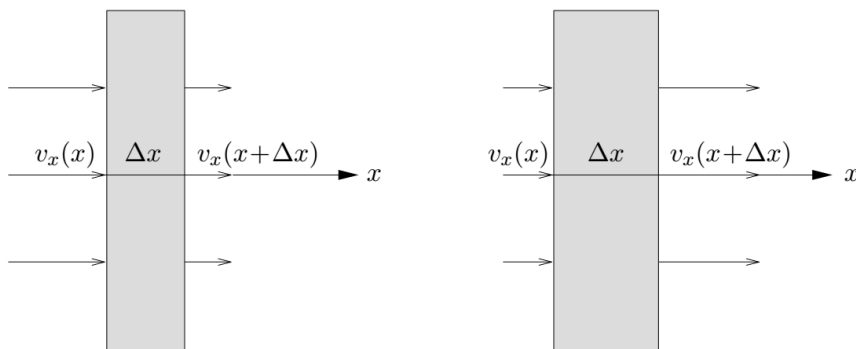
### 2.3.2 Divergens

Divergensen  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  af et strømfelt er givet ved prikproduktet mellem nabla-operatoren og strømfunktionen. Denne bruges i udregningen af vektorfluksen gennem en flade.

Udregningen af denne er som følger. For et strømfelt  $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ , hvor  $v_x, v_y, v_z$  er funktioner af rumkoordinaterne  $x, y$  og  $z$ . Prikproduktet er da:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.16)$$

Divergensen er altså en skalarstørrelse, og den beskriver vektorfluksen gennem en flade. En måde at se dette på, er at hvis  $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$  er der en *udstrømning*, hvilket kaldes **ekspansion**, mens hvis  $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$  er der en *indstrømning*, hvilket kaldes **kontraktion/konvergens**. For et endimensionelt vektorfelt kan dette illustreres som følger:



Figur 1: Illustration af vektorfluksen. Til venstre er  $\nabla \cdot \mathbf{v} < 0$  og altså *kontraktion*. Til højre er  $\nabla \cdot \mathbf{v} > 0$  og altså *ekspansion*. Billedet er fra bogen Feltteori og Vektoranalyse, side 67.

### 2.3.3 Rotation/virvling

Virvlingen / rotationen  $\nabla \times \mathbf{v}$  af et strømfelt er givet ved krydsproduktet mellem nabla-operatoren og en strømfunktion. Denne bruges til at udregne cirkulationen gennem en kurve.

Udregningen er som følger.  $\mathbf{v}$  betegner strømfunktionen (som for divergens). Rotationen er da krydsproduktet mellem disse:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (2.17)$$

For todimensionale strømfunktioner har denne kun en komponent i  $z$ -regningen. Givet ved:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (2.18)$$

Rotationen i et vektorfelt beskriver vinkelhastigheden (deraf navnet rotation). Faktisk er vinkelhastighedsvektoren givet ved

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \quad (2.19)$$

## 2.4 Strømfunktionen

I todimensionale **divergensfrie** strømfelter ( $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ ) kan en **strømfunktion** defineres ved følgende relationer:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.20)$$

Og altså:

$$\psi(x, y) = - \int v_x \, dy = \int v_y \, dx \quad (2.21)$$

Det ses, at denne ligner ligningen for strømlinjer, og der er da også den relation at strømlinjerne er givet ved

$$\psi(x, y) = \psi_0 \quad (2.22)$$

## 3 Kurve-, flade-, og volumenintegraler

### 3.1 Kurveintegraler

Normalt integreres der over  $x$ -aksen, men man kan også integrere over en kurve i planen eller rummet.  $\mathbf{r}(t)$  betegner da positionsvektoren for en partikel, der bevæger sig langs kurven. Ses der på et lille kurveelement  $d\mathbf{r}$  er dette givet ved:

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k} \quad (3.1)$$

Koordinaterne  $x$ ,  $y$  og  $z$  kan udtrykkes ved parametren  $t$ , og følgende udtryk kan fås for differentialet  $dx$  etc:

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) \quad \Leftrightarrow \quad dx = x'(t) dt$$

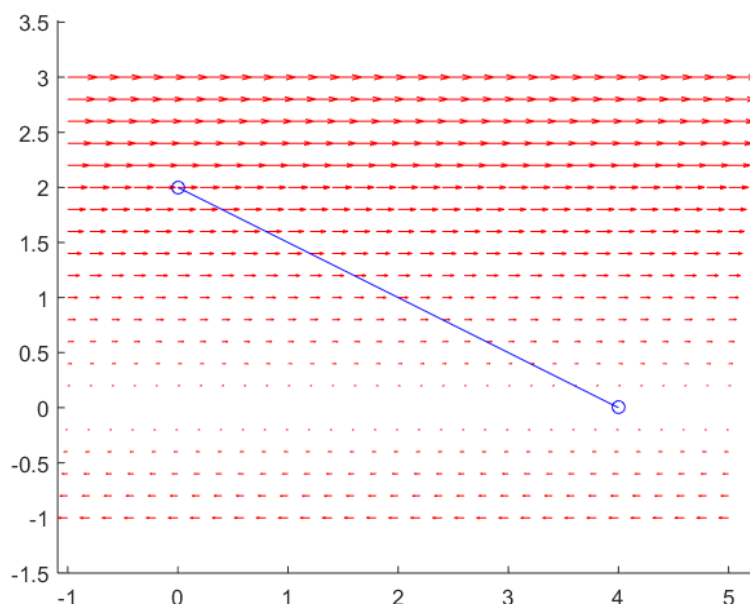
Sættes dette udtryk ind i (3.1) fås følgende udtryk for kurveelementet:

$$d\mathbf{r} = x'(t) dt \mathbf{i} + y'(t) dt \mathbf{j} + z'(t) dt \mathbf{k} \quad (3.2)$$

Hermed er  $d\mathbf{r}$  udtrykt kun ved variabelen  $t$ . Dette kaldes parametriseringen, og hvis denne ikke opgives, skal man selv vælge en hensigtsmæssig en af slagsen. Alle (korrekte) parametriseringer giver det samme resultat, men nogle kan være sværere rent regneteknisk.

#### Eksempel på parametrisering og udregning af linjeintegral

Lad os sige, at vi skal udregne linjeintegralet i en ret linje fra punktet  $(4, 0)$  til punktet  $(0, 2)$ , i vektorfeltet  $\mathbf{v} = y\mathbf{i}$ . Integralet, der skal udregnes er  $\int_K \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$ , og situationen ser således ud i et plot:



Figur 2: Illustration af linjeintegral i vektorfelt.  $\mathbf{v} = y\mathbf{i}$  (rødt) og der skal integreres fra  $(4, 0)$  til  $(0, 2)$  (blåt). Figur lavet i MATLAB, med mit »vektorplotscript«, der kan [downloades her](#).

Her skal da findes et udtryk for linjestykket  $d\mathbf{r}$ . Her kan man vælge at opfatte det som en ret linje i planen, og sætte  $x = t$  og  $y = -\frac{1}{2}x + 2 = -\frac{1}{2}t + 2$ . Da er  $(4, 0)$  givet ved  $t = 4$  og  $(0, 2)$  givet ved  $t = 0$ . Da skal man tage integralet fra  $t = 4$  til  $t = 0$  (eller det negative integral fra  $t = 0$  til  $t = 4$ ).

En anden parametrisering er at lade  $x = 4 - t$  og  $y = \frac{1}{2}t$ . Her svarer  $(4, 0)$  til  $t = 0$  og  $(0, 2)$  svarer til  $t = 4$ . Der skal altså integreres fra  $t = 0$  til  $t = 4$ .

Med den første parametrisering fås:

$$d\mathbf{r} = x'(t) dt \mathbf{i} + y'(t) dt \mathbf{j} = dt \mathbf{i} - \frac{1}{2} dt \mathbf{j} \quad (3.3)$$



Og integralet bliver

$$\int_K \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_K \mathbf{v} (dt \mathbf{i} + 1/2 dt \mathbf{j}) = \int_K v_x dt + \int_K v_y 1/2 dt \quad (3.4)$$

Herfra indsættes vektorfeltets komponenter,  $x$  og  $y$  substitueres, så der kun står et udtryk med  $t$ , og grænserne indsættes. Dette giver

$$\int_{t=4}^{t=0} y dt + \int_{t=4}^{t=0} 0 \cdot -1/2 dt = \int_{t=4}^{t=0} -t/2 + 2 dt = [-t^2/4 + 2t]_4^0 = 0 - (-4 + 8) = -4 \quad (3.5)$$

Med den anden parametrisering bliver smøren:

$$d\mathbf{r} = -dt \mathbf{i} + \frac{1}{2} dt \mathbf{j}, \quad \int_K \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t=0}^{t=4} y(-dt) = \int_0^4 -\frac{1}{2}t dt = [-t^2/4]_0^4 = -4 \quad (3.6)$$

## Typer af kurveintegraler

Her defineres to typer kurveintegraler: et kurveintegral for skalarfeltet  $\beta$  og et for vektorfeltet  $\mathbf{A}$ , langs kurven  $K$ :

$$\int_K \beta d\mathbf{r} = \mathbf{i} \int_K \beta dx + \mathbf{j} \int_K \beta dy + \mathbf{k} \int_K \beta dz \quad (3.7)$$

$$\int_K \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_K A_1 dx + \int_K A_2 dy + \int_K A_3 dz \quad (3.8)$$

Disse resultater opnås ved at indsætte (3.1) for  $d\mathbf{r}$ , og adskille integralerne. Integreres der over en lukket kurve  $\lambda$  bruges følgende symbol, og der integreres altid i positiv omløbsretning:

$$\oint_{\lambda} \beta d\mathbf{r} \quad (3.9)$$

## Fysiske fortolkninger af kurveintegraler og betydning af kurven

Kurveintegration over en skalar kan ses som arealet af et badeforhæng, der følger en meget underligt udformet brusekabine (kurven), i en bygning med et meget underligt tag (skalarfeltet). Kurven kan sno sig mangt og mærkeligt, og taget bugter sig i bakkedal.

