

# Noter til EM2 på KU (Elektromagnetisme 2)

af Nikolai Plambech Nielsen, LPK331. Version 1.0

18. september 2016

## Indhold

<b>1 Komplekse Tal (Note kap 1)</b>	<b>2</b>
1.1 Den komplekse eksponentialfunktion . . . . .	2
1.2 Tidsudvikling (komplekse harmoniske svingninger) . . . . .	3
<b>2 Grundlæggende elektronik (Noter kap 2)</b>	<b>4</b>
2.1 Passive komponenter . . . . .	4
2.1.1 Resistor . . . . .	4
2.1.2 Kapacitor . . . . .	4
2.1.3 Induktor . . . . .	5
2.1.4 Batterier og spændingsforsyninger . . . . .	5
2.2 Kirchhoffs love . . . . .	6
2.2.1 Kirchhoffs 1. lov . . . . .	6
2.2.2 Kirchhoffs 2. lov . . . . .	6
2.3 Eksempler (kun svingningskreds/RCL) . . . . .	7
2.4 Vekselstrøm . . . . .	8
2.4.1 Kirchhoffs love på kompleks form . . . . .	9
2.5 Arbejde og energi . . . . .	10
<b>A Udregninger til kapitler</b>	<b>11</b>
A.1 Kapitel 2 . . . . .	11
A.1.1 Kraftfelter, der er konstante ledningens tværsnit . . . . .	11

# 1 Komplekse Tal (Note kap 1)

Meget kort om komplekse tal:

De er en udvidelse af de reelle tal. Her består hvert komplekst tal af 2 led, hvor det ene er ganget med tallet  $i$ . Dette er et meget specielt talt, idet det har egenskaben:

$$i^2 = -1 \quad (1.1)$$

Et generelt komplekst tal  $z$  skrives da:

$$z = x + iy \quad (1.2)$$

hvor  $x$  kaldes den *reelle* del og  $y$  kaldes den *imaginære* del. Disse skrives også henholdsvis

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y \quad (1.3)$$

Man definerer også den *kompleks konjugerede*  $z^*$  ved

$$z^* = x - iy \quad (1.4)$$

Så man flipper bare fortegnet på den imaginære del. Den reelle og imaginære del kan udregnes ved hjælp af den konjugerede

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i} \quad (1.5)$$

Man definerer også modulus (størrelse) og argument (vinkel/retning) af komplekse tal:

$$|z| = \sqrt{z * z} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arg z = \theta \quad (1.6)$$

hvor  $\theta$  kan findes ved trigonometri:

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \quad \cos \theta = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \theta = \frac{y}{|z|} \quad (1.7)$$

Men pas på med at bruge tan til at finde argumentet, idet den ikke altid giver det rigtige svar. Så brug helst cos eller sin (jeg har ikke en god forklaring på det, lige nu, så det må vente til et senere tidspunkt.)

Hvis man er nødt til at dividere komplekse tal på kartesisk form (eller har et  $i$  i nævneren og gerne vil af med det), så er der et smart trick: forlæng brøken med nævnerens konjugerede. Dette giver nemlig:

$$z = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id} \frac{c - id}{c - id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} \quad (1.8)$$

Eller mere generelt:

$$z = \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_2^* w_1}{|w_2|} \quad (1.9)$$

## 1.1 Den komplekse eksponentialfunktion

For imaginære tal ( $z = i\theta$ ) er eksponentialfunktionen defineret ved

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (1.10)$$

Størrelsen af denne kan findes på to måder:

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = 1, \quad |e^{i\theta}| = \sqrt{(e^{i\theta})^* e^{i\theta}} = \sqrt{e^{-i\theta} e^{i\theta}} = 1 \quad (1.11)$$

Den komplekse eksponentialfunktion for et komplekst tal er da

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (1.12)$$

Komplekse tal kan også skrives på en anden form, der gør brug af den komplekse eksponentialfunktion. Denne form kaldes for *polær form*.

$$z = |z| e^{i\theta} \quad (1.13)$$

Denne måde at skrive komplekse tal på, har en stor fordel når det kommer til multiplikation og division. For i stedet for at skulle gange hvert led sammen, så er multiplikation bare at gange/dividere modulus, og lægge argumenter sammen (eller trække dem fra):

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (1.14)$$

## 1.2 Tidsudvikling (komplekse harmoniske svingninger)

Den komplekse eksponentialfunktion bruges ofte til at beskrive harmoniske svingninger. Eksempelvis ses en tidsligt varierende emf, givet ved  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$ . Dette kan skrives som den reelle del af den komplekse eksponentialfunktion:

$$\mathcal{E} = \operatorname{Re}(\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}) \quad (1.15)$$

Det negative fortegn i eksponenten er et arbitraert valg, men det er den konvention bøgerne, vi bruger, bruger.

