

Noter til MatF2 på KU (Matematik for Fysikere 2)

af Nikolai Plambech Nielsen, LPK331, Version 1.0

18. juni 2016

Resumé

Dette notesæt er udarbejdet til kurset Matematik for Fysikere 2 (Forkortet MatF2). Bogen, der er brugt i kurset er »Essential Mathematical Methods for the Physical Sciences«, 1. udgave, af K. F. Riley og M. P. Hobson. Pensum er kapitel 5.4, 14.1 til 14.12 (ud over 14.7), 15.1, 15.3-15.5 og 9.1. Ud over pensum har jeg skrevet noter til kapitel 14.7 (konforme transformationer), da det var pensum til at starte med, og jeg nåede at skrive noterne, inden jeg fik at vide, det ikke var pensum.

Jeg har også skrevet et lille afsnit til binomialkoefficienter og binomialekspansionen, som kan være ret smart til at finde residuer (Baseret på Kalkulus kapitel 1.4 og 12.1, fra MatIntro-kurset). Mit afsnit om Diracs deltafunktion, samt Fouriertransformation er også inkluderet, da Fouriertransformationen også bruges i nogle opgaver til eksamen.

.tex-filerne kan findes på psi.nbi.dk, samme sted som dette notesæt, og hvis I finder nogle fejl, eller I synes der er noget som kan forklares bedre, så ændr endelig i filerne og genupload så sættet bliver bedre. God arbejdslyst!

Indhold

I Pensum	3
1 Komplekse variable	3
1.1 Cauchy-Riemann relationerne	3
1.2 Potensrækker i komplekse variabler	4
1.3 Elementære funktioner	4
1.4 Flertydige funktioner, forgreningspunkter og forgreningssnit	5
1.5 Singulariteter, nuller og uendelighed for komplekse funktioner	5
1.5.1 Når z går mod ∞	6
1.5.2 Nuller for komplekse funktioner	6
1.6 Komplekse integraler	6
1.7 Cauchys sætning	7
1.8 Cauchys integralformel	7
1.9 Taylor- og Laurentrækker	7
1.9.1 Sådan findes residuer	8
1.10 Residuumsætningen	10
2 Anvendelse af kompleks variabelteori	10
2.1 Komplekse potentialer	10
2.2 Bestemte integraler ved kompleks konturintegration	11
2.2.1 Integraler af trigonometriske funktioner	11
2.2.2 Uendelige integraler	12
2.2.3 Integraler af flertydige funktioner	14
2.3 Summation af serier	15
3 Laplacetransformation	16
4 Invers Laplacetransformation	17
5 Specielle funktioner	18
5.1 Legendrefunktioner	18

II Ting, der ikke er pensum, men som er ret gode at have med alligevel	20
6 Dirac δ-funktion	20
7 Fouriertransformation	20
7.1 Foldning	20
7.2 Nyttige egenskaber ved Fouriertrasnformation	21
8 Binomialformler og binomialekspansioner	21
8.1 Binomialekspansion	22
9 Geometrisk serie	22
10 Diverse trigonometriske identiteter	23
10.1 Definitioner ved eksponentialfunktionen	23
10.2 Tabel over trigonometriske funktioner udtrykt ved hyperbokse funktioner og i	23
10.3 Rækkeudviklinger om $z = 0$ (Maclaurinrækker)	24
11 Komplekse variable 2	24
11.1 Konforme transformationer	24

Del I

Pensum

1 Komplekse variable

En kompleks funktion $f(z)$ afhænger af et komplekst tal z , og knytter én (eller flere) værdier til hvert z . I dette kursus arbejdes kun med entydigt bestemte funktioner, så alle funktioner knytter kun én værdi til hvert z . Vi definerer en kompleks funktion som havende en reel og en imaginær del (lige som et komplekst tal):

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy \quad (1.1)$$

En kompleks funktion er differentiabel i et domæne R , hvis den i punktet z i har en entydigt bestemt differentialkvotient:

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right], \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y \quad (1.2)$$

og denne ikke afhænger af, på hvilken måde Δz går mod 0.

En kompleks funktion, der er entydigt bestemt og differentiabel i et domæne R , kaldes for **analytisk** (eller regulær) i domænet. En funktion kan også være analytisk, ud over en endelig mængde punkter, hvor den ikke er differentiabel. Disse punkter kaldes for **singulariteter**.

Holomorfitet og analytiske funktioner

En kompleks funktion kaldes **holomorf**, hvis den er differentiabel, mens den kaldes **analytisk**, hvis den er lig med sin egen Taylorrekke. Alle analytiske funktioner er også holomorfe, og uendeligt differentierbare.

1.1 Cauchy-Riemann relationerne

Som i Feltteori og Vektoranalyse opträder Cauchy-Riemann relationerne. I Feltteori og Vektoranalyse var det i forbindelse med relationen mellem strømfunktioner og potentialfunktioner. I studiet af komplekse variable er det relationen mellem den reelle og imaginære komponent af funktionen.

Relationerne lyder:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.3)$$

Findes disse fire partielt afledede, og de er kontinuerte og opfylder relationen ovenfor, er det en **tilstrækkelig** betingelse for at funktionen f er differentiabel i z . Med andre ord: hvis de eksisterer, er kontinuerte og opfylder relationen, så er f uden tvivl differentiabel i z .

Man kan også betragte funktionen f som en funktion af z og z^* . For at funktionen er analytisk skal følgende gælde:

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0 \quad (1.4)$$

Altså må en funktion f ikke afhænge af z^* , for at den er analytisk. Det vil sige, at den må godt beskrives ved $z = x + iy$, men ikke ved $z = x - iy$.