Kurveintegration over en vektor kan ses som et mål for, hvor meget medvind du oplever, hvis du bevæger dig langs kurven. Dette indses da prikproduktet er et udtryk for, hvor parallelle to vektorer er (i dette tilfælde din bevægelsesretning  $d\mathbf{r}$  og vindretningen  $\mathbf{A}$ ). Er de fuldt parallelle, har prikproduktet en maksimumsværdi, og du har fuld medvind. Er de vinkelret er prikproduktet 0, og der er ingen medvind. Er de derimod antiparallelle har prikproduktet en maksimal *negativ* værdi, og du har fuld modvind. I eksemplet ovenfor var der modvind langs hele integralet, og resultatet blev da også negativt.

Det ses, at kurveintegralernes værdi afhænger af hvilken kurve man følger. Det kan godt være, at badeforhænget er lige langt, om det er i et hus eller et andet - men højden til loftet kan ændre sig. Ligeledes bevæger du dig måske lige langt på vej hjem ad to veje, men på den ene er der vindstille og den anden vind af orkanstyrke.

### 3.1.1 Kurveintegraler, gradientvektorer og konservative kraftfelter (rotationsfrie felter)

I rotationsfrie vektorfelter, hvor  $\nabla \times \mathbf{v} = 0$  kan vektorfeltet altid skrives som gradienten til en skalar  $\mathbf{v} = \nabla\beta$ . Her vil kurveintegraler være givet ved værdien af gradienten i start og slutpunktet:

$$\int_K \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \int_K \nabla\beta \cdot d\mathbf{r} = \int_{\beta_1}^{\beta_2} d\beta = \beta_2 - \beta_1 \quad (3.10)$$

hvilket følger af, at  $\nabla\beta \cdot d\mathbf{r} = d\beta$  (se ligning (2.12)). Dette betyder også, at i rotationsfrie felter, vil kurveintegralet om en lukket kurve *altid* være lig 0:

$$\oint_{\lambda} \nabla\beta \cdot d\mathbf{r} = \int_{\beta_1}^{\beta_1} d\beta = \beta_1 - \beta_1 = 0 \quad (3.11)$$

Dette betyder også, at cirkulationen  $C$  om enhver lukket kurve, i et rotationsfrit felt, vil være lig 0.

Rotationsfrie kraftfelter kaldes konservative. Her afhænger kurveintegralets værdi altså *ikke* af kurven, og er altså et specialtilfælde. Et eksempel er gravitationsfelter, hvor ændringen i den potentielle energi ikke afhænger af vejen man har bevæget sig, men kun af ændringen i højde.

### 3.1.2 Greens sætning (kurve til flade)

Greens sætning er en måde at udregne et kurveintegral ved et fladeintegral. Sætningen udnytter, at cirkulationen af et vektorfelt i planen, om et lille kvadrat, er givet ved:

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \Delta\sigma_i = \oint_{\Delta\lambda_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

hvor  $\mathbf{n} = \mathbf{k}$  er normalvektoren for planen,  $\Delta\sigma_i$  er arealet af kvadratet, og  $\Delta\lambda_i$  er kurven, der omgrænser kvadratet. En kurve kan tænkes opbygget af en masse kvadrater af denne type, og summen af alle disse kvadraters cirkulation er givet ved:

$$\sum_{i=1}^N (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^N \oint_{\Delta\lambda_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}$$

For to kvadrater, ved siden af hinanden, vil kurveintegralerne for siden der støder op mod hinanden gå ud med hinanden, da det er samme kurve, men i modsat omløbsretning. Dette betyder, at det kun er de kvadrater, der har en fri side, hvis kurveintegral bidrager til udregningen. Lades  $\Delta\sigma_i \rightarrow 0$  og  $N \rightarrow \infty$ , vil venstre side af forrige ligning blive til fladeintegralet over den flade, som kurven afgrænser; mens højre side vil blive til kurveintegralet for alle de "frie" sider af kvadraterne, der netop bliver til kurven selv.

Resultatet er Greens sætning, der kobler fladeintegralet af et vektorfelts rotation sammen med kurveintegralet af et vektorfelt:

$$\int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.12)$$

Igen,  $\lambda$  er kurven, der afgrænser arealet  $\sigma$ ,  $\mathbf{v}$  er vektorfeltet og  $\mathbf{n}$  er fladenormalen til planen ( $\mathbf{k}$ ).

### 3.1.3 Stokes' sætning (kurve til flade i 3 dimensioner)

Stokes sætning er en generalisering af Greens sætning, så denne virker i 3 dimensioner, med krumme flader. Selve ligningen er identisk:

$$\int_{\sigma} (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \oint_{\lambda} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.13)$$

forskellen er her, at  $\mathbf{n}$  generelt set *ikke* er lig  $\mathbf{k}$ , da overfladen er krum.

## 3.2 Flade- og volumenintegraler

### 3.2.1 Simple flade- og volumenintegraler (fra Funktioner af Flere Variable)

Dette afsnit er noter fra bogen "Funktioner af Flere Variable", af T. A. Kro, som er pensum i kurset MatIntro.

Fladeintegraler svarer til at finde volumen af et rum, med et loft afgrænset af en arbitrær funktion  $f(x, y)$ , mens volumenintegraler svarer til at finde massen af en volumen med en arbitrær massefylde  $f(x, y, z)$ . Til udregningen af disse ses der på begrebet "simple domæner", der gør denne udregning betydeligt lettere.

For fladeintegraler, beskrives to former for simple mængder:

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq o(x)\} \quad (3.14)$$

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, v(y) \leq x \leq h(y)\} \quad (3.15)$$

hvor  $u, o: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  og  $v, h: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , og  $v, h, u, o$  står for henholdsvis venstre, højre, under og over. Yderligere betingelser er, at  $u \leq o$ ,  $v \leq h$ , og at disse er kontinuerte funktioner.

For volumenintegraler defineres følgende:

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq o(x), |b(x, y) \leq z \leq t(x, y)\} \quad (3.16)$$

hvor  $u, o$  er defineret som i planen, og

$$t, b: \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq o(x)\} \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.17)$$

og  $t, b$  står for top og bund. Yderligere skal der gælde, at  $b(x, y) \leq t(x, y)$ , og at begge funktioner er kontinuerte.

Ligesom ved tilfældet i to dimensioner, kan rollerne for  $x, y, z$  byttes om i tre dimensioner.

Samlingen af disse mængder i planen og rummet, kaldes for **simple domæner**, og flade/volumenintegraler kan løses som itererede integraler af formen.

1. Hvis  $f$  er en funktion af to variable, og  $D$  er på formen (3.14), gælder

$$\int_D f(x, y) \, dA = \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{y=u(x)}^{y=o(x)} f(x, y) \, dy \right) dx \quad (3.18)$$

2. Hvis  $f$  er en funktion af to variable, og  $D$  er på formen (3.15), gælder

$$\int_D f(x, y) \, dA = \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{x=v(y)}^{x=h(y)} f(x, y) \, dx \right) dy \quad (3.19)$$

3. Hvis  $f$  er en funktion af tre variable, og  $R$  er på formen (3.16), gælder

$$\int_R f(x, y, z) \, dV = \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{y=u(x)}^{y=o(x)} \left[ \int_{z=b(x,y)}^{z=t(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \right) dx \quad (3.20)$$

Der gælder selvfølgelig tilsvarende itererede integraler, med rollerne for  $x, y$  og  $z$  ombyttet.

Hvis  $D$  kan skrives både på formen (3.14) og (3.15) kan begge itererede integraler bruges (eksempelvis et rektangel), ligeledes for  $R$ .

### 3.2.2 Volumenintegraler og Gauss' sætning (volumen til flade)

I stil med Greens og Stokes sætninger, så tænker vi os et afgrænset volumen  $\tau$ , indenfor en flade  $\sigma$ . Denne placeres i et vektorfelt  $\mathbf{A}$ , og indeles i et stort antal små terninger, med overfladen  $\Delta\sigma_i$  og volumenet  $\Delta\tau_i$ . Fluksen gennem overfladen for hver af disse terninger er givet ved:

$$(\nabla \cdot \mathbf{A})\Delta\tau_i = \int_{\Delta\sigma_i} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma.$$

Da fluksen af én kasses side er positiv, mens naboens samme side er negativ, går alle disse ud med hinanden, og kun de sider af kasser, der ikke har nogen naboer (som altså svarer til overfladen af volumenet) bidrager til den samlede fluks. Summeres alle disse bidrag, og lades antallet af kasser  $N \rightarrow \infty$  og  $\Delta\sigma_i \rightarrow 0$ , vil denne sum blive til et integral (præcis som ved de foregående sætninger). Resultatet er:

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{A} \, d\tau = \int_{\sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \quad (3.21)$$

Denne sætning siger, at den totale fluks over en overflade (højre side) er lig integralet af divergensen, over den volumen, som fladen afgrænser (venstre side).

Lignende sætninger fås for gradientvektoren og rotationsvektoren:

$$\int_{\tau} \nabla \beta \, d\tau = \int_{\sigma} \beta \mathbf{n} \, d\sigma \quad (3.22)$$

$$\int_{\tau} \nabla \times \mathbf{A} \, d\tau = - \int_{\sigma} \mathbf{A} \times \mathbf{n} \, d\sigma \quad (3.23)$$

## 4 Polarkoordinater

Polarkoordinater er en anden form for koordinater (en anden basis, om man vil), hvor de alle har til fælles, at de bruger radius fra origo ud til punktet i planen, samt vinklen fra  $x$ -aksen og ud til punktet, for at beskrive punktets lokation (i stedet for komponenterne af radius i  $x$ - og  $y$ -retning).