Generelt har eksponenten både en reel og imaginær del. Eksempelvis:

$$f(t) = e^{-(\gamma+i\omega)t} = e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} \quad (1.16)$$

hvor den reelle del af dette udtryk er en eksponentielt dæmpet harmonisk svingning (se Mek2/MatF2 pensum for grundigere gennemgang af denne, med udledning):

$$\operatorname{Re}(f(t)) = e^{-\gamma t} \cos \omega t \quad (1.17)$$

## 2 Grundlæggende elektronik (Noter kap 2)

### 2.1 Passive komponenter

Passive komponenter er komponenter, der ikke kan forstærke strømmen i et kredsløb. Dette vil sige resistorer (modstande), kapacitorer (kondensatorer) og induktorer (spoler). Kapitlet omhandler også batterier, strømforsyninger og vekselstrømme, selvom dette ikke helt har med passive komponenter at gøre.

Elektronerne i en leder bevæger sig fordi de bliver påvirket af en spændingsforskell (også kendt som et elektrisk felt). Hvis materialet er helt rent, så der ingen andre typer atomer der er, og hvis atomerne i materialet overhovedet ikke bevægede sig, men sad helt fast i krystallitteret, ville der ingen modstand være i materialet, og alle de frie atomer ville falde gennem materialet i frit fald (indtil bevægelsen skaber et stort nok elektrisk felt til at modvirke tyngdekraften, selvfølgelig)

#### 2.1.1 Resistor

Materialer er dog ikke perfekte, og det viser sig, at det elektriske felt og volumenstrømmen er lineært proportionelle, med proportionalitetskonstanten  $\sigma$ , kaldet for konduktiviteten:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.1)$$

Dette er en form af Ohms lov. Konduktiviteten er den inverse af *resistiviteten*  $\rho$ :  $\sigma = \rho^{-1}$ . I isolatorer er konduktiviteten høj, mens det omvendte er sandt for metaller og generelt ledere. Forskellen i konduktiviteten mellem et metal og en isolator er ofte i størrelsesordenen  $10^{22}$ . Derfor kan ledninger som oftest regnes for perfekte ledere, og man kan

Ohms lov er egentlig en approksimering, idet den egentlig har formen

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.2)$$

hvor  $\mathbf{f}$  er kraeften per ladningsenhed. Som regel er de magnetiske kraefter mange størrelsesordner mindre end de elektriske kraefter (det er normalt kun i plasmaer, at approksimationen i Ohms lov bryder ned).

Ved at omregne volumenstrømmen til den samlede strøm med  $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a}$  og omregne det elektriske felt til potentialet med  $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ , fås den mere velkendte form af Ohms lov:

$$V = RI \quad (2.3)$$

Hvor proportionalitetskonstanten selvfølgelig er modstanden  $R$ . Denne er  $R = L/(\sigma A)$ , hvor  $L$  og  $A$  er henholdsvis ledningens længde og tværsnitsareal.

Når elektronerne passerer gennem en modstand, vil noget af deres energi blive omsat til varme, givet ved Joules varmelov:

$$P = VI = RI^2 \quad (2.4)$$

Hvis man sætter to (eller flere) modstande i serie, vil den samlede modstand være givet ved summen af de enkelte:

$$R_{serie} = \sum R_i \quad (2.5)$$

Men hvis man sætter dem i parallelforbindelse, er den inverse af den samlede modstand lig summen af de enkelte inverse modstande:

$$\frac{1}{R_{parallel}} = \sum \frac{1}{R_i} \quad (2.6)$$

#### 2.1.2 Kapacitor

En kapacitor er en komponent i et kredsløb, der tillader kontrolleret ophobning af ladninger, hvormed der dannes et elektrisk felt og en tilhørende spændingsforskell. Der er en lineær sammenhæng mellem ladningen der opphobes og spændingsforskellen der dannes. Proportionalitetskonstanten mellem disse kaldes kapacitansen  $C$ :

$$Q = CV \quad (2.7)$$

Denne afhænger af geometrien af kapacitoren, samt de materialer den er lavet af. For pladekondensatorer er denne givet ved