Ydermere er både u og v begge løsninger til Laplace's ligning (dette opnås ved at differentiere hver ligning i Cauchy-Riemann relationen med hensyn til to forskellige variable - den første med hensyn til x og den anden med hensyn til y , eksempelvis):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

Hvis vi ser på $u(x, y) = \text{konstant}$, og ligeledes for $v(x, y)$, så $f = u + iv$. Herfra er vektornormalen givet ved

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} \quad (1.6)$$

og ligeledes for $v(x, y)$. For disse gælder følgende

$$\nabla u \cdot \nabla v = 0 \quad (1.7)$$

$$|\nabla u| = |\nabla v| \quad (1.8)$$

1.2 Potensrækker i komplekse variabler

Komplekse potensrækker er defineret som følger:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \exp(in\theta) \quad (1.9)$$

Dette er en potensrække omkring origo, mens alle andre punkter kan opnås ved at skifte variabel fra z til $z - z_0$.

Konvergenstests

Serien (1.9) konvergerer hvis følgende række konvergerer

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n \quad (1.10)$$

For at teste konvergensen bruges en ligning baseret på Cauchys rodtest. Her er **konvergensradiussen** R givet ved

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} \quad (1.11)$$

Rækken konvergerer hvis $|z| < R$, divergerer hvis $|z| > R$ og hvis $|z| = R$ dør testen ikke. En cirkel om origo med radius R kaldes for **konvergencirklen** for $\sum a_n z^n$. Hvis $R = 0$ konvergerer serien kun ved $z = 0$ og hvis $R = \infty$ konvergerer serien overalt. For en potensrække om et punkt z_0 er konvergencirklen centreret i punktet z_0 .

Forholdstesten kan også bruges til at bestemme konvergens. En potensrække er konvergent, hvis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |z|^{n+1}}{|a_n| |z|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |z|}{|a_n|} < 1 \quad (1.12)$$

Konvergensradiussen er her givet ved

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \quad (1.13)$$

Ydermere er potensrækken (1.9) en analytisk funktion inden for sin konvergensradius. Det giver, at dens afledte er givet ved

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1} \quad (1.14)$$

Og at enhver potensrække er uendeligt differentierbar inden for sin konvergensradius.

1.3 Elementære funktioner

Den komplekse eksponentialefunktion, $\exp z$ er defineret som

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (1.15)$$

er konvergent for alle z med endeligt modulus. Denne opfører sig generelt som sin reelle modpart, og $\exp z$ kan derfor skrives ombytteligt med e^z . En forskel på den komplekse og reelle eksponentialefunktion er, at den komplekse ikke er entydigt bestemt: fordi

$$\exp z = (\exp x)(\cos y + i \sin y) \quad (1.16)$$

vil $w = z + 2\pi k i$, hvor k er et heltal, give at $\exp z = \exp w$.

De komplekse trigonometriske funktioner som sin og cos, samt komplekse hyperbolske som sinh og cosh er defineret som for reelle variable.

Den inverse funktion til den komplekse eksponentialefunktion $\exp z$ er den komplekse logaritme, $\ln z$:

$$\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad (1.17)$$

hvor k er et heltal og $\pi < \theta \leq \pi$. **Principalværdien** for denne funktion, betegnet $\ln z$ er givet ved $k = 0$, og dermed

$$\ln z = \ln r + i\theta, \quad -\pi < \theta \leq \pi \quad (1.18)$$

Den komplekse eksponent til et positivt, reelt tal er givet ved

$$a^z = \exp(z \ln a) \quad (1.19)$$

Mens den komplekse eksponent til et generelt komplekst tal $t \neq 0$ er givet ved

$$t^z = \exp(z \ln t) \quad (1.20)$$

hvor man vælger **principalværdien** af $\ln t$, altså $\ln t$. Hvis $t \neq 0$ er komplekst, men z er reel og lig $1/n$ bliver ligningen til definitionen af den n -te rod af t , og grundet flertydigheden af $\ln t$ vil der være flere end én n -te rod for et givent t .

1.4 Flertydige funktioner, forgreningspunkter og forgreningssnit

En betingelse for at en funktion er analytisk er, at den er entydigt bestemt, men både den komplekse eksponentialfunktion og logaritme er flertydige. De analytiske egenskaber kan dog genvindes ved at tage højde for såkaldte *forgreningspunkter*.

Hvis z for en funktion varieres således at der foretages en omgang rundt om et forgreningspunkt, så vil $f(z)$ ikke have den samme værdi som i starten. Et eksempel er $f(z) = z^{1/2}$, med $z = r \exp i\theta$. Hvis der følges en lukket kurve rundt om origo vil følgende resultat fås:

$$f(z) = r^{1/2} \exp i\theta/2 \rightarrow r^{1/2} \exp[i(\theta + 2\pi)/2] = -r^{1/2} \exp i\theta/2 = -f(z) \quad (1.21)$$

Her er origo altså et forgreningspunkt. Hvis der foretages to omgange om origo, vil værdien $f(z)$ igen optræde, men for nogle funktioner, såsom $\ln z$ vil den oprindelige værdi aldrig optræde igen.

For at en funktion $f(z)$ med et forgreningspunkt, kan betragtes som værende entydig, indføres der et **forgreningssnit**, der forhindrer at man kan danne en lukket kurve om et forgreningspunkt. For $f(z) = z^{1/2}$ (eller $\ln z$, eller enhver anden funktion med et forgreningspunkt i origo) kan et snit være en linje fra origo ud til $|z| = \infty$ for et eller andet θ . Normalt vælger man at lægge snittet langs den reelle eller imaginære akse. Hvis eksempelvis den reelle akse vælges vil argumentet for z være begrænset til $0 \leq \theta < 2\pi$.

Denne metode kan også udvides til funktioner med flere end ét forgreningspunkt. Eksempelvis har funktionen $f(z) = \sqrt{z^2 + 1} = \sqrt{(z-i)(z+i)}$ forgreningspunkter i $\pm i$. Her kan der vælges at lægge to snit, fra i langs den imaginære akse, ud mod $+\infty$, samt fra $-i$ ud mod $-\infty$. Ellers kan et snit langs den imaginære akse, fra i til $-i$ også benyttes, da denne funktion har den egenskab, at hvis *begge* forgreningspunkter passeres så opnås den oprindelige værdi igen.