## 4.1 Plane polarkoordinater

For plane polarkoordinater ( $\mathbb{R}^2$ ), bruges som sagt en radius  $r$  og vinkel  $\theta$ , for at beskrive et punkts lokation i planen. Transformationsligningerne er som følger:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (4.1)$$

Og enhedsvektorerne er givet ved transformationsligningerne:

$$\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta \quad (4.2)$$

$$\mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{i}_r + \cos \theta \mathbf{i}_\theta \quad (4.3)$$

Det vil sige, at et vektorfelt i polarkoordinater  $\mathbf{v} = v_r \mathbf{i}_r + v_\theta \mathbf{i}_\theta$  kan transformeres til kartesiske koordinater ved

$$v_x = v_r \cos \theta - v_\theta \sin \theta \quad (4.4)$$

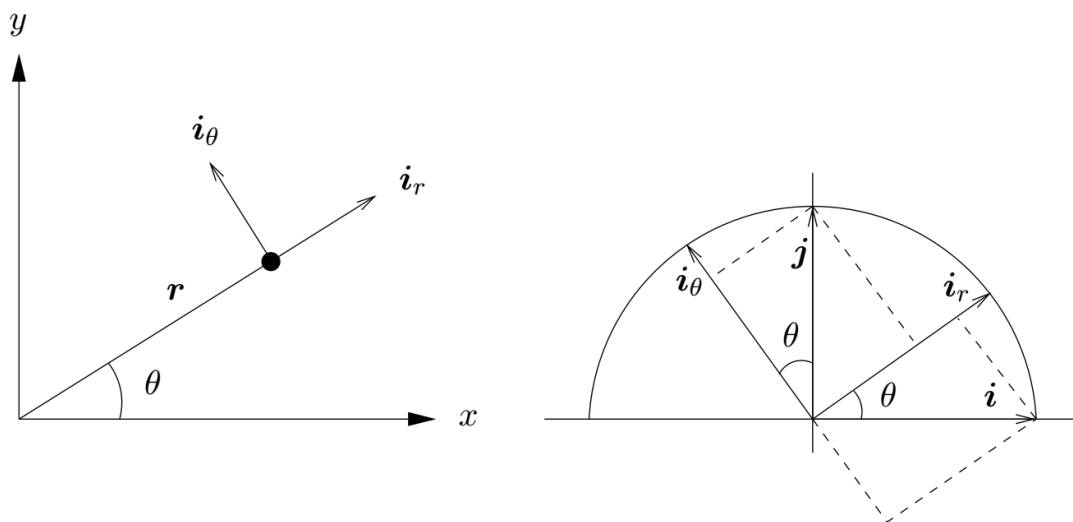
$$v_y = v_r \sin \theta + v_\theta \cos \theta \quad (4.5)$$

Omvendt er transformationen (dette svarer til den inverse matrix af transformationen fra polar til kartesisk):

$$\mathbf{i}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{i}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \quad (4.7)$$

Vektorfeltets komponenter i polarkoordinater findes på lignende vis som den omvendte procedure. En illustration af definitionen på polarkoordinater og enhedsvektorerne ses herunder



Figur 3: Illustration af definitionen på polarkoordinater, samt definitionen af enhedsvektorerne. Fra FV side 115

### Gradientvektor, rotation og divergens

Gradienten i plane polarkoordinater er givet ved

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \quad (4.8)$$

Divergens:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \quad (4.9)$$

Og rotationen

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{k} \quad (4.10)$$

Hvor  $A_r$  og  $A_\theta$  er komponenterne for vektorfeltet  $\mathbf{A}$ , og  $\mathbf{k}$  er normalvektoren til planen.

Hvis man kender gradienten i polarkoordinater, kan skalarfeltet findes ved

$$\beta = \int \frac{\partial \beta}{\partial r} dr = \int r \frac{\partial \beta}{\partial \theta} d\theta \quad (4.11)$$

## 4.2 Cylindriske koordinater

Cylindriske koordinater er en basis for  $\mathbb{R}^3$ , hvor to af koordinaterne udgøres af de plane polarkoordinater, mens den tredje udgøres af højden  $z$ .

Koordinaterne er altså  $r$ ,  $\theta$  og  $z$ , og den eneste reelle forskel på disse to koordinatsystemer tilførelsen af  $z$ -koordinaten. Dermed er enhedsvektoren for denne tredje dimension

$$\mathbf{i}_z = \mathbf{k}$$

En illustration af koordinatsystemet og enhedsvektorer ses herunder

### Gradientvektor, rotation og divergens

Gradienten er givet ved

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{\partial \beta}{\partial z} \mathbf{i}_z \quad (4.12)$$

Og divergensen

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (4.13)$$

Hvor  $A_z$  er den tredje komponent i vektorfeltet  $\mathbf{A}$

## 4.3 Sfæriske koordinater

Sfæriske koordinater bruger følgende koordinater  $r$ ,  $\theta$  og  $\varphi$ , med enhedsvektorerne  $\mathbf{i}_r$ ,  $\mathbf{i}_\theta$  og  $\mathbf{i}_\varphi$ , der henholdsvis beskriver radial, sonal og asimutal retning.

$r$  er radius ud til punktet (i tre dimensioner), mens  $\varphi$  er vinklen fra  $x$ -aksen i  $xy$ -planen (og denne har dermed overtaget  $\theta$ 's plads fra polarkoordinaterne), og  $\theta$  er vinklen fra polen, og svarer altså til vinklen mellem  $r$  og  $z$ -aksen. Dette er illustreret i figuren herunder.

Transformationsligningerne er som følger:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{i} = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{i}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{i}_\theta - \sin \varphi \mathbf{i}_\varphi \quad (4.15)$$

$$\mathbf{j} = \sin \theta \sin \varphi \mathbf{i}_r + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{i}_\theta + \cos \varphi \mathbf{i}_\varphi \quad (4.16)$$

$$\mathbf{k} = \cos \theta \mathbf{i}_r - \sin \theta \mathbf{i}_\theta \quad (4.17)$$

### Gradientvektor, rotation og divergens

Gradienten

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial r} \mathbf{i}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi \quad (4.18)$$

Divergensen

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (4.19)$$

Og rotationen

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{\mathbf{i}_r}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] + \frac{\mathbf{i}_\theta}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] + \frac{\mathbf{i}_\varphi}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \quad (4.20)$$

## 5 Divergens- og rotationsfrie felter

### 5.1 Hastighedspotentiale og Laplace-operatoren $\nabla^2$

**Rotationsfrie** felter kan altid skrives som gradienten til et eller andet skalarfelt. Skalarfeltet til sådan et strømfelt kaldes for *hastighedspotentialet*  $\phi$ , og relationen skrives som følger:

$$\mathbf{v} = \nabla\phi \quad (5.1)$$

Hvilket giver at

$$v_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (5.2)$$

Er feltet også **divergensfrit** gælder at:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi = 0 \quad (5.3)$$

$\nabla^2$  kaldes for **Laplaceoperatoren**. I kartesiske og polare koordinater er denne:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (5.4)$$

Ligningen (5.3) kaldes for *Laplaceligningen*, og alle felter der **divergens- og rotationsfrie** opfylder denne, og kaldes da for **Laplaciske felter**.

I to dimensionale Laplaciske felter fås følgende sammenhæng mellem hastighedspotentialet  $\phi$  og strømfunktionen  $\psi$ :

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \nabla\phi = \mathbf{k} \times \nabla\psi \quad (5.5)$$

Disse ligninger kaldes for *Cauchy-Riemann relationerne*. I polarkoordinater er disse:

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial \theta} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (5.6)$$

Disse relationer siger også, at ækviskalarlinjerne for  $\phi$  og  $\psi$  står ortogonale på hinanden, hvor  $\psi$  beskriver retningen af gradientvektoren  $\nabla\phi$  (som beskrevet i afsnit 2.3.1)

#### 5.1.1 Stagnationsstrøm

I strømfelter kaldes punkter, hvor  $\mathbf{v} = 0$ , for **stagnationspunkter**. Et eksempel er hastighedspotentialet, med tilhørende strømfunktion

$$\phi = \frac{A}{2}(x^2 - y^2), \quad \psi = -Axy \quad (5.7)$$

Strømlinjerne, hvor  $x = 0$  og/eller  $y = 0$  er nul, og der er altså to *stagnationslinjer*.

#### 5.1.2 Superposition af felter

Summen af to potentialstrømme (vektorfelter, der skrives som gradienten til et hastighedspotentiale) kaldes for superpositionen af de to individuelle felter.

Da er hastighedspotentialet, strømfunktionen og strømvektorerne givet ved:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2, \quad \psi = \psi_1 + \psi_2, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad (5.8)$$

Både divergensen og rotationen for de to individuelle felter er divergens- og rotationsfrie. Dermed er summen af dem også divergens- og rotationsfrie:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \nabla \cdot \mathbf{v}_2 = 0, \quad \nabla \times \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}_1 + \nabla \times \mathbf{v}_2 = 0$$

#### Retlinjet strøm

Retlinjet strøm, er hvor hastighedsvektoren har konstante koefficienter. Hastighedspotentialet og strømfunktionen er

$$\phi = v_x x + v_y y, \quad \psi = -v_x y + v_y x \quad (5.9)$$

Vinklen mellem den retlinjede strøm og  $x$ -aksen er givet ved

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x} \quad (5.10)$$

Dette felt er også et Laplacisk felt.

## Kilde og afløb

Disse felter behandles i polarkoordinater, og hastighedspotentialet og strømfunktionen er givet ved

$$\phi = A \ln r, \quad \psi = -A\theta, \quad \mathbf{v} = \frac{A}{r} \mathbf{i}_r \quad (5.11)$$

Hvor  $A$  er en konstant. Hvis  $A > 0$  kaldes feltet en *kilde*, mens hvis  $A < 0$  kaldes det et afløb.

Ud/indstrømningen fra/mod origo findes ved at integrere volumenstrømmen over en cirkel med radius  $r$ :

$$Q = \int_0^{2\pi} v_r r \, d\theta = 2\pi A \quad (5.12)$$

$Q$  kaldes også for *styrken* af kilden/afløbet (I nogle bøger kaldes  $A$  dog for styrken).

## Punkthvirvel

I en punkthvirvel strømvektorens komponenter byttet om, hvilket giver følgende hastighedspotentiale, strømfunktion og vektor:

$$\phi = A\theta, \quad \psi = A \ln r, \quad \mathbf{v} = \frac{A}{r} \mathbf{i}_\theta \quad (5.13)$$

Cirkulationen om en cirkel, med radius  $r$  og centrum i origo er givet ved

$$C = \int_0^{2\pi} v_\theta r \, d\theta = 2\pi A$$

Imens cirkulationen om enhver anden lukket kurve (som ikke omslutter origo) er lig 0 (da feltet er rotationsfrit).