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.8)$$

hvor  $\epsilon_r$  er den relative permativitet af materialet mellem pladerne,  $A$  er arealet af dem og  $d$  afstanden mellem dem.  $\epsilon_r$  er 1 for vakuum og lige omkring 1 for luft.

Der kan normalt set ikke passere strøm gennem en kapacitor, men mens den oplader, svarer det til at der løber en strøm gennem komponenten. Dette sker kun i ret kort tid, og det koster energi:

$$W = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.9)$$

Opladningen af en kondensator (eller afledningen) er bestemt af ”Ohms lov” for denne komponent, givet ved

$$I = C \frac{dV}{dt}, \quad V = \frac{1}{C} \int I dt \quad (2.10)$$

Denne fås ud fra ligning (2.7) og definitionen af strøm:  $I = \frac{dQ}{dt}$ .

Sættes kapacitorer i serie er den samlede kapacitans givet ved

$$\frac{1}{C_{serie}} = \sum \frac{1}{C_i} \quad (2.11)$$

Altså som for modstande i parallelforbindelse. Ligeledes står det til med parallelforbindelse af kapacitorer (altså, at det er som modstande i serie):

$$C_{parallel} = \sum C_i \quad (2.12)$$

### 2.1.3 Induktor

Når vi har med vekselsstrømme at gøre, vil der dannes et varierende magnetfelt, hvilket resulterer i et induceret elektrisk felt og emf. For at danne så kraftigt et magnetfelt som muligt, bruger man spoler eller *induktører*. Den inducerede emf er beskrevet ved Faradays lov i integralform, og fluxreglen:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2.13)$$

Dette er et lukket kurveintegral, så der skal altså integreres rundt i hele kredsen. Størstedelen af den samlede emf i kredsløbet vil komme fra spolen, og ved hjælp af formlen  $\Phi = LI$ , hvor  $L$  er spolens induktans, kan man opstille en slags ”Ohms lov” for spoler:

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (2.14)$$

Det ses at hvis der løber en konstant strøm er  $\mathcal{E} = 0$ , præcis som forventet. Hvis man derimod vil ændre strømmen kræver det energi, idet der dannes et magnetfelt, der som bekendt lagrer energi. Denne er givet ved

$$W = \frac{1}{2} LI^2 \quad (2.15)$$

Det skal huskes, at det ikke kun er spoler, der har en induktans. Ethvert kredsløb har en induktans, hvad end der er en spole til stede eller ej (et kredsløb kan ses som en spole med én vinding). Men så fremt antallet af vindinger i en spole er meget større end 1, vil induktansbidraget herfra være langt det største.

### 2.1.4 Batterier og spændingsforsyninger

Batterier og spændingsforsyninger er egentlig ikke passive komponenter, men det giver bedst mening at beskrive dem her, sammen med de passive komponenter. Batterier og spændingsforsyninger virker generelt ved at udføre en kraft per ladning  $\mathbf{f}$ , over en afstand, hvilket medfører en emf:

$$\mathcal{E}_0 = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.16)$$

hvor integralet er over hele kredsløbet, men  $\mathbf{f}$  er selvfølgelig kun forskellig fra 0 i batteriet/spændingsforsyningen (jeg skriver altså bare batteri herfra, jeg gider ikke skrive dem begge længere). Det samlede arbejde fås ved at gange  $\mathcal{E}_0$  med antallet af ladningsenheder  $Q$ . Og arbejdet per sekund (effekten) er da:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(Q\mathcal{E}_0) = I\mathcal{E}_0 \quad (2.17)$$

## 2.2 Kirchhoffs love

Kirchhoffs 2 love, er love som alle elektriske kredsløb overholder (med den antagelse at signaler udbreder sig med uendelig hastighed, hvilket jo ikke er sandt, men mere om det, om lidt.). Disse love er direkte konsekvenser af lovene om ladningsbevarelse og energibevarelse.