1.5 Singulariteter, nuller og uendelighed for komplekse funktioner

Singulariteter er punkter, hvor $f(z)$ ikke er analytisk. Der er flere forskellige typer af singulariteter.

Isolerede singulariteter, poler og essentielle singulariteter

En isoleret singularitet er et punkt z_0 hvor $f(z_0)$ ikke er analytisk, men den er analytisk i alle punkter i et område omkring z_0 . *Forgreningspunkter er ikke en isoleret singularitet*.

En bestemt og vigtig type af isolerede singulariteter er **polen**. Hvis $f(z)$ er af formen

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n} \quad (1.22)$$

hvor n er et positivt heltal, $g(z)$ er analytisk i et område omkring z_0 og forskellig fra 0, så har $f(z)$ en **pol af n -te orden**. Hvis $n = 1$ kaldes polen for en **simpel pol**. En anden, lige gyldig (læg mærke til at det er to ord!) definition er

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] = a \quad (1.23)$$

hvor a er et endeligt, kompleksts tal, forskelligt fra 0. Hvis $a = 0$ er polen enten af ordnen mindre end 0, eller $f(z)$ er analytisk; hvis $a = \infty$ er polen af ordnen større end n . Hvis ingen værdi af n kan findes, således at a er endelig og forskellig fra 0, kaldes z_0 for en **essentiel singularitet**.

Ydermere, hvis $f(z)$ har en pol i z_0 , så gælder at $|f(z)| \rightarrow \infty$ for $z \rightarrow z_0$, lige meget hvilken retning z går mod z_0 .

Flytbare singulariteter

Hvis z_0 er en singularitet, hvor $f(z)$ tager en ubestemt værdi ($0/0$ eller ∞/∞ , eksempelvis), men $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ eksisterer og er entydig, kaldes for en **flytbar singularitet**.

Et eksempel er funktionen $f(z) = (\sin z)/z$, der har en flytbar singularitet i origo. Denne har værdien 1 (som for $(\sin x)/x$). Dette kan ses ved at skrive $\sin z$ som en potensrække og dividere hvert led med z .

Det er et lidt misvisende navn, da $f(z)$ faktisk er analytisk i punktet z_0 , og der dermed ikke er en singularitet.

1.5.1 Når z går mod ∞

For funktioner af én reel variabel har udtrykket »når x går mod uendeligt« en ret veldefineret mening, men for den komplekse variabel z , der beskrives ved en plan, er betegnelsen »uendeligt« ikke helt så veldefineret.

Derfor defineres en funktions $f(z)$) **opførsel ved uendeligt** som værdien for $f(1/\zeta)$, hvor $\zeta = 0$, for $\zeta = 1/z$.

Eksempelvis ses funktionen $f(z) = a + bz^{-2}$, hvor dens opførsel ved uendeligt er $f(1/\zeta) = a + b\zeta^2$, der er analytisk i $\zeta = 0$. Dermed er $f(z)$ analytisk i $z = \infty$.

1.5.2 Nuller for komplekse funktioner

Hvis $f(z_0) = 0$ kaldes z_0 for et nul til funktionen f . Som ved definitionen af en pol, defineres også nullets orden ved

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z) \quad (1.24)$$

hvor n og $g(z)$ har samme betingelser som før. Her kaldes z_0 for et **nul af orden n** . Hvis $n = 1$ kaldes nullet for et simpelt nul (som ved poler). Ydermere er et nul af orden n for $f(z)$ en pol af orden n , for $1/f(z)$.

1.6 Komplekse integraler

Komplekse integraler svarer faktisk bare til kurveintegraler i et todimensionalt skalarfelt, og jeg vil klart anbefale også lige at læse op på dette, hvis du ikke kan huske dette. Et kompletst integral evalueres altid langs en eller anden kurve γ , der afhænger af den reelle parameter t , hvor $\alpha < t < \beta$, og $\gamma(\alpha) = A$ er startpunktet på kurven og $\gamma(\beta) = B$ er slutpunktet på kurven. Lige som ved almindelige, reelle kurveintegraler, kan start- og slutpunktet sagtens være det samme, hvormed der integreres langs en lukket kurve, betegnet \oint .

Det generelle, komplekse integral af en kontinuert, entydig funktion $f(z)$, langs kurven γ er givet ved:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f(\gamma(t)) \frac{\partial z}{\partial t} dt \quad (1.25)$$

Hvis ikke man er komfortabel med kompleks integration, kan dette integral også deles op i fire, reelle delintegraler. Her huskes det, at $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ og $\gamma = x(t) + i y(t)$. Da er integralet givet ved

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} u \frac{dx}{dt} dt - \int_{\alpha}^{\beta} v \frac{dy}{dt} dt + i \int_{\alpha}^{\beta} u \frac{dy}{dt} dt + i \int_{\alpha}^{\beta} v \frac{dx}{dt} dt, \quad (1.26)$$

som er en noget større mundfuld. Dette resultat fås ved at sætte $f(z) = u + iv$ og $dz = dx + i dy$ ind, gange parentesen ud, samt substituere $dx = \frac{dx}{dt} dt$, og lignende for dy . Det ses, at kun ét delintegral har negativt fortegn (resultatet af dem kan selvfølgelig variere, men husk for fanden fortegnet, hvis du deler dem op!).

Hvorvidt disse integraler findes er givet ved en **tilstrækkelig betingelse**: $\frac{dx}{dt}$ og $\frac{dy}{dt}$ findes begge, og er kontinuerte.

Et godt lille resultat for komplekse integraler er, at hvis M er en øvre grænse for $|f(z)|$ langs γ , og L er længden af γ , da er

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq M \int_{\gamma} dl = ML \quad (1.27)$$

Motherfucking Cauchy, the Euler of complex variables

Seriøst, han er jo ansvarlig får 120% af det her pis.