## Spiralvirkel

En spiralvirkel er superpositionen af en punkthvirvel og et afløb. Hastighedspotentialet og strømfunktionen er givet ved:

$$\phi = -A_1 \ln r + A_2 \theta, \quad \psi = A_1 \theta + A_2 \ln r \quad (5.14)$$

## Dipolfelt

Et dipolfelt er summen af felterne for en kilde og et afløb, der ligger uendeligt tæt på hinanden. Dette svarer også til magnetfeltet skabt af en magnet. Hastighedspotentialet og strømfunktionen er givet ved:

$$\phi = \frac{Ax}{x^2 + y^2}, \quad \psi = \frac{Ay}{x^2 + y^2} \quad (5.15)$$

Dette er et dipolfelt med  $x$ -aksen som dipolakse. Sættes  $\phi = \frac{Ay}{x^2 + y^2}$  fås  $y$ -aksen som dipolaksen (Strømfunktionen bliver  $\psi = \frac{Ax}{x^2 + y^2}$ ).

# 6 Feltlinjer for fluider

Gasser og væsker opfører sig generelt på samme måde, hvor forskellen mellem dem er, at der er større afstand mellem molekyler i en gas, end i en væske. Da de opfører sig på samme måde, får de fællesbetegnelse *fluider*.

## 6.1 Partikeldifferentiation og acceleration

Partikeldifferentiation er en differentialoperator, der beskriver, hvordan en parameter  $\theta(\mathbf{r}, t)$  ændrer sig med tiden, i et strømfelt  $\mathbf{v}$ . Operatoren er givet ved.

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad (6.1)$$

Læg da mærke til, at der skrives et stort D i tælleren af brøken, for at skelne mellem partikeldifferentiation og almindelig differentiation. For parameteren  $\theta$  bliver det:

$$\frac{D\theta}{dt} = \frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta$$

$\theta$  kunne for eksempel betegne temperaturfeltet i atmosfæren, saltindholdet i havet eller lignende, og  $\frac{D\theta}{dt}$  vil da beskrive, hvordan denne ændres med tiden, i strømfeltet  $\mathbf{v}$  (atmosfæren eller havet, i disse tilfælde).

### Partikelacceleration

Hvor partikeldifferentiation beskriver en parameters ændring i tiden, beskriver partikelacceleration et hastighedsfelts ændring i tiden. Denne er givet ved

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} \quad (6.2)$$

Hvor  $\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}$  kaldes for *lokalaccelerationen* i feltet, og  $\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v}$  er givet ved

$$\mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = v_x \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial z} \quad (6.3)$$

og kaldes for den *konvektive acceleration* i feltet. Lokalaccelerationen er den lokale ændring i feltet, på stedet, mens den konvektive acceleration er grundet ændringer i hastighedsfeltet. Der er så at sige et tidsligt og rumligt bidrag til accelerationen.

For alle stationære felter (felter der altså *ikke* afhænger af tiden) vil lokalaccelerationen altid være 0 (netop da feltet er konstant i tiden).

## 6.2 Massebevarelse

Massen i et felt må være bevaret, da der ikke kan skabes eller ødelægges masse. Hvis strømhastigheden er givet ved  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  og massetætheden er givet ved  $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$ , fås følgende ligning

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (6.4)$$

Der skal være opfyldt i alle punkter i feltet, førend der er massebevarelsen. Denne ligning kaldes **kontinuitetsligningen**. Hvis der er konstant massetæthed  $\rho = \rho_0$ , reduceres ligningen til

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Altså må felter med konstant massetæthed være divergensfrie. Kontinuitetsligningen kan også omskrives til

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{dt} = -\nabla \cdot \mathbf{v} \quad (6.5)$$

Hvis alle partikler i feltet bevarer deres tæthed, når de flyder rundt (eksempelvis i atmosfæren og havet, hvor diffusion og blanding ikke spiller nogen stor rolle, så der ikke sker stor udveksling af varme og andre forhold). I sådan et tilfælde må hastighedsfeltet også være divergensfrit.

## 6.3 Bevægelsesligningen

Ved opskrivelse af Newtons anden lov for friktionsfri strøm af fluider i et tyngdefelt fås **Euler-ligningen** for fluider:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{g} \quad (6.6)$$

hvor venstre side er partikelaccelerationen,  $\rho$  er massetætheden,  $\nabla p$  er trykgradienten i væsken, og  $\mathbf{g}$  er tyngdeaccelerationen (i vektorform, som oftest givet ved  $\mathbf{g} = g\mathbf{k}$ ).



## 6.4 Bernoullis ligning

For en væske, hvor massetætheden er konstant (og strømfeltet dermed er divergensfrit), og hvor strømfeltet også er stationært, reduceres bevægelsesligningen til

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \frac{p}{\rho} - g\mathbf{k}$$

Denne kan omskrives til

$$\nabla \mathcal{H} + \mathbf{c} \times \mathbf{v} = 0$$

Hvor  $\mathcal{H} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + gz$  og  $\mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{v}$ . Da det sidste led altid står normalt på et bueelement fås det, at tilvæksten i  $\mathcal{H}$ , langs en strømlinje (og dermed et bueelement) er 0. Det betyder at  $\mathcal{H}$  er konstant, og følgende ligning fås:

$$\mathcal{H} = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + gz = \mathcal{H}_0 \quad (6.7)$$

som altså gælder langs strømlinjer. Denne ligning kaldes for **Bernoullis ligning** for en **inkompressibel væske** og  $\mathcal{H}_0$  kaldes for **Bernoullikonstanten**.

## 6.5 Varmetransport

Varmeindholdet af et stof, per volumenenhed er givet ved

$$\rho cT \quad (6.8)$$

hvor  $c$  er den specifikke varmekapacitet. Denne er egentlig ikke konstant, da den afhænger af tryk og temperatur, men over små temperatur- og trykændringer (som ved vanlige betingelser for vand og luft) er den stort set konstant.

Varmestrømmen per tidsenhed og fladeenhed er givet ved

$$\mathbf{H}_s = \rho cT \mathbf{v} \quad (6.9)$$

Denne kaldes også for den konvektive varmetransport. Der kan også udveksles varme ved varmeledning, hvor molekyler udveksler kinetisk energi ved sammenstød. Denne varmetransport er givet ved Fouriers lov, der er en empirisk lov:

$$\mathbf{H}_l = -k \nabla T \quad (6.10)$$

hvor  $k$  kaldes varmeledningstallet.

Den samlede varmetransport grundet strømning og ledning er da givet ved

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{H}_l \quad (6.11)$$

Generelt set er varmemstrømmingen meget større end varmeledningen, men hvis strømmingen er svag, er dette ikke sandt.

Ændringen i varmeindholdet inden for en afgrænset volumen skyldes den varmetransport der er gennem volumenets afgrænsningsflade, samt den varme der produceres eller absorberes inde i volumenet. Relationen udtrykkes ved følgende ligning:

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t}(\rho cT) \, d\tau + \int_{\sigma} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \int_{\tau} q \, d\tau$$

Hvor første led er ændringen i varmeindhold, andet led er varmetransporten og højre side af lighedstegnet er varmeproduktionen (eller absorberingen). Denne ligning kan omformes til

$$\int_{\tau} \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\rho cT) + \nabla \cdot (\rho cT \mathbf{v}) - \nabla \cdot (k \nabla T) - q \right] d\tau = 0 \quad (6.12)$$

Hvis densiteten, varmekapaciteten og varmeledningstallet er konstant fås

$$\int_{\tau} \left[ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T - \kappa \nabla^2 T - \frac{q}{\rho c} \right] d\tau = 0 \quad (6.13)$$

Hvor  $\kappa = \frac{k}{\rho c}$  kaldes for varmediffusivitet. For at disse to integraler skal være opfyldt, må integranden være lig 0 i alle punkter. Af integralet i (6.13) fås **Varmetransportligningen**:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = \frac{DT}{dt} = \kappa \nabla^2 T + \frac{q}{\rho c} \quad (6.14)$$

Hvis der heller ikke er nogen strøm i mediet (eksempelvis i faste stoffer), reduceres varmetransportligningen til **varmeledningsligningen**:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad (6.15)$$

## 7 FV-Appendix A

### 7.1 Navier-Stokes Ligning

Navier-Stokes ligning beskriver accelerationen i en fluid, og er givet ved:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \kappa \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}_v$$

Hvor venstre side er partikelaccelerationen. Første led på højre side er trykkraften per masseenhed, andet led er friktion grundet ekspansion i feltet, tredje led er friktion ved viskositet og sidste led er andre kræfter, eks tyngdekraften.

### 7.2 Maxwells ligninger

Maxwells ligninger danner grundlaget for klassisk elektromagnetisme, og er givet ved:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{q}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}$$

Hvor  $\mathbf{E}$  er den elektriske feltstyrke,  $\mathbf{B}$  er den magnetiske feltstyrke,  $q$  er ladningstætheden,  $\mathbf{j}$  er den elektriske strøm (alle disse fire er funktioner af rumkoordinaterne og tiden),  $c$  er lysets hastighed og  $\epsilon_0$  er en konstant.

I tilfælde hvor der ikke er nogen ladningstæthed, og det elektriske felt er stationært, gælder det at

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0$$

## Del II

# Essential Mathematical Methods

## 8 Egenfunktionsmetoden til Differentialligninger

Denne metode til løsning af differentialligninger beskæftiger sig med inhomogene ligninger på formen

$$\mathcal{L}y(x) = f(x) \quad (8.1)$$

Hvor  $\mathcal{L}$  er en lineær differentialoperator. Eksempelvis fås Legendreligningen:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = f(x), \quad \mathcal{L} = (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2} - 2x\frac{d}{dx} + \lambda$$

Hvis ikke  $f(x)$  er simpel eller kendt, så løses ligningen ved at opbygge en superposition, normalt af en uendelig serie af funktioner  $\{y_i(x)\}$ . Vi opbygger sættet af funktioner, der opfylder følgende ligning

$$\mathcal{L}y_i(x) = \lambda_i y_i(x) \quad (8.2)$$

Hvor  $\lambda_i$  er en konstant og kaldes **egenværdien** til **egenfunktionen**  $y_i(x)$ .