### 2.2.1 Kirchhoffs 1. lov

Kirchhoffs 1. lov er en konsekvens af ladningsbevarelse. Denne siger, at enhver strøm der løber ind i kredsløbet, må nødvendigvis komme ud igen. Der kan ikke opnobe sig ledninger nogen steder i ledninger, og i knudepunkter, hvor 3 eller flere ledninger mødes, vil den samlede strøm, der løber ind i knudepunktet gennem nogle ledninger, løbe ud af de andre ledninger. Hvis man regner strømmens retning med fortegn kan dette beskrives ved

$$\sum_i I_i = 0 \quad (2.18)$$

Så al den strøm der løber ind (positivt fortegn) vil præcis modsvare den strøm der løber ud (negativt fortegn).

Hvis der et sted ophober sig ledninger i et kredsløb er dette ikke et knudepunkt, men betragtes som en del af en kapacitor.

### 2.2.2 Kirchhoffs 2. lov

Kirchhoffs 2. lov kommer fra energibevarelse i et kredsløb. Et større kredsløb kan som oftest betragtes som en masse mindre delkredsløb, kaldet for *masker*. Energien per ledning udført af alle krafter (elektriske og andre) er givet ved:

$$\int (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{J} d\tau \quad (2.19)$$

hvor dette volumenintegral er over hele den strømførende del af kredsen. I den  $i$ 'te *gren* af masken (en gren er et understykke af masken, med eventuelle komponenter) vil energien til sidst blive afsat som varme, hvilket giver anledning til følgende ligning for lokal energibevarelse:

$$\int_i (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{J} d\tau = R_i I_i^2 \quad (2.20)$$

hvis det antages, at kraftfelterne er konstante over ledningens tværsnit, udtrykket omskrives til

$$\mathcal{E}_i + \int_i \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = R_i I_i \quad (2.21)$$

Udregningen af dette kan ses i appendiks, kapitel A.1.1. Her er  $\mathcal{E}_i$  den elektromotoriske kraft fra hvad end batterier der er i den  $i$ 'te gren af masken. Hvis grenen indeholder en kapacitor, vil kurveintegralet ikke gå gennem kapacitoren plader. Så for at få bidraget fra eventuelle kapacitorer med, trækkes dette fra på venstre side:

$$\mathcal{E}_i + \int_i \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - V_{Ci} = R_i I_i \quad (2.22)$$

hvor  $V_{Ci} = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$  er spændingen over kapacitoren. Hvis bidragene fra alle grene i masken fås

$$\sum_{batterier} \mathcal{E}_i + \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} - \sum_{kapacitorer} V_{Ci} = \sum_{modstande} R_i I_i \quad (2.23)$$

Her ligner det lukkede kurveintegral jo noget, vi kender, nemlig Faradays lov i integralform! Insættes denne:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \sum_{spoler} L_i \frac{dI_i}{dt} \quad (2.24)$$

Ved indsætning af dette fås den samlede, endelige ligning: Kirchhoffs 2. lov. Også kaldet maskeligningen:

$$\sum_{batterier} \mathcal{E}_i = \sum_{spoler} L_i \frac{dI_i}{dt} + \sum_{kapacitorer} V_{Ci} \sum_{modstande} R_i I_i \quad (2.25)$$

hvor  $V_{Ci} = C^{-1} \int^t I(t') dt'$ . Denne ligning gælder for alle de steder i et kredsløb, hvor man kan tegne en lukket kurve (så generelt set rigtig, rigtig mange steder).

Der er en huskeregel for denne ligning, nemlig at hver komponent i en kreds bidrager med en emf, der er karakteristisk for den pågældende komponent. Den  $i$ 'te modstand bidrager med  $I_i R_i$ , den  $i$ 'te kapacitor bidrager med  $V_{Ci}$  og den  $i$ 'te spole bidrager med  $L_i dI_i/dt$ . Summen af alle disse bidrag vil da være lig den emf, som batteriet (eller batterierne) bidrager med.

