

Noter til EM1 på KU (Elektromagnetisme 1)

af Nikolai Plambech Nielsen, LPK331. Version 1.0

6. juli 2016

Introduktion

Dette er min samling af noter til kurset EM1 (Normalt bare kaldt EL). I kurset bruges bogen »An Introduction to Electrodynamics« af David J. Griffiths, 4. udgave. Jeg har selv haft 3. udgave af bogen (sort cover, med $\nabla \times \mathbf{E}$ og $\nabla \times \mathbf{B}$ skrevet på forsiden). Der er ingen store forskelle i indhold, men eksempler og opgaver kan have forskellig nummerering. Pensum dækker over kapitel 2 til og med kapitel 7 i begge udgaver. Jeg har også inkluderet de fire sider fra bogens omslag, hvor der står en masse dejlige formler, både for en god del vektoranalyse, men også en opsummering af kurssets indhold i form af Maxwells ligninger, o.lign. Jeg har også inkluderet en kort note om koordinattransformationer i integraler, og hvorfor man skal gange med en bestemt faktor, når man transformerer koordinater. Hvis I finder nogen fejl, eller synes der er noget, som kan uddybes yderligere, så download meget gerne .tex-filerne fra psi.nbi.dk, ændr dokumenterne og genupload (både .pdf og .tex).

Indhold

1 Kort note om integraler og koordinattransformationer	6
2 Elektrostatik	7
2.1 Introduktion og Coulombs lov	7
2.2 Elektriske felter	8
2.2.1 Kontinuerte ladningsfordelinger	8
2.2.2 Rotation, divergens og Gauss's lov for elektrostatiske felter	8
2.2.3 Rotation for \mathbf{E}	9
2.3 Elektrisk potentiale	9
2.3.1 Potentialet af lokale ladningsfordelinger. Obs! kun for $\mathcal{O} = \infty$	10
2.3.2 Grænseovergang for overfladeladninger	10
2.4 Arbejde og energi	11
2.4.1 Energien i kontinuerte ladningsfordelinger	11
2.5 Ladere	12
2.5.1 Inducerede ladninger og hulrum i ledere	12
2.5.2 Overfladeladninger og kraften på en leder	12
2.5.3 Kapacitorer	13
3 Specielle teknikker	15
3.1 Laplaces ligning (og en smule Poisson)	15
3.1.1 Randbetingelser og entydighedssætningerne	15
3.2 Billedmetoden	16
3.2.1 En vigtig restriktion på billedmetoden	16
3.3 Separation af de variable	17
3.4 Multipolekspansion	17
3.4.1 Monopol- og dipolleddet	18
4 Elektriske felter i materialer	19
4.1 Polarisering	19
4.1.1 Inducerede dipoler	19
4.1.2 Orientation af polære molekyler	19
4.1.3 Polarisering	20

4.2	Feltet af et polariseret objekt	20
4.2.1	Bundne ladninger	20
4.2.2	Feltet inde i et dielektrikum	21
4.3	Elektrisk forskydning	21
4.3.1	Gauss's lov i nærheden af dielektrikum	21
4.3.2	En advarsel om parallellen mellem \mathbf{E} og \mathbf{D}	21
4.3.3	Randbetingelser	22
4.4	Lineære dielektrikum	22
4.4.1	Susceptibilitet, permitivitet og den dielektriske konstant	22
4.4.2	Randbetingelsesproblemer med lineære dielektrikum	23
4.4.3	Energi i dielektriske systemer	24
4.4.4	Kræfter på dielektrikum i en pladekapacitor	24
5	Magnetostatik	25
5.1	Introduktion	25
5.2	Lorentzloven	25
5.2.1	Strømme	26
5.2.2	Jævn strøm	27
5.3	Biot-Savart loven	28
5.3.1	Eksempler og anvendelser	28
5.4	Divergens og rotation for \mathbf{B} , samt Ampères lov	29
5.4.1	Sammenligning mellem magnetostatik og elektrostatik	30
5.5	Magnetisk vektorpotentiale	31
5.5.1	Magnetostatiske randbetingelser: overfladestrømme	32
5.5.2	Multipolekspansion af vektorpotentialet	33
6	Magnetiske felter i materialer	34
6.1	Magnetisering	34
6.1.1	Diamagneter, paramagneter og ferromagneter	34
6.1.2	Kraftmomenter og kræfter på magnetiske dipoler	34
6.1.3	Effekten af magnetiske felter på atomare kredsløb	34
6.1.4	Magnetisation	35
6.2	Feltet af et magnetiseret objekt	35
6.2.1	Bundne strømme	35
6.2.2	Det manetiske feld inde i materialet	36
6.3	Hjælpefeltet \mathbf{H}	36
6.3.1	Ampères lov i magnetiserede materialer	36
6.3.2	En advarelse om parallellen mellem \mathbf{B} og \mathbf{H}	37
6.3.3	Randbetingelser	37
6.4	Lineære og ikke-lineære medier	37
6.4.1	Magnetisk susceptibilitet og permabilitet	37
7	Elektrodynamik	39
7.1	Elektromotorisk kraft	39
7.1.1	Ohms lov	39
7.1.2	Elektromotorisk kraft - der ikke er en kraft	40
7.1.3	Bevægelses-emf	41
7.2	Elektromagnetisk induktion	41
7.2.1	Faradays lov	41
7.2.2	Det inducerede E-felt	42
7.2.3	Induktans	43
7.2.4	Energi i magnetiske felter	45
7.3	Maxwells ligninger	46
7.3.1	Maxwells ligninger i stof	47
7.3.2	Randbetingelser	48

De 4 gode sider fra bogens omslag

Vektorafledte

Kartesiske koordinater $d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{x}} + dy \hat{\mathbf{y}} + dz \hat{\mathbf{z}}$, $d\tau = dx dy dz$.

$$\text{Gradient : } \nabla t = \frac{\partial t}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial t}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Divergens : } \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{Rotation : } \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Laplace : } \nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Sfæriske koordinater $d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + r \sin \theta d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}}$, $d\tau = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$.

$$\text{Gradient : } \nabla t = \frac{\partial t}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\text{Divergens : } \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\text{Rotation : } \nabla \times \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\text{Laplace : } \nabla^2 t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2}$$

Cylinder koordinater $d\mathbf{l} = ds \hat{\mathbf{s}} + s d\phi \hat{\boldsymbol{\phi}} + dz \hat{\mathbf{z}}$, $d\tau = s ds d\phi dz$.

$$\text{Gradient : } \nabla t = \frac{\partial t}{\partial s} \hat{\mathbf{s}} + \frac{1}{s} \frac{\partial t}{\partial \phi} \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial t}{\partial z} \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Divergens : } \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (sv_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{Rotation : } \nabla \times \mathbf{v} = \left[\frac{1}{s} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right] \hat{\mathbf{s}} + \left[\frac{\partial v_s}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial s} \right] \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{s} \left[\frac{\partial}{\partial s} (s v_\phi) - \frac{\partial v_s}{\partial \phi} \right] \hat{\mathbf{z}}$$

$$\text{Laplace : } \nabla^2 t = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{\partial t}{\partial s} \right) + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}$$

Vektoridentiteter

Tripleprodukter

$$1. \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

$$2. \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

Produktregler

$$3. \nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f)$$

$$4. \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A}$$

$$5. \nabla \cdot (f \mathbf{A}) = f(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla f)$$

$$6. \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$7. \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A})$$

Andenafledte

8. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$
9. $\nabla \times (\nabla f) = 0$
10. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

Vektorintegralsætninger

Gradientsætningen $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} (\nabla f) \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})$

Divergenssætningen $\int (\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}$

Rotationssætningen (Stokes) $\int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$

Grundligninger i elektrodynamik

Maxwells ligninger

Generelt I stof

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

På integralform

Generelt I stof

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}} \quad \oint_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = Q_{f_{\text{enc}}}$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0 \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = 0$$

$$\oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad \oint_P \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

$$\oint_P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad \oint_P \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{f_{\text{enc}}} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

Hjælpemotorfelter (Google Translate er skønt til teknisk engelsk)

Definitioner Lineære medier

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

Potentialer

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (0.1)$$

Lorentzloven

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (0.2)$$

Energi, impulsmoment og effekt

$$Energi \quad U = \frac{1}{2} \int \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau$$

$$Impulsmoment \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) d\tau$$

$$Poyntingvektor \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

$$Larmorformel \quad P = \frac{\mu_0}{6\pi c} q^2 a^2$$

Fundamentale konstante

ϵ_0	$= 8.85 \cdot 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2$	Permitivitet af vakuum
μ_0	$= 4\pi \cdot 10^{-7} \text{N/A}^2$	Permeabilitet af vakuum
c	$= 299\,792\,458 \text{ m/s} \approx 3.00 \cdot 10^8 \text{m/s}$	lysets hastighed
e	$= 1.602 \cdot 10^{-19} \text{C}$	Elementarladningen (+ for proton, - for elektron)
m	$= 9.11 \cdot 10^{-31} \text{kg}$	Massen af elektronen

Sfæriske og cylindriske koordinater

Sfæriske koordinater

$$\begin{aligned}
 x &= r \sin \theta \cos \phi & \hat{x} &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\theta} - \sin \phi \hat{\phi} \\
 y &= r \sin \theta \sin \phi & \hat{y} &= \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\theta} + \cos \phi \hat{\phi} \\
 z &= r \cos \theta & \hat{z} &= \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\theta} \\
 r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} & \hat{\mathbf{r}} &= \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}} \\
 \theta &= \arctan(\sqrt{x^2 + y^2}/z) & \hat{\theta} &= \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}} \\
 \phi &= \arctan(y/x) & \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}
 \end{aligned}$$

Cylindriske koordinater

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \phi & \hat{x} &= \cos \phi \hat{\mathbf{s}} - \sin \phi \hat{\phi} \\
 y &= r \sin \phi & \hat{y} &= \sin \phi \hat{\mathbf{s}} + \cos \phi \hat{\phi} \\
 z &= z & \hat{z} &= \hat{\mathbf{z}} \\
 s &= \sqrt{x^2 + y^2} & \hat{\mathbf{s}} &= \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}} \\
 \phi &= \arctan(y/x) & \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}} \\
 z &= z & \hat{\mathbf{z}} &= \hat{\mathbf{z}}
 \end{aligned}$$

1 Kort note om integraler og koordinattransformationer

Det er til tider gavnligt at skifte fra ét koordinatsystem til et andet - kartesisk til polært, eksempelvis. Man kan dog ikke »bare« skifte fra $dx dy$ til $dr d\theta$. Der skal ganges en ekstra faktor på funktionen i det nye koordinatsystem. Dette kaldes for »Jakobianten«, og er en specifik determinant. Dette blev meget, meget kort gennemgået til sidst i MatIntro (afsnit 5.2 og 5.3 i Funktioner af flere variable), men da stoffet fra LinAlg ikke er gennemgået, var det ikke muligt selv at regne Jakobianten.

Den generelle koordinattransformation er givet ved:

$$\int f(x_1, x_2, x_3) dx_1 dx_2 dx_3 = \int f[x_1(y), x_2(y), x_3(y)] \cdot |\mathbf{J}| dy_1 dy_2 dy_3 \quad (1.1)$$

Hvor prikken altså er helt almindelig multiplikation, og ikke et prikprodukt (det er skalarer, så det giver egentlig det samme, hvis skalarene ses som endimensionale vektorer, men whatever). I tilfældet af transformation fra kartesisk til sfærisk er $x_1, x_2, x_3 = x, y, z$ og $y_1, y_2, y_3 = r, \theta, \phi$. Den generelle Jakobiant \mathbf{J} er givet ved

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial x_1(y)}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_2(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial x_2(y)}{\partial y_3} \\ \frac{\partial x_3(y)}{\partial y_1} & \frac{\partial x_3(y)}{\partial y_2} & \frac{\partial x_3(y)}{\partial y_3} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

Hvor $x_i(y)$ er koordinaten x_i udtrykt ved y . Eksempelvis er $x(r, \theta) = r \cos \theta = x$ i polære koordinater. For at gøre det lidt mere overskueligt, kan matricen ses som følger:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_1(y) & \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \\ x_2(y) & \begin{bmatrix} \partial & \partial & \partial \end{bmatrix} \\ x_3(y) & \begin{bmatrix} \partial & \partial & \partial \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Hvor »rækkerne« altså skal differentieres med hensyn til »kolonnerne«. For sfæriske koordinater, hvor $y = r, \theta, \phi$ er Jakobianten givet ved

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

For **plane polære koordinater** er $x_1 = x, x_2 = y, y_1 = r, y_2 = \theta$, og Jakobianten er givet ved

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

$$\mathbf{J}_{pol} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r \cos \theta}{\partial r} & \frac{\partial r \cos \theta}{\partial \theta} \\ \frac{\partial r \sin \theta}{\partial r} & \frac{\partial r \sin \theta}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$|\mathbf{J}_{pol}| = r$$

For **sfæriske koordinater** er de tre koordinater r, ϕ, θ . Husk at $\phi_{sfærisk} = \theta_{polær}$

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta, \quad |\mathbf{J}_{sph}| = r^2 \sin \theta$$

Og for **cylinderkoordinater**

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z, \quad |\mathbf{J}_{cyl}| = r$$

Et fladeintegral for $f(x, y)$ bliver da

$$\iint f(x, y) dx dy = \iint f[x(r, \theta), y(r, \theta)] r dr d\theta \quad (1.5)$$

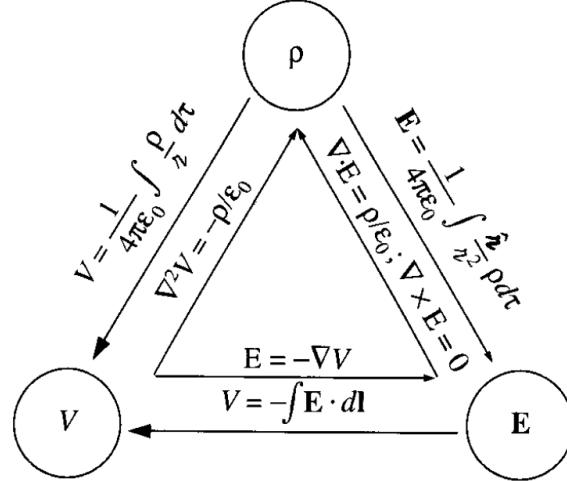
Og ligeledes for de andre koordinattransformationer.

2 Elektrostatik

Hele dette afsnit kan opsummeres i følgende: Start med Coulombs lov og superpositionsprincippet:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{F} = Q\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i \quad (2.1)$$

Superposition gælder for krafter, felter og potentialer. Som oftest opgives en ladningsfordeling ρ , og det elektriske felt \mathbf{E} skal findes. De 6 formler for regning mellem ladningsfordelingen ρ , det elektriske felt \mathbf{E} og potentialet \mathbf{V} er givet ved følgende figur



Figur 1: Opsummering af elektrostatik. Fra bogen, side 87

2.1 Introduktion og Coulombs lov

I elektrostatik arbejdes der med kildeladninger q_i , der alle er punktladninger, og derfor ingen udstrækning har, og den kraft de påvirker en testladning Q med. Alle kildeladningerne er stillestående, men testladningen kan bevæge sig.

Der går ud fra princippet om superposition, hvor den samlede kraft på testladningen Q , som følge af testladningerne q_i er beskrevet ved

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$$

Kraften fra en punktpartikel er givet ved Coulombs lov:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \quad \epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2} \quad (2.2)$$

hvor ϵ_0 er *vakuumpermittiviteten* og r er separationsvektoren mellem punktladningen og testladningen. $\hat{\mathbf{r}}$ er defineret ved

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}' \quad (2.3)$$

Hvor \mathbf{r} er testladningens position og \mathbf{r}' er punktladningen/kildeladningens position. vektoren peger altså fra q mod Q . r er længden af separationsvektoren, og $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ er retningsvektoren for separationsvektoren. Hvis q og Q har samme fortegn, er kraften frastødende, og hvis de har modsat fortegn er kraften tiltrækkende. Den samlede kraft som Q oplever er da givet ved

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i Q}{r_i^2} \right) \hat{\mathbf{r}}_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad (2.4)$$

Dette giver anledning til definitionen af det elektriske felt.

2.2 Elektriske felter

Summen af kræfterne på en testladning som følge af en række punktladninger er givet ved

$$\mathbf{F} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i = Q\mathbf{E}$$

hvor \mathbf{E} kaldes for det elektriske felt, og er givet ved

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i^2} \hat{\mathbf{r}}_i \quad (2.5)$$

Det ses, at det elektriske felt er en funktion af testladningens position \mathbf{r} , da $\hat{\mathbf{r}}$ afhænger af \mathbf{r} .

2.2.1 Kontinuerede ladningsfordelinger

I (2.5) er feltet opbygget af en diskret samling punktpartikler q_i , men hvis der er en kontinuert ladningsfordeling bliver summen til et integral, der har formen

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dq \quad (2.6)$$

Der er da tre forskellige typer af $>dq$. Hvis ladningen er fordelt langs en kurve med ladningsfordeling λ , bliver $dq = \lambda dl$, hvor dl er et kurveelement langs denne kurve. Hvis ladningen er fordelt over en overflade (som ikke nødvendigvis ligger i planen eller er fladt), bliver $dq = \sigma da$, hvor σ er overfladens ladningstæthed og da er et arealelement. Til sidst kan ladningen være fordelt over en volumen. Da er $dq = \rho d\tau$, hvor ρ er ladningstætheden og $d\tau$ er et volumenelement. De tre integraler bliver da

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_P \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dl' \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_S \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} da' \quad (2.8)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau' \quad (2.9)$$

hvor de respektive ladningsfordelinger altså afhænger af kildeladningernes position, men kan være konstante.

Det skal understreges, at $\hat{\mathbf{r}}$ generelt set **IKKE** er konstant, men varierer langs ladningsfordelingen. Derfor skal denne beskrives i kartesiske koordinater, også selvom der integreres i eksempelvis polære eller sfæriske koordinater.

2.2.2 Rotation, divergens og Gauss's lov for elektrostatiske felter

Divergensen af det elektriske felt er givet ved

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.10)$$

Dette er **Gauss's lov** i differentialform. Denne gælder for enhver lukket volumen, og kan skrives om til integralform ved at integrere over en volumen, bruge divergensteoremet (Gauss's sætning fra MatF1), og omskrive ρ til den samlede ladning inden for volumenet:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E} d\tau = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc}$$

hvor Q_{enc} er den samlede ladning inden for volumenet. Integralformen af Gauss's lov er da det andet og fjerde udtryk i ligningen ovenfor:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{enc} \quad (2.11)$$

og igen, dette gælder for **alle** lukkede overflader. Dette betyder da, at man i mange tilfælde, hvor der er symmetri af én eller anden art, kan eliminere brugen af integraler, for at udregne det elektriske felt. Her refereres til afsnit 2.2.3 i Introduction to Electromechanics, tredje udgave: **»Applications of Gauss's Law«**. Her beskrives de tre former for symmetri, hvor Gauss's lov hjælper:

1. Sfærisk symmetri: Her er den valgte overflade en sfære med samme centrum som ladningsfordelingen
2. Cylindrisk symmetri: Her er den valgte overflade en cylinder med samme symmetri som ladningsfordelingen
3. Plansymmetri: Her bruges en lille »kasse«, kaldet en Gaussisk dåse, der dækker over og under en del af overfladen.