Der kan også diskuteres en mere generel form af ovenstående ligning, hvor der inkluderes en "vægtfunktion":

$$\mathcal{L}y_i(x) = \lambda_i \rho(x) y_i(x) \quad (8.3)$$

hvor  $\rho(x)$  er vægtfunktionen. Normalt set er denne 1, hvormed forrige ligning genopstår. Generelt set er den dikteret af valget af koordinatsystem, og der er nogle restriktioner på funktionen:

- Den skal være reel
- Den må ikke skifte fortegn i intervallet  $[a; b]$ , hvor  $a$  og  $b$  er grænserne for differentialligningen
- Den skal være ens for alle  $\lambda_i$ .

## 8.1 Indre produkt for funktioner og Hilbertrum

Til behandlingen af disse typer differentialligninger, skal indre produkter for funktioner, samt uendeligt-dimensionelle funktionsrum diskuteres. Ses enhver velopførende funktion i intervallet  $a \leq x \leq b$  opbygget af en uendelig serie lineært uafhængige basisfunktioner, kan den opskrives som:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n(x) \quad (8.4)$$

Hvor  $c_n$  er skalaren og  $y_n(x)$  er basisfunktionen. Med velopførende menes at den opfylder Dirichletbetingelserne opstillet i næste kapitel (Fourierserier, Kap 9).

Til dette funktionsrum defineres det **indre produkt** som:

$$\langle f|g \rangle = \int_a^b f^*(x) g(x) \rho(x) \, dx \quad (8.5)$$

Hvis dette integral er 0 er funktionerne **ortogonale**. **Normen** (længden el. størrelsen) af en funktion er defineret som

$$\|f\| = \langle f|f \rangle^{1/2} = \left[ \int_a^b f^*(x) f(x) \rho(x) \, dx \right]^{1/2} = \left[ \int_a^b |f(x)|^2 \rho(x) \, dx \right]^{1/2} \quad (8.6)$$

En **normaliseret** funktion defineres som  $\hat{f} = f/\|f\|$ , lige som ved vektorer. Normen af denne er da 1.

Et uendeligdimensionalt funktionsrum, hvor det indre produkt er defineret, kaldes for et **Hilbertrum**. Til disse rum defineres ofte en ortonormalbasis  $\hat{\psi}_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

$$\langle \hat{\psi}_i | \hat{\psi}_j \rangle = \int_a^b \hat{\psi}_i^*(x) \hat{\psi}_j(x) \rho(x) \, dx = \delta_{ij} \quad (8.7)$$

hvor  $\delta_{ij}$  er **Kroneckers delta** (fra LinAlg):  $\delta_{ij} = 1$  hvis  $i = j$  og 0 ellers.

I en ortonormalbasis er funktionen givet ved

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{\psi}_n(x) \quad (8.8)$$

Og  $c_n$  er givet ved

$$c_n = \langle \hat{\psi}_n | f \rangle = \int_a^b \hat{\psi}_n^*(x) f(x) \rho(x) \, dx \quad (8.9)$$

For Hilbertrum gælder både Schwarz uligheden og trekantuligheden:

$$|\langle f|g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|, \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \quad (8.10)$$

Er der ydermere opgivet en ortonormalbasis gælder Bessel's ulighed:

$$\langle f|f \rangle \geq \sum_n |c_n|^2 \quad (8.11)$$

Ligheden holder hvis der summeres over alle basiselementer, mens uligheden holder hvis nogle værdier af  $n$  udelades.

## 8.2 Adjungerede og Hermitiske operatorer

Den **adjungerede** til den lineære differentialoperator  $\mathcal{L}$  betegnes  $\mathcal{L}^\dagger$ , og er defineret ved

$$\int_a^b f^*(x)[\mathcal{L}g(x)] dx = \int_a^b [\mathcal{L}^\dagger f(x)]^* g(x) dx + \text{randbetingelser} \quad (8.12)$$

Hvor randbetingelserne evalueres i grænserne af intervallet  $[a; b]$ . Den adjungerede til enhver lineær differentialoperator kan findes ved  $n$  gange partiel integration (hvor  $n$  er den største grad af differentiation i operatoren).

Operatoren siges at være selvadjungeret, hvis  $\mathcal{L}^\dagger = \mathcal{L}$  (som ved vektorer). Hvis randbetingelserne forsvinder - enten grundet egenskaber ved funktionerne  $f$  og  $g$ , eller ved operatoren  $\mathcal{L}$ , kaldes operatoren for **Hermitisk** over intervallet  $a \leq x \leq b$ . I så fald fås

$$\int_a^b f^*(x)[\mathcal{L}g(x)] dx = \int_a^b [\mathcal{L}f(x)]^* g(x) dx \quad (8.13)$$

### Egenskaber ved Hermitiske operatorer

- Eigenværdierne til Hermitiske operatorer er altid reelle
- Eigenfunktioner hørende til forskellige egenværdier, for en Hermitisk operator, er ortogonale
- Eigenfunktionerne til en Hermitisk operator danner en komplet basis over det relevante interval
- Der kan altid konstrueres reelle eigenfunktioner fra lineære kombinationer af komplekse eigenfunktioner (mindst én af  $y_i^* + y_i$  og  $i(y_i^* - y_i)$  er en reel eigenfunktion, forskellig fra 0, svarende til dennes egenværdi)

## 8.3 Sturm-Liouvilleligninger

En vigtig type differentialligninger, hvor differentialoperatoren er Hermitisk, er Sturm-Liouvilleligninger, der har formen

$$p(x)\frac{d^2y}{dx^2} + r(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, \quad r(x) = \frac{dp(x)}{dx} \quad (8.14)$$

eller

$$(py')' + qy + \lambda\rho y = 0 \quad (8.15)$$

Hvor  $p$ ,  $q$  og  $r$  er reelle funktioner. Denne kan omskrives til formen givet i starten af kapitlet:

$$\mathcal{L}y = \lambda\rho(x)y, \quad \mathcal{L} = - \left[ p(x)\frac{d^2}{dx^2} + r(x)\frac{d}{dx} + q(x) \right] \quad (8.16)$$

$$= - \left[ \frac{d}{dx} \left( p(x)\frac{d}{dx} \right) + q(x) \right] \quad (8.17)$$

Sturm-Liouvilleoperatoren er Hermitisk over intervallet  $[a; b]$  såfremt der for enhver to eigenfunktioner  $y_i$  og  $y_j$  gælder

$$[y_i^* p y_j']_{x=a} = [y_i^* p y_j']_{x=b}, \quad [y_i^* p y_j']_{x=a}^{x=b} = 0 \quad (8.18)$$

Eksempelvis er disse betingelser mødt, hvis  $y(a) = y(b) = 0$ ;  $y(a) = y'(b) = 0$  eller  $p(a) = p(b) = 0$ . Grundet det sidste eksempel har mange Sturm-Liouvilleligninger et "naturligt" interval, hvor operatoren er Hermitisk, uanset funktionsværdierne til  $x = a$  og  $x = b$ .

### Transformation til Sturm-Liouvilleform

Enhver andenordens differentialligning, der kan skrives på formen

$$p(x)y'' + r(x)y' + q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0 \quad (8.19)$$

(hvor  $r = p'$  ikke nødvendigvis er sandt), kan omskrives til Sturm-Liouvilleform, ved at gange igennem med faktoren:

$$F(x) = \exp \left\{ \int^x \frac{r(u) - p'(u)}{p(u)} du \right\} \quad (8.20)$$

Det ses, at hvis  $r = p'$  fås  $F(x) = e^0 = 1$  og den generelle Sturm-Liouville optræder.

En række differentiaalligningers transformation til Sturm-Liouvilleform er opgivet i følgende tabel<sup>1</sup>. Stjernen ved Besselligningen betegner, at et skift af variabel,  $x \rightarrow x/\alpha$  er nødvendigt for at få den konventionelle normalisering, men er ikke nødvendig for transformationen.

Ligning	$p(x)$	$q(x)$	$\lambda$	$\rho(x)$
Hypergeometrisk	$x^c(1-x)^{a+b-c+1}$	0	$-ab$	$x^{c-1}(1-x)^{a+b-c}$
Legendre	$1-x^2$	0	$\ell(\ell+1)$	1
Associeret Legendre	$1-x^2$	$-m^2/(1-x^2)$	$\ell(\ell+1)$	1
Chebyshev	$(1-x^2)^{1/2}$	0	$\nu^2$	$(1-x^2)^{-1/2}$
Konfluent hypergeometrisk	$x^c e^{-x}$	0	$-a$	$x^{c-1} e^{-x}$
Bessel*	$x$	$-\nu^2/x$	$\alpha^2$	$x$
Laguerre	$x e^{-x}$	0	$\nu$	$e^{-x}$
Associerede Laguerre	$x^{m+1} e^{-x}$	0	$\nu$	$x^m e^{-x}$
Hermite	$e^{-x^2}$	0	$2\nu$	$e^{-x^2}$
Simpel harmonisk	1	0	$\omega^2$	1

Fra  $p(x)$  i tabellen kan det naturlige interval  $[a; b]$ , hvor  $p(a) = p(b)$  aflæses. For Legendre, den associerede Legendre og Chebyshevligningerne er intervallet  $[-1; 1]$ . For Laguerre og dens associerede er intervallet  $[0; \infty]$ . For Hermiten er intervallet  $[-\infty; \infty]$ . For den simple harmoniske er intervallet  $[x_0; x_0 + 2\pi]$  (følger af randbetingelsen for at SL-operatoren er Hermitisk).