### 2.3 Eksempler (kun svingningskreds/RCL)

De tre første, simple eksempler (en R, RL og RC kreds) vil jeg ikke beskrive her, da afsnittende er ret korte og simple, andet end selvfølgelig at skrive resultaterne derfra:

**Strømmen gennem en spole.** I et kredsløb, bestående af en spændingsforsyning,  $\mathcal{E}$ , en modstand  $R$  og en spole  $L$  i serie, fås at strømmen gennem spolen er givet ved differentialligningen med tilhørende løsning (begyndelsesbetingelse  $I(0) = 0$ )

$$\mathcal{E} = L \frac{dI}{dt} + RI, \quad \Rightarrow \quad I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (2.26)$$

Og det tager ca tiden  $\tau = L/R$ , førend strømmen når sin slutværdi.

**Ladning på kapacitor.** I et lignende kredsløb, men med en kapacitor  $C$  i stedet for en spole, er ladningen på kapacitoren givet ved følgende differentialligning og løsning (med  $Q(0) = 0$ ):

$$\mathcal{E} = R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}, \quad \Rightarrow \quad Q(t) = \mathcal{E}C(1 - e^{-t/RC}) \quad (2.27)$$

Det tager ca tiden  $\tau = RC$  førend kapacitoren er opladt.

**Svingningskredsen.** Nu det sidste kredsløb: en RCL- eller svingningskreds. Denne kreds består af et batteri, serieforbundet med en spole, kapacitor og en modstand. Når batteriet tilsluttes vil der begynde at løbe en strøm, hvilket inducerer et magnetisk felt, der prøver at modvirke strømmen (tænk Lenz' lov). Dette sker indtil kapacitoren er ladet op, og der ikke længere kan løbe en strøm. Men så ændres fluxen i kredsløbet jo igen, hvilket inducerer en strøm, der løber den modsatte vej, hvilket aflader kapacitoren igen. Hvis der ikke var nogen modstand i kredsløbet ville systemet barestå at oscillere frem og tilbage, oplade og aflade. Men idet der er en modstand vil der gradvist tabes energi i form af varme, indtil fænomenet ophører, og kapacitoren slutter med at være opladt.

Matematisk set er det en eksponentielt dæmpet, harmonisk oscillator, med svingningsfrekvens  $\omega_0 = \sqrt{LC}^{-1}$ , og dæmpningskoefficient  $R/2L$ . Dette giver anledning til tre tilfælde:  $\omega_0 > R/2L$ ,  $\omega_0 = R/2L$  og  $\omega_0 < R/2L$ . Det første tilfælde er *underdæmpning*, der har løsningen:

$$I(t) = e^{-Rt/2L} (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (2.28)$$

Hvor  $A$  og  $B$  bestemmes ved randbetingelser. I dette tilfælde vil strømmen oscillere frem og tilbage, indtil økvilibriummet er mødt. Denne oscillation vil dø ud i løbet af en tid  $\tau = 2L/R$ . Forholdet mellem denne og svingningstiden  $T = 2\pi/\omega_0$  kaldes for *godheden Q* (ikke at forveksle med ladningen...), og er givet ved

$$Q = \pi \frac{\tau}{T} = \frac{L\omega_0}{R} \quad (2.29)$$

Og læg også mærke til faktoren af  $\pi!$  (ikke fakultet.)

Det andet tilfælde, hvor  $\omega_0 = R/2L$ , kaldes for *kritisk dæmpning* og har løsningen

$$I(t) = (A + Bt)e^{-Rt/2L} \quad (2.30)$$

hvor igen  $A$  og  $B$  er konstante, bestemt ved randbetingelser. Her svinger kredsen ikke frem og tilbage, men opnår blot økvilibrium i løbet af én "periode".

Det sidste tilfælde kaldes for *overdæmpning* og resulterer i at systemet heller ikke oscillerer. Til gengæld vil det tage systemet længere tid at nå ækvilibrium, end ved kritisk dæmpning. Løsningen er:

$$I(t) = Ae^{-\lambda_+ t} + Be^{-\lambda_- t}, \quad \lambda_{\pm} = \frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (2.31)$$

Og du får selv lov at gætte, hvad  $A$  og  $B$  er.