1.7 Cauchys sætning

Cauchys sætning siger, at hvis $f(z)$ er en analytisk funktion på og inden for en lukket kurve γ , da er

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (1.28)$$

Dette svarer til lignende resultater for rotationsfrie felter i vektoranalysen fra MatF1. Dette resultat betyder også, at hvis to kurver γ_1 og γ_2 har samme slutpunkt og startpunkt, og $f(z)$ er analytisk langs begge kurver, samt inden for arealet afgrænset af de to kurver, så er

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad (1.29)$$

Igen, meget lig resultatet fra rotationsfrie felter.

Ydermere fås, at hvis γ er en lukket kurve, der helt ligger inden for en anden, større, lukket kurve C , så er

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz. \quad (1.30)$$

Der findes også en »omvendt« Cauchys sætning, kaldet *Moreras sætning*, der siger, at hvis $f(z)$ er kontinuert i et lukket domæne R , afgrænset af kurven γ og $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$; da er $f(z)$ analytisk i R .

1.8 Cauchys integralformel

Hvis $f(z)$ er analytisk inden for, og på, en lukket kurve γ , og z_0 ligger inden for γ , da siger **Cauchys integralformel** at

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad (1.31)$$

Den afledte af f i z_0 , $f'(z_0)$, er givet ved

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz \quad (1.32)$$

Den n -te afledte af f i samme punkt er givet ved

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad (1.33)$$

Dermed kan værdien af f i alle punkter z_0 inden for en lukket kurve findes, samt værdien af alle denne afledte. P-cool, yo!

Til sidst gives **Cauchys ulighed**, der siger, at hvis $f(z)$ er analytisk inden for en *cirkel* γ , med radius R og centrum i z_0 , samt at $|f(z)| \leq M$ på cirklen, hvor M er en konstant, da gælder

$$|f^n(z_0)| \leq \frac{M(n!)}{R^n} \quad (1.34)$$

Dette resultat kan til aller, *aller* sidst bruges til at bevise **Liouvilles sætning**, der siger at hvis $f(z)$ er analytisk og har en øvre grænse for alle z , da er f en konstant.

1.9 Taylor- og Laurentrækker

Taylorserien for analytiske funktioner af en kompleks variabel, omkring et punkt z_0 er givet ved

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (1.35)$$

denne formel kan bruges til at vise **identitetssætningen**, der siger at hvis $f(z)$ og $g(z)$ er analytiske i et domæne R , og $f(z) = g(z)$ i et eller andet underdomæne S af R , så er $f(z) = g(z)$ i hele R . Dette gælder

faktisk også, hvis de bare er ens på en kurve med en længde større end 0, eller et tælleligt uendelig antal punkter i R .

En generalisering af Taylorserien kaldes for **Laurentrækken**. Hvis $f(z)$ er analytisk i et domæne R , men har en pol af orden p i punktet z_0 , inden for R , da kan $f(z)$ skrives som en Laurentrække på formen

$$f(z) = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (1.36)$$

Leddene med $n \geq 0$ kaldes den **analytiske del**, mens leddene med $n < 0$ kaldes for den **principielle del**.

Hvis punktet z_0 er en essentiel singularitet vil $p = \infty$, og den **principielle del** vil også have en uendelig mængde led. I så fald forventes det at den principielle del kun konvergerer for $|z - z_0|^{-1}$, der er mindre end en given konstant. Det vil sige, at den konvergerer *uden* for en cirkel med centrum i z_0 . Den analytiske del vil dog *altid* konvergere inden for en (anden) cirkel, igen med centrum i z_0 . Hvis den analytiske cirkel er større end den principielle cirkel, vil Laurentrækken konvergere i området, hvor de to cirkler overlapper hinanden.

Det kan også vises, at hvis $f(z)$ er analytisk imellem to sådanne cirkler C_1 og C_2 , der begge har centrum i z_0 , så kan $f(z)$ repræsenteres ved en Laurentrække om z_0 , der konvergerer i området mellem cirklerne.

Alt efter funktionens opførsel i punktet z_0 , kan den indre cirkel have en radius af 0 (altså være et punkt), og den ydre cirkel være uendeligt stor, hvormed Laurentrækken omkring z_0 konvergerer i alle punkter i den komplekse plan.

Laurentrækken om z_0 kan også bruges til at klassificere punktet. Hvis $f(z)$ er *analytisk* i z_0 er $a_n = 0$ for alle $n < 0$. Det kan ske at a_0, a_1, \dots, a_{m-1} alle er nul (samtidig med at alle $a_0 = 0$ for $n < 0$). Det første led, der ikke er 0, vil da være a_m for $m > 0$, og $f(z)$ har da et nul omkring af orden m i z_0 .

Hvis $f(z)$ ikke er analytisk i z_0 kan én af to ting ske. Enten kan et første led a_{-p} findes, sådan at alle $a_{-p+k} = 0$ for $k > 0$, og Laurentrækken altså går fra $-p$ til ∞ . Ellers kan denne værdi ikke findes, og Laurentrækken går da fra $-\infty$ til $+\infty$.

I første tilfælde, hvor den principielle del af Laurentrækken indeholder et endeligt antal led, har $f(z)$ en pol af orden p i z_0 . Værdien af a_{-1} kaldes for **residuum** af $f(z)$ ved polen z_0 . Læg mærke til at det er værdien af det *første* led med negativ potens.

I det andet tilfælde, hvor den principielle del indeholder et uendeligt antal led, da har $f(z)$ en essentiel singularitet (eller pol af orden ∞) i z_0 .

Den nemmeste måde at finde Laurentrækken af en funktion er oftest at isolere polen, og så Taylorudvikle den analytiske del $g(z)$ i udtrykket $f(z) = g(z)/(z - z_0)^p$ (se MatF2 opgavesæt 4, opgave 2).