## 9 Fourierserier

Fourierserier er en måde at opskrive enhver, periodisk<sup>2</sup> funktion (givet nogle betingelser), som en uendelig række af harmoniske komponenter. De førnævnte betingelser går under navnet **Dirichletbetingelserne**, og er som følger:

1. Funktionen skal være periodisk (hvis den er defineret over et endeligt interval, kan den gøres periodisk)
2. Den skal være enkelt-værdiet og kontinuert (der må gerne være et endeligt antal af endelige diskontinuiteter)
3. Der skal være et endeligt antal ekstrema inden for én periode  $L$ .
4. Integralet over én periode af  $|f(x)|$  skal konvergere

Er alle disse betingelser opfyldt, kan funktionen skrives ved:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) \right] \quad (9.1)$$

Hvor

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \quad (9.2)$$

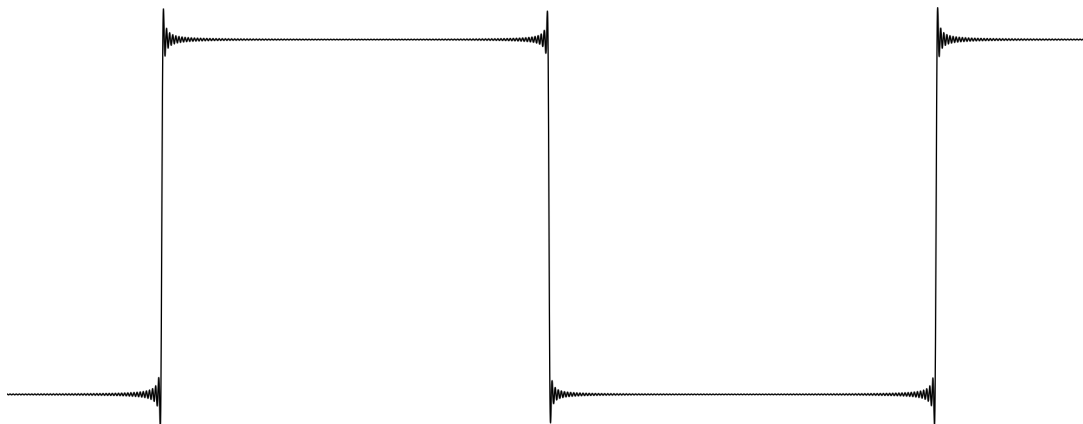
kaldes for Fourierkoefficienterne, og  $x_0$  er arbitrært, men sættes ofte til 0 eller  $-L/2$ . Fourierkoefficienterne er da et integrale over én periode (med et smart valg af startpunkt).

For funktioner defineret på et interval, der bliver lavet periodiske, er perioden af Fourierserien ikke altid den samme som intervallet, men et helt multiplum af denne ( $2L$ ,  $3L$ , etc).

Ved diskontinuiteter konvergerer Fourierserien mod gennemsnittet af de to grænseværdier. Der opstår også **Gibbs fænomenet**  $\delta$ , som er et ekstra ekstremum med amplitude  $\delta$  i begge grænser af diskontinuiteten. Fænomenet rykker tættere og tættere på grænserne, jo flere led der medtages, men denne forsvinder aldrig. Et eksempel er følgende firkantbølge, approksimeret ved 125 led af Fourierserien.

<sup>1</sup>Tabellen er taget fra EMM og navnene på differentiaalligningerne er bare groft oversat. Hvis der er fejl så ret dem endelig

<sup>2</sup>De behøver ikke at være periodiske, faktisk, de kan nemlig gøres periodiske.



Figur 4: Illustration af Gibbs fænomenet. Her vises Fourierserien for en firkantbølge, med 125 led. Gibbs fænomenet ses ved de "lodrette" dele, hvor der overskydes en smule. [Illustration fra Wikipedia, public domain](#).

### Symmetribetragtninger, lige og ulige funktioner

Hvis funktionen er symmetrisk om forskellige punkter, kan Fourierserien gøres betydeligt nemmere at udregne. Først skal der lige opfriskes lige og ulige funktioner. Er en funktion **lige** om et punkt  $x_0$ , er følgende gældende:

$$f(x_0 + x) = f(x_0 - x) \quad (9.3)$$

Er et punkt **ulige** om et punkt  $x_0$  gælder

$$-f(x_0 + x) = f(x_0 - x) \quad (9.4)$$

Specielt for  $x_0 = 0$  fås følgende for henholdsvis *lige*- og *ulighed*

$$f(x) = f(-x), \quad -f(x) = f(-x) \quad (9.5)$$

Lighed kan også ses som symmetri om en lodret akse, i punktet  $x_0$ , mens ulighed kan ses som rotationel symmetri om punktet  $x_0$  (drejes funktionen 180 grader om punktet, skal den være sammenfaldende med den oprindelige funktion).

Med dette kan følgende forenklinger opstilles:

- Er  $f(x)$  *lige* om  $x = 0$  forsvinder alle sin led ( $b_n = 0$ ).
- Er  $f(x)$  *ulige* om  $x = 0$  forsvinder alle cos led ( $a_n = 0$ ).
- Er  $f(x)$  *lige* om  $x = L/4$  er  $a_{2n+1} = b_{2n} = 0$ .
- Er  $f(x)$  *ulige* om  $x = L/4$  er  $a_{2n} = b_{2n+1} = 0$ .

Disse symmetriforenklinger opstår som følge af karakteristika ved sin (ulige) og cos (lige). Er en funktion lige, skal der kun cos led til at beskrive denne, og ligeså med ulighed.

### Integration og differentiation

Ved (ledvis) integration af en Fourierserie konvergerer denne mod stamfunktionen af  $f(x)$ , med forskel i en integrationskonstant, der skal findes.

Ved (ledvis) differentiation af en Fourierserie konvergerer denne mod  $f'(x)$ , såfremt  $f'(x)$  opfylder Dirichletbetingelserne.

### Kompleks Fourierserie

Den komplekse Fourierserie er givet ved

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) \quad (9.6)$$

hvor

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) e^{-2\pi i n x / L} dx \quad (9.7)$$

og der er følgende sammenhæng mellem de reelle og komplekse koefficienter:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) \quad (9.8)$$

## Integralsætninger

**Paresvals sætning** siger at:

$$\frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = (a_0/2)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (9.9)$$

Som er et specialtilfælde af følgende sætning: Hvis  $f(x)$  og  $g(x)$  er givet ved

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right), \quad g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \exp\left(\frac{2\pi i n x}{L}\right) \quad (9.10)$$

fås

$$\frac{1}{L} \int_{x_0}^{x_0+L} f(x) g^*(x) dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \gamma_n^* \quad (9.11)$$

## 10 Dirac $\delta$ -funktion

Dirac  $\delta$ -funktionen er en funktion defineret ved:

$$\int_a^c f(t) \delta(t-b) dt = f(b) \quad (10.1)$$

hvor  $a \leq b \leq c$ . Ellers er integralet 0. Ydermere er  $\int \delta(t-a) dt = 1$ , hvis  $a$  ligger inden for integralgrænserne. Deltafunktionen kan også defineres som

$$\delta(t) = 0, t \neq 0 \quad (10.2)$$

Hvor funktionsværdien, når  $t = 0$ , er "uendelig". Nogle andre egenskaber ved denne funktion er:

$$\delta(-t) = \delta(t), \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t), \quad t \delta(t) = 0 \quad (10.3)$$

Dens stamfunktion er Heavyside-funktionen, der er defineret ved  $H(t) = 1$  til  $t > 0$  og  $H(t) = 0$  for  $t < 0$ . Dermed er  $H'(t) = \delta(t)$ .  $\delta$ -funktionen kan også beskrives ved integraler:

$$\delta(t-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)} d\omega, \quad \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{k} \quad (10.4)$$

## 11 Fouriertransformation

Fouriertransformationer er en generalisering af Fourierserier, hvor perioden tages til at være uendelig, og der dermed ikke er noget krav om periodicitet. Det eneste krav er faktisk følgende:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \neq \infty \quad (11.1)$$

altså at det uendelige integrale konvergerer. Selve transformationen er en lineær integraltransformation  $f(t) \rightarrow \tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$  defineret ved

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (11.2)$$

Og dens inverse

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (11.3)$$

Her ses ligheden med den komplekse Fourierserie, men i stedet for en diskret sum af harmoniske svingninger, fra negativ til positiv uendeligt, har vi her en kontinuert funktion, der beskriver summen af disse harmoniske svingninger - netop et integral.

## 11.1 Foldning

Et emne der, som så, ikke omhandler Fouriertransformation, men som gøres nemmere ved brug af denne, er foldning. Målinger af fysiske fænomener medbringer ofte en eller anden form for støj grundet måleapparatet. Hvis det, der måles gives navnet  $h(z)$ , mens det fysiske fænomen er givet ved  $f(x)$ , så fås følgende sammenhæng mellem dem:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x) \, dx \quad (11.4)$$

hvor  $g(z-x)$  er støjen introduceret af måleapparatet. Dette kan også bruges til at introducere ”falske” måleinstrumenter, som for eksempel filtre, for at frafiltrere støj. Ligningen (11.4) kaldes for **foldningen** af  $f$  og  $g$ , og benævnes også  $f * g$ . Foldning er både **kommutativt** ( $f * g = g * f$ ), **associativt** og **distributivt**.

Måden dette relaterer til Fouriertransformation, er ved at foldningen nemt kan skilles ad i frekvensdomænet, givet **foldeteoremet**, der siger:

$$\mathcal{F}[h(z)] = \tilde{h}(k) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k) \quad (11.5)$$

Altså bliver det grimme, uegentlige integral til et simpelt produkt i frekvensdomænet. Ligeledes gælder der omvendt:

$$\mathcal{F}[f(x)g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k) * \tilde{g}(k) \quad (11.6)$$

## 11.2 Nyttige egenskaber ved Fouriertransformation

For Fouriertransformationer gælder **Parseval's teorem** også:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 \, d\omega \quad (11.7)$$

Der er også følgende transformationer:

Funktion	Fouriertransformation
$f(at)$	$a^{-1} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$f(t-b)$	$e^{-ib\omega} \tilde{f}(\omega)$
$e^{\alpha t} f(t)$	$\tilde{f}(\omega + i\alpha)$
$f'(t)$	$i\omega \tilde{f}(\omega)$
$f''(t)$	$-\omega^2 \tilde{f}(\omega)$
$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n \tilde{f}(\omega)$
$\int^t f(u) \, du$	$(i\omega)^{-1} \tilde{f}(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$
$f(t) * g(t)$	$\sqrt{2\pi} \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(\omega) * \tilde{g}(\omega)$

## 12 Partielle differentiaalligninger

En partiel differentiaalligning (Partial Differential Equation, eller PDE på engelsk) er en differentiaalligning, hvor der indgår partielle differentialkvotienter i ligningen - altså en differentiaalligning af flere variabler. En stor del af vigtige differentiaalligninger i fysikken er både lineære (så teknikkerne fra kapitel 8 kan bruges), og af anden orden.

til partielle differentiaalligninger bruges  $u$  som benævnelse for funktionen, i stedet for  $y$  for ordinære differentiaalligninger (diff-ligninger af én variabel).