Normalt bruges begyndelsesbetingelserne, at  $Q(0) = 0$  og  $I(0) = 0$ . **Der er noget sludder her. Figurerne i noterne stemmer ikke overens med hinanden. Jeg håber på at finde ud af det, på et tidspunkt**

## 2.4 Vekselstrøm

Vekselstrøm er tilfælde, hvor den elektromotoriske kraft er tidsafhængig (den *veksler* mellem værdier, oftest positive og negative). Mest almindeligt er  $\mathcal{E}$  en harmonisk svingning:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \theta) \quad (2.32)$$

hvor  $\mathcal{E}_0$  er amplituden,  $\theta$  er fasen og  $\omega$  er vinkelfrekvensen, der relaterer til signalets almindelige frekvens ved  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi T^{-1}$  ( $\nu$  er frekvensen og  $T$  er perioden). Denne type tidsafhængighed er både at finde i radiobølger og stikkontakter, så den er gængs. Den er forholdsvis nem at arbejde med, da integralet og differentialkvotienten af trigonometriske funktioner er forholdsvis nemme (ud over fortegnene, selvfølgelig). Endnu nemmere er det dog at differentiere og integrere eksponentialfunktionen, også hvis denne er kompleks! Grunden til dette bringes på banen, er fordi  $\cos \omega t$  netop er realdelen af den komplekse eksponentialfunktion (normalt ses der bort fra  $\theta$ , men den er ret simpel at inkludere, bare gang  $e^{i\theta}$  på emf'en, så har du din faseforskydning). Da er den elektromotoriske kraft:

$$\mathcal{E}(t) = \operatorname{Re}[\tilde{\mathcal{E}}(t)] = \operatorname{Re} [\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}] = \operatorname{Re} [\tilde{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t}] \quad (2.33)$$

hvor der indført den komplekse amplitude  $\tilde{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0$ . Grunden til dette, er egentlig bare for at holde notation og udregninger konsistente.

Hvis det nu antages, at strømmen kan skrives som den reelle del af en kompleks strømfunktion, på lignende form af emf'en, og det viser sig denne overholder Kirchhoffs love, så må denne form for strøm være gyldig (på samme måde, som enhver funktion der opfylder bølgeligningen er en bølge, hvad end det er hvad vi normalt tænker på som bølger). Det postuleres da, at strømmen har formen:

$$I(t) = \operatorname{Re}[\tilde{I}(t)] = \operatorname{Re} [\tilde{I}_0 e^{-i\omega t}] \quad (2.34)$$

Hvis der da ses på Kirchhoffs anden lov, uden kapacitorer fås

$$\tilde{\mathcal{E}}(t) = \left( L \frac{d\tilde{I}(t)}{dt} + R\tilde{I}(t) \right) \quad (2.35)$$

Hvor det indses at da både differentiation og det at tage den reelle del af et komplekst tal er lineære operatorer, så er rækkefølgen hvori vi anvender dem lige meget (**følg lige op på dette, jeg er nemlig ikke helt sikker!**), i hvert fald hvis vi ikke skalerer med komplekse tal (for der ændrer realdelen af en størrelse). Hvis funktionerne for emf og strøm indsættes, og der differentieres samt forkortes, fås

$$\tilde{\mathcal{E}}_0 = (-i\omega L + R)\tilde{I}_0 \quad (2.36)$$

hvilket jo minder ualmindeligt meget om Ohms lov, men med  $R \rightarrow R - i\omega L$ . På denne måde defineres *impedansen*  $Z = R - i\omega L$ , der kan ses som en form for "kompleks modstand". I jævnstrømstilfældet ( $\omega = 0$ ) reducerer denne til den almindelige, reelle resistans  $R$ . Den imaginære del af impedansen kan ses som en form for ekstra modstand, som kun opstår i vekselstrømstilfælde. I disse tilfælde vil der blive induceret strømme i kredsløbet selv (men i modsat retning, grundet Lenz lov), hvilket dermed modvirker den "eksterne" strøm, man tilfører systemet med et batteri eller lignende. På denne måde virker det netop som en modstand.