1.9.1 Sådan findes residuer

Den generelle formel for at finde residuum af en funktion $f(z)$, der har en pol af orden m i punktet z_0 , er givet ved

$$\text{Res}(z_0) = a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)] \right\} \quad (1.37)$$

Hvis $f(z)$ har en *simpel pol* i z_0 bliver formlen

$$\text{Res}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] \quad (1.38)$$

Og hvis den både er simpel, og $f(z) = g(z)/h(z)$, hvor g er analytisk og forskellig fra nul, og hvor $h(z_0) = 0$, da er residuum

$$\text{Res}(z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (1.39)$$

der bare fås ved at bruge L'Hôpitals regel.

Såfremt det er en essentiel singularitet, altså en pol af orden ∞ , giver ingen af disse formler det rigtige resultat. Her skal funktionen rækkeudvikles, og koefficienten foran z^{-1} -leddet er da dennes residuum.

Det kan sagtens være, at dette har værdien 0!

En smart måde at finde residuum for poler af store ordner er ved at udnytte **binomialekspansionen** (se afsnit 8.1). Et eksempel er som følger

Et Eksempel. Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^4}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (1.40)$$

Først og fremmest ses det, at funktionen kan omskrives ved hjælp af en kompleks kvadratsætning:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \quad a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib) \quad (1.41)$$

og funktionen er dermed

$$f(z) = \frac{1}{[(x - ai)(x + ai)]^4} = \frac{1}{(x - ai)^4(x + ai)^4} \quad (1.42)$$

og denne har dermed to poler af ordenen 4, i $\pm ai$. Her vil jeg kun udregne residuum for ai , Prøv selv at klare for $-ai$. Det er super træls at differentiere mere end én gang for funktioner med kvotienter, og derfor bruges et smart trick med binomialekspansionen. Først sættes $z = ai + \xi$, hvor ξ er et lille tal. Da kan funktionen omskrives til:

$$f(z = ai + \xi) = \frac{1}{(z^2 + a^2)^4} = \frac{1}{((ai + \xi)^2 + a^2)^4} = \frac{1}{(-a^2 + \xi^2 + 2ai\xi + a^2)^4} = \frac{1}{(2ai\xi + \xi^2)^4} \quad (1.43)$$

Her trækkes nu $(2ai\xi)^4 = 16a^4\xi^4$ uden for en parentes:

$$f(z = ai + \xi) = \frac{1}{16a^4\xi^4(1 + \frac{\xi^2}{2ai\xi})^4} = \frac{1}{16a^4\xi^4} \left[1 - \frac{i\xi}{2a}\right]^{-4} \quad (1.44)$$

Næhov! Så kan vi jo lige Taylorudvikle faktoren i de kantede parenteser med formlen fra 8.1, med $x = -i\xi/2a$ og $\alpha = -4$. Her inkluderes kun de første 4 led ($k = 0, 1, 2, 3$), da det fjerde led ($k = 4$) faktisk giver koefficienten foran ξ^{-1} , altså residuummet:

$$\left[1 - \frac{i\xi}{2a}\right]^{-4} \approx 1 + \binom{-4}{1} \left(-\frac{i\xi}{2a}\right) + \binom{-4}{2} \left(-\frac{i\xi}{2a}\right)^2 + \binom{-4}{3} \left(-\frac{i\xi}{2a}\right)^3 \quad (1.45)$$

Binomialkoefficienterne er da

$$\begin{aligned} \binom{-4}{0} &= 1 \\ \binom{-4}{1} &= \frac{-4}{1!} = -4 \\ \binom{-4}{2} &= \frac{-4(-4-1)}{2!} = \frac{20}{2} = 10 \\ \binom{-4}{3} &= \frac{-4(-4-1)(-4-2)}{3!} = \frac{-4(-5)(-6)}{6} = \frac{-120}{6} = -20 \end{aligned}$$

og Taylorrækkens fire første led lyder

$$\left[1 - \frac{i\xi}{2a}\right]^{-4} \approx 1 - 4 \frac{-i\xi}{2a} - 10 \frac{\xi^2}{4a^2} - 20 \frac{i\xi^3}{8a^3} \quad (1.46)$$

Ganges denne på $(16a^4\xi^4)^{-1}$ giver de tre første led noget med en potens af ξ på -4, -3 og -2. Men det fjerde led bliver

$$\frac{1}{16a^4\xi^4} \left(-20 \frac{i\xi^3}{8a^3}\right) = \frac{1}{16a^4\xi^4} \frac{-5i\xi^3}{2a^3} = \frac{-5i}{32a^7} \xi^{-1} \quad (1.47)$$

Og residuummet er da

$$\text{Res}(ai) = -\frac{5i}{32a^7} \quad (1.48)$$

1.10 Residuumsætningen

Fra **Cauchys sætning** fås at integralet om en lukket kurve γ er 0, såfremt funktionen der integreres over, er analytisk i og på kurven. Hvis den ikke er analytisk inden for kurven, men derimod har et endeligt antal poler j , fås resultatet af integralet fra **residuumsætningen**. Sætningen kræver også at $f(z)$ er kontinuert i og på kurven. Sætningen siger

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}_j \quad (1.49)$$

hvor $\sum_j \text{Res}_j$ er summen af residuerne for de j poler inden for γ . Formelt set, er Cauchys sætning faktisk et specieltilfælde af residuumsætningen, hvor der ikke er nogen poler, og summen derved er 0.