Som eksempler på PDE ses følgende



## Bølgeligningen

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (12.1)$$

Funktionen i bølgeligning beskriver et system i tid, der oplever en forskydning fra et ækvilibrium, og en genoprettende kraft, der forsøger at få systemet tilbage i ækvilibrium. Eksempler er guitarstrenger (1 rumlig dimension), trommeskind (2 rumlige dimensioner) og elektromagnetiske bølger (1-3 rumlige dimensioner).

## Diffusionsligningen

$$\kappa \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (12.2)$$

Diffusionsligningen beskriver temperaturen i en varmeledende region, hvor der ikke er nogen resevoirer, der tilfører eller fjerner varme fra systemet, eller diffusionen af kemikalier, der har koncentrationen  $u(\mathbf{r}, t)$ .  $\kappa$  kaldes for diffusiviteten af materialet.

Diffusionsligningen kan generaliseres til følgende:

$$k \nabla^2 u + f(\mathbf{r}, t) = s \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (12.3)$$

Hvor  $f(\mathbf{r}, t)$  repræsenterer en varierende densitet af varmekilder i legemet, men bruges ofte ikke i fysiske sammenhænge. Både  $k$ ,  $s$  og  $\rho$  kan afhænge af positionen  $\mathbf{r}$ , hvormed første led bliver til  $\nabla \cdot (k \nabla u)$ .

## Laplaces ligning

$$\nabla^2 u = 0 \quad (12.4)$$

Laplaces ligning beskriver blandt andet *steady-state* temperaturen af et system, der ikke indeholder nogen varmekilder (altså systemet efter lang tid). Ligningen beskriver også det gravitationelle potentiale i et felt, hvor der ikke er masse, eller lignende med elektriske felter uden ladninger. Den ses også generelt for divergens- og rotationsfrie felter.

## Poissons ligning

$$\nabla^2 u = \rho(\mathbf{r}) \quad (12.5)$$

Poissons ligning beskriver samme fysiske situationer som Laplaces ligning - men hvor der er varmekilder, masse eller elektrisk ladning.  $\rho(\mathbf{r})$  kaldes for kildedensiteten.

## Schrödingers ligning

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 u + V(\mathbf{r})u = i\hbar \frac{\partial u}{\partial t} \quad (12.6)$$

Schrödingers ligning er basis for den kvantemekaniske bølgefunktion af en ikke-relativistisk partikel  $u(\mathbf{r}, t)$ .  $\hbar$  er den reducerede Planck konstant og  $m$  er partiklens masse.

### 12.1 Generel løsningsform for 2 variable (parametrisering)

Vi søger generelt løsninger af formen:

$$u(x, y) = f(p(x, y)) \quad (12.7)$$

De partielle differentialkvotienter for løsningen bliver:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df(p)}{dp} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (12.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df(p)}{dp} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (12.9)$$

Ved at sætte disse lig hinanden, kan alle referencer til  $f(p)$  forsvinde:

$$\frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (12.10)$$

Det betyder, at enhver funktion af typen  $f(p)$  løser en given differentiaalligning - såfremt parameteriseringen  $p(x, y)$  er korrekt. Det er denne metode, der generelt bruges til løsning af ligninger med 2 variable.

## 12.2 Løsning af 1. ordens PDE

Den mest generelle førsteordens partielle differentialligning er

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = R(x, y)$$

hvor  $A, B, C, R$  er funktioner af  $x$  og  $y$  (eller konstante). Til start arbejdes der kun med ligninger, hvor  $C = R = 0$ . Sættes  $u = f(p)$  ind i denne reducerede ligning fås:

$$\left[ A(x, y) \frac{\partial p}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial p}{\partial y} \right] \frac{df(p)}{dp} = 0$$

Her skal den sidste faktor være lig 0, hvilket giver at  $p = \text{konstant}$ . Dette opnås ved at integrere følgende ligning, og sætte en konstant lig  $p$

$$\frac{dx}{A(x, y)} = \frac{dy}{B(x, y)} \quad (12.11)$$

Det er ikke nødvendigvis den første integrationskonstant, der skal sættes lig  $p$ . Der er ret stor frihed for at vælge  $p$ , så udtrykket for denne bliver pænt (for eksempel uden brøk-potenser eller lignende).

### Ligninger med $C(x, y) \neq 0$

Er  $C \neq 0$  i differentialligningen, ledes der efter løsninger af formen

$$u = h(x, y)f(p) \quad (12.12)$$

hvor  $h(x, y)$  er en funktion (lige meget hvor simpel - tjek med en konstant først), der løser ligningen hele ligningen.  $f(p)$  er her stadig løsningen til ligningen  $A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ .

Fremgangsmetoden er da at løse ligningen som normalt, hvor  $C = 0$ , og derefter finde et simpelt udtryk, der løser ligningen, hvor  $C \neq 0$ .

## 12.3 Inhomogene ligninger og problemer

Der gøres forskel på inhomogene og homogene problemer og ligninger. Hvis  $u(x, y)$  er en løsning til en given PDE, med eller uden randbetingelser, siges **ligningen** at være **homogen**, hvis  $\lambda u(x, y)$ , hvor  $\lambda$  er en given konstant, også er en løsning (dette er gældende, hvis  $R = 0$ ). **Problemet** siges at være **homogent**, hvis  $\lambda u(x, y)$  også opfylder randbetingelserne for problemet. Randbetingelser af denne type kaldes også for **homogene randbetingelser**.

Generelt, til løsning af inhomogene ligninger eller problemer, ledes der efter en løsning på formen

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y) \quad (12.13)$$

Hvor  $v(x, y)$  er en tilfældig løsning til problemet

$$A(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + C(x, y)u(x, y) = R(x, y) \quad (12.14)$$

der også opfylder randbetingelserne. Mens  $w(x, y)$  er den generelle løsning til

$$A(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + C(x, y)u(x, y) = 0 \quad (12.15)$$

hvor  $w(x, y) = 0$  i randbetingelserne. Dermed opfylder den samlede løsning  $u(x, y)$  enhver randbetingelse for problemet. Dette princip kan også udvides, således at der inkluderes flere funktioner - måske  $n + 1$ , hvor  $n$  er antallet af randbetingelser. Én løsning til det homogene problem, der er 0 i alle randbetingelser, mens hver af de andre løsninger løser én randbetingelse hver især. Ydermere fungerer dette princip også til PDE'er af højere orden.

## 12.4 Løsning af 2. ordens PDE

Den mest generelle, lineære, andenordens, partielle differentialligning, af to variable, er:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \frac{\partial u}{\partial x} + E \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = R(x, y), \quad (12.16)$$

hvor  $A, B, C, D, E, F, R$  er funktioner af  $x$  og  $y$ . Disse ligninger deles ofte ind i tre klasser:

- Hyperbolsk, hvis  $B^2 > 4AC$
- Parabolsk, hvis  $B^2 = 4AC$
- Elliptisk, hvis  $B^2 < 4AC$

Hvis  $A, B, C$  ikke er konstante, men funktioner af  $x$  og  $y$ , kan ligningen skifte klasse i forskellige dele af planen. I dette afsnit beskæftiger vi os kun med ligninger, hvor  $A, B, C$  er konstante, og hvor  $D = E = F = R(x, y) = 0$ . Dermed er det kun ligninger på formen

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (12.17)$$

Igen ledes der efter løsninger på formen  $u = f(p(x, y))$ , hvor  $p = ax + by$ . Differentieres dette udtryk for  $u$  to gange, med alle kombinationer af variable, og substitueres ind i ligningen, fås:

$$(Aa^2 + Bab + Cb^2) \frac{df(p)}{dp^2} = 0$$

Hvis den anden faktor er lig 0, er løsningen  $u = kx + ly + m$ , mens hvis parentesen sættes lig 0, kan den løses som en andengradsligning, hvor  $b/a$  er variabelen. Løsningen er

$$b/a = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}$$

Så  $A$  og  $C$  har altså skiftet plads, i forhold til den normale andengradsløsning! Hvis de to løsninger kaldes  $\lambda_1$  og  $\lambda_2$  fås

$$p_1 = x + \lambda_1 y, \quad p_2 = x + \lambda_2 y \quad (12.18)$$

Og den generelle løsning til ligning (12.17) bliver

$$u(x, y) = f(p_1) + g(p_2) \quad (12.19)$$

hvor  $f$  og  $g$  er arbitrære funktioner af henholdsvis  $p_1$  og  $p_2$ .

### 12.4.1 Hyperbolske og elliptiske ligninger

I ligninger, der er enten hyperbolske eller elliptiske, hvor  $A, B, C \in \mathbb{R}$  fås løsninger, hvor  $p_1 = x + \alpha y$  og  $p_2 = x + i\beta y$ , hvor  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

### 12.4.2 Parabolske ligninger

I parabolske ligninger er dobbeltroden givet ved  $-B/2C$ , og løsninger af formen

$$u(x, y) = f(x - (B/2C)y) + h(x, y) \cdot g(x - (B/2C)y),$$

søges, hvor  $h(x, y)$  er en simpel løsning til den oprindelige ligning. Normalt sættes  $h(x, y) = x$ , og løsningen bliver

$$u(x, y) = f(x - (B/2C)y) + xg(x - (B/2C)y), \quad (12.20)$$

## 12.5 Tabel over løsninger

Løsninger på de ovenstående ligninger kan opsummeres i følgende tabel, hvor  $P, Q, R$  er funktioner af  $x$  og  $y$ , og  $A, B, C$  er konstante.