Med impedansen findes amplituden af den komplekse strøm:

$$\tilde{I}_0 = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_0}{Z} = \frac{\mathcal{E}_0}{R - i\omega L} \quad (2.37)$$

Hvis impedansen skrives på polær form, med  $Z = |Z| \exp(i\phi)$ ,  $|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$  og  $\tan \phi = -\omega LR^{-1}$ , kan den komplekse amplitude også skrives på polær form, med  $\tilde{I}_0 = |\tilde{I}_0| \exp(-i\phi)$  og

$$|\tilde{I}_0| = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad (2.38)$$

Og den reelle strøm er da

$$I(t) = \operatorname{Re} \left[ |\tilde{I}_0| e^{-i(\omega t + \phi)} \right] = |\tilde{I}_0| \cos(\omega t + \phi) \quad (2.39)$$

#### 2.4.1 Kirchhoffs love på kompleks form

Hvis der indføres en lignende form for kompleks ladning:  $Q(t) = \operatorname{Re} [\tilde{Q}(t)] = \operatorname{Re} [\tilde{Q}_0 e^{-i\omega t}]$ , kan begge Kirchhoffs love skrives på kompleks form. Fordelen ved dette er, at disse er rene, algebraiske ligninger, og der er ingen grimme differentialkvotienter eller integraler. Efter lidt regnehygge i stil med det fra første omgang af Kirchhoffs love (igen, se appendiks, når jeg engang får skrevet det), fås:

$$\sum_{\text{knodepunkt}} \tilde{I}_0 = 0 \quad (2.40)$$

og

$$\sum_{\text{batterier}} \tilde{\mathcal{E}}_{0,j} = \sum_{\text{spoler}} -i\omega L_j \tilde{I}_{0,j} + \sum_{\text{kapacitorer}} \frac{i\tilde{I}_{0,j}}{\omega C_j} + \sum_{\text{modstande}} R_j \tilde{I}_{0,j} \quad (2.41)$$

hvor der her bruges  $j$  som indeks, for ikke at forvirre mht den imaginære enhed.

Kapacitorer har impedansen  $(-\iota\omega C)^{-1}$ , altså høj impedans ved lave frekvenser, mens spoler har impedansen  $-i\omega L$ , altså høj impedans ved høje frekvenser (igen, fordi det er et mål for den modvirkende inducerede strøm i kredsløbet.). Hvis der optræder flere, forskellige impedanser i et kredsløb, adderes disse præcis som modstande (med tilhørende formler for serie-/parallelforbindelse).

**Høj-pas filter.** Et høj-pas filter er en kreds, der lader signaler med høj frekvens passere kredsen, men blokerer lav-frekvenssignaler. Dette gøres med en variabel spændingsforsyning  $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}}$  forbundet til en kreds af ukendt impedans  $Z$ . Denne kreds er parallelforbundet med en modstand  $R$ , og tilsammen er de serieforbundet med en kapacitor  $C$ . Hvis der kigges på spændingen over den ukendte kreds med impedans  $Z$  fås:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{out}} = \frac{-i\omega RC}{1 + \frac{R}{Z} - i\omega RC} \tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}} \quad (2.42)$$

$$\approx \frac{-i\omega RC}{1 - i\omega RC} \tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}} \quad (2.43)$$

hvor, hvis  $|Z| \gg R$ , reducerer udtrykket til anden linje. For små frekvenser, med  $\omega RC \ll 1$  vil spændingen over komponenten være dæmpet, hvorimod de to spændinger er approksimativt ens i tilfældet  $\omega RC \gg 1$ . Fysisk set er det, der sker, at kun højfrekvente signaler kan ”passere gennem” kapacitoren, idet hvis det går for lang tid, vil denne være opladt, og der kan ingen strøm løbe, og der vil dermed heller ikke være et spændingsfald.

**Lav-pas filter.** Byttes der om på kapacitoren og modstanden (så den ukendte kreds og kapacitoren er parallelforbundne, og de tilsammen sidder i serie med modstanden), fås et lav-pas filter. Her er spændingen  $\tilde{\mathcal{E}}_{\text{out}}$  givet ved

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\text{out}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z} - i\omega RC} \tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}} \quad (2.44)$$

$$\approx \frac{1}{1 - i\omega RC} \tilde{\mathcal{E}}_{\text{in}} \quad (2.45)$$

Hvor samme approksimation som sidst er brugt. I den lavfrekvente grænse,  $\omega RC \ll 1$ , er de to spændinger approksimativt ens, mens i den højfrekvente,  $\omega RC \gg 1$ , er spændingen over  $Z$  meget dæmpet. Fysisk set sker der det, at jo lavere frekvens signalet har, jo mere når kapacitoren at blive opladt, og dermed får den højere impedans. Dette medfører at mere af strømmen løber gennem den ukendte komponent. Men jo højere frekvens signalet har, jo lavere impedans har kapacitoren, og jo mere strøm løber der gennem denne (der løber selvfølgelig ikke en fysisk strøm, men you get the idea).