Hvis $f(z)$ har en simpel pol i z_0 , og funktionen kan skrives som Laurentrækken

$$f(z) = \phi(z) + a_{-1}(z - z_0)^{-1} \quad (1.50)$$

hvor ϕ er analytisk i et område omkring z_0 . Integralet I af en cirkelbue, der er en åben kurve, hvor kurven er givet ved

$$|z - z_0| = \rho, \quad \theta_1 \leq \arg(z - z_0) \leq \theta_2 \quad (1.51)$$

Dette er da en cirkelbue med centrum i z_0 , radius ρ , der spænder over vinklen $\theta_2 - \theta_1$. Hvis ρ er lille nok til, at f ikke har andre singulariteter, end den simple pol i z_0 , da er værdien af integralet I :

$$I = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \phi(z) dz + a_{-1} \int_{\gamma} (z - z_0)^{-1} dz$$

Lades $\rho \rightarrow 0$, bliver integralet

$$I = ia_{-1}(\theta_2 - \theta_1) \quad (1.52)$$

Hvor, hvis $\theta_2 = \theta_1 + 2\pi$, fås værdien af integralet for en funktion med en simpel pol:

$$I = ia_{-1}(\theta_1 + 2\pi - \theta_1) = 2\pi i a_{-1}$$

2 Anvendelse af kompleks variabelteori

2.1 Komplekse potentialer

Idet både den reelle og imaginære del, af en analytisk funktion $f(z)$, er løsninger til Laplaces ligning i to dimensioner, kan de bruges til at løse en række fysiske problemer med potentialer, der opfylder $\nabla^2 \psi = 0$. Denne metode kaldes for komplekse potentialer.

Hvis en funktion $f = \phi + i\psi$ er en analytisk funktion, så vil ϕ =konstant skære enhver ψ =konstant retvinklet. Dette vil sige, at hvis, for eksempel, ϕ =konstant svarer til aekvipotentialer, så vil ψ =konstant svarer til strøm-/feltlinjer, eller omvendt. Normalt bruges ϕ til at beskrive aekvipotentialer og ψ til at beskrive feltlinjer (som i Feltteori og Vektoranalyse fra MatF1).

For ethvert given komplekst elektrostatisk potential $f(z)$ vil den elektriske feltstyrke være givet ved $E = |f'(z)|$ og dennes retning vil danne en vinkel $\pi - \arg[f'(z)]$ med x -aksen. Dette ses ved at indse at det elektriske felt har komponenterne

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.1)$$

Og hvis dette omskrives med Cauchy-Riemann relationerne fås at

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = -E_x + iE_y \quad (2.2)$$

Da vil styrken af E være modulus af $f'(z)$ og denne danner en vinkel med x -aksen på $\pi - \arg[f'(z)]$.

Selve det elektriske felt \mathbf{E} kan da beskrives ved

$$\mathbf{E} = E_x + iE_y = -[f'(z)]^* \quad (2.3)$$

Og for en fluid, der er stationær, rotationsfri, inkompressibel og ikkeviskøs, vil fluidstrømmen \mathbf{V} være givet ved

$$\mathbf{V} = V_x \hat{i} + V_y \hat{j} = \nabla\phi = [f'(z)]^* \quad (2.4)$$

Hvor fortegnsforskellen da antyder forskellen i definitionerne for felterne (feltstyrken mindskes med afstanden for elektrostatiske felter). Steder hvor $f'(z) = 0$ kaldes for stagnationspunkter i strømmen.

Andre eksempler på komplekse potentialer er

- En linjekilde af fluid i $z = z_0$, retvinklet på z -planen (altså et punkt hvor en fluid opstår med konstant hastighed) er givet ved $f(z) = k \ln(z - z_0)$. k er her kildens styrke, og et afløb vil da have et negativt fortegn.
- strømmen af en fluid med konstant hastighed V_0 , der danner en vinkel α med x -aksen, er beskrevet ved $f(z) = V_0 \exp(i\alpha)z$.
- Punkthvirvel omkring et punkt $z = z_0$ med strømhastigheden invers proportionel med afstanden fra z_0 er givet ved $f(z) = -ik \ln(z - z_0)$, hvor k igen er styrken. Denne er med positiv omløbsretning, mens et fortegnsskift givet negativ omløbsretning.

Et eksempel på anvendelse er forskellen i værdien af ψ mellem to punkter P og Q , langs en kontur C . Denne er givet ved

$$\psi(Q) - \psi(P) = \int_P^Q d\psi = \int_P^Q \nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{n}} ds = \int_P^Q \frac{\partial\phi}{\partial n} ds \quad (2.5)$$

hvor Cauchy-Riemann relationerne er brugt, for at beskrive de afledte af ψ , ved ϕ . Her er $\hat{\mathbf{n}}$ vektornormalen til konturen C , og denne har komponenterne $\hat{\mathbf{n}} = (\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds})$, og $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ er den retningsafledte af ϕ i retningen $\hat{\mathbf{n}}$.

I tilfældet af elektrostatik, hvor $\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, beskriver $-\epsilon_0[\psi(Q) - \psi(P)]$ den samlede ladning per længdeenhed, normalt til xy -planen på overfladen af en leder, mellem punkterne P og Q .

I fluidmekanik, hvor fluiden har densiteten ρ , vil $\rho[\psi(Q) - \psi(P)]$ beskrive masseflusken mellem P og Q per enhedslængde, normalt på xy -planen.

2.2 Bestemte integraler ved kompleks konturintegration

2.2.1 Integraler af trigonometriske funktioner

Integraler af formen

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta) d\theta \quad (2.6)$$

hvor F altså er en eller anden funktion, der indeholder trigonometriske funktioner. Dette kan omdannes til et komplekts konturintegral omkring enhedscirklen. På enhedscirklen fås

$$z = \exp i\theta, \quad \cos n\theta = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n}), \quad \sin n\theta = -\frac{1}{2}i(z^n - z^{-n}), \quad d\theta = -iz^{-1} dz \quad (2.7)$$

Ved hjælp af disse substitutioner skal der bare findes de singulariteter, som ligger inden for enhedscirklen, samt deres residuer. Da giver residuumssætningen resultatet.