Navn	Generel form	Typisk løsning ved parametrisering
Første orden	$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$u = f(p)$ , hvor $p = \int \frac{dx}{P} - \int \frac{dy}{Q}$
Første orden	$P \frac{\partial u}{\partial x} + Q \frac{\partial u}{\partial y} + Ru = 0$	$u = h(x, y)f(p)$ , hvor $p$ er som ovenstående, og $h$ er en tilfældig løsning til ligningen
Anden orden	$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$f(x + \lambda_1 y) + g(x + \lambda_2 y)$ , hvor $\lambda_i$ løser $A + B\lambda^2 + C\lambda^2 = 0$
Anden orden, med $B^2 = 4AC$	$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$f(x + \lambda_1 y) + xg(x + \lambda_1 y)$
Laplace	$\nabla^2 u = 0$	2D: $f(x + iy) + g(x - iy)$
Poisson	$\nabla^2 u = \rho(\mathbf{r})$	2D: $f(x + iy) + g(x - iy) + h(x, y)$ , hvor $h$ er en tilfældig løsning til ligningen
Bølge	$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	1D: $f(x - ct) + g(x + ct)$ . 3D: $f(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} - ct) + g(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + ct)$
Diffusion	$\kappa \nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$	1D: $\frac{\alpha}{2\kappa} x^2 + gx + \alpha t + c, \propto [\text{erf}(\zeta) - \text{erf}(\zeta_0)]$ , hvor $\zeta = x/2(\kappa t)^{1/2}$

## 13 Separation af de variable for PDE (kartesiske koordinater)

Til denne metode for løsning af PDE, ledes der efter løsninger på formen

$$u(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \quad (13.1)$$

Hvor  $X, Y, Z, T$  hver især afhænger af deres respektive små bogstaver. Denne type løsning kaldes *separabel* i  $x, y, z, t$ , men løsninger kan sagtens være separable i færre dimensioner (for eksempel kan en ligning i 4 dimensioner sagtens kun være separabel i  $x$  og  $z$ ).

I løsninger af denne type, må der gerne indgå parametre af forskellig art i flere af koordinatfunktionerne. Restriktionen ligger i, at  $X$  ikke må afhænge af hverken  $y, z, t$ , og lignende for de andre funktioner.

Et eksempel på denne metode er den tredimensionelle bølgeligning:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (13.2)$$

Hvis løsningstypen indsættes, og der divideres igennem med  $u = XYZT$  fås følgende:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} \quad (13.3)$$

hvor dobbeltmærke her er dobbelt differentiation med hensyn til deres respektive variabel ( $X''$  er differentieret med hensyn til  $x$  to gange). Her ses det, at hvert led afhænger af én bestemt variabel, men alligevel er der et lighedstegn mellem dem. Dermed må hvert led være lig med en konstant. Her sættes

$$\frac{X''}{X} = -l^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -m^2, \quad \frac{Z''}{Z} = -n^2, \quad \frac{1}{c^2} \frac{T''}{T} = -\mu^2 \quad (13.4)$$

Hvorned 4 ordinære differentiallysninger opnås. De fire konstante kaldes *separationskonstanter*.

Løsningen til den første ligning er eksempelvis:

$$X(x) = A \exp(ilx) + B \exp(-ilx) = A' \cos(lx) + B' \sin(lx) \quad (13.5)$$

hvor  $A, B, A', B'$  er konstante, der kan findes ved randbetingelser.

### 13.1 Superposition af separerede løsninger

Hvis differentiaalligningen er lineær, kan superpositionsprincippet bruges. Eksempelvis fås Laplaces ligning i to dimensioner, hvor løsningen er af formen

$$u_{\lambda_j}(x, y) = X_{\lambda_j}(x)Y_{\lambda_j}(y) \quad (13.6)$$

hvor  $\lambda_j$  er separationskonstanten. Her er superpositionen:

$$u(x, y) = \sum_i a_i X_{\lambda_i}(x)Y_{\lambda_i}(y) \quad (13.7)$$

også en løsning til ligningen, såfremt  $\lambda_i$  er en tilladt værdi af separationskonstanten (dette bestemmes af randbetingelserne). Fordelen ved en superposition af denne type, er at konstanterne  $a_i$  kan vælges, så summen overholder alle randbetingelser.

Dette betyder også, at løsningerne kan vælges således, at de hver især løser en enkelt randbetingelse, mens den samlede superposition opfylder alle randbetingelser (lige som ved parametrisering).

Som eksempler på disse metoder anbefales klart side 426-432 i EMM, da disse tydeligt viser brugen af metoden.

### 13.2 Laplaces ligninger i polære koordinater

Nogle gange kan det være mere gavnligt at løse en differentiaalligning i et andet koordinatsystem, således, at der kan bruges symmetrier fuldt ud. Først opstilles Laplace-operatoren i plane  $(u(\rho, \phi))$  og sfæriske  $(u(r, \theta, \phi))$  polarkoordinater:

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (13.8)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (13.9)$$

Laplaces ligning er givet ved

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = 0 \quad (13.10)$$

#### 13.2.1 Plane polarkoordinater

I plane polarkoordinater ledes der efter løsninger på formen

$$u(\rho, \phi) = P(\rho)\Phi(\phi) \quad (13.11)$$

Sættes dette ind i Laplaces ligning, og ganges der med  $\frac{\rho^2}{u} = \frac{\rho^2}{P\Phi}$  fås

$$\frac{\rho}{P} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (13.12)$$

Igen optræder to ordinære ligninger:

$$\frac{\rho}{P} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \right) = n^2, \quad \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -n^2 \quad (13.13)$$

hvor  $n$  er et eller andet generelt komplekst tal. Løsningerne til disse ligninger, hvor  $n \neq 0$  er

$$P(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}, \quad \Phi(\phi) = A \exp(in\phi) + B \exp(-in\phi) = A \cos n\phi + B \sin n\phi \quad (13.14)$$

$n$  skal her være et positivt heltal, for ellers har løsningen flere værdier (ikke »single valued«). Første ligning fås far kapitel 6.5.1 i EMM (side 244-246. Det er MatF2 stof). For  $n = 0$  fås

$$P(\rho) = C \ln \rho + D, \quad \Phi(\phi) = A\phi + B \quad (13.15)$$

Her skal  $A = 0$ , for at funktionen kun har enkelte værdier. Superpositionen af disse løsninger kan skrives som følger (hvor  $B$  og  $D$  slås sammen)

$$u(\rho, \phi) = C_0 \ln \rho + D_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)(C_n \rho^n + D_n \rho^{-n}) \quad (13.16)$$

hvor  $n$  er positive heltal, og  $C_0 = D_n = 0$  for  $n > 0$ , hvis ligningen løses i et område, der inkluderer origo (da løsningen ellers ikke er endelig).

### 13.2.2 Sfæriske koordinater

I sfæriske polarkoordinater ledes der efter løsninger på formen

$$u(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (13.17)$$

Den generelle separable løsning har formen

$$u(r, \theta, \phi) = (Ar^\ell + Br^{-(\ell+1)})(C \cos m\phi + D \sin m\phi)[EP_\ell^m(\cos \theta) + FQ_\ell^m(\cos \theta)] \quad (13.18)$$

hvor  $m$  og  $\ell$  er heltal, med  $0 \leq |m| \leq \ell$ .  $P$  og  $Q$  er de associerede Legendrefunktioner (som er tabulerede og ikke pensum i dette kursus). Skal løsningen være endelig på den polære akse, så skal  $F = 0$  for alle  $m, \ell$ , da  $Q(\cos \theta)$  divergerer ved  $\pm 1$ . Dette er som oftest tilfældet, og vinkeldelen bliver da

$$\Theta(\theta)\Phi(\phi) = P_\ell^m(\cos \theta)(C \cos m\phi + D \sin m\phi) \quad (13.19)$$

hvor  $\ell, m$  stadig er heltal, med  $-\ell \leq m \leq \ell$ . Disse kaldes for kuglefunktioner (se afsnit 14)

## 14 Kuglefunktioner

Til hjælp for funktioner af typen

$$\Theta(\theta)\Phi(\phi) = P_\ell^m(\cos \theta)(C \cos m\phi + D \sin m\phi) \quad (14.1)$$

som er vinkeldelen af Laplace's ligning i polære koordinater, er **kuglefunktioner** defineret. Kuglefunktionen  $Y_\ell^m$  er givet ved

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) = (-1)^m \left[ \frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \right]^{1/2} P_\ell^m(\cos \theta) \exp(im\phi) \quad (14.2)$$

Og

$$Y_\ell^{-m}(\theta, \phi) = (-1)^m [Y_\ell^m(\theta, \phi)]^* \quad (14.3)$$

Hvor stjernen betyder den kompleks konjugerede.

Sættet af kuglefunktioner er alle indbyrdes ortogonale, udgør et ortonormalt sæt, og udsprender derfor et Hilbertrum. Det vil altså sige, at enhver funktion af  $\theta$  og  $\phi$  kan opbygges som en sum af disse

$$f(\theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{\ell m} Y_\ell^m(\theta, \phi), \quad a_{\ell m} = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} [Y_\ell^m(\theta, \phi)]^* f(\theta, \phi) d\phi d(\cos \theta) \quad (14.4)$$

Præcis lige som Fourierserien. Dette er også et eksempel på egenskaberne ved løsninger til Sturm-Liouville-problemer.

Til kuglefunktioner hører også *kuglefunktionsadditionsteoremet*, der siger

$$P_\ell(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Y_\ell^m(\theta, \phi) [Y_\ell^m(\theta', \phi')]^* \quad (14.5)$$

hvor  $(\theta, \phi)$  og  $(\theta', \phi')$  er to forskellige vinkelsæt, separeret af vinklen  $\gamma$ . Der er følgende relation mellem disse vinkler:

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\phi - \phi') \quad (14.6)$$