1 Introduktion, sprogbrug & notation

1.1 Talrum ($\mathbb{R}$ & $\mathbb{C}$)

Disse noter omhandler lineær algebra, og derfor også n-dimensionale rum. Mængden $\mathbb{R}$ er de reelle tal, mens $\mathbb{C}$ er de komplekse tal. Da reelle tal er et undersæt at komplekse tal (den imaginære del er bare lig 0), er $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. I denne bog, og dermed også disse noter, defineres mængden $\mathbb{F}$ til enten at være de komplekse tal $\mathbb{C}$ eller $\mathbb{R}$. Dette betyder egentlig, at $\mathbb{F}$ altid indeholder de reelle tal, men den bruges til at specificere, at vi kan både bruge reelle og komplekse værdier i en operation, mens $\mathbb{C}$ bruges til at specificere, at vi med sikkerhed bruger komplekse værdier i denne operation. Mængden $\mathbb{F}$ bruges da i definitioner og sætninger, for at specificere, at det er lige meget, hvilket af de to rum, man arbejder med.

Yderligere betegner n i $\mathbb{F}^n$ antallet af dimensioner, og altså antallet af værdier ethvert koordinatsæt indeholder. Eksempelvis er $\mathbb{R}^2$ realplanen, hvor der normalt er x og y koordinater, hvor $\mathbb{C}^3$ er det 3-dimensionale, komplekse rum.

1.2 Afbildninger

1.3 Vektorer

Vektorer er en konstruktion i $\mathbb{F}^n$, der har en størrelse og retning i n dimensioner. Eksempelvis kendes vektorer i planen som $\mathbb{R}^2$. Disse skrives normalt som:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{a} \tag{1}$$

I denne bog, og i disse noter bruges dog en anden notation:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Her noteres en vektor altså med en enkelt understregning, mens de enkelte værdier x_1 og x_2 viser hvilken dimension/række de tilhører. Dette muliggører nem udvidelse til mere end 3 dimensioner. Generelt er vektorformen for en vektor $\underline{x}$ i $\mathbb{F}^n$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

De mest almindelige operationer er skalering af vektorer, eller multiplicering med en skalar, og addition/subraktion. Skalering er at gange en vektor $\underline{x}$ i $\mathbb{F}^n$ med en skalar (et tal i $\mathbb{F}$):

$$a \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

En negativ vektor $-\underline{x}$ er så en vektor ganget med -1:

$$-\underline{x} = (-1)\underline{x} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} \tag{5}$$

Addition defineres som:

$$\underline{x} + \underline{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

Og subtraktion:

$$\underline{x} - \underline{y} = \underline{x} + (-\underline{y}) = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ \vdots \\ x_n - y_n \end{pmatrix} \tag{7}$$

Et udtryk på formen $a\underline{x} + b\underline{y}$ kaldes en *linearkombination* af $\underline{x}$ og $\underline{y}$. Til sidst, inden regnereglerne for vektorer opskrives, defineres nulvektoren $\underline{o}$ i $\mathbb{F}^n$ som:

$$\underline{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

(altså med bogstavet "o")

1.3.1 Regneregler

Regnereglerne for vektorer er således:

V1: $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$

V2: $\underline{x} + \underline{o} = \underline{x}$

V3: $\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{o}$

V4: $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$

V5: $a(\underline{x} + \underline{y}) = a\underline{x} + a\underline{y}$

V6: $(a + b)\underline{x} = a\underline{x} + b\underline{x}$

V7: $(ab)\underline{x} = a(b\underline{x})$

V8: $1\underline{x} = \underline{x}$

Skalarprodukt
I $\mathbb{F}^n$ defineres skalarproduktet $\underline{x} \cdot \underline{y}$:

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = x_1\overline{y_1} + \cdots + x_n\overline{y_n} = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{y_j} \tag{9}$$

Hvor $\overline{y}$ er den kompleks konjugerede af y (altså y med omvendt imaginærværdi). Dette gør da, at hvis $y \in \mathbb{R}$, er $\overline{y} = y$, og dermed bliver skalarproduktet det velkendte $x_1 + y_1 + \cdots + x_n + y_n$. Regnereglerne for skalarprodukter er således:

S1: $(\underline{x} + \underline{y}) \cdot \underline{z} = \underline{x} \cdot \underline{z} + \underline{y} \cdot \underline{z}$

S2: $(a\underline{x}) \cdot \underline{y} = a(\underline{x} \cdot \underline{y})$

S3: $\underline{x} \cdot \underline{y} = \overline{\underline{x} \cdot \underline{y}}$

S4: $\underline{x} \cdot \underline{x} \geq 0$

S5: $\underline{x} \cdot \underline{x} = 0 \Rightarrow \underline{x} = \underline{o}$

Længden af en vektor defineres som:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} = \sqrt{\underline{x} \cdot \underline{x}} \tag{10}$$

Det bemærkes at $|a\underline{x}| = |a||\underline{x}|$. To vektorer siges at være *ortogonale*, hvis

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = 0 \tag{11}$$

1.4 Matricer

En *matrix* (en matrix, matricen, flere matricer, alle matricerne) er en tabel med talværdier, og har formen:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{12}$$

Dette er den *generelle* matrix, hver værdi a_{ij} kaldes en *indgang*, og ligger i $\mathbb{F}$. Hvis $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ kaldes matricen reel, og hvis $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ kaldes matricen kompleks. Den i'te række i $\underline{\underline{A}}$ betegnes $\underline{\underline{A}}[i, *]$, og er

$$(a_{i1}, \dots, a_{in}) \tag{13}$$

Og den j'te søjle i $\underline{\underline{A}}$ betegnes $\underline{\underline{A}}[*, j]$, og er

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \tag{14}$$

Indgangen a_{ij}, som står i den i'te række og j'te søjle, betegnes da $\underline{\underline{A}}[i, j]$. Matricen $\underline{\underline{A}}$ har m rækker og n søjler (men ikke nødvendigvis flere søjler end rækker. At disse betegnes m og n siger intet om deres indbyrdes størrelse). Matricen består da af mn indgange fra $\mathbb{F}$, og kalder en sådan matrix for en $m \times n$-matrix.

Matricen $\underline{\underline{A}}$ kan også opfattes som bestående af n m-dimensionelle vektorer, der skrives:

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots, \underline{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Disse vektorer kaldes for matricens *søjlevektorer*.

En matrix hvor alle elementer er lig 0 kaldes en *nulmatrix* og betegnes $\underline{\underline{0}}$ eller $\underline{\underline{0}}_{m,n}$ (altså med tallet "0")

Matricen $\underline{\underline{A}}$ kan også opskrives på en kortere måde, end ved en tabel:

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m,\, 1 \leq j \leq n}, \tag{16}$$

eller endnu kortere

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{m,n}. \tag{17}$$

Og disse skrivemåder er altså ækvivalente med opskrivning ved en tabel.