Et eksempel. Opgavesæt 5, opgave 2.a:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\sin\theta} \quad (2.8)$$

Ved substitution fås

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{-iz^{-1}}{5 - 2i(z - z^{-1})} dz \quad (2.9)$$

Ved forlængelse med z fås

$$I = \oint \frac{-i}{-2iz^2 + 5z + 2i} dz \quad (2.10)$$

Hvormed et komplekst andengradspolynomium optræder. Dette har rødderne $-i/2$ og $-2i$ hvoraf altså kun den første ligger inden for enhedscirklen. Integranten kan da, ved hjælp af algebraens fundamentsætning (kan du huske den?) omskrives til

$$I = -i \oint \frac{1}{-2i(z + \frac{i}{2})(z + 2i)} dz = \oint \frac{1}{2(z + i/2)(z + 2i)} dz \quad (2.11)$$

Det ses da også, at disse er simple poler, idet algebraens fundamentsætning siger, at multipliciteten af et n -tegradspolynomiums rødder altid summerer til n . I dette tilfælde er det et andengradspolynomium med 2 rødder, der hver altså har multipliciteten 1. Her er multipliciteten af polynomiet i nævneren altså lig med polens orden! Det er en virkelig smart ting at huske!

Integralet bliver nu:

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(-i/2) \quad (2.12)$$

og da integranten kan skrives på formen $g(z)/h(z)$, hvor $g(z) = 1/2(z + 2i)$ og $h(z) = (z + \frac{1}{2}i)$ bruges formel (1.39):

$$\operatorname{Res}(-i/2) = \frac{g(-i/2)}{h'(-i/2)} = \frac{1}{2(-i/2 + 2i)} \frac{1}{1} = \frac{1}{3i} = -\frac{i}{3} \quad (2.13)$$

Hele integralet bliver da

$$I = 2\pi i \left(-\frac{i}{3} \right) = \frac{2\pi}{3} \quad (2.14)$$

2.2.2 Uendelige integraler

Integraler på formen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (2.15)$$

kan evalueres, hvor $f(z)$ (funktionen f , men nu af en kompleks variabel) har følgende egenskaber

- $f(z)$ er analytisk i den øvre halvplan, altså $\operatorname{Im} z \geq 0$, ud over en tællelig antal poler, hvor ingen er på den reelle akse (der må faktisk godt være simple poler på den reelle akse, men resultatet bliver lidt anderledes, se næste afsnit).
- På en halvcirkel Γ med radius R , går $\max(R|f|) \rightarrow 0$ for $R \rightarrow \infty$ på Γ (en tilstrækkelig betingelse er at $zf(z) \rightarrow 0$ for $|z| \rightarrow \infty$).
- $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ og $\int_0^{\infty} f(x) dx$ eksisterer begge (der bliver ikke stillet opgaver, hvor dette skal verificeres. Det sagde Joachim selv til en forelæsning).

Den anden betingelse sikrer, at integralet langs kurven Γ går mod 0, for $R \rightarrow \infty$, hvilket vil sige, at:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + \int_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\operatorname{Im} z \geq 0} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (2.16)$$

Idet det er et konturintegral langs en lukket kontur, fås svaret ved residuumssætningen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}(\operatorname{Im} z \geq 0) \quad (2.17)$$

Et eksempel. Integralet:

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^4}, \quad a \in \mathbb{R} \quad (2.18)$$

Integranten er her funktionen fra eksemplet på at finde residuer med binomialekspansioner. Denne har to poler af 4. orden, i $\pm ai$. Her ligger kun ai i det øvre halvplan, og altså kun dettes residuum bidrager til integralet. Idet residuummet blev udregnet i eksemplet gider jeg ikke også at gøre det her, og integralet fra negativ uendelig til positivt uendelig giver

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^4} = 2\pi i \frac{-5i}{32a^7} = \frac{5\pi}{16a^7} \quad (2.19)$$

(læg mærke til grænserne). Idet integranten er lige omkring $x = 0$, vil I være givet ved halvdelen af dette:

$$I = \frac{1}{2} \frac{5\pi}{16a^7} = \frac{5\pi}{32a^7} \quad (2.20)$$

Simple poler på den reelle akse

Metoden ovenfor kan udvides til at inkludere simple poler på den reelle akse. Dette gøres ved at ændre konturen, sådan så der integreres rundt i en halvcirkel γ med radius ρ , om disse poler, og så lader man $\rho \rightarrow 0$. Da bliver integralet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{z_0-\rho} + \int_{z_0+\rho}^{\infty} + \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\text{Im } z \geq 0} f(z) dz \quad (2.21)$$

Her er resultatet det samme som uden de simple poler på den reelle akse, bortset fra den simple pols bidrag på

$$\int_{\gamma} = -i \text{Res}_{\text{simpel}} \pi \quad (2.22)$$

hvilket fås fra ligning (1.52). Det negative fortegn optræder idet der integreres i negativ omløbsretning (altså $\theta_1 = \pi$, $\theta_2 = 0$). Resten af udregningerne forløber som normalt, men dette lille bidrag skal huskes i det endelige resultat.

Jordans lemma og trigonometriske funktioner i uendelige integraler

Jordans lemma siger at: For en funktion $f(z)$, hvis det gælder at

- $f(z)$ er analytisk i den øvre halvplan, ud over for en tællelig mængde poler med $\text{Im } z > 0$ (eller, simple poler på den reelle akse, se afsnittet lige ovenfor),
- Maksimum af $|f(z)| \rightarrow 0$ for $|z| \rightarrow \infty$ i den øvre halvplan,
- $m > 0$,

gælder det da også at

$$I_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \exp(imz) f(z) dz \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty \quad (2.23)$$

hvor Γ er halvcirklen fra før.