## 2.5 Arbejde og energi

I en kreds med harmonisk svingende spænding, hvor alle komponenterne samles i en samlet, effektiv impedans  $Z$ , vil denne være en funktion af  $\omega$ , og vil have en reel og imaginær del

$$Z = R + iX \quad (2.46)$$

hvor  $R$  kaldes resistansen, og  $X$  reaktansen (dette er den imaginære, frekvensafhængige del af impedansen). Jeg går kraftigt ud fra, at reaktansen har dette navn fordi det er kredsløbets »reaktion« på den varierende elektromotoriske kraft (selvinduktans, for eksempel).

Hvis der så kigges på den effekt, der bliver afsat i kredsløbet ( $P(t) = \mathcal{E}(t)I(t)$ ), integrerer den, over én periode  $T$ , og dividerer med  $T$ , for at få den gennemsnitlige effekt over én periode, fås:

$$\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2 R}{2|Z|^2} = \frac{1}{2}|\tilde{I}_0|^2 R \quad (2.47)$$

hvor  $\mathcal{E}_0$  og  $\tilde{I}_0$  er amplituden for henholdsvis den elektromotoriske kraft og strømmen. Det ses, at der er en faktor  $1/2$  til forskel fra jævnstrømstilfældene, hvor  $P = \mathcal{E}I = \mathcal{E}^2/R = I^2R$ . Derfor introduceres ofte de »effektive amplituder« for strømmen og den elektromotoriske kraft:

$$I_{\text{eff}} = \frac{|\tilde{I}_0|}{\sqrt{2}}, \quad \mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}} \quad (2.48)$$

Dette gør nemlig, at faktoren, der var til forskel, forsvinder:

$$\langle P \rangle = I_{\text{eff}}^2 R \quad (2.49)$$

De 220V i vores stikkontakter (eller 110V i Amerika, eksempelvis) er også  $\mathcal{E}_{\text{eff}}$ , og ikke den egentlige amplitude.

## A Udregninger til kapitler

### A.1 Kapitel 2

#### A.1.1 Kraftfelter, der er konstante ledningens tværsnit

Volumenintegralet kan splittes op i to mindre integraler: et planintegral over grenens tværsnit (ai), og et kurveintegral langs strømmens retning (li):

$$\int_i (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{J} \, d\tau = \int_{li} \int_{ai} (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{J} \, da \, dl \quad (\text{A.1})$$

Hvis kraftfelterne  $\mathbf{E}$  og  $\mathbf{f}$  da er konstante over tværsnittene (hvilket de i stort set alle tilfælde er, til en rigtig god approksimation. Enhver ledning har trods alt et ret lille tværsnit), så kan disse smides uden for planintegralet, hvorved dette kun er over volumenstrømmen. Men dette er jo bare den helt almindelige strøm  $I$ :  $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} = I$ . Indsættes dette fås:

$$\int_{li} \int_{ai} (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \mathbf{J} \, da \, dl = \int_{li} (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot \int_{ai} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \, dl = \int_{li} I_i (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot dl \quad (\text{A.2})$$

hvor jeg har introducerede vektoriale arealer og kurver i andet skridt, for at få det hele til at gå op (det kan godt være det ikke er formelt korrekt, men det bør i hvert fald give en forståelse for, hvordan denne udregning foregår). Strømmen tages nu ud fra integralet, da denne ikke varierer langs grenen (ellers ville der jo være ophobning!). Til sidst bruges definitionen på emf:  $\mathcal{E} = \int \mathbf{f} \cdot dl$ , til at få det ønskede resultat:

$$I_i \int_i (\mathbf{f} + \mathbf{E}) \cdot dl = I_i \left( \int_i \mathbf{f} \cdot dl + \int_i \mathbf{E} \cdot dl \right) = I_i \left( \mathcal{E}_i + \int_i \mathbf{E} \cdot dl \right) \quad (\text{A.3})$$