Situation 2 og 3 ovenfor kræver teknisk set en uendelig lang cylinder og en uendelig plan, kan svarene bruges som en approksimation for »lange« cylindre og »store« plane overflader, langt fra dennes kanter.

Ud fra dette kan det vises, at det elektriske felt uden for en **sfærisk, konstant ladningsfordeling** har identisk form som en punktpartikel i sfærens centrum, med den samlede ladning:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

Det elektriske felt for en **lang cylinder**, med radius s , og ladningsfordeling proportionel med radius $\rho = ks$, hvor k er en konstant, er givet ved

$$\mathbf{E} = \frac{1}{3\epsilon_0} ks^2 \hat{\mathbf{s}} \quad (2.12)$$

hvor $\hat{\mathbf{s}}$ er normalvektoren til cylinderens krumme overflade.

Til sidst, for **en uendelig plan, der har konstant ladningsfordeling σ** , er det elektriske felt givet ved

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (2.13)$$

hvor $\hat{\mathbf{n}}$ er normalvektoren til planen.

2.2.3 Rotation for \mathbf{E}

Det elektriske felt for en punktpartikel i origo er givet ved

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.14)$$

Dette er et radialt felt, og dermed et rotationsfrit felt, og dermed

$$\nabla \times \mathbf{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad (2.15)$$

hvor Stokes' sætning er blevet brugt. Dette indeholder dog ingen reference til ladningens position, og grundet superpositionsprincippet gælder dette også for enhver ladningsfordeling:

$$\mathbf{E} = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{E}_i \right) = \sum_{i=1}^n (\nabla \times \mathbf{E}_i) = 0 \quad (2.16)$$

2.3 Elektrisk potentiale

Idet det elektriske felt er rotationsfrit, kan det skrives som gradienten til et skalarfelt. Dette kaldes for det elektriske potentielle, V :

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (2.17)$$

hvor minusstegnet bare er konvention. Potentialet er givet ved linjeintegralet af det elektriske felt, fra et referencepunkt \mathcal{O} til punktet \mathbf{r} :

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathcal{O}}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.18)$$

hvor minus igen er konvention. Forskellen i potentialet er givet ved

$$\Delta V = V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a}) = - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.19)$$

En lille liste over småegenskaber for vektorpotentialet:

- Potentialet har enhederne Volt: $V = J/C$
- Potentialet overholder superpositionsprincippet
- Potentialet er også givet ved Poissons ligning og Laplaces ligning, når der henholdsvis er og ikke er nogen ladning:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.20)$$

hvor $\rho = 0$ antyder ingen ladning, og ligningen reduceres til Laplaces ligning

Valg af referencepunkt

Valget af referencepunkt er i og for sig lige meget, da den eneste fysiske relevans er *forskellen* i potentialet mellem to punkter. Et skift af referencepunkt resulterer kun i at der lægges en konstant K til potentialet, hvor K er linjeintegralet fra det gamle til det nye referencepunkt.

Når det så er sagt, så er der nogle referencepunkter, der er mere hensigtsmæssige end andre. I reelle, fysiske situationer (hvor objekter ikke strækker sig ud i uendelighed) bruges uendeligt oftest som referencepunkt (helt analogt til gravitation, hvor den potentielle energi er 0, når afstanden er uendelig). Det noteres også, at der er et minustegn som konvention i formlen for gravitationel potentiel energi).

Dette bevirker at den ene af grænserne som oftest går mod 0 ($1/\infty$, eksempelvis). Problemet er i situationer, hvor systemet strækker sig ud mod det uendelige. Her vil integralets ene grænse divergere mod uendeligt, hvis der vælges uendeligt som referencepunkt. Her må da vælges et andet »smart« referencepunkt, eksempelvis origo, ellers må der bare opgives et generelt punkt. Nogle gange (som ved en uendelig ledning, se problem 2.22 i bogen) vil potentialet dog stadig divergere, hvis origo bruges.

2.3.1 Potentialet af lokale ladningsfordelinger. Obs! kun for $\mathcal{O} = \infty$

Potentialet for en punktladning q er givet ved

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\mathbf{r}} \quad (2.21)$$

Dette gælder dog kun for ladninger, hvor referencepunktet er uendeligheden! Dermed gælder de næste formler også kun for $\mathcal{O} = \infty$! Da potentialet overholder superpositionsprincippet, er potentialet for en diskret mængde punktpartikler

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\mathbf{r}_i} \quad (2.22)$$

Og for kontinuerte ladningsfordelinger (henholdsvis volumen, overflade og linjer) er potentialet

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\mathbf{r}} d\tau' \quad (2.23)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma(\mathbf{r}')}{\mathbf{r}} da' \quad (2.24)$$

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\mathbf{r}')}{\mathbf{r}} dl' \quad (2.25)$$

Det ses her, at i alle tilfælde er $\hat{\mathbf{r}}$ forsvundet! Dette gør det ofte lettere at finde potentialet først, og derefter tage gradienten, for på den måde at finde det elektriske felt.

2.3.2 Grænseovergange for overfladeladninger

Det elektriske felt for en overfladeladning undergår en diskontinuitet i selve overfladen: Feltet er positivt over fladen, men negativt under den. Dette beskrives ved følgende ligning:

$$\mathbf{E}_{\text{over}} - \mathbf{E}_{\text{under}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \quad (2.26)$$

hvor $\hat{\mathbf{n}}$ er normalvektoren til overfladen. Den positive retning defineres som normalvektorens retning for E-feltet både over og under overfladen. Det vil sige at »over« er positiv, men »under« er negativ.

Til forskel er potentialet *ikke* diskontinuert igennem en overfladeladning. Idet E-feltet er den negative gradient til potentialet, er der også en diskontinuitet i gradienten:

$$\begin{aligned}\nabla V_{\text{over}} - \nabla V_{\text{under}} &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}} \\ \frac{\partial V_{\text{over}}}{\partial n} - \frac{\partial V_{\text{under}}}{\partial n} &= -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = \nabla V \cdot \hat{\mathbf{n}}\end{aligned}$$

2.4 Arbejde og energi

Arbejdet, der skal til for at flytte en ladning, er den elektrostatiske kraft, integreret langs kurven, som partiklen flyttes. Da det elektriske felt er rotationsfrit, er den elektrostatiske kraft konservativ, og linjeintegralet er uafhængigt af den valgte kurve:

$$W = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -Q \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = Q[V(\mathbf{b}) - V(\mathbf{a})], \quad \Delta V = \mathbf{b} - \mathbf{a} = \frac{W}{Q} \quad (2.27)$$

Potentialeforskellen er da arbejdet per enhed ladning, der skal til for at flytte denne fra \mathbf{a} til \mathbf{b} . Hvis referencepunktet sættes som uendeligt, og en partikel med ladning Q skal flyttes fra uendeligt til \mathbf{r} , er arbejdet

$$W = QV(\mathbf{r}) \quad (2.28)$$

Da kan potentialet ses som den potentielle energi, per ladningsenhed.

For at flytte en samling af partikler skal den første flyttes ind, hvilket ikke kræver nogen energi, da der ikke er noget elektrisk felt. Den næste partikel oplever et elektrisk felt fra den første partikel. Den tredje partikel oplever et felt fra den første og anden, og så videre for de næste partikler.

Det samlede arbejde, der skal til for at flytte partiklerne er givet ved

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j>i}}^n \frac{q_i q_j}{\mathbf{r}_{ij}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{\mathbf{r}_{ij}} \quad (2.29)$$

hvor \mathbf{r}_{ij} er separationsvektoren mellem den i ’te og j ’te partikel. Forskellen på de to formler er, at i den anden tælles hvert partikelpar to gange, og der divideres da med to. I den anden formel afhænger arbejdet ikke af, hvilken rækkefølge partiklerne samles, mens den første gør.

Den anden formel kan også skrives som

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\mathbf{r}_i) \quad (2.30)$$

hvor $V(\mathbf{r}_i)$ er det samlede potentialet i punktet \mathbf{r}_i , hvor den i ’te partikel (med ladning q_i) bliver flyttet til.

2.4.1 Energien i kontinuerte ladningsfordelinger

For henholdsvis en volumenladning, overfladeladning og kurveladning bliver (2.30) til

$$W = \frac{1}{2} \int \rho V \, d\tau, \quad W = \frac{1}{2} \int \sigma V \, da, \quad W = \frac{1}{2} \int \lambda V \, dl \quad (2.31)$$

For volumenladninger kan dette også omskrives til

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_V E^2 \, d\tau + \oint_S V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right) \quad (2.32)$$

hvor der i volumenintegralet integreres over volumenet (men enhver større volumen kan også bruges), mens overfladeintegralet er overfladen af den volumen der integreres over. Specielt kan der integreres over hele rummet, da går overfladeintegralet mod 0 (fordi potentialet går mod 0), og vi står tilbage med:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\text{hele rummet}} E^2 \, d\tau \quad (2.33)$$

Denne formel giver også, at energien kan ses som at være indeholdt i feltet, med en energitæthed på

$$\frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \text{energi per volumenenhed} \quad (2.34)$$

Dette gøres blandt andet i generel relativitetsteori, men i elektrostatik kan energien også ses som værende i ladningsfordelingen, med en densitet på $\rho V/2$.

To kommentarer om elektrostatisk energi

- Energi overholder IKKE superpositionsprincippet, da det ikke er en lineær størrelse!
- Ligningen (2.30) antyder at arbejdet, der skal til for at flytte en partikel, enten kan være positivt eller negativt (hvis to positive partikler bringes sammen kræver det arbejde, mens to partikler af forskellig fortægt »afgiver« arbejde). Ligning (2.33) antyder dog, idet der integreres over noget der altid er positivt (eller 0), at arbejdet altid er positivt. Forskellen mellem de to formler er, at den første ikke medregner energien af selve punktpartiklen, mens (2.33) gør. Faktisk antyder (2.33) at energien af en punktpartikel er uendelig. (2.30) angiver da arbejdet, der skal til at **samle** en ladningsfordeling af punktpartikler, mens (2.33) angiver den **totale** energi i en ladningsfordeling.

2.5 Ladere

En lader er et materiale, der har en mængde fri ladning, der kan bevæge sig gennem materialet uden at det koster nogen energi. Ledere har blandt andet følgende egenskaber:

- $\mathbf{E} = 0$ inde i en lader. Et eksternt elektrisk felt vil få fri ladning til at bevæge sig med feltet (negativ ladning søger *mod* feltet, og positiv ladning søger *med* feltet). Disse **inducerede ladninger** danner deres eget elektriske felt, der præcis modvirker det elektriske felt inden i lederen. Hvis det *ikke* modvirkede det præcis, ville mere ladning bare flyde til, indtil det gjorde.
- $\rho = 0$ inde i en lader. Dette følger af Gauss' lov. Der er stadig ladning - men præcis lige store mængder af positiv og negativ ladning.
- Enhver ekstra ladning fordeler sig på overfladen af lederen. Denne konfiguration kræver nemlig mindre energi, end at fordele det homogent gennem hele volumenet ($q^2/8R\pi\epsilon_0$ kontra $3q^2/20R\pi\epsilon_0$).
- En lader er et ækvipotentiale. Da $\mathbf{E} = 0$ er potentialet konstant.
- \mathbf{E} står altid vinkelret på overfladen af lederen, lige uden for lederen. Hvis det *ikke* gjorde det, ville ladning løbe rundt indtil den tangentiente komponent bliver udslukket.

2.5.1 Inducerede ladninger og hulrum i ledere

Når en ladning $+q$ bringes nær en uladet lader, vil denne tiltrække negativ ladning og frastøde positiv ladning i lederen. Dette sker dog kun inde i selve lederen - hvis der er hulrum i lederen med en ladning q i, så vil det elektriske felt inde i selve hullet ikke være 0. Det vil stadig være 0 i selve lederen.

Hvis der dog ikke er nogen ladning inde i hulrummet, vil der heller ikke være noget elektrisk felt. Hulrum er altså elektrisk isolerede fra omverdenen, grundet den inducerede ladning i lederen.

På lige vis er feltet grundet ladningen i hulrummet modvirket af lederen. Der er dog stadig q »overskydende« ladning fordelt på ledernes yderside. Dette er præcis som hvis selve lederen bare havde en ladning. Så for en sfære er det elektriske felt grundet denne overskydende ladning givet ved

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

2.5.2 Overfladeladninger og kraften på en lader

Feltet lige uden for en lader er, givet (2.26)

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{\mathbf{n}}, \quad \sigma = -\epsilon \frac{\partial V}{\partial n} \quad (2.35)$$

Dette giver anledning til en kraft, hvor kraften per arealenhed er

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{E}_{\text{over}} + \mathbf{E}_{\text{under}}) = \frac{1}{2\epsilon_0}\sigma^2 \hat{\mathbf{n}}, \quad \mathbf{E}_{\text{under}} = 0 \quad (2.36)$$

Dette giver et uadrettet elektrostatisk tryk på overfladen, der trækker lederen ind i feltet. Trykket er, udtrykt ved feltet lige uden for overfladen, givet ved

$$P = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \quad (2.37)$$

2.5.3 Kapacitorer

Hvis vi har 2 ledere, med ladning henholdsvis $+Q$ og $-Q$, kan der snakkes om potentialforskellen mellem disse, da potentialet over en leder er konstant:

$$V = V_+ - V_- = - \int_{(-)}^{(+)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.38)$$

Feltet er derimod ikke synderligt nemt at udregne. Men hvis ladningen på hver lader øges, vil \mathbf{E} også øges. Fordobles Q , vil ρ og dermed \mathbf{E} også fordobles. Ydermere er V også proportionel med \mathbf{E} . Proportionalitetskonstanten kaldes for **kapacitansen** og er

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.39)$$

Kapacitansen måles i farad F (som oftest micro- eller picofarad) og bestemmes kun af geometrien for et givent system. Kapacitansen er altid positiv, da potentialet over kapacitoren er defineret som potentialet af den positive leder minus potentialet af den negative leder.

To parallelforbundne kapacitorer har en samlet kapacitans:

$$C = C_1 + C_2 \quad (2.40)$$

Og to kapacitorer i serie har samlet kapacitans

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_2 + C_1}{C_2 C_1} \quad (2.41)$$

eller

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (2.42)$$

Disse resultater kan selvfølgelig generaliseres til flere end 2:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i, \quad \text{for parallelforbundne kapacitorer}, \quad (2.43)$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}, \quad \text{for serieforbundne kapacitorer}. \quad (2.44)$$

For en **pladekapacitor**, hvor hver plade har arealet A og afstanden mellem dem er d er potentialet og kapacitansen givet ved

$$V = \frac{Q}{A\epsilon_0} d, \quad C = \frac{A\epsilon_0}{d} \quad (2.45)$$

såfremt arealet er forholdsvis stort, og afstanden mellem pladerne er forholdsvis lille (bogen nævner kapacitansen af en kapacitor hvor $A = 1 \text{ cm}^2$ og $d = 1 \text{ mm}$, så disse størrelser kan altså betragtes som i hvert fald den nedre grænse - eller større, i tilfældet af d).

For **to koncentriske kugleskaller**, hvor den indre har radius a og ladning $+Q$, og den ydre har radius b og ladning $-Q$, er potentialet og kapacitansen

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right), \quad C = 4\pi\epsilon_0 \frac{ab}{b-a} \quad (2.46)$$

Hvis der byttes om på ladningerne byttes der om på fortægnene af brøkerne i potentialet, samt i nævneren af kapacitancen.

For at oplade en kapacitor skal der flyttes elektroner fra den negative plade over til den positive plade.
For en infinitesimal mængde ladning er arbejdet

$$dW = \frac{q}{C} dq$$

Og det samlede arbejde, der skal til for at oplade kapacitoren er da givet ved

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 \quad (2.47)$$

3 Specielle teknikker

3.1 Laplaces ligning (og en smule Poisson)

Laplaces ligning har formen

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (3.1)$$

I én dimension, hvor ligningen lyder $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$ er den generelle løsning en ret linje:

$$V(x) = mx + b \quad (3.2)$$

Her er to konstante, der skal bestemmes, hvilket gøres ved passende randbetingelser. Her er »passende« at kende værdien af V i to punkter, eller at kende V i ét punkt samt V' i et andet punkt (eller det samme). Det er dog ikke nok at kende V' i to punkter, da den ene information er redundant, idet V' er konstant.

Ligningen i én dimension viser nogle af de vigtige egenskaber, som Laplaces ligning i højere dimensioner også besidder:

- $V(x)$ er gennemsnittet af $V(x+a)$ og $V(x-a)$ for ethvert a ; givet ved formlen

$$V(x) = \frac{1}{2}[V(x+a) + V(x-a)]$$

Dette gælder også for Laplaces ligning i højere dimensioner, hvor det i 2 dimensioner er $V(x)$ »gennemsnittet« af en cirkel omkring $V(x)$, og i 3 dimensioner er det »gennemsnittet« af en kugleskal.

- Løsningen til Laplaces ligning har ingen lokale maksima eller minima. Idet alle punkter er gennemsnittet af deres naboer, kan der ikke være nogle ekstremumspunkter andre steder end randen. Hvis der var et lokalt maksimum, der ikke sad på randen, ville V i dette punkt have en større værdi end de omkringliggende punkter, og ville da ikke være gennemsnittet af dem.

Laplaces ligning i 2 dimensioner

I to dimensioner lyder formlen for gennemsnittet

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\text{cirkel}} V \, dl' \quad (3.3)$$

hvor R er radius af cirklen, med centrum i (x, y) . Dette gælder igen for alle værdier af R .

Laplaces ligning i 3 dimensioner

I tre dimensioner lyder gennemsnittet

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\text{sfære}} V \, da' \quad (3.4)$$

Hvor R er radius af sfæren med centrum i \mathbf{r} . Dette gælder igen igen for alle R .

3.1.1 Randbetingelser og entydighedssætningerne

I det endimensionale tilfælde er det ret nemt at genkende, hvad der er passende grænsebetingelser. Det er ikke helt lige så nemt i fleredimensionale tilfælde. Dog siger den første entydighedssætning, at det er nok at kende værdien af V over randen. Dette svarer til at kende værdien af V i to punkter, i det endimensionale tilfælde. Selve sætningen lyder:

Første entydighedssætning. Løsningen til Laplaces ligning i en given volumen \mathcal{V} er entydigt bestemt, hvis V er opgivet på den omsluttende overflade \mathcal{S} .

Dette vil altså sige, at hvis du kan finde bare én løsning til ligningen, der opfylder din randbetingelse - lige meget hvor trivel denne løsning er - så er det den eneste løsning, der opfylder randbetingelserne.

Denne sætning er dermed et utrolig kraftfuldt værktøj, og denne kan gøres endnu bedre ved følgende lemma, der udvider sætningen til løsning af **Poissons ligning**:

Entydighedslemma. Potentialet i en volumen \mathcal{V} er entydigt bestemt hvis både ladningsdensiteten ρ i hele området, samt værdien af V på randen af området, er defineret.

Til sidst er der også en anden entydighedssætning, der giver en entydig løsning, såfremt en bestemt randbetngelse kendes. Her er randbetingelsen, at *ladningen* på forskellige ledere kendes. Denne sætning gælder både for Poissons ligning, og dermed også for Laplaces ligning. Sætningen lyder:

Anden entydighedssætning. I en volumen \mathcal{V} , omsluttet af ledere og som indeholder en ladningsdensitet ρ , er det elektriske felt entydigt bestemt, hvis den **samlede ladning** på hver leder er givet. Området som helhed kan være omsluttet af en leder, men dette er ikke nødvendigt, og randen kan også være uendelighed.

Dette vil sige, at hvis du har et område, hvor du kender ladningsdensiteten ρ , og der er nogle ledere, hvor du kender den samlede ladning på hver leder; og du samtidig kender én løsning (igen, lige meget hvor triviel), så er det den **eneste** løsning.

3.2 Billedmetoden

Entydighedssætningerne giver mulighed for at benytte et smart trick, kaldet »billedmetoden«, der består i at se på en lettere situation, som har samme randbetingelser, og så løse Poissons ligning for denne situation. Idet problemet har samme randbetingelser garanterer entydighedssætningerne, at løsning, der findes for det lette problem er den helt samme løsning, som for det svære problem.

Et eksempel på dette, er en punktladning q , der er placeret i koordinaterne $(0, 0, d)$, med en uendelig plan i xy , forbundet til jord. Denne punktpartikel vil da inducere en negativ ladning i planen, der også skaber et potentiiale. Randbetingelserne for situationen er, at potentialet er nul i xy -planen ($V(x, y, 0) = 0$) samt at potentialet går mod nul, når vi bevæger os langt væk fra q ($V \rightarrow 0$, når $x^2 + y^2 + z^2 \gg d^2$).

En situation med helt samme randbetingelser er situationen hvor q stadig er i $(0, 0, d)$, men hvor der også befinner sig $-q$ i $(0, 0, -d)$. Da vil potentialet i xy -planen også være 0, og når vi bevæger os langt væk, vil potentialet også gå mod 0. Her er det samlede potentialet givet ved

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+d)^2}} \right] \quad (3.5)$$

Den inducerede overfladeladning i planen er givet ved (2.35)

$$\sigma(x, y) = -\epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{-qd}{2\pi(x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}} \quad (3.6)$$

Den samlede inducerede ladning kan fås ved at integrere over hele planen (dette gøres lettest ved at omregne til plane polarkoordinater, og sætte $r^2 = x^2 + y^2$), og denne er netop lig $-q$.

Ladningen er også tiltrukket af planen, og da potentialet for billedsituationen er ens med potentialet i den reelle situation, må kraften også være ens. Denne er givet ved

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (3.7)$$

Energien i billedsituationen er dog ikke den samme, som for den reelle situation. I den reelle situation er energien

$$W = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d} \quad (3.8)$$

Mens i den billedsituation er energien det dobbelte af dette. Dette ses ved at kigge på energien i feltet, hvor der i billedsituationen er et elektrisk felt forskelligt fra nul, både over og under xy -planen, er der kun, i den reelle situation, et felt forskelligt fra nul over xy -planen.

Grundet superpositionsprincippet kan enhver situation med stationære ladninger i nærheden af en uendelig plan leder, forbundet til jord, behandles på samme måde - der skal bare anbringes $-q$ i samme afstand *under* planen, som der er q *over* planen.

3.2.1 En viktig restriktion på billedmetoden

Billedmetoden er endnu et kraftigt værktøj, men man kan kun vælge billedlandinger, der ligger i et område, man **ikke** udrenger V i. Hvis man nemlig lagde en ladning i løsningsområdet, ville det ændre på ρ , og man ville løse Poissons ligning for en anden situation.

Et andet billedproblem

Denne metode kan også bruges i andre tilfælde. Eksempelvis ses der på en kugle med radius R , forbundet til jord, og en punktladning q , i en afstand a fra kuglens centrum. Her skal potentialet findes.

Hvis der i stedet ses på en situation, hvor en punktladning q ligger i en afstand a til origo, og en punktladning q' ligger i en afstand b fra origo, på samme linje, med q' liggende mellem origo og q , da vil denne situation have samme potentiale, såfremt

$$q' = \frac{-R}{a}q, \quad b = \frac{R^2}{a} \quad (3.9)$$

Potentialet er her givet ved

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\mathbf{r}} + \frac{q'}{\mathbf{r}'} \right) \quad (3.10)$$

hvor \mathbf{r} og \mathbf{r}' er afstanden fra \mathbf{r} til henholdsvis q og q' . Det ses, at $b > R$, og denne billedladning altså ligger inde i selve sfæren. Kraften mellem sfæren og q er her

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{(a-b)^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 Ra}{(a^2-R^2)^2} \quad (3.11)$$

3.3 Separation af de variable

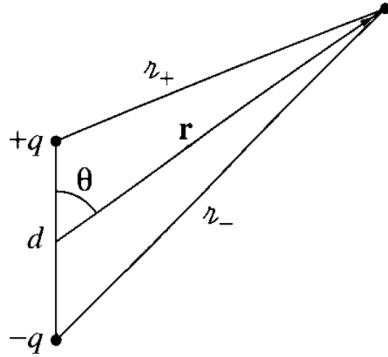
Jeg har allerede skrevet et afsnit om netop denne metode i mine MatF1 noter, så jeg vil ikke beskrive denne metode i dette notesæt. Mit notesæt til MatF1 kan findes på psi.nbi.dk, ved at søge efter »formelsamlinger«, eller ved at klikke på [dette direkte link](#), til .pdf filen. .tex-filerne til notesamlingen, samt filerne til *denne* notesamling, kan også findes på psi.nbi.dk.

3.4 Multipolekspansion

En (fysisk) elektrisk dipol består af to partikler, q og $-q$, i en afstand d fra hinanden. Det samlede potentiiale for disse er

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\mathbf{r}_+} - \frac{q}{\mathbf{r}_-} \right) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2}, \quad r \gg d \quad (3.12)$$

Hvor størrelserne kan ses på figuren herunder



Figur 2: Fra bogen, side 146.

Det sidste resultat, med det approksimerede potentiiale, fås ved at skrive \mathbf{r}_{\pm} ved hjælp af cosinusrelationen, se på tilfældet hvor $r \gg d$ og derefter tage binomialekspansionen til \mathbf{r}^{-1} .

Det ses her, at potentialet af en fysisk dipol går af som r^{-2} , for store r . For en **quadrupol**, der er to modsatrettede dipoler bragt sammen, går potentialet af som r^{-3} , og for en **octopol**, der er to modsatrettede quadrupoler, går potentialet som r^{-4} , und so weiter.

For en generel ladningsfordeling kan skrives som en sum af multipoled, givet i potenser af $1/r$. Denne formel er

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int (r')^n P_n(\cos \theta') \rho(\mathbf{r}') \, d\tau' \quad (3.13)$$

Hvor θ' er vinklen mellem \mathbf{r} og \mathbf{r}' , og P_n er det n -te Legendrepolyynomium med $\cos \theta'$ som variabel.

Denne formel er en præcis formel for potentialet men bruges mest som en approksimation, idet det første led (monopolleddet) er det dominerende led for potentialet, ved store r .

3.4.1 Monopol- og dipolleddet

Multipolekspansionen domineres som oftest af monopolleddet (ved store r):

$$V_{\text{mon}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (3.14)$$

hvor Q er den samlede ladning, og kaldes nogle gange for **monopolmomentet**. For en punktladning i origo er dette ikke bare en approksimation, men det eksakte potentiale for systemet, da alle højereordens multipolled forsvinder.

Hvis den samlede ladning er 0 er det næste led, dipolleddet, det dominerende:

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta' \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3.15)$$

hvor θ' er vinklen mellem \mathbf{r}' og \mathbf{r} . Dette kan også skrives på formen

$$V_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad \mathbf{p} = \int \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') d\tau' \quad (3.16)$$

hvor \mathbf{p} kaldes **dipolmomentet**, og denne oversættes som normalt til punkt-, linje-, og overfladeladninger:

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^n q_i \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{p} = \int r' \cos \theta' \lambda(\mathbf{r}') dl', \quad \mathbf{p} = \int r' \cos \theta' \sigma(\mathbf{r}') da' \quad (3.17)$$

For en **fysisk dipol**, med to punkladninger $\pm q$, er dipolmomentet

$$\mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad (3.18)$$

hvor $\mathbf{d} = \mathbf{r}'_+ - \mathbf{r}'_-$ er vektoren fra den negative til den positive ladning. Dette gælder også for en ren, **matematisk** dipol, der fås i grænsen $d \rightarrow 0$, $q \rightarrow \infty$ med $qd = p$ konstant. Idet dipolmomenter er vektorer, adderes disse som normalt. Haves to dipoler \mathbf{p}_1 og \mathbf{p}_2 , er det samlede dipolmoment $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$.

Monopolmomentet er tydeligvis uafhængigt af valg af origo, idet Q ikke afhænger af de valgte koordinater. Dette gælder dog ikke altid for dipolmomentet. Hvis dipolmomentet i ét koordinatsystem er givet ved \mathbf{p} , og i et andet koordinatsystem, forskudt med \mathbf{a} i forhold til det første, er det givet ved $\bar{\mathbf{p}}$, er sammenhængen mellem disse

$$\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} - Q\mathbf{a} \quad (3.19)$$

Det vil altså sige, at hvis den samlede ladning Q er 0, er dipolmomentet uafhængigt af valg af koordinater, men hvis *ikke* Q er 0, afhænger dipolmomentet altså af koordinatvalget.

Det elektriske felt for en **matematisk** dipol, med dipolmoment \mathbf{p} , der ligger i origo, og peger i z -retningen, er givet ved

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(r, \theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (3.20)$$

hvor r er afstanden til \mathbf{r} og θ er vinklen mellem \mathbf{r} og z -aksen. Feltet afhænger ikke af ϕ , idet der er rotationel symmetri omkring z -aksen. Formlen kræver et bestemt valg af koordinater (sfærisk), og en bestemt orientering af dipolen. Den kan omskrives til følgende koordinatfrie form:

$$\mathbf{E}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{p}] \quad (3.21)$$

4 Elektriske felter i materialer

4.1 Polarisering

Indtil videre er ét af de to vigtigste typer af materialer inden for elektromagnetisme blevet beskrevet - ledere. Det andet er isolatorer eller dielektrikum. I ledere er der en nærmest uendelig mængde tilgængelige elektroner, som kan bevæge sig frit mellem materialet. Dette er ikke tilfældet for isolatorer. Her er elektronerne bundet til materialet, og kan kun bevæge sig i et begrænset omfang.

Men de kan bevæge sig, og hvis et dielektrikum bliver utsat for et elektrisk felt, kan der ske to forskellige ting, enten »strækkes« eller »roteres«.

4.1.1 Inducedede dipoler

Når et neutralt atom placeres i et elektrisk felt vil den positive kerne bevæge sig med feltet, mens den negative elektronsky vil bevæge sig mod feltet. Lige så snart de gør dette, vil dette skabe et nyt elektrisk felt, da atomet nu er en dipol. Hvis det elektriske felt er kraftigt nok, kan feltet rive atomet fra hinanden, hvormed det bliver ioniseret. Såfremt det elektriske felt ikke er alt for kraftigt vil afstanden, som elektronskyen bevæger sig, være så lille førend et ækvilibrium er nået, at den approksimativt vil beholde sin sfæriske form. Denne inducede dipol har et dipolmoment, der peger i samme retning som de eksterne elektriske felt, og styrken af dipolen er proportional med det elektriske felt (igen, hvis E -feltet ikke er alt for kraftigt):

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E} \quad (4.1)$$

her er α proportionalitetskonstanten, og kaldes for den **atomare polarisabilitet** (polariseringsevne). Nogle værdier for α er tabuleret herunder

H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K	Cs
0.667	0.205	24.3	5.60	1.76	0.396	24.1	1.64	43.4	59.6

Tabel 1: Atomisk polarisabilitet, $\alpha/4\pi\epsilon_0$ i enheder af 10^{-30}m^3 , fra *Handbook of Chemistry and Physics*, 78. udgave.

En primitiv model af et atom, hvis kerne har en ladning q og hvor elektronskyen er homogent ladet med $-q$, og har radius a , vil have en atomar polarisabilitet givet ved

$$\alpha = 4\pi\epsilon_0 a^3 = 3\epsilon_0 v \quad (4.2)$$

hvor v er atomets volumen. Dette resultat er som regel inden for en faktor 4 af den egentlige værdi for simple atomer.

For molekyler, der jo ikke er sfærisk symmetriske, vil polarisationen afhænge af det elektriske felts retning. For atomer som CO_2 , der danner en ret linje, skal dipolmomentet splittes op i parallelle og retvinklede komponenter:

$$\mathbf{p} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel} \quad (4.3)$$

I sådanne tilfælde er det muligt, at den inducede dipol ikke peger i samme retning som \mathbf{E} . For andre atomer, der er fuldstændige asymmetriske, erstattes (4.1) med dennes mest generelle form:

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \\ p_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \\ p_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z \end{aligned} \quad (4.4)$$

hvor de ni α_{ij} kaldes for **polarisabilitetstensoren** for molekylet. Deres værdi afhænger af orienteringen af koordinatsystemet, der bruges, men det kan altid orienteres, således at alle konstanter, der ikke er på diagonalen, forsvinder.

4.1.2 Orientation af polære molekyler

Til forskel fra neutrale atomer, har nogle molekyler permanente dipolmomenter. Et eksempel er vand, der er bøjet i en vinkel på 105° , og har en negativ pol ved oxygen-atomet (i »spidsen«), samt to positive poler ved hydrogen-atomerne (i »enderne«). Dennes dipolmoment er på $6.1 \cdot 10^{-30}\text{C} \cdot \text{m}$, hvilket også er grunden til, at den er et godt opløsningsmiddel. Molekyler af denne art kaldes **polære molekyler**.

Når et polært molekyle udsættes for et **homogen** elektrisk felt, vil kraften på den positive og negative ende af atomet være lige store, således at de udligner hinanden. Molekylet oplever dog et kraftmoment, givet ved

$$\mathbf{N} = \mathbf{p} \times \mathbf{E} \quad (4.5)$$

der får molekylet til at pege i retning af feltet - præcist som ved normale dipoler.

Hvis feltet er **inhomogen** vil kræfterne ikke udlignes, og der vil være en resulterende kraft på molekylet, ud over kraftmomentet. Denne kraft er givet ved

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} \quad (4.6)$$

Idet molekyler er så små, som de er, skal feltet dog ændres meget, over en meget kort afstand, førend dette har nogen effekt.

For en perfekt dipol, med en infinitesimal længde, giver (4.5) formlen for kraftmomentet omkring centrum af dipolen, selv i et inhomogenfelt. Omkring ethvert andet punkt er kraftmomentet $\mathbf{N} = (\mathbf{p} \times \mathbf{E}) + (\mathbf{r} + \mathbf{F})$.

4.1.3 Polarisering

Når et dielektrisk materiale placeres i et elektrisk felt, vil der induceres elektriske dipoler i materialet. Være dette enkelte neutrale atomer eller hele molekyler, afhænger af materialet. Hvis det er rene neutrale atomer, eller ikke-polære molekyler, vil hver af disse blive til en lille dipol, der peger i retning af feltet (dette gælder dog ikke nødvendigvis for asymmetriske molekyler). Hvis materialet består af polære molekyler, der har en permanent dipol, vil hver af disse opleve et kraftmoment, som roterer dem i retning af feltet (termiske fluktuationer gør dog, at denne proces aldrig er helt fuldstændig).

I begge tilfælde bliver der reduceret en masse små dipoler, der alle peger i samme retning som feltet, og materialet siges at være **polariseret**. Et mål for dette er **polarisationen**

$$\mathbf{P} = \text{dipolmoment per volumenenhed} \quad (4.7)$$

Og det samlede dipolmoment er da $v\mathbf{P}$, hvor v er volumenet af materialet.

4.2 Feltet af et polariseret objekt

4.2.1 Bundne ladninger

For et polariseret materiale, hvor \mathbf{P} er opgivet, er potentialet givet ved

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{\mathbf{r}^2} d\tau' \quad (4.8)$$

Hvor integralet er fået ved at omskrive potentialet for en enkelt dipol, til potentialet for en kontinuert volumenfordeling af dipoler. Dette kan omskrives ved lidt smart matematik til

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{\sigma_b}{\mathbf{r}} da' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho_b}{\mathbf{r}} d\tau', \quad \sigma_b = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}}, \quad \rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (4.9)$$

hvor σ_b kaldes den bundne overfladeladning og ρ_b kaldes den bundne volumenladning. Volumenintegralet skal integreres over den givne volumen, mens overfladeintegralet integreres over volumenets overflade. Ladningen kaldese bundet, idet den ikke er fri, og dermed ikke kan bevæge sig rundt mellem atomerne i materialet.

Dette vil sige, at potentialet af et polariseret materiale er det samme, som feltet dannet af en volumenladning ρ_b og en overfladeladning σ_b .

Et eksempel på dette er feltet produceret af en **homogen polariseret sfære**, med radius R . Her er $\sigma_b = P \cos \theta$ og $\rho_b = 0$, da \mathbf{P} er homogen. Potentialet er fundet i eksempel 3.9, og ved differentiation fås at

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{3\epsilon_0} \mathbf{P}, \quad r < R \quad (4.10)$$

og

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad r \geq R \quad (4.11)$$

4.2.2 Feltet inde i et dielektrikum

I udledelsen af polarisering inde i materialer, er der ikke gjort nogen stor forskel på matematiske og fysiske dipoler. Dipolerne i materialerne er selvfølgelig fysiske, idet de har en ikke-infinitesimal udstrækning, men i udledningen af potentialet af et polariseret materiale, blev der taget udgangspunkt i potentialet for en matematisk dipol.

Uden for materialet gør manglen på distinktion mellem de to typer ingenting, idet separationsafstanden \approx er mange, mange gange større end de enkelte dipoler, og dipolledet dominerer da enormt.

Inde i materialet er det dog en anden historie. I det helt mikroskopiske varierer feltet enormt, idet tæt på en elektron er dennes felt enormt, mens øjeblikket efter er elektronen et andet sted henne. Når der snakkes om det elektriske felt i et materiale, snakkes der om det **makroskopiske felt**, der er gennemsnittet af feltet i et område, der er stort nok til at indeholde tusinder af dipoler, men småt nok til fluktuationer på stor skala ikke udvaskes. Dette er fuldstændig analogt til behandling af densitet i objekter - kigges der tæt nok på atomerne, stiger densiteten voldsomt i nærheden af atomkernerne, mens den falder til 0 lige ude for disse.

Når der bruges formlerne i dette afsnit er det dog det elektriske felt fra disse makroskopiske områder, der opnås. Udledningen af dette kan ses i afsnit 4.2.3, der har samme navn som afsnittet du netop nu læser.

4.3 Elektrisk forskydning

4.3.1 Gauss's lov i nærheden af dielektrikum

Ved et polariseret dielektrikum er det samlede E-felt givet ved summen af det eksterne E-felt, samt E-feltet fra det polariserede dielektrikum. I selve dielektriket er den samlede ladningsdensitet givet ved

$$\rho = \rho_b + \rho_f \quad (4.12)$$

hvor b hentyder til bundne ladninger, og f til »frie« ladninger - ladninger der *ikke* er forårsaget af polarisering. Dette kan eksempelvis være elektroner i en leder eller ioner i dielektriket. Gauss's lov for dette system lyder da:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho = \rho_b + \rho_f = -\nabla \cdot \mathbf{P} + \rho_f \quad (4.13)$$

Hvor \mathbf{E} er det **samlede** elektriske felt for systemet - både det eksterne og det, skabt af det polariserede dielektrikum.

I formlen kan de to graderinger slås sammen, og »differentierne« (det der skal tages gradienten af), kaldes da for den elektriske forskydning \mathbf{D} :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.14)$$

Dette er Gauss's lov for dielektrikum, i differentialform. I integralform bliver dette

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{f_{enc}} \quad (4.15)$$

Disse to formler har ingen reference til ρ_b , og de bundne ladninger, hvilket gør dem rigtig smarte til udregning af det elektriske felt i nærheden af dielektrikum.

Det ses dog, at σ_b ikke optræder nogen steder i denne udledning. Dette er fordi Gauss's lov ikke fungerer direkte på overfladeladninger. Alle andre steder er logikken ganske fin at bruge. Ydermere er en mere realistisk model, at dielektrikets sider har en endelig tykkelse, hvor polariseringen går mod 0, hvilket gør at ρ_b er kontinuert over hele dielektriket, og Gauss's lov kan bruges over det hele. Lige meget hvad, så indeholder integralformen ikke denne defekt, og den kan med god samvittighed bruges.

4.3.2 En advarsel om parallellel mellem \mathbf{E} og \mathbf{D}

Gauss's lov for dielektrikum ligner den almindelige lov utroligt meget, bare med ρ udskiftet med ρ_f og ϵ_0 udskiftet med \mathbf{D} , så man kan fristes til at tro, at \mathbf{D} er helt analogt til \mathbf{E} . Dette er dog ikke tilfældet, og man kan ikke *bare* løse dielektrikumproblemer ved at se helt bort fra den bundle ladning ρ_b , løse det som et normalt problem, og udskifte \mathbf{D} med \mathbf{E} . Grunden til dette er blandt andet, at der ikke er nogen »Coulombs lov« for \mathbf{D} , og fordi $\nabla \times \mathbf{D}$ ikke altid er lig 0: $\nabla \times \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{P}$. Og $\nabla \times \mathbf{P}$ er bestemt ikke altid 0.

Til gengæld, hvis der er symmetri i problemet, kan Gauss's lov for \mathbf{D} bruges helt uden problemer, da dette automatisk sørger for, at $\nabla \times \mathbf{P} = 0$. Men hvis **ikke** dette er tilfældet, må anden tankegang til, og man kan ikke bare antage, at \mathbf{D} kan bestemmes kun ud fra den frie ladning.

4.3.3 Randbetingelser

Randbetingelserne fra afsnit 2.3.2 kan omskrives, så det beskrives ved \mathbf{D} :

$$D_{\text{over}}^{\perp} - D_{\text{under}}^{\perp} = \sigma_f, \quad \mathbf{D}_{\text{over}}^{\parallel} - \mathbf{D}_{\text{under}}^{\parallel} = \mathbf{P}_{\text{over}}^{\parallel} - \mathbf{P}_{\text{under}}^{\parallel} \quad (4.16)$$

4.4 Lineære dielektrikum

4.4.1 Susceptibilitet, permitivitet og den dielektriske konstant

Normalt er polarisationen \mathbf{P} af et materiale opstået grundet et eksternt elektrisk felt, der får de elektriske dipoler i materialet (atomer/molekyler) til at orientere sig parallelt med feltet. I mange materialer er polarisationen lineært proportional med det elektriske felt, såfremt denne ikke er alt for stor:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}_{\text{Alle}} \quad (4.17)$$

Hvor χ_e kaldes den **elektriske susceptibilitet** (elektriske tilbøjelighed) af mediet. Faktoren ϵ_0 er til for at gøre denne dimensionsløs. Materialer af denne type, hvor polarisationen er lineært proportional med det elektriske felt, kaldes for lineære dielektrikum.

\mathbf{E} i denne ligning er **hele** det elektriske felt, både det eksterne og det fra polarisationen selv. Det vil sige, at hvis et lineært dielektrikum placeres i et eksternt \mathbf{E} -felt \mathbf{E}_0 vil materialet blive polariseret, og danne et nyt elektrisk felt, der igen polariserer dielektriket mere, og skaber et større elektrisk felt, und so weiter - en uendelig serie af polarisering og elektriske felter (heldigvis er det en konvergent serie, ellers ville verden ikke rigtig fungere. Så hurra for det!).

Det nemmeste er oftest at starte med den elektriske forskydning \mathbf{D} . For lineære medier fås:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \quad (4.18)$$

hvor ϵ kaldes for materialets **permitivitet**. \mathbf{E} er i denne ligning dog kun det **eksterne** elektriske felt. I et vakuuum er der intet materiale at polarisere, så $\chi_0 = 0$ og $\epsilon = \epsilon_0$, hvilket også er grunden til, at ϵ_0 kaldes for vakuumpermitiviteten. Hvis faktoren af ϵ_0 fjernes fra permitiviteten, kaldes den dimensionsløse rest for den **relative permitivitet** eller **dielektriske konstant**:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (4.19)$$

Herunder er en tabel over nogle almindelige materialer og deres dielektriske konstant:

Materiale	Dielektriske konstant	Materiale	Dielektriske konstant
Vakuum	1	Benzene	2.28
Helium	1.000065	Diamant	5.7
Neon	1.00013	Salt	5.9
Hydrogen	1.00025	Silicium	11.8
Argon	1.00052	Methanol	33.0
Luft (tør)	1.00054	Vand	80.1
Nitrogen	1.00055	Ice (-30° C)	99
Vanddamp (100° C)	1.00587	KTaNbO ₃ (0° C)	34,000

Tabel 2: Tabel over dielektriske konstanter, ved 1 atm, 20° C (medmindre andet er opgivet). Fra *Handbook of Chemistry and Physics*, 78. udgave.

En lader kan i nogen henseende ses som et dielektrikum i grænsen hvor $\chi_e \rightarrow \infty$, hvilket kan være en god måde at tjekke sine løsninger på.

I lineære materialer er rotationen af \mathbf{D} stadig ikke altid 0. Dette ses, ved at integrere om en lukket kurve, der går gennem grænsen mellem to lineære dielektriske materialer. Linjeintegralet for \mathbf{E} er her 0, da \mathbf{E} er rotationsfrit (følger fra Stokes' sætning), men fordi \mathbf{P} kan have forskellig værdi over og under grænsen, og dermed er kurveintegralet heller ikke 0. Det giver (igen med Stokes' sætning) at rotationen ikke kan være 0 overalt, inden for den lukkede kurve. Faktisk er rotationen uendelig ved grænsen.

Til gengæld, hvis rummet er fyldt med et homogent, lineært dielektrisk materiale, vil rotationen være 0 (egentlig skal materialet bare være homogent, der hvor \mathbf{E} er forskellig fra 0, da steder hvor $\mathbf{E} = 0$ ikke

er polariserende). Her gælder at $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ og $\nabla \times \mathbf{D} = 0$. Dermed kan \mathbf{D} findes blot ved den frie ladning:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_{\text{vac}} \quad (4.20)$$

hvor \mathbf{E}_{vac} er det felt, som den frie ladning ville lave i et vakuum. Da gives det elektriske felt ved

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D} = \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{E}_{\text{vac}} \quad (4.21)$$

Dette vil altså sige, at feltet i sådanne områder (hvor dielektriket er homogent, ud over steder hvor $\mathbf{E} = 0$), vil dette reduceres med en faktor ϵ_r^{-1} . Eksempelvis er ladningen fra en punktpartikel q , der sidder inde i et stort dielektrikum, givet ved

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (4.22)$$

(læg mærke til at det *ikke* er ϵ_0 , men bare ϵ). Det dielektriske materiale »skærmer« altså for det elektriske felt, ved at der induceres dipoler, som modvirker det elektriske felt.

Et eksempel er en parallel pladekapacitor, der er fyldt med et isolerende materiale med den relative permitivitet ϵ_r . Her er $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_r} \mathbf{E}_{\text{vac}}$, hvilket gør at også V reduceres. Dog vil kapacitansen $C = Q/V$ øges med faktoren ϵ_0 , og den samlede kapacitans er nu

$$C = \epsilon_r C_{\text{vac}} = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (4.23)$$

I en krystal er det dog ikke altid helt lige så nemt. Her er det oftest nemmere at polarisere materialet i nogle retninger. Her er den elektriske susceptibilitet udskiftet med en susceptibilitetstensor:

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\chi_{e_{xx}} E_x + \chi_{e_{xy}} E_y + \chi_{e_{xz}} E_z) \\ P_x &= \epsilon_0 (\chi_{e_{yx}} E_x + \chi_{e_{yy}} E_y + \chi_{e_{yz}} E_z) \\ P_x &= \epsilon_0 (\chi_{e_{zx}} E_x + \chi_{e_{zy}} E_y + \chi_{e_{zz}} E_z) \end{aligned} \quad (4.24)$$

Lige som ved polarisabilitetstensoren for inducerede dipoler i dielektrikum. Materialer, der *ikke* har en tensor, men blot en konstant, kaldes for **isotrope**, og susceptibiliteten er altså uafhængig af rotation (rotationel symmetri).

4.4.2 Randbetingelsesproblemer med lineære dielektrikum

I et homogent, lineært dielektrikum er den bundne volumenladning ρ_b proportional med den frie volumenladning ρ_f ved

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} = -\frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \rho_f \quad (4.25)$$

Og hvis der ikke er nogen fri ladning i materialet, er $\rho = 0$, hvormed al ladning må sidde på overfladen. Det byder da, at potentialet overholder Laplaces ligning, og metoderne fra afsnittet »Specielle teknikker« kan bruges. Her kan randbetingelserne omskrives, så de kun refererer til den frie ladning:

$$\epsilon_{\text{over}} E_{\text{over}}^\perp - \epsilon_{\text{under}} E_{\text{under}}^\perp = \sigma_f \quad (4.26)$$

Og potentialet:

$$\epsilon_{\text{over}} \frac{\partial V_{\text{over}}}{\partial n} - \epsilon_{\text{under}} \frac{\partial V_{\text{under}}}{\partial n} = (\epsilon_{\text{over}} - \epsilon_{\text{under}}) \frac{\partial V}{\partial n} = -\sigma_f \quad (4.27)$$

Et eksempel er en homogen sfære af et lineært dielektrikum, der placeres i et homogent elektrisk felt \mathbf{E}_0 . Her ses det (efter en masse udregninger), at elektriske felt inde i sfæren også er homogent, og givet ved

$$\mathbf{E} = \frac{3}{\epsilon_r + 2} \mathbf{E}_0 \quad (4.28)$$

I tilfældet $\epsilon_r = 1 + \chi_e \rightarrow \infty$ bliver $\mathbf{E} = 0$. Dette er præcis som forventet, hvis dielektriket udskiftes med en leder).

Et andet eksempel er en ladning q i en afstand d over origo (z -retning), hvor hele rummet under $z = 0$ er fyldt med et homogent, lineært dielektrikum, med susceptibilitet χ_e . Her er den inducerede overfladeladning givet ved

$$\sigma_b = -\frac{1}{2\pi} \frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \quad (4.29)$$

Og den samlede inducerede ladning er

$$q_b = -\frac{\chi_e}{\chi_e + 2} q \quad (4.30)$$

hvilket er præcis det samme, bortset fra faktoren $\chi_e/(\chi_e + 2)$, som for en uendelig leder i xy -planen. Igennem, hvis $\chi_e \rightarrow \infty$ går den ekstra faktor mod 1, og de oprindelige udtryk fås igen. Kraften er her givet ved

$$\mathbf{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\chi_e}{\chi_e + 2} \frac{q^2}{4d^2} \hat{\mathbf{z}} \quad (4.31)$$

4.4.3 Energi i dielektriske systemer

For at oplade en almindelig pladekapacitor skal der bruges et arbejde givet ved $W = 1/2CV^2$. For en pladekapacitor med et lineært dielektrikum i stedet for vakuums, er $C = \epsilon_r C_{\text{vac}}$, og arbejdet da $1/2\epsilon_0 C_{\text{vac}} V^2$.

Det generelle udtryk for energien i et elektrostatisk system skal da også ganges med en faktor ϵ_r :

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int \epsilon_r E^2 d\tau = \frac{1}{2} \int \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\tau \quad (4.32)$$

Begge formler er stadig rigtige, men situationerne de beskriver er lidt forskellige fra hinanden. I den generelle (hvor integranten er E^2), er det den **samlede** ladning (altså både fri og bunden ladning), der bringes ind fra uendeligt langt væk, og »limes fast« i deres position, mens i den specifikke for dielektrikum er det kun den frie ladning der bringes ind, og dielektriket der reagerer på dette, ved at inducere dipoler.

I den første situation tages der dog ikke højde for det arbejde, der går til at rotere og strække de dielektriske molekyler, mens i den anden situation ses der helt bort fra både det »bundne« arbejde og »fjederenergien« der går til at rotere og strække molekylerne. Dette kan gøres, idet den totale energi er givet ved

$$W_{\text{tot}} = W_{\text{frei}} + W_{\text{bunden}} + W_{\text{fjeder}} \quad (4.33)$$

hvor de sidste to er lige store og modsatrettede, så den specifikke formel, hvor der kun regnes på den frie ladning, giver altså den totale energi i systemet (hvis der ses bort fra, hvordan dielektriket kom til).

Dermed skal der altså normalt bruges (4.32) i situationer med dielektrikum, da man ellers kommer til at regne på en helt anden situation.

4.4.4 Kræfter på dielektrikum i en pladekapacitor

Et dielektrikum er, på samme måde som en leder, tiltrukket ind i et elektrisk felt. Til gengæld er udregning for dielektrikum oftest ret svære. Eksempelvis på en pladekapacitor er der faktisk et »kantfelt«, der ikke er homogen (i modsætning til den »indre« del af kapacitoren) langs kanterne. Dette felt er svært at beregne, men man kan faktisk komme helt uden om det.

Hvis en plade af dielektrikum indsættes et stykke ved inde i kapacitoren, og W betegner systemets energi (der afhænger af, hvor langt inde dielektriket er), da vil energien der skal til for at trække dielektriket en infinitesimal afstand ud af kapacitoren være givet ved

$$dW = F_{\text{mig}} dx \quad (4.34)$$

hvor F_{mig} er den kraft jeg påvirker pladen med, som er modsat den kraft som kapacitoren trækker dielektriket ind med: $F_{\text{mig}} = -F$. Da er kraften på dielektriket givet ved

$$F = -\frac{dW}{dx} \quad (4.35)$$

Energien i kapacitoren er $W = 1/2 CV^2$ og kapacitansen er

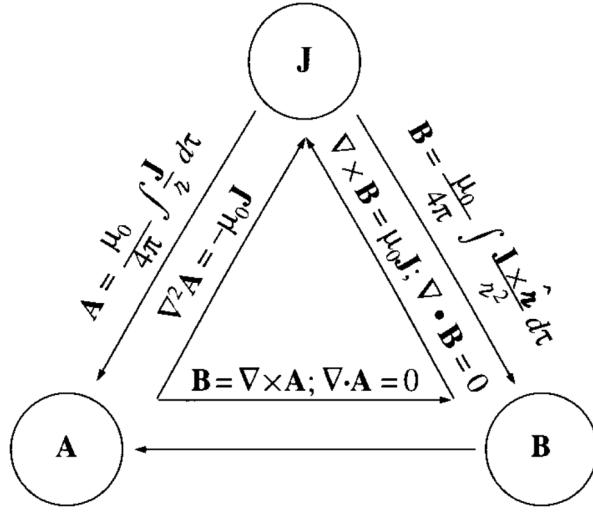
$$C = \frac{\epsilon_0 w}{d} (\epsilon_r l - \chi_e x) \quad (4.36)$$

hvor w er bredden af pladen, l er længden af pladen og x er afstanden fra den ene ende af kapacitoren til dielektriket (altså hvor stor afstand der er tilbage, først kapacitoren er helt fyldt med dielektrikum). Hvis det antages at Q er konstant, så $W = 1/2 Q^2/C$, da er kraften givet ved

$$\begin{aligned} F &= -\frac{dW}{dx} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C^2} \frac{dC}{dx} = \frac{1}{2} V^2 \frac{dC}{dx}, \quad \frac{dC}{dx} = -\frac{\epsilon_0 \chi_e w}{d} \\ &= -\frac{\epsilon_0 \chi_e w}{2d} V^2 \end{aligned} \quad (4.37)$$

5 Magnetostatik

Magnetostatik kan, lige som elektrostatik, opsummeres i en figur. Figuren for magnetostatik ses herunder:



Figur 3: Opsummering af magnetostatik. Fra bogen side 240

5.1 Introduktion

Indtil videre har vi regnet med punktpartikler, eller partikelfordelinger, der står stille, og set hvordan disse påvirker en testladning. Nu skal der ses på situationer, hvor kildeladningerne bevæger sig. Nærmere specifikt skal der ses på, når den samlede strøm er konstant. Situationer som denne kaldes for **magnetostatik**, da de danner magnetfelter, der er stationære i tid.

Et eksempel kan ses, hvis man hænger en ledning op i loftet, så de to ender begge hænger nedad. Hvis ledningens ender da forbides til et batteri, sådan så der løber strøm fra pluspolen, op ad den ene del af ledningen, forbi ophængningspunktet og ned ad den anden del til minuspolen, så vil de to ledninger *frastøde* hinanden.

Hvis man derimod hænger dem op på sådan en måde, så der løber strøm gennem de to dele af ledningen, parallelt i forhold til hinanden (altså opad, eller nedad for dem begge), da vil de to dele *tiltrække* hinanden.

Der vil dog ikke ske noget, hvis man bare sætter en testladning i nærheden af ledningerne - der bliver ikke dannet noget elektrostatisk felt, da der er lige så mange positive som negative ladninger i ledningen. Godt nok bevæger de negative kildeladningerne sig, men ladningsfordelingen bliver konstant 0, og der dannes altså intet elektrisk felt. Hvis partiklen til gengæld er i bevægelse vil denne opleve en kraft fra ledningerne - en magnetisk kraft.

Det magnetfelt der dannes, når der flyder strøm gennem ledningen vil ikke bevæge sig væk fra ledningen, som ved elektriske felter. Magnetfeltet bevæger sig »rundt om« ledningen: Hvis man tager sin højre hånd, stikker tommelfingeren i retning af strømmen og krummer fingrene om ledningen, vil fingrenes retning beskrive magnetfeltets retning.

5.2 Lorentzloven

Selve den magnetiske kraft er givet ved Lorentzloven:

$$\mathbf{F}_{\text{mag}} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.1)$$

Hvor Q er testladningen, \mathbf{v} er dennes hastighed og \mathbf{B} er magnetfeltet. Hvis der både er et elektrisk og magnetisk felt, er den samlede kraft på Q givet ved summen af disse

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{E} + (\mathbf{v} \times \mathbf{B})] \quad (5.2)$$

Et eksempel på en partikelbane som følge af magnetiske krafter er et homogent magnetisk felt $\mathbf{B} = -B\hat{\mathbf{z}}$ og en partikel der bevæger sig i xy -planen. Hvis denne bevæger sig mod uret vil kraften pege indad mod

origo og partiklen oplever en centripetal kraft, givet ved

$$F = QvB = m\frac{v^2}{R}, \quad p = QBR \quad (5.3)$$

Denne formel kaldes for **cyklotronformlen**, og kan bruges til at finde en partikels impulsmoment: send en partikel gennem et homogent magnetisk felt og mål dennes afbøjningsradius.

Hvis partiklen også har en komponent parallelt med \mathbf{B} , altså i z -retningen, vil denne ikke have nogen indflydelse på partiklens afbøjningsradius, og den vil heller ikke opleve nogen kraft i z -retningen. Resultatet af dette er, at partiklen bevæger sig i en helix omkring z -aksen.

Et vigtigt resultat af Lorentzloven er at **magnetiske felter udfører intet arbejde**. Dette kan ses ved at lade en partikel Q bevæge sig et stykke vej $d\mathbf{l} = \mathbf{v} dt$. Arbejdet er da

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = 0 \quad (5.4)$$

Hvilket følger af at $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ og \mathbf{v} er ortogonale, og dermed at $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} = 0$. Magnetiske felter kan altså kun afbøje partikler og dermed ændre deres retning - de kan ikke øge eller sænke hastigheden af en partikel. Nogle gange kan det se ud som om, at magnetiske felter udfører et arbejde, men i sandheden sker dette ikke. De kan godt omdirigere krafter, hvilket for det til at se ud som om det magnetiske felt udfører et arbejde.

En analogi er normalkraften i mekanik. Denne er altid vinkelret på overfladen, og dermed på en eventuel bevægelse. Altså udfører denne heller intet arbejde. Hvis der dog ses på en kasse på et skråplan, der påvirkes med en horizontal kraft, vil normalkraften (der har en vertikal komponent) »omdirigere« den resulterende kraft, således at kassen bevæger sig op ad skråplanen. Her er det ikke normalkraften der udfører et arbejde, men den eksterne, horisontale kraft, der gør dette.

5.2.1 Strømme

En strøm i en ledning er den mængde ladning per tidsenhed, der passerer gennem et givent punkt. Her gælder at negative ladninger der bevæger sig mod venstre, giver den samme strøm som positive ladninger, der bevæger sig mod højre (såfremt hastighed og ladningsmængde er ens i de to tilfælde). Normalt ses strøm som bevægende sig fra pluspolen af en strømkilde mod minuspolen. Egentlig er det elektronerne, der er negativt ladede, der bevæger sig fra minus mod plus. Resultatet er det samme, og man kan se det som positivt ladede »huller«, der bevæger sig fra plus til minus.

Strøm måles i coulomb per sekund, kaldet ampere: $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$. En linjeladning γ der bevæger sig gennem en ledning med en hastighed \mathbf{v} udgør en ladning

$$\mathbf{I} = \lambda \mathbf{v} \quad (5.5)$$

Det ses, at strøm er en vektoriel størrelse. Normalt opgives den ikke ved en vektor, da strømmens retning angives af ledningens retning $d\mathbf{l}$, hvori selve strømmen flyder. Ladningsdensiteten λ hentyder kun til den mængde frie ladning, der rent faktisk bevæger sig i ledningen. Kraften på et ledningssegment er da givet ved

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) dq = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \lambda dl = \int (\mathbf{I} \times \mathbf{B}) dl \quad (5.6)$$

Og da strømmen og ledningen peger i samme retning, og at strømmen normalt er konstant, kan dette skrives ved

$$\mathbf{F} = \int I(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) = I \int (dl \times \mathbf{B}), \quad \text{konstant strøm} \quad (5.7)$$

Når en strøm løver over en flade, beskrives dette ved **overfladestrøm** \mathbf{K} . Denne kan ses som et infinitesimalt bånd med bredden dl_{\perp} , der løber parallelt med strømmen $d\mathbf{I}$. Overfladestrømmen er da

$$\mathbf{K} = \frac{d\mathbf{I}}{dl_{\perp}} \quad (5.8)$$

Med ord er \mathbf{K} strømmen per enhedsbredde vinkelret på strømmen. Hvis der er en overfladeladning σ , der bevæger sig med hastigheden \mathbf{v} er \mathbf{K} givet ved

$$\mathbf{K} = \sigma \mathbf{v} \quad (5.9)$$

Kraften på overfladeladningen er

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \sigma \, da = \int (\mathbf{K} \times \mathbf{B}) \, da \quad (5.10)$$

Lige som at elektriske felter oplever en diskontinuitet ved overfladeladninger, så oplever magnetiske felter en diskontinuitet ved overfladestrømme. Dermed skal \mathbf{B} i formen ovenfor være **gennemsnittet** af feltet over og under overfladen - igen, præcis som elektriske felter.

Når der løber strøm gennem en tredimensional region, kaldes det for en **volumenstrøm** \mathbf{J} , og er defineret ved et infinitisemalt rør med tværsnitsareal da_{\perp} , der løber parallelt med strømmen $d\mathbf{I}$. Da er

$$\mathbf{J} = \frac{d\mathbf{I}}{da_{\perp}} \quad (5.11)$$

med ord er dette strømmen per arealenhed, der står vinkelret på strømmen. Hvis en volumenladning ρ bevæger sig med hastigheden \mathbf{v} er \mathbf{J} givet ved

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v} \quad (5.12)$$

Ligesom analogerne til linjeladning og overfladeladning. Kraften på en volumenstrøm er da

$$\mathbf{F} = \int (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho \, d\tau = \int (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \, d\tau \quad (5.13)$$

Ud fra definitionen af volumenstrømmen, kan den samlede strøm, der løber gennem en overflade \mathcal{S} gives ved at integrere:

$$I = \int_{\mathcal{S}} J \, da_{\perp} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot da \quad (5.14)$$

Den samlede strøm der forlader en volumen \mathcal{V} er givet ved

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot da = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) \, d\tau \quad (5.15)$$

Men da ladning er bevaret, må dette komme på bekostning af ladningen inde i volumenet:

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \mathbf{J}) \, d\tau = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \, d\tau = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, d\tau \quad (5.16)$$

Siden dette gælder for alle volumener, konkluderes det at

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (5.17)$$

Denne formel kaldes for **kontinuitetsligningen**.

5.2.2 Jævn strøm

Magnetostatik kræver en jævn strøm, og med dette menes en kontinuert strøm af ladning, der har været i gang for evigt og uden at der ophobes ladning nogen steder. Der findes da ingen perfekt jævn strøm, på samme måde som der egentlig heller ikke findes nogen perfekt stationær ladning. Dermed er både elektrostatik og magnetostatik egentlig beskrivelser af teoretiske systemer. Til gengæld er de passende approksimationer på mange fysiske systemer. Magnetostatik er en fin approksimation såfremt fluktuationerne i strømmen ikke er alt for hurtige. I bogen nævner Griffiths blandt andet vekselstrømmen i hjemmene, der har en frekvens på 60 Hz (i USA. Danmarks el-net bruger 50 Hz), er i mange henseender velapproksimeret ved magnetostatik.

Der lægges blandt andet mærke til, at en enkelt punktladning aldrig vil kunne udgøre en jævn strøm, idet ladningsfordelingen hele tiden fluktuerer. Til ét tidspunkt er partiklen i ét punkt, og til det næste er den væk.

I magnetostatik er ρ altså konstant, hvilket gør at kontinuitetsligningen bliver

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.18)$$

5.3 Biot-Savart loven

Magnetfeltet af en jævn linjeladning er givet ved Biot-Savart loven:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{I} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl' \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (5.19)$$

Hvor der integreres langs strømmens retning. μ_0 kaldes **vakuumpermeabiliteten** og har værdien

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A} \quad (5.20)$$

Det er en eksakt værdi for at få enheden Ampere til at passe, og for at få \mathbf{B} til at have enheden **tesla**:

$$1 \text{ T} = 1 \text{ N/(A} \cdot \text{m}) \quad (5.21)$$

For henholdsvis en **overfladestrøm** og **volumenstrøm** er Biot-Savart loven

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} da', \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' \quad (5.22)$$

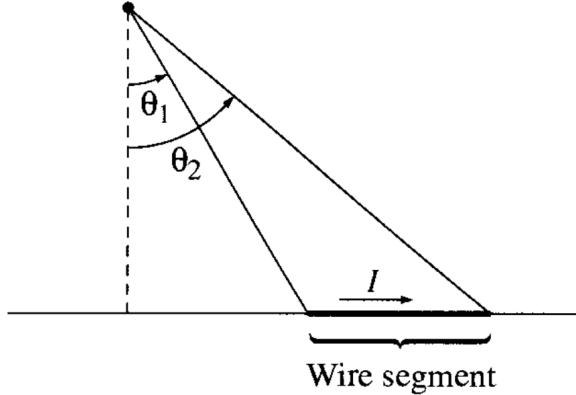
Igen er der **ingen** Biot-Savart lov for en punktpartikel, da denne aldrig kan udgøre en jævn strøm. Magnetfelter overholder også **superpositionsprincippet**, og det samlede vektorfelt er altså vektorsummen af de enkelte magnetiske felter.

5.3.1 Eksempler og anvendelser

Et eksempel på anvendelsen af Biot-Savart loven er en **lang lige ledning**, der bærer en **jævn strøm** I . Magnetfeltet i et punkt P , en afstand s fra ledningen er givet ved

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi s} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (5.23)$$

Hvor θ_1 er startvinklen og θ_2 er slutvinklen. Disses placering ses på figuren herunder



Figur 4: Fra bogen, side 217.

For en uendelig ledning er $\theta_1 = -\pi/2$ og $\theta_2 = \pi/2$ og magnetfeltet bliver

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad (5.24)$$

Her er feltet invers proportionelt med afstanden s - lige som det elektrostatiske tilfælde.

Kraften mellem to uendeligt lange, parallelle ledninger, der har strømmen I_1 og I_2 (med samme fortegn) findes da som følger. Magnetfeltet på den anden ledning er

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi s} \quad (5.25)$$

Kraften er her tiltrækkende og givet ved Lorentz lov:

$$F = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi s} \int dl \quad (5.26)$$

Integralet divergerer mod uendeligt, så den samlede kraft er også uendelig, men kraften per enhedslængde er

$$f = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{s} \quad (5.27)$$

Et andet eksempel er magnetfeltet i et punkt P , en afstand z over midten af en **cirkulær løkke** med radius R og jævn strøm I . Magnetfeltet $d\mathbf{B}$ fra linjestykket dl' står vinkelret på separationsvektoren mellem dl' og P . Denne er da skrå i forhold til vertikalen, og det vil $d\mathbf{B}$ også være (denne peger skræt opad). Når der integreres rundt i cirklen vil $d\mathbf{B}$ da tegne en kegle med spids i punktet P . Grundet denne symmetri vil alle horisontale komponenter udslukke hinanden, hvormed der kun er en vertikal tilbage. Denne er givet ved

$$B(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \frac{dl'}{z^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \quad (5.28)$$

5.4 Divergens og rotation for \mathbf{B} , samt Ampères lov

Fra Biot-Savart loven kan både divergens og rotation for \mathbf{B} udregnes. Den generelle form af Biot-Savart loven, den for volumenstrømme, er givet ved

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{z^2} d\tau' \quad (5.29)$$

Ved at tage divergensen af dette (med hensyn til de almindelige koordinater, ikke de mærkede), og bruge produktregel nr. 6, samt at $\nabla \times (\hat{\mathbf{r}}/z^2) = 0$ fås følgende resultat:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.30)$$

Og divergensen af et magnetfelt er altså altid 0.

Ved at tage rotationen af magnetfeltet og bruge produktregel nr. 8, samt det faktum at $\nabla \cdot (\hat{\mathbf{r}}/z^2) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r})$ fås

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}(\mathbf{r}) \quad (5.31)$$

Begge disse resultater gælder for **alle** magnetfelter. Formlen for magnetfeltets rotation kaldes for **Ampères lov** (i differentialform). I integralform lyder den

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} \quad (5.32)$$

For at finde den rigtige vej at integrere rundt, bruges højrehåndsreglen: Hvis dine fingre på højre hånd indikerer integrationsvejen, så vil din tommel indikere retningen af positiv strøm.

Lige som ved Gauss' lov kan Ampères lov med fordel bruges i situationer med symmetri. I dette tilfælde er symmetrierne som følger:

- Uendelige, lige ledninger: Brug en cirkulær Ampereløkke, der bevæger sig rundt, vinkelret på ledningen. (eksempel 5.7 i bogen)
- Uendelige planer: Brug en rektangulær Ampereløkke, der står vinkelret på både planen og strømretningen (eksempel 5.8 i bogen)
- Uendelig solenoider (en cylinder med ledning vundet tæt sammen på overfladen): Brug en rektangulær Ampereløkke normalt på solenoidens krumme overflade, med strømretningen vinkelret gennem løkken (såfremt ledningerne er vundet tæt nok sammen, kan de godt ses som værende vinkelrette i forhold til solenoiden. Se eksempel 5.9)
- Toroider, hvor ledningen er vundet tæt rundt i en »cirkel« (tænk på det som en krum solenoide, hvor enderne sættes sammen, så det ligner en donut med ledninger om): Brug en cirkulær Ampereløkke rundt om aksen på toroiden (altså samme plan som toroiden/donutten). (Se eksempel 5.10)

Resultaterne af disse prototyper er som følger:

Uendelig, lige ledning

For en **uendelig, lige ledning**, med en jævn strøm I , er det magnetiske felt cirkumfærentielt, og størrelsen i en afstand s er

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \quad (5.33)$$

Dette findes, igen, ved at tegne en cirkulær Ampereløkke, der løber rundt om ledningen, og står vinkelret på denne.

Uendelige plan

For en **uendelig plan** (eksempelvis z -planen), med et homogen overfladestrøm, eksempelvis $\mathbf{K} = K\hat{x}$, der løber i xy -planen. Her vil \mathbf{B} kun have en y -komponent givet ved

$$\mathbf{B} = \begin{cases} +(\mu_0/2)K\hat{y}, & \text{for } z < 0, \\ -(\mu_0/2)K\hat{y}, & \text{for } z > 0. \end{cases} \quad (5.34)$$

Dette kan ses ved at bruge højrehåndsreglen ($+x, +z \rightarrow -y$, og $+x, -z \rightarrow +y$). For at udregne denne bruges en rektangulær Ampereløkke, der er parallelt med yz -planen, og hvis top/bund er henholdsvis over/under xy -planen, således at strømmen løber vinkelret gennem Ampereløkken. Her afhænger feltet ikke af afstanden fra planen - lige som analogen i elektrostatik.

Uendelig solenoide

For en **uendelig solenoide** med n tæt vundne bindinger af ledning per længdeenhed på den krumme overflade af en cylinder med radius R , der bærer en jævn strøm I gennem ledningen. Såfremt ledningen er vundet tæt nok, kan hver binding betragtes som værende cirkulær. Ellers kan dette også visualiseres med en homogen overfladestrøm $K = nI$. Her er magnetfeltet parallelt med cylinderens akse, men kun inden i cylinderen er denne forskellig fra 0. Resultatet er

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \mu_0 n I \hat{z}, & \text{inden i solenoiden,} \\ 0, & \text{uden for solenoiden.} \end{cases} \quad (5.35)$$

Her bruges en rektangulær Ampereløkke, der står normalt på den krumme overflade, med »bunden« inden i solenoiden og »toppen« uden for solenoiden. Her løber strømmen igen vinkelret gennem løkken

Toroide

For en **toroide**, med en tæt vunden ledning (så hver binding kan regnes som en lukket løkke), som foretager N vindinger, hvor der løber en jævn strøm I gennem ledningen, vil have et magnetfelt der er sonalt, som altså løber i en cirkel rundt om toroidens akse.

Dette kan også ses som en solenoide, der krummer således at de to ender sættes sammen, og den danner en »donut«. I den almindelige solenoide løber magnetfeltet parallelt med omdrejningsaksen. Denne bøjes, så den bliver til en cirkel, og magnetfeltet »følger med«. Faktisk behøver toroiden ikke at være cirkulært i tværsnittet. Den kunne også være firkantet, så længe den bare har den samme form hele vejen rundt (se eksempel 5.10 for figurer).

Magnetfeltet af toroiden er

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 N I}{2\pi s} \hat{\phi}, & \text{for punkter inden i spolen,} \\ 0, & \text{for punkter uden for spolen.} \end{cases} \quad (5.36)$$

Denne udregnes ved brug af en cirkulær Ampereløkke med radius s , der ligger om toroidens akse (som altså »følger« toroidens form).

5.4.1 Sammenligning mellem magnetostatik og elektrostatik

Divergensen og rotationen for elektrostatiske felter er givet ved

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho, & (\text{Gauss' lov}), \\ \nabla \times \mathbf{E} = 0, & (\text{uden navn}). \end{cases}$$

Dette er **Maxwells ligninger** for elektrostatik. Sammen med randbetingelserne at $\mathbf{E} \rightarrow 0$ for $r \rightarrow \infty$ beskriver disse feltet, såfremt ρ er opgivet. De indeholder den samme information som Coulombs lov og superpositionsprincippet.

For magnetostatik er det samme

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, & (\text{uden navn}), \\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, & (\text{Ampères lov}). \end{cases} \quad (5.37)$$

Dette er Maxwells ligninger for magnetostatik. Sammen med den lignende randbetingelse at $\mathbf{B} \rightarrow 0$ for $r \rightarrow \infty$ beskriver disse ligninger det magnetiske felt. Disse ligninger er ækvivalente med Biot-Savart loven og superpositionsprincippet - lige som ved Elektrostatik.

Maxwells ligninger og kraftloven

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (5.38)$$

er den mest simple/elegante formulering af både elektrostatik og magnetostatik.

Det ses, at elektriske feltlinjer *divergerer* væk fra en (positiv) ladning: starter i positive ladninger, og slutter ved negative. Magnetiske feltlinjer *roterer* om strømme, og hverken starter eller slutter. De laver enten lukkede løkker eller går ud mod uendeligt. Hvis de *ikke* gjorde dette, ville divergensen for magnetfelter være forskellige fra 0. Dette vil også sige, at der er ikke nogen magnetiske punktladninger, altså ingen magnetiske monopoler.

I normale situationer vil det elektriske felt klart dominere det magnetiske felt. Det er først ved relativistiske hastigheder (for både kilde- og testladninger), at det magnetiske felt begynder at have en meget stor indflydelse. Dette ses ved størrelsen af de konstante, der indgår i Maxwells ligninger.

Grunden til, vi så overhovedet lægger mærke til magnetiske kræfter er, at i stedet for at skrue hastigheden op til latterlige proportioner, gør vi det med strømmen. Dette ville normalt lave et enormt elektrisk felt - hvis ikke vi sørger for at holde ledningen neutral, ved at have en lige så stor ladning, modsat ladning i hvile. Dette sørger for at udsukke det genererede elektriske felt, og er netop det, der sker i helt almindelige ledninger.

5.5 Magnetisk vektorpotentiale

I elektrostatik tillod $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ os at formulere det elektriske felt som et skalarpotentiale $\mathbf{E} = -\nabla V$. Dette kan dog ikke gøres, da $\nabla \times \mathbf{B} \neq 0$. Til gengæld tillader $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ os at formulere det magnetiske felt som et **vektorpotentiale**:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.39)$$

For det elektriske potentiale kan der altid lægges et felt hvor gradienten er 0 (altså en konstant), uden at ændre på \mathbf{E} . På samme måde kan, for det magnetiske potentiale, lægges ethvert felt til, hvor rotationen er 0 (altså gradienten af enhver skalar), uden at ændre på \mathbf{B} . Dette kan bruges til altid at gøre \mathbf{A} divergensløst.

Eksempelvis kan det originale potentiale \mathbf{A}_0 have én eller anden divergens $\nabla \cdot \mathbf{A}_0$. Der kan da lægges gradienten af en skalar $\nabla \lambda$ til, der dermed er rotationsløs. Den samlede divergens for feltet bliver da

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 \lambda \quad (5.40)$$

For at få vektorpotentialet divergensløst må

$$\nabla^2 \lambda = -\nabla \cdot \mathbf{A}_0 \quad (5.41)$$

Dette er et tilfælde af Poissons ligning, der er matematisk identisk med Poissons ligning for det elektrostatiske potentiale V , bortset fra at $V \rightarrow \lambda$ og $\rho/\epsilon_0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{A}_0$. Dermed er løsningen også af identisk form:

$$\lambda = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{A}_0}{\gamma} d\tau' \quad (5.42)$$

Såfremt gradienten til denne skalar, lægges til vektorpotentialet \mathbf{A}_0 , vil det resulterende potentiale altså være divergensfrit, og stadig give det samme magnetiske felt.

Ved at bruge Ampères lov, muligheden for at gøre \mathbf{A} divergensløst, samt andenafledte regel nr. 11, fås:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (5.43)$$

Der giver

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (5.44)$$

Hvilket jo er Poissons ligning! Eller, rettere tre gange Poissons ligning: én for hver kartesisk koordinat. Under randbetingelsen af, at $\mathbf{J}, \mathbf{K}, \mathbf{I} \rightarrow 0$ ved uendeligt, bliver løsningen for henholdsvis volumen-, overfalde- og linjestrømme:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{\mathbf{r}} d\tau', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{K}(\mathbf{r}')}{\mathbf{r}} da', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{1}{\mathbf{r}} dl' \quad (5.45)$$

Normalt set vil \mathbf{A} have samme retning som strømmen. Dette er altid tilfældet, hvis der kun løber strøm i én retning. Man kan altid lægge en konstant vektor til \mathbf{A} , uden at det ændrer på \mathbf{B} , hvilket svarer til at ændre referencepunktet for V .

Hvis dette *ikke* er tilfældet, må der selvfølgelig andre metoder til, for at finde \mathbf{A} . En øvelse, der overlades til læseren, selvfølgelig... Just kidding. Der er en lignende metode til Ampères lov i integralform, der kan bruges til at finde \mathbf{A} :

For at finde **vektorpotentialet** af en **uendelig solenoide**, med n vindinger per længdeenhed, radius R og strøm I , kan det udnyttes at

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot da = \int \mathbf{B} \cdot da = \Phi \quad (5.46)$$

hvor Φ er fluxen af \mathbf{B} gennem lokken der anvendes. Dette svarer netop til Améres lov i integralform med $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ og $\mu_0 I_{\text{end}} \rightarrow \Phi$. Dermed kan der bruges symmetrier til nemt at udregne \mathbf{A} . I dette tilfælde bruges der to cirkulære Ampereløkker: én inden i solenoiden og én uden for solenoiden, begge med radius s . Da fås

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 n I}{2} s \hat{\phi}, & \text{for } s < R \\ \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{R^2}{s} \hat{\phi}, & \text{for } s > R \end{cases} \quad (5.47)$$

Det ses ved udregning at $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ og $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

Et eksempel på brug af (5.45) er en **sfærisk skal, der roterer** med vinkelhastighed ω , har en homogen overfladestrømsdensitet σ , og radius R . For at finde vektorpotentialet i punktet \mathbf{r} vælges der at bruge kartesiske koordinater, med \mathbf{r} liggende langs z -aksen, således at rotationsaksen befinner sig i en vinkel ψ i forhold til z -aksen. Her vælges, at den ligger i xz -planen. Det fås at

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \sigma}{3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), & \text{for punkter inden i sfæren,} \\ \frac{\mu_0 R^4 \sigma}{3r^3} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), & \text{for punkter uden for sfæren.} \end{cases} \quad (5.48)$$

Eller i sfæriske koordinater:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\mu_0 R \omega \sigma}{3} r \sin \theta \hat{\phi}, & (r \leq R), \\ \frac{\mu_0 R^4 \omega \sigma \sin \theta}{3r^2} \hat{\phi}, & (r \geq R). \end{cases} \quad (5.49)$$

Det ses også, at det magnetiske felt inden i kugleskallen er homogent: $\mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \sigma R \boldsymbol{\omega}$.

5.5.1 Magnetostatiske randbetingelser: overfladestrømme

På samme måde, som elektrostatiske felter er diskontinuerte over overfladeladninger, er magnetostatiske felter diskontinuerte over *overfladestrømme*. Her er det dog den tangentuelle komponent af B -feltet (tangentielt til overfladen og ortogonal til strømmen), der er diskontinuert. De normale og parallelle komponenter af B -feltet er begge kontinuerte. Størrelsen af diskontinuiteten er

$$B_{\text{tangent, over}} - B_{\text{tangent, under}} = \mu_0 K \quad (5.50)$$

Og alle tre randbetingelser kan beskrives ved følgende ligning:

$$\mathbf{B}_{\text{over}} - \mathbf{B}_{\text{under}} = \mu_0 (\mathbf{K} \times \hat{\mathbf{n}}) \quad (5.51)$$

hvor $\hat{\mathbf{n}}$ er enhedsvektornormalen til overfladen, der pejer *>opad<*.

Vektorpotentialet, lige som skalarpotentialet for elektrostatiske felter, er dog kontinuert over en overfladestrøm (såfremt divergensen er 0), og dermed er

$$\mathbf{B}_{\text{over}} = \mathbf{B}_{\text{under}} \quad (5.52)$$

og den afledte af \mathbf{A} giver diskontinuiteten:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{\text{over}}}{\partial n} - \frac{\partial \mathbf{A}_{\text{under}}}{\partial n} = -\mu_0 \mathbf{K} \quad (5.53)$$

5.5.2 Multipolekspansion af vektorpotentialet

Lige som man kan lave en multipolekspansion for elektriske potentialer, der giver en approksimeret værdi for punkter langt væk fra kilden, kan det samme gøres for magnetiske felter. Med samme metoder fås at

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \oint (r')^n P_n(\cos \theta') \, d\mathbf{l}' \quad (5.54)$$

hvor igen P_n er det n -te Legendre polynomium, og θ' er vinklen mellem \mathbf{r} og \mathbf{r}' . Dette kan skrives ud til

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{1}{r} \oint d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^2} \oint r' \cos \theta' \, d\mathbf{l}' + \frac{1}{r^3} \oint (r')^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta' - \frac{1}{2} \right) \, d\mathbf{l}' + \dots \right] \quad (5.55)$$

Her er monopolleddet ($n = 0$) altid nul, da $\oint d\mathbf{l}' = 0$, idet det er den vektoriale forskydning rundt i en lukket løkke. Ingen indikation, at der ikke er nogen magnetiske monopoler.

Idet dette er tilfældet, er det dominerende led i ekspansionen dipolleddet (såfremt dette ikke også forsvinder). Dette er givet ved

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint r' \cos \theta' \, d\mathbf{l}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} \oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \, d\mathbf{l}' \quad (5.56)$$

Integralet kan omskrives til

$$\oint (\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') \, d\mathbf{l}' = -\hat{\mathbf{r}} \times \int d\mathbf{a}' \quad (5.57)$$

Dipolleddet bliver da

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^2}, \quad \mathbf{m} = I \int d\mathbf{a} \quad (5.58)$$

hvor \mathbf{m} kaldes for det **magnetiske dipolmoment**. $\mathbf{a} = \hat{\mathbf{n}}a$ er løkkens »vektoriale« areal. Hvis løkken er flad er \mathbf{a} det almindelige areal.

Til forskel fra det elektriske dipolmoment, er det magnetiske altid uafhængig af de valgte koordinater (dette ses også, da det samlede monopolmoment altid er 0 for magnetiske dipolmomenter - hvilket også er kravet for at det elektriske dipolmoment er koordinatuafhængigt).

Idet dipolleddet (normalt, med mindre $\mathbf{m} = 0$) er det dominerende er det en god approksimation for det magnetiske felt, langt væk fra strømmen. Der vil stadig være højereordensled, men disse giver mindre og mindre bidrag, jo højere orden de er.

I teorien er det muligt at danne en matematisk, magnetisk dipol, hvis potentiale kun består af dipolleddet. Det gøres ved at have en infinitesimalt lille løkke om origo, og for så at holde dipolmomentet endeligt, skal strømmen gå mod uendelig, med $m = Ia$ som konstant. Så igen, kun i teorien.

Potentialet af en ren dipol, der sidder i origo og pejer i $+z$ -retningen er givet ved

$$\mathbf{A}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} \hat{\phi} \quad (5.59)$$

Og magnetfeltet er da

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \mathbf{r} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (5.60)$$

Det ses, at det er nøjagtig den samme struktur som en ren elektrisk dipol! For en fysisk dipol er det dog en noget anderledes historie, når man er tæt på.

I koordinatfri form lyder magnetfeltet

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}] \quad (5.61)$$

6 Magnetiske felter i materialer

6.1 Magnetisering

6.1.1 Diamagneter, paramagneter og ferromagneter

I materialer er der to former for små strømme: elektroner, der bevæger sig rundt om atomkernerne, og elektroner, der roterer om sig selv. Med makroskopiske briller er begge disse så små, at begge fænomener kan betragtes som magnetiske dipoler.

Normalt set er alle de forskellige dipoler tilfældigt orienteret, så det samlede dipolmoment er 0, men hvis et eksternt magnetfelt indføres vil dipolerne rotere, og materialet bliver magnetisk polariseret - **magnetiseret**.

For elektrisk polarisation, hvor de elektriske dipoler altid orienterer sig i retning af det elektriske felt, er dette ikke altid tilfældet for magnetisk polarisation. Nogle materialer bliver magnetiseret parallelt med **B** (paramagneter), mens nogen materialer bliver magnetiseret antiparallelt med **B** (diamagneter). En anden gruppe materialer, kaldet ferromagneter (hvor jern, eller ferrum, er det mest almindelige) beholder deres magnetisering efter det eksterne magnetiske felt fjernes igen.

6.1.2 Kraftmomenter og kræfter på magnetiske dipoler

En magnetisk dipol vil opleve et kraftmoment i et magnetisk felt, på samme måde som en elektrisk dipol i et elektrisk felt. For en rektangulær strømløkke (med sider a og b) i et homogent magnetfelt **B** er kraftmomentet

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \quad (6.1)$$

hvor $m = Iab$ er det magnetiske dipolmoment af løkken. Dette giver faktisk det eksakte kraftmoment på enhver lokal strømførsel i et homogent felt. I et inhomogent felt er formlen det eksakte kraftmoment (om centrum) af en perfekt, infinitesimal dipol.

Dette kraftmoment er i en retning, som får dipolen til at rette sig med feltet (paramagnetisme). Grundet kvantemekanik (Paulis udelukkelsesprincip) findes paramagnetisme oftest kun i atomer eller molekyler med et ulige antal elektroner, idet elektroner findes i par med modsat spin (og dermed modsat magnetisk dipolmoment). Det er dermed den ekstra elektron, der giver dette kraftmoment. Denne effekt er dog langt fra fuldstændig, da termiske kollisioner arbejder mod denne samlede orientering.

I et homogent felt er den samlede kraft på en strømløkke altid 0:

$$\mathbf{F} = I \oint (\mathbf{dl} \times \mathbf{B}) = I \left(\oint \mathbf{dl} \right) \times \mathbf{B} = 0 \quad (6.2)$$

mens i et inhomogent felt er dette ikke tilfældet. For en infinitesimal løkke, med dipolmoment **m** i et vilkårligt magnetfelt **B** er kraften

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \quad (6.3)$$

Det ses at både formlen for kraftmomentet og kraften om en infinitesimal løkke er på ens form som deres elektriske analoger.

6.1.3 Effekten af magnetiske felter på atomare kredsløb

Elektroner bevæger sig også omkring atomkernen. Dette sker så hurtigt, at det til en god approksimation er en jævn strøm, givet ved

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi R} \quad (6.4)$$

hvor e er elementarladningen, $T = v/(2\pi R)$ er omløbstiden i et cirkulært kredsløb med hastighed v og radius R . Dermed er dipolmomentet af dette system

$$\mathbf{m} = -\frac{1}{2}evR\hat{\mathbf{z}} \quad (6.5)$$

hvor minustegnet er til for at tage højde for elektronens negative ladning. Denne magnetiske dipol oplever selvfølgelig også et kraftmoment givet ved samme formel som før, men det er ret meget sværere at vипpe et helt atomart kredsløb, end en enkelt elektron, så denne effekt er ret lille i kontekst af paramagnetisme.

Til gengæld sker der det, at elektronernes hastighed stiger eller falder, alt efter manetfeltets retning. Dette sker, idet det cirkulære kredsløb normalt kun er grundet elektriske kræfter:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} = m_e \frac{v^2}{R} \quad (6.6)$$

hvor v^2/R er centripetalaccelerationen. Hvis der er et B-felt til stede vil elektronen også opleve en kraft fra dette: $-e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Hvis magnetfeltet er vinkelret på kredsløbets plan, fås

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{R^2} + e\bar{v}B = m_e \frac{\bar{v}^2}{R} \quad (6.7)$$

hvor \bar{v} er den nye hastighed. I dette tilfælde er den nye hastighed større end tilfældet kun med elektriske kræfter. Såfremt forskellen $\Delta v = \bar{v} - v$ i hastighed er lille, er den approksimeret ved

$$\Delta v = \frac{eRB}{2m_e} \quad (6.8)$$

Og en ændring i orbital hastighed giver et ændret dipolmoment:

$$\Delta \mathbf{m} = -\frac{1}{2}e(\Delta v)R\hat{\mathbf{z}} = -\frac{e^2 R^2}{4m_e} \mathbf{B} \quad (6.9)$$

hvor det ses, at ændringen i dipolmoment er i den modsatte retning af \mathbf{B} . Normalt er de atomare kredsløb orienteret tilfældigt, så deres dipolmomenter udslukker hinanden, men ved et eksternt magnetfelt får alle atomerne et ekstra lille dipolmoment, der er i modsat retning af \mathbf{B} , og altså antiparallelt til feltet. Dette er mekanismen bag **diamagnetisme**. Effekten er til stede i alle materialer, men er typisk set meget svagere end paramagnetisme, så ses oftest i atomer med et lige antal elektroner.

Denne uledning antager dog, at kredsløbet forbliver cirkulært, hvilket måske ikke altid er tilfældet (faktisk er diamagnetisme et kvantemekanisk fænomen, så denne klassiske model er mere hullet end schweizerost), men det giver alligevel en god intuition for, hvad der er et empirisk faktum.

6.1.4 Magnetisation

Lige som polarisationen \mathbf{P} i et materiale nært et elektrisk felt er givet ved det elektriske dipolmoment per volumenenhed, så defineres magnetisationen \mathbf{M} også som

$$\mathbf{M} = \text{magnetisk dipolmoment per volumenenhed} \quad (6.10)$$

Magnetisationen kan enten være forskyldt af paramagnetisme eller diamagnetisme - det er i og for sig lige meget, og i de næste afsnit gøres der ingen tanker om *hvordan* magnetisationen opstod - vi regner bare på feltet der dannes fra magnetisationen.

Normalt set er både paramagnetisme og diamagnetisme meget, meget svage i forhold til ferromagnetisme (typisk 4-5 størrelsesordner mindre), hvilket også er grunden til, at man ikke selv mærker nogen effekt tæt ved magnetfelter (omkring 40 T er dog nok til at få en frø - der er diamagnetisk grundet vandinholdet - til at svæve).

6.2 Feltet af et magnetiseret objekt

6.2.1 Bundne strømme

Det magnetiske vektorpotentiale af en enkelt dipol er givet ved

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (6.11)$$

Og i et materiale med magnetisation, hvor hvert volumenelement $d\tau'$ indeholder et dipolmoment $\mathbf{M} d\tau'$, er det samlede vektorpotentiale givet ved

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} d\tau' \quad (6.12)$$

Dette kan dog, på samme vis som for elektrisk polariserede materialer, omskrives til

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_b(\mathbf{r}')'}{r} d\tau' + \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{K}_b(\mathbf{r}')'}{r} da', \quad \mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M}, \quad \mathbf{K}_b = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (6.13)$$

Hvor \mathbf{J}_b er den bundne volumestrøm, og \mathbf{K}_b er den bundne overfladestrøm (helt som den elektriske analog).

Et eksempel. En homogen magnetiseret sfære. Lægges \mathbf{M} langs z -aksen fås: $\mathbf{J}_b = 0$ og $\mathbf{K}_b = M \sin \theta \hat{\phi}$. For en roterende kugleskal med homogen overfladeladning er overfladestrømmen $\mathbf{K} = \sigma \omega R \sin \theta \hat{\phi}$, og det konkluderes da, at dette svarer til en homogen magnetiseret sfære med $\sigma \omega R \rightarrow \mathbf{M}$. Dermed er det magnetiske felt

$$\mathbf{B} = \frac{2}{3} \mu_0 \mathbf{M}, \quad \text{inde i sfæren} \quad (6.14)$$

Og udenfor sfæren er det magnetiske felt ens med en magnetisk dipol i midten, med dipolmoment

$$\mathbf{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mathbf{M} \quad (6.15)$$

Det ses, at lige som den elektriske analog, er felterne homogene inde i sfærerne, også selvom de to formler er lidt forskellige (forskellige faktorer). Ligeledes svarer de begge (uden for sfæren) til en enkelt dipol.

6.2.2 Det mangetiske felt inde i materialet

Lige som i det elektriske tilfælde, er det mikroskopiske magnetiske felt et virvar inde i materialet. Så når der snakkes om magnetiske felter i materialet, er det altid det *makroskopiske* felt, som er et gennemsnit af et lille stykke, stort nok til at indeholde mange atomer, men små nok til ikke at udvaskes forskelle på stor skala. Det er også dette felt som udregnes, hvis formlerne for det forrige afsnit bruges.

6.3 Hjælpefeltet \mathbf{H}

6.3.1 Ampères lov i magnetiserede materialer

I magnetiserede materialer er magnetfeltet grundet både den *frie* strøm og den *bundne* strøm (fundet i sidste afsnit). På helt samme vis som for polariserede materialer, kan den samlede strøm skrives som

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b \quad (6.16)$$

Med dette i tankerne kan Ampères lov skrives ved

$$\frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b = \mathbf{J}_f + (\nabla \times \mathbf{M}) \quad (6.17)$$

Samles de to rotationer fås

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f, \quad \mathbf{H} = \left(\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \right), \quad (6.18)$$

Hvor \mathbf{H} ikke har noget navn. Det er bare \mathbf{H} -feltet, eller \mathbf{H} . Dette er da Ampères lov i materialer, i differentialform, mens på integralform lyder den

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{f_{enc}} \quad (6.19)$$

\mathbf{H} er den magnetiske analog til \mathbf{D} , og vi kan finde den bare ved de frie strømme (eller frie ladninger, i \mathbf{D} 's tilfælde). På samme vis som vi kan bruge Gaussflader med \mathbf{D} , hvis der er symmetrier i systemet, kan vi også bruge Ampereløkker med \mathbf{H} , såfremt der er symmetri. De prototyper og vejledninger til Ampereløkker i afsnit 5.4 kan altså bruges på helt samme måde i disse tilfælde.

Et eksempel. En lang kobberstang med radius R bærer en homogen fri strøm I . Find H inden i og uden for stangen.

Kobber er svagt diamagnetisk, så dipolerne retter sig antiparallelt med feltet. Det giver at den bundne volumenstrøm løber antiparallelt med I , og den bundne overfladestrøm løber parallelt med I .

Idet alle strømme bevæger sig *langs* stangen, må både \mathbf{B} , \mathbf{M} og \mathbf{H} løbe tangentielt til stangen - altså rundt om den ($\hat{\phi}$). Med en cirkulær Ampereløkke med radius s fås

$$\mathbf{H} = \begin{cases} \frac{I}{2\pi R} s \hat{\phi}, & s \leq R \\ \mathbf{H} = \frac{I}{2\pi s}, & s > R \end{cases} \quad (6.20)$$

Og \mathbf{B} kan nemt regnes uden for cylinderen (hvor \mathbf{M} er 0):

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}, \quad s \geq R \quad (6.21)$$

Inden i cylinderen kan det ikke regnes, da der ikke vides om \mathbf{M} .

6.3.2 En advarelse om parallellen mellem \mathbf{B} og \mathbf{H}

På samme vis som for E og D , skal man passe på med at sige at \mathbf{B} er præcis som $\mu_0 \mathbf{H}$, blot med \mathbf{J}_f i stedet for \mathbf{J} , også selvom ligning (6.18) ligner Ampéres lov meget. Dette er fordi vi kun kender rotationen af \mathbf{H} , og ikke dens divergens, og man skal kende begge, for at bestemme et vektorfelt. Normalt set er divergensen af \mathbf{H} nemlig ikke 0:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (6.22)$$

Så kun når divergensen af magnetisationen forsvinder, kan der sættes et ordentligt lighedstegn mellem \mathbf{B} og $\mu_0 \mathbf{H}$.

6.3.3 Randbetingelser

Det magnetostatiske randbetingelser kan omskrives så de kun refererer til \mathbf{H} , ved hjælp af (6.22):

$$H_{\text{over}}^\perp - H_{\text{under}}^\perp = -(M_{\text{over}}^\perp - M_{\text{under}}^\perp) \quad (6.23)$$

og

$$\mathbf{H}_{\text{over}}^{\parallel} - \mathbf{H}_{\text{under}}^{\parallel} = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} \quad (6.24)$$

6.4 Lineære og ikke-lineære medier

6.4.1 Magnetisk susceptibilitet og permabilitet

Ligesom der er lineære dielektriske medier, er der også lineære paramagnetiske og diamagnetiske medier. Faktisk opfører de fleste medier lineært, såfremt det magnetiske felt ikke er alt for kraftigt. Her defineres proportionalitetskonstanten dog ved \mathbf{H} , og ikke \mathbf{B} (som ellers er tilfældet i det elektriske tilfælde, hvor \mathbf{E} bruges, og ikke \mathbf{D}). Ligningen lyder

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (6.25)$$

hvor χ_m kaldes for den **magnetiske susceptibilitet**. Denne er dimensionsløs, samt positiv for paramagnetiske materialer og negativ for diamagnetiske materialer. Typisk er den omkring størrelsesordenen 10^{-5} . En tabel over nogle materialer ses herunder:

Materiale (dia)	Susceptibilitet	Materiale (para)	Susceptibilitet
Bismut	$-1.6 \cdot 10^{-4}$	Oxygen	$1.9 \cdot 10^{-6}$
Guld	$-3.4 \cdot 10^{-5}$	Natrium	$8.5 \cdot 10^{-6}$
Sølv	$-2.4 \cdot 10^{-5}$	Aluminium	$2.1 \cdot 10^{-5}$
Kobber	$-9.7 \cdot 10^{-6}$	Wolfram	$7.8 \cdot 10^{-5}$
Vand	$-9.0 \cdot 10^{-6}$	Platin	$2.8 \cdot 10^{-4}$
Kuldioxid	$-1.2 \cdot 10^{-8}$	Flydende oxygen (-200° C)	$3.9 \cdot 10^{-3}$
Hydrogen	$-2.2 \cdot 10^{-9}$	Gadolinium	$4.8 \cdot 10^{-1}$

Tabel 3: Tabel over magnetiske susceptibiliteter. Værdierne er for 1 atm og 20° C, med mindre andet er skrevet. Fra *Handbook of Chemistry and Physics*, 67. udgave

Materialer af denne type kaldes, selvfølgelige, lineære medier. \mathbf{B} kan her skrives som

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\mathbf{H} \quad (6.26)$$

eller

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0\mu_r = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (6.27)$$

Hvor μ kaldes **permabiliteten** af materialet. I vakuum er $\chi_m = 0$ og permeabiliteten er her lig μ_0 , hvilket er grunden til det hedder vakuumpermabiliteten. $\mu_r = (1 + \chi_m) = \mu/\mu_0$ kaldes for den **relative permeabilitet**.

I lineære medier, hvor både \mathbf{H} og \mathbf{M} er proportionelle med \mathbf{B} forsvinder divergensen af \mathbf{H} desværre stadig ikke altid: I grænsen mellem materialer med forskellig permeabilitet kan divergensen nemlig være uendelig. Hvis der tegnes en Gaussisk dåse omkring en grænse fås at $\oint \mathbf{M} \cdot d\mathbf{a} \neq 0$, og dermed siger divergenssætningen, at $\nabla \cdot \mathbf{M}$ ikke kan være 0 over det hele i dette område.

Til gengæld, er den bundne volumenstrøm i et homogent lineært materiale proportionelt med den frie volumenstrøm:

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times (\chi_m \mathbf{H}) = \chi_m \mathbf{J}_f \quad (6.28)$$

Det vil altså sige, at med mindre der rent faktisk løber en strøm gennem materialet, vil al bunden strøm være overfladestrøm.

Et eksempel. En uendelig solenoide med n vindinger per enhedslængde og strøm I løbende gennem, er fyldt med et lineært materiale, med susceptibilitet χ_m . Find det magnetiske felt inde i solenoiden.

\mathbf{B} skyldes både frie og bundne strømmme, så den kan ikke regnes endnu. til gengæld kan \mathbf{H} regnes ved hjælp af Ampères lov i materialer. Da fås

$$\mathbf{H} = nI\hat{\mathbf{z}} \quad (6.29)$$

Da fås \mathbf{B} til

$$\mathbf{B} = \mu_0(1 + \chi_m)nI\hat{\mathbf{z}} \quad (6.30)$$

Hvis materialet er paramagnetisk, er feltet en smule kraftigere end i en leder, mens hvis det er diamagnetisk er det en smule svagere. Dette ses også ved den bundne overfladestrøm

$$\mathbf{K}_f = \chi_m(\mathbf{H} \times \hat{\mathbf{n}}) = \chi_m n I \hat{\phi} \quad (6.31)$$

Denne er i samme retning som I for paramagnetisme, men modsat for diamagnetisme.

7 Elektrodynamik

7.1 Elektromotorisk kraft

7.1.1 Ohms lov

For at få en strøm til at strømme skal der skubbes til ladningerne. For det meste er strømmen \mathbf{J} proportionel med kraften per enhed af ladning (i vores tilfælde oftest elektromagnetiske krafter):

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (7.1)$$

hvor σ kaldes materialets ledeevne (denne gang ikke en overfladeladningsdensitet, husk det). Oftest opgives den inverse af ledeevnen, kaldet resistiviteten $\rho = \sigma^{-1}$ (igen, ikke volumenladningsdensiteten, sorry)¹. Typiske værdier er tabuleret i næste tabel. Selv materialer der kaldes isolatorer leder faktisk en lille smule strøm, men det er nærmest uhåndgribeligt små mængder i forhold til metal. Typisk er forskellen af størrelsesordenen 10^{22} , så til en god approksimation er metaller **perfekte ledere** med $\sigma = \infty$.

Normalt set er hastighederne så små, at bidraget fra magnetiske felter kan ses bort fra, hvormed Ohms lov optræder:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (7.2)$$

Det ses da, at i en leder er \mathbf{E} -feltet faktisk ikke altid 0! (det er bare et almindelig udråbstegn, ikke 0 fakultet). Det gælder kun for stationære ladninger, hvor $\mathbf{J} = 0$. Dog for en perfekt leder er $\mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma = 0$, og som oftest er metallers ledeevne så stor, at der kan ses bort fra \mathbf{E} , og den bare kan regnes som værende 0. Omvendt, så laves resistorer (modstande) af materialer, med stor resistivitet (altså en lille / dårlig ledeevne).

Materiale	Resistivitet	Materiale	Resistivitet
<i>Ledere:</i>			
Sølv	$1.59 \cdot 10^{-8}$	Saltvand (mættet)	$4.4 \cdot 10^{-2}$
Kobber	$1.68 \cdot 10^{-8}$	Germanium	$4.6 \cdot 10^{-1}$
Guld	$2.21 \cdot 10^{-8}$	Diamant	2.7
Aluminium	$2.65 \cdot 10^{-8}$	Silicium	$2.5 \cdot 10^3$
Jern	$9.61 \cdot 10^{-8}$	<i>Isolatorer:</i>	
Kviksølv	$9.58 \cdot 10^{-7}$	Vand (rent)	$2.5 \cdot 10^5$
Nichrome	$1.00 \cdot 10^{-6}$	Træ	$10^8 - 10^{11}$
Mangan	$1.44 \cdot 10^{-6}$	Glas	$10^{10} - 10^{14}$
Grafit	$1.4 \cdot 10^{-5}$	Kvantsglas	$\approx 10^{16}$

Tabel 4: Resistiviteter i Ohm-meter. Alle værdier er ved 1 atm og 20° C. Fra *Handbook of Chemistry and Physics*, 78. udgave.

En mere kendt udgave af Ohms lov er selvfølgelig, at den samlede strøm mellem to elektroder er proportionel med potentialforskellen mellem dem:

$$V = IR \quad (7.3)$$

hvor R er resistansen (modstanden) i kredsløbet, og denne afhænger af geometrien af resistoren, samt materialet den laves af. Dette er ikke en fundamental lov på fod Ampères lov eller Gauss lov, men nærmere en tommelfingerregel, der ser ud til at holde for ret mange materialer.

For jævne strømme med homogen ledeevne fås at divergensen af \mathbf{E} og \mathbf{J} er 0:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (7.4)$$

Dette betyder, at alle ubalancerede ladninger sidder på overfladen, og at Laplaces ligning holder i homogent ohmiske materiale, hvor der løber en jævnstrøm. (og dermed kan teknikkerne fra kapitel 3 bruges)

¹Og selvom hr Griffiths siger, at »vi er ved at løbe tør for græske bogstaver« så er det **fuldstændig løgn**. Jeg har talt, og der er brugt godt og vel 14 forskellige græske symboler, 12 små og 2 stort, så der er stadig masser tilbage! Hvad med ξ (lille xi), eller ζ (lille zeta)? Sure, σ og ρ er kendte og ser godt ud, men der er stadig en masse, helt og aldeles fine bogstaver tilbage.

Når en strøm løber gennem en komponent med resistans R , vil der blive afsat en effekt som varme i materialet givet ved **Joules varmelov**

$$P = VI = I^2R = V^2/R \quad (7.5)$$

Et par eksempler er som følger:

Eksempler

En Cylindrisk resistor med tværsnitareal A , længde L og ledeevne σ . Tværsnittet behøver ikke nødvendigvis at være rundt, så længe det er ens hele vejen gennem resistoren. Hvis potentialet er konstant i hver ende, og forskellen er V , hvilken strøm løber der da?

Det elektriske felt er homogent i resistoren, hvilket kan ses ved følgende: siden det er et homogent ohmisk materiale, hvor der løber en jævn strøm, gælder Laplaces ligning og entydighedssætningerne! Hvis potentialet i den ene ende sættes til at være 0, og i den anden ende til at være V_0 , så er en løsning (og dermed den *eneste* løsning), at potentialforskellen er givet ved $V(z) = V_0z/L$, hvor z er afstanden langs aksen, fra den ene ende. Idet potentialforskellen er lineær, må E-feltet nødvendigvis være homogent.

Idet E-feltet er homogent, må ladningstætheden også være homogent, og der fås:

$$I = JA = \sigma EA = \frac{\sigma A}{L}V$$

Her er resistansen da givet ved $L/(\sigma A)$.

To lange cylindre med radier a og b ($a < b$) er adskilt af et materiale med ledeevne σ . Hvis der er en potentialforskælf V mellem dem, hvilken strøm løber der så mellem dem, i en længde af L .

Feltet er her givet ved

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{\mathbf{s}}$$

Hvor λ er ladningstætheden på den indre cylinder. Dermed er strømmen

$$I = \int \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \sigma \int \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \sigma E \int da = \sigma \frac{1}{2\pi\epsilon_0 s} \lambda L = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \lambda L$$

Og potentialforskellen

$$V = - \int_b^a \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a)$$

Ved isolering af λ i udtrykket for strømmen fås

$$\lambda = I \frac{\epsilon_0}{\sigma L} \Leftrightarrow V = I \frac{\epsilon_0}{\sigma L} \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a)$$

Og strømmen er da

$$I = \frac{2\pi\sigma L}{\ln(b/a)} V$$

med resistans $\ln(b/a)/2\pi\sigma L$.

7.1.2 Elektromotorisk kraft - der ikke er en kraft

I et typisk elektrisk kredsløb, eksempelvis et batteri forbundet til en komponent, er strømmen i praksis ens hele vejen rundt. Grunden til dette er, at hvis det ikke var tilfældet, ville den ophobning af ladning et sted i kredsløbet gøre, at der bliver dannet et elektrisk felt (Gauss lov, $\rho \neq 0$ og dermed $\mathbf{E} \neq 0$). Dette elektriske felt udfører en kraft der i strømmens retning får ladninger til at bevæge sig hurtigere, og imod strømmens retning får dem til at bevæge sig langsommere. Dette bevirker, at systemet udligner sig selv, så der til sidst er en ens ladningsfordeling ($\rho = 0$). Dette sker så hurtigt, at i systemer, der oscillerer med radiofrekvenser (3 KHz til 300 GHz), kan man roligt antage, at strømmen er konstant hele vejen rundt.

Dette betyder også, at der er to kræfter, der driver strømmen rundt i et kredsløb: både kraften fra kilden \mathbf{f}_s og kraften fra eventuelle elektrostatiske felter grundet ophobning af ladning \mathbf{E} . Den samlede kraft per ladning er da

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_s + \mathbf{E} \quad (7.6)$$

Lige meget hvad der driver kredsløbet (batteri, piezoelektrisk element, Van de Graaff, whatever), defineres kurveintegralet af \mathbf{f} rundt i kredsløbet som den **elektromotoriske kraft** (electromotive force, eller »emf»):

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} \quad (7.7)$$

(idet $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$ er det lige meget, om der bruges \mathbf{f} eller \mathbf{f}_s i definitionen). For en ideel emf-kilde (et batteri uden intern modstand, eksempelvis) er den samlede kraft på ladningerne 0 (Ohms lov med $\sigma = \infty$). Da er $\mathbf{E} = -\mathbf{f}_s$ og potentialforskellen mellem de to terminaler (kaldet a og b) givet ved

$$V = - \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{f}_s \cdot d\mathbf{l} = \mathcal{E} \quad (7.8)$$

idet $\mathbf{f}_s = 0$ inde i kilden, kan integralet gøres til et kurveintegral uden problemer. Idet emf er linjeintegralet af \mathbf{f}_s , kan det ses som det udførte arbejde, per ladningsenhed:

$$\mathcal{E} = \frac{\partial W}{\partial Q} \quad (7.9)$$

7.1.3 Bevægelses-emf

Den mest almindelige kilde til emf er en generator, der udnytter **bevægelses-emf**, som opstår når en leder bevæges gennem et magnetfelt. Et eksempel er en rektangulær løkke, med bredde h , hvor en del af den, x er inden for et homogent magnetisk felt B . Løkken trækkes da ud af lederen med en hastighed v . Emf'en er her:

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{f}_{\text{mag}} \cdot d\mathbf{l} = vBh \quad (7.10)$$

Dette integral evalueres i et enkelt øjeblik. Tag, så at sige, et billede af kredsen og udregn emf'en til netop dette øjeblik. Den kan også regnes ud fra arbejdsbetragninger (hvem trækker i løkken, og hvordan påvirker det kredsløbet), men det er noget af en omvej, så det er nemmere at bruge definitionen på emf, og bruge øjebliksbilledet.

Der er dog en anden, også virkelig smart måde at udregne emf på. Den magnetiske flux gennem en løkke er givet ved

$$\Phi = \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (7.11)$$

Så for den rektangulære løkke er

$$\Phi = Bhx, \quad \frac{d\phi}{dt} = Bh \frac{dx}{dt} = -Bhv \quad (7.12)$$

(hvor fortagnet kommer ved, at løkken trækkes *ud* af magnetfeltet). Da ses det, at i dette tilfælde er den tidsafledte af fluxen lig den negative emf, eller:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.13)$$

Dette kaldes **fluxreglen**, og den relation gælder faktisk ikke kun for dette tilfælde: **fluxreglen gælder altid!** Der vil dog være tidspunkter hvor den ikke er brugbar, og der skal Lorentzloven bruges.

Den rigtige integrationsvej i definitionen for den magnetiske flux, er som altid givet ved højrehåndsreglen: hvis fingrene på din højre hånd angiver den positive omløbsretning, vil din tommelfinger angive retningen på $\hat{\mathbf{n}}$.

7.2 Elektromagnetisk induktion

7.2.1 Faradays lov

En gang i atten-hundrede-og-grønlangkål udførte Michael Faraday 3 eksperimenter, der foregik nogenlunde således:

1. Han trak en ledning gennem et magnetisk felt, og der løb en strøm.
2. Han bevægede det magnetiske felt i modsat retning, og igen løb der en strøm.

3. Med begge dele stående stille ændrede han styrken af det magnetiske felt, og igen igen løb der en strøm.

Det første giver ret god mening - det er jo emf som vi kender det. Men i det andet bevæger ledningen sig jo ikke, så der er jo ingen magnetisk kraft! Det giver selvfolgelig god mening for os, at det er den *relative* bevægelse af magnetfeltet, i forhold til ledningen, der skaber emf'en, men på hans tid kendte man ikke til speciel relativitetsteori, så det var da noget spøjst! I det sidste forsøg er der endda ingen bevægelse, men igen er der emf.

Faradays forklaring på det andet forsøg var, at **et ændrende magnetfelt inducerer et elektrisk felt**, og at det var dette elektriske felt, der stod for den opståede emf. Fra fluxreglen fås

$$\mathcal{E} = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} da$$

Resultatet er

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} da \quad (7.14)$$

Dette er **Faradays lov** i integralform. Ved Stokes sætning kan dette omdannes til differentialform:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (7.15)$$

I det tredje eksperiment er det igen et ændrende magnetfelt - men denne gang er det styrken og ikke en bevægelse relativ til magnetfeltet, der giver anledning til en emf. Ingen er det fluxreglen på spil

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.16)$$

Det vil sige at **når den magnetiske flux gennem et kredsløb ændres, lige meget hvad årsagen er, opstår en emf**. For at hjælpe med at holde styr på ens fortegn i sine udregninger med Faradays lov (hvilket kan være lidt af en pain in the ass) findes **Lenz Lov**, der siger at **Naturen hader en ændring i flux**. Det vil sige at den inducerede strøm vil prøve at lave et magnetisk felt, således at ændringen i flux slukkes. I praksis vil det sige at hvis en løkke oplever et magnetfelt, der stiger i styrke, vil den inducerede strøm løbe i en retning, således at der skabes et modsvarende B-felt, således at ændringen i flux bliver så lille som muligt. Og hvis der slukkes for magnetfeltet vil den inducerede strøm i ledningen lave et magnetfelt *i samme retning* som det slukkede magnetfelt, igen således at ændringen i flux bliver så lille som mulig.

7.2.2 Det inducerede E-felt

Til udregningen af det magnetisk inducerede E-felt, kan parallelten mellem E-feltet og B-feltet bruges. Rotationerne er nemlig

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (7.17)$$

Og hvis det er et rent Faraday-felt (altså magnetisk induceret), så er divergensen 0:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.18)$$

Dermed kan alle tricks forbundet med Ampères lov til udregning af B-felter også bruges i disse tilfælde. Her er $\mu_0 I_{enc}$ dog udskiftet med $-d\Phi/dt$:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (7.19)$$

Der er dog et lille problem, at Ampères lov jo kun dur i magnetostatik, mens her er E-feltet skyldt af et ændrende magnetfelt. Så denne metode er faktisk kun en approksimation, men med mindre der er ekstremt hurtige fluktuationer, så er det intet stort problem. Selv i tilfældet af en ledning, der bliver klippet over af en saks, er det statisk nok til, at disse metoder dur. Det er normalt set kun når der ses på elektromagnetiske bølger og stråling, at man skal være påpasselig.

Situationer hvor det magnetostatiske metoder kan bruges, uden det rent faktisk er magnetostatik, kaldes for **quasistatik** (lige som tilfældene fra termodynamik, hvor en process kan regnes som tilnærmedesvist adiabatisk, hvis den er quasistatisk).

Eksempler

Et homogent B-felt $\mathbf{B}(t)$ peger vinkelret gennem en cirkulær region. Hvis $\mathbf{B}(t)$ ændres i tiden, hvad bliver det inducerede elektriske felt så?

Dette svarer til det magnetiske felt produceret af en lige ledning, der har en jævn strøm, og det elektriske felt løber da tangentelt rundt om B-feltet. Ved en cirkulær Ampereløkke vinkelret på B-feltet, med radius s fås

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi s E = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi s^2 B(t) = -\pi s^2 \frac{dB}{dt}$$

Og E-feltet er da

$$\mathbf{E} = -\frac{s}{2} \frac{dB}{dt} \hat{\phi}$$

En linjeladning λ på en cirkel med radius b , der frit kan rottere. Inden for cirklen er en mindre cirkel med radius a , hvori der er et homogent magnetisk felt B_0 , der står vinkelret på cirklerne. B-feltet slukkes og der induseres et elektrisk felt, der roterer rundt om cirkernes akse. Dette elektriske felt vil der påvirke linjeladningen med en kraft, hvilket får den til at rotere og danne et magnetisk felt. Lenz lov giver da retningen af denne strøm, da den prøver at gendanne fluxen fra magnetfeltet. Set ovenfra vil ladningen rotere i positiv omløbsretning, sådan så det inducerede magnetfelt peger opad igen.

Kvalitativt fås

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

Og der opstår et kraftmoment på hjulet, hvor hvert linjelement $d\mathbf{l}$ oplever $\mathbf{r} \times \mathbf{F} = b\lambda E d\mathbf{l}$. Det samlede kraftmoment er da kurveintegralet hele vejen rundt:

$$B = b\lambda \oint E dl = -b\lambda \pi a^2 \frac{dB}{dt}$$

Og impulsmomentet er

$$\int N dt = -\lambda \pi a^2 b \int_{B_0}^0 dB = \lambda \pi a^2 b B_0$$

Så lige meget hvor hurtigt magnetfeltet slukkes, vil hjulet rotere med den samme vinkelhastighed. Hvor impulsmomentet kommer fra vides ikke, endnu, det kommer først i kapitel 8 i bogen, som først er pensum i EL2.

7.2.3 Induktans

Hvis man har to løkker af ledning, der begge er i hvile, og man lader en jævn strøm I_1 gennem den ene, vil den danne et magnetfelt, noget af hvilken, der giver anledning til en flux gennem den anden ledning: Φ_2 . Fra Biot-Savart-loven ses det, at det magnetiske felt er proportionalt med strømmen:

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 \oint \frac{dl_1 \times \hat{r}}{r^2}$$

Dermed er fluxen gennem den anden løkke også proportional med strømmen:

$$\Phi_2 = \int \mathbf{B}_1 \cdot \hat{n} da_2 = M_{21} I_1 \quad (7.20)$$

hvor M_{21} er proportionalitetskonstanten, kaldet den »gensidige induktans« for de to løkker. En formel for denne kan findes ved at skrive fluxen ved vektorpotentialet, og så bruge Stokes sætning. Da fås

$$M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{dl_1 \cdot dl_2}{r} \quad (7.21)$$

Denne kaldes for **Neumannformlen** og er et dobbelt kurveintegral. Først langs den ene, så langs den anden. Den er ikke særlig praktisk, men den viser dog to ting:

1. M_{21} er en ren geometrisk størrelse
2. Hvis der byttes om på de to integralers roller i formlen er resultatet uændret. Det vil sige at $M_{21} = M_{12}$, så vi smider bare tallene væk, så formlen for fluxen bliver

$$\Phi_2 = MI_1$$

Dette betyder altså, at lige meget hvilken udformning eller position de to løkker har, så vil fluxen gennem løkke 2, når der løber en strøm I gennem løkke 1, være den samme, som fluxen gennem løkke 1, hvis strømmen I løb gennem løkke 2. Eller:

$$\Phi_2 = MI = \Phi_1$$

Hvis strømmen gennem den første løkke varieres (quasistatisk), vil fluxen gennem løkke 2 også ændres, så der induceres en emf i løkken:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \quad (7.22)$$

Det vil sige, at hvis strømmen gennem løkke 1 ændres, vil der løbe en strøm gennem løkke 2, også selvom der ingen ledninger er mellem dem. Det sker faktisk også, at der induceres en emf i løkke 1, når strømmen ændres (i løkke 1). Her er fluxen igen proportionel med strømmen

$$\Phi = LI \quad (7.23)$$

hvor L kaldes **selvinduktansen** (eller bare **induktansen**) af løkken. Den måles i **henries** (H), der er et volt-sekund per ampere. Induktansen er, lige som M , ren geometrisk, og den er, lige som kapacitansen C , en udelukkende positiv størrelse. Den inducerede emf er givet ved

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (7.24)$$

Denne emf kaldes også for **modspænding** (back emf), da den har en retning, der modstrider ændringen i strøm. Der skal altså kæmpes mod denne modspænding, når strømmen skal ændres. Dermed svarer L lidt til en »elektrisk masse«, idet en større induktans gør at et kredsløb er sværere at drive, ligesom en større masse, gør det sværere at accelerere et objekt.

Eksempler

To solenoider, én kort inde i en meget lang. Den indre solenoide har radius a , længde l og n_1 vindinger per enhedslængde. Den ydre har radius b og n_2 vindinger per enhedslængde. Hvis der løber en strøm I gennem den indre, korte solenoide, vil det være utrolig svært at regne fluxen gennem den ydre, idet feltet fra den korte solenoide er ret kompliceret. Til gengæld er fluxen gennem den lange solenoide, som fluxen gennem den korte, hvis der løber en strøm I gennem den lange solenoide ($\Phi_2 = \Phi_1 = MI$, fra før). Dette er en betydeligt lettere situation at regne på, idet feltet inde i den lange solenoide er homogen. B-feltet og fluxen gennem én vinding er:

$$B = \mu_0 n_2 I, \quad \Phi_i = B \pi a^2 = \mu_0 n_2 I \pi a^2$$

Da der er $n_1 l$ løkker i den korte solenoide, er den samlede flux

$$\Phi = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_2 l I$$

og dette er dermed også fluxen gennem den lange solenoide, hvis der løber en strøm I gennem den korte! Den gensidige induktans er i dette eksempel

$$M = \mu_0 \pi a^2 n_1 n_1 l$$

Selvinduktansen af en firkantet toroide med indre radius a , ydre radius b , højde h og N vindinger. Det magnetiske felt og fluxen gennem én vinding er

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi s}, \quad \Phi_i = \int \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \frac{\mu_0 N I}{2\pi} h \int_a^b \frac{1}{s} ds = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Den samlede flux er da N gange større, så selvinduktansen er

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

En kreds sluttes til et batteri. Kredsen har resistans R og induktans L . Batteriet leverer en konstant emf \mathcal{E}_0 . Den samlede strøm, der løber gennem kredsen når batteriet sættes til er givet ved

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - L \frac{dI}{dt} = IR \quad (7.25)$$

Dette er en førsteordens differentialligning, og løsningen er

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} + ke^{-(R/L)t} \quad (7.26)$$

hvor k er en konstant, som bestemmes ud fra begyndelsesbetingelserne. Hvis batteriet sluttes til kredsen til tiden $t = 0$, så $I(0) = 0$, bliver $k = -\mathcal{E}_0/R$, og løsningen er

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left[1 - e^{-(R/L)t} \right] \quad (7.27)$$

Det ses, at hvis $L = 0$, og der dermed ingen induktans er, vil strømmen med det samme nå \mathcal{E}_0/R , men i praksis har alle kredsløb en eller anden induktans, hvormed de når strømmen \mathcal{E}_0/R asymptotisk.

7.2.4 Energi i magnetiske felter

For at få en strøm til at løbe gennem en kreds, skal der udføres et arbejde mod modspænding'en. Dette arbejde er en konstant værdi for en given kreds, og den bliver frigjort igen, når strømmen slukkes. For at få en ladningsenhed gennem kredsen skal der bruges $-\mathcal{E}$ (negativt, da det er dig, der udfører arbejdet mod modspænding'en). Ladningen der løber gennem kredsen per tidsenhed er I . Dermed er det samlede arbejde per tidsenhed, og det samlede arbejde, givet ved:

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{E}L = LI \frac{dI}{dt}, \quad W = \int_0^I LI \frac{dI}{dt} dt = \frac{1}{2} LI^2 \quad (7.28)$$

Som det ses, afhænger det ikke af tiden, men kun af strømmen og induktansen. Denne kan generaliseres til volumen/overfladestrømme, ved at huske at $\Phi = LI$ for kredsen, samt

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da = \int_{\mathcal{P}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (7.29)$$

hvor \mathcal{P} er kurven langs kredsen, og S er enhver overflade med \mathcal{P} som grænse. Indsættes dette i formlen for arbejdet, og vektor-retningen flyttes fra $d\mathbf{l}$ til \mathbf{I} fås

$$W = \frac{1}{2} \oint (\mathbf{A} \cdot \mathbf{I}) d\mathbf{l} \quad (7.30)$$

Og for overflade/volumenstrømme:

$$W = \frac{1}{2} \int_S (\mathbf{A} \cdot \mathbf{K}) da, \quad W = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau \quad (7.31)$$

Ved brug af Ampères lov kan \mathbf{J} skrives som $\nabla \times \mathbf{B}/\mu_0$, og med lidt smart regning fås

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_V B^2 d\tau - \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} da \right] \quad (7.32)$$

hvor S er overfladen af volumenet V . I integralet med volumenstrømmen integreres der over den volumen, som \mathbf{J} befinder sig i. Men man kan sagtens integrere over en større volumen, da $\mathbf{J} = 0$ uden for den oprindelige volumen. Det samme gør sig gældende for ligning (7.32). Her bliver bidraget fra volumenintegralet kun større, mens bidraget fra overfladeintegralet bliver mindre ($\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ går som r^{-3} , mens arealet går som r^2 , så integralet konvergerer mod 0, des større arealet bliver). Hvis der integreres over hele rummet bliver overfladeintegralet 0, så

$$W = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau, \quad \text{Integrator over hele rummet} \quad (7.33)$$

På denne måde kan arbejdet ses som værende indeholdt i det magnetiske felt, med et energiindhold af $B^2/2\mu_0$ per volumenhed. Dette er dog spøjst, idet et magnetisk felt ikke kan udføre et arbejde. Men

for at skabe et magnetisk felt induceres der et elektrisk felt, der kan udføre arbejde. Når det magnetiske felt »slukkes« igen, skabes det samme elektriske felt - bare i modsat retning, og arbejdet har da negativt fortegn.

Det ses også, at de to formler er ualmindeligt lig hinanden:

$$W_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \int (V\rho) d\tau = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad (7.34)$$

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \int (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J}) d\tau = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau \quad (7.35)$$

Denne formel giver også en smart måde at udregne selvinduktansen på:

$$W = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 d\tau, \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{2W}{I^2} = \frac{1}{\mu_0 I^2} \int B^2 d\tau \quad (7.36)$$

hvor det huskes at $I = \int_S J da_\perp$, hvor da_\perp er overfladeelement, der står vinkelret på J , og S er den samlede overflade.

Et eksempel. Et langt coaxialt kabel, hvor der løber en strøm I gennem (ned langs den indre ledning, og op langs den ydre). Den indre cylinder har radius a og den ydre har radius b . Den magnetiske energi i en længde l findes som følger:

Fra Ampères lov fås at feltet mellem cylindrene er

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi}$$

Og 0 alle andre steder. Det vil sige, at energien per volumenenhed er

$$\frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi s} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2}$$

Dermed er energien i en cylindrisk skal af længde l , radius s og tykkelse ds

$$\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 s^2} 2\pi l s ds = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left(\frac{ds}{s} \right)$$

Og den samlede energi fås ved at integrere fra a til b :

$$W = \int_a^b \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \left(\frac{ds}{s} \right) = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

Her er induktansen givet ved

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \left(\frac{b}{a} \right)$$

7.3 Maxwell's ligninger

Der er fundet 4 love, der specificerer divergensen og rotationen af elektriske og magnetiske felter. De er som følger:

$$(i) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{Gauss's lov})$$

$$(ii) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{Intet navn})$$

$$(iii) \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Faradays lov})$$

$$(iv) \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampères lov})$$

Men hov! Der er da kommet et ekstra led på Ampères lov! Dette er Maxwell's rettelse til Ampères lov, og den kommer af, at $\nabla \cdot \mathbf{J}$ kun er 0 for jævne strømme. For generelle strømme kan $\nabla \cdot \mathbf{J}$ regnes fra kontinuitetsligningen:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}) = -\nabla \cdot \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \quad (7.37)$$

Hvis denne sidste faktor lægges sammen med \mathbf{J} i Ampères lov, fås et udtryk hvor divergensen af \mathbf{J} altid er 0. Dermed lyder Ampères lov altså

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.38)$$

Dette betyder så også, at **et ændrende elektrisk felt inducerer et magnetisk felt**, præcis som det omvendte! I integralform lyder ligningerne

- (i) $\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\text{enc}}$ (Gauss's lov)
- (ii) $\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = 0$ (Intet navn)
- (iii) $\oint_{\mathcal{P}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$ (Faradays lov)
- (iv) $\oint_{\mathcal{P}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{enc}} + \mu_0 \epsilon_0 \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$ (Ampères lov)

Hvor overfladeintegralerne i de to første er over enhver overflade \mathcal{S} , mens overfladeintegralerne i de to sidste, er over enhver overflade \mathcal{S} med \mathcal{P} som grænse.

7.3.1 Maxwells ligninger i stof

I stof der har tendens til at blive enten elektrisk eller magnetisk polariseret, og som dermed oplever enten en mængde bundne ladninger eller strømme, er det oftest smartere at arbejde med en version af Maxwells ligninger, der kun refererer til de frie ladninger i materialet.

Maxwells love er i dette tilfælde

- (i) $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$ (Gauss's lov)
- (ii) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (Intet navn)
- (iii) $\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (Faradays lov)
- (iv) $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (Ampères lov)

Med

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} + \mathbf{M}$$

og for lineære medier

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e), \\ \mathbf{M} &= \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \end{aligned}$$

Og i integralform

- (i) $\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = Q_{f_{\text{enc}}}$ (Gauss's lov)
- (ii) $\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da = 0$ (Intet navn)
- (iii) $\oint_{\mathcal{P}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$ (Faradays lov)
- (iv) $\oint_{\mathcal{P}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{f_{\text{enc}}} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, da$ (Ampères lov)

Hvor overfladeintegralerne i de to første, som før, er over enhver overflade \mathcal{S} , mens overfladeintegralerne i de to sidste, er over enhver overflade \mathcal{S} med \mathcal{P} som grænse.

Det ses da, at der er lidt flere ting, end sidst. De ekstra ting er som følger: I statiske tilfælde af polarisation, opstår der en bunden ladningstæthed

$$\rho_b = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad (7.39)$$

I *ikkestatiske* tilfælde opstår der også en volumenstrøm som følge af ændring i polarisation. Denne kaldes **polarisationsstrømmen** \mathbf{J}_p og er givet ved

$$\mathbf{J}_p = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (7.40)$$

Grunden til denne ekstra strøm er, at der er en overfladeladning i hver ende af et polariseret materialet, $+\sigma_b$ i den ene ende og $-\sigma_b$ i den anden. Hvis polariseringen stiger vil ladningerne på hver ende også stige (i størrelse), hvilket giver anledning til en strøm. Det er netop denne strøm, der er polarisationsstrømmen.

Der sker ikke noget ekstra i *ikkestatiske* magnetisation. Her er det stadig

$$\mathbf{J}_b = \nabla \times \mathbf{M} \quad (7.41)$$

Det vil sige, at den samlede ladningstæthed kan skrives som

$$\rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \quad (7.42)$$

Og den samlede volumenstrøm kan skrives som

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b + \mathbf{J}_p = \mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (7.43)$$

Dermed kan Gauss's lov skrives som

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (7.44)$$

Eller

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (7.45)$$

Ampères lov (den fulde), med polarisationsstrømmen, bliver nu

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (7.46)$$

Eller

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (7.47)$$

Hverken Faradays lov eller $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ ændres, idet de ikke involverer ρ eller \mathbf{J} .

7.3.2 Randbetingelser

Generelt set er de fire vektorfelter diskontinuerte i grænsen mellem to materialer, og ved overfladeladninger/strømme. Mængden de er diskontinuerte med ses nemmest ved integralformen af Maxwells ligninger. Ved at benytte integralform (i) og (ii) på en infinitesimal Gaussdåse, der lige er inden for begge materialer, fås for (i):

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_f \quad (7.48)$$

Det vil sige, at komponenterne af \mathbf{D} , der står normalt på grænsen mellem de to medier, er diskontinuerte. For (ii) fås

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0 \quad (7.49)$$

Og ved at bruge en infinitesimal Ampereløkke, der igen ligger lige inden for begge materialer, fås for (iii)

$$\mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel = 0 \quad (7.50)$$

Dette er altså komponenterne af \mathbf{E} , der er parallele med grænsen mellem de to medier, der er kontinuerte. For (iv) fås

$$\mathbf{H}_1^\parallel - \mathbf{H}_2^\parallel = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} \quad (7.51)$$

Så komponenterne af \mathbf{H} , der er *parallelle* med grænsen, der er diskontinuerte. For **lineære medier** kan disse skrives ved kun \mathbf{E} og \mathbf{B} :

$$\begin{aligned}\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp &= \sigma_f & \mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel &= 0 \\ B_1^\perp - B_2^\perp &= 0 & \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel &= \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}}\end{aligned}$$

Og i tilfældet hvor der hverken er nogen fri ladning eller strøm bliver alle højresiderne i disse ligninger 0.