Det ses, at den anden betingelse i Jordans lemma faktisk er en mindre streng betingelse end den anden fra før. Et eksempel på brugen af både Jordans lemma, og simple poler på den reelle akse er:

Et eksempel. Find principaværdien af

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{x-a} dx, \quad a \in \mathbb{R}, m > 0. \quad (2.24)$$

Her regnes først på funktionen $\exp(imx)(x-a)^{-1}$, da der da kan bruges Jordans lemma. Denne funktion (og integranden) har ingen poler i den øvre halvplan, men den har en simpel pol i $x = a$, altså på den reelle akse. Ydermere går $(x-a)^{-1}$ mod 0, når $|z| \rightarrow \infty$. Da vil det lukkede kurveintegral give

$$\oint_{\text{Im } z \geq 0} f(z) dz = \int_{-R}^{a-\rho} + \int_{\gamma} + \int_{a+\rho}^R + \int_{\Gamma} = 0 \quad (2.25)$$

Det sidste integral går mod 0 når $R \rightarrow \infty$, og det samlede integral bliver (når $\rho \rightarrow 0$)

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(imx)}{x-a} dx - i\pi \text{Res}(a) = 0 \quad (2.26)$$

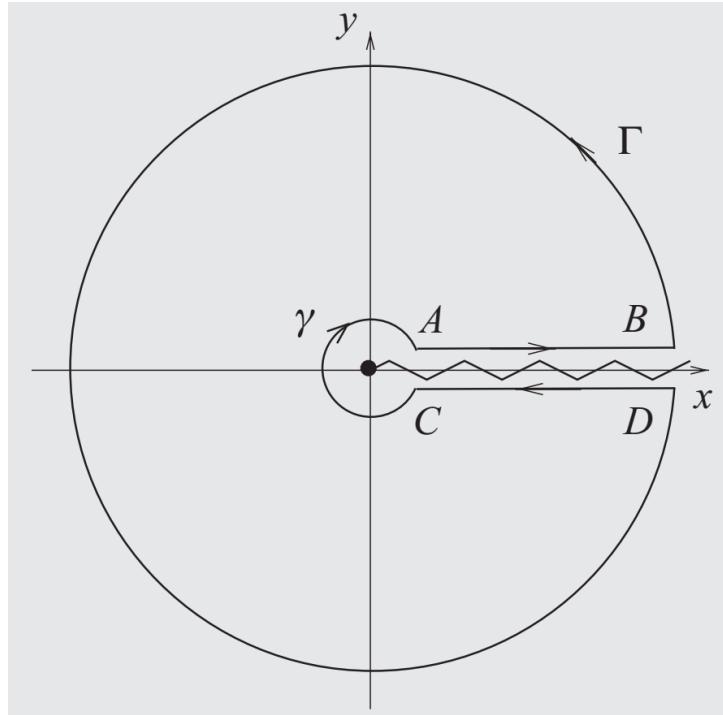
Residuummet er her $\exp(ima)$ og ved at se på den reelle del og imaginære del af integralet hver for sig fås

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(imx)}{x-a} dx = i\pi \exp(ima) \quad (2.27)$$

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(mx)}{x-a} dx = -\pi \sin ma \quad (2.28)$$

$$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(mx)}{x-a} dx = \pi \cos ma \quad (2.29)$$

Hvor anden linje selvfølgelig er resultatet af det originale integral og tredje linje er en lille ekstra bonus for alt det hårde arbejde vi laver.



Figur 1: Illustration af integrationsvejen for funktion med branch cut langs den reelle akse. Fra bogen, side 596.

2.2.3 Integraler af flertydige funktioner

Tidligere i noterne er beskrevet, hvordan flertydige funktioner kan håndteres med forgreningssnit. Dette kan også bruges til at løse nogle uendelige integraler. Et eksempel er en funktion med et forgreningspunkt i origo, og et forgreningssnit langs den reelle akse (se **FIGUR**). Da kan en kontur bestående af et ydre cirkelsnit Γ , med radius R og et indre cirkelsnit γ med radius ρ , og begge med centrum i origo bruges, hvor de to cirkelsnit forbinderes af to linjer, over og under den reelle akse. Den første linje er over, og forbinder punkterne A og B, mens den anden er under den reelle akse og forbinder punkterne C og D. Et integral fra 0 til uendelig langs den reelle akse vil da være integralet fra A til B, når $R \rightarrow \infty$ og $\rho \rightarrow 0$, hvormed linjen mellem A og B vil sammenfalde med den reelle akse. Det ses, at selvom CD også vil sammenfalde med den reelle akse, vil værdien af funktionen i disse punkter ikke være den samme, grundet forgreningspunktet!

Et eksempel. Evaluér integralet

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^3 x^{1/2}}, \quad a > 0 \quad (2.30)$$

Her ses, at integranden $f(z)$ har et forgreningspunkt i $z_0 = 0$ og en pol af orden 3 i $z_0 = -a$. Ydermere går $|z f(z)| \rightarrow 0$ på både den indre og ydre cirkel, når $R \rightarrow \infty$ og $\rho \rightarrow 0$ (på den indre opfører funktionen sig som $a^{-3} \rho^{1/2}$ og på den ydre som $R^{-5/2}$). Disse bidrager dermed ikke til det samlede integral.

Da konturen der integreres langs er lukket, og den eneste singularitet, som ligger inden for konturen er $-a$, bliver det samlede integral:

$$\int_{AB} + \int_\Gamma + \int_{CD} + \int_\gamma = \int_{AB} + \int_{CD} = 2\pi i \operatorname{Res}(-a) \quad (2.31)$$

For at finde residuummet for $z_0 = -a$ sættes $z = -a + \xi$ og der foretages en binomialekspansion (det ses at $(-a)^{1/2} = ia^{1/2}$):

$$\frac{1}{(z+a)^3 z^{1/2}} = \frac{1}{(-a+\xi+a)^3 (-a+\xi)^{1/2}} = \frac{1}{\xi^3 (-a)^{1/2} (1-\xi/a)^{1/2}} = \frac{1}{i\xi^3 a^{1/2}} \left[1 - \frac{\xi}{a} \right]^{-1/2} \quad (2.32)$$

Her ses det, at det tredje led ($k = 2$) i binomialekspansionen giver residuummet i dette punkt. Dette er givet ved

$$\binom{-1/2}{2} \left(-\frac{\xi}{a}\right)^2 = \frac{-1/2(-1/2-1)}{2!} \frac{\xi^2}{a^2} = \frac{3\xi^2}{8a^2} \quad (2.33)$$

og hele leddet bliver

$$\frac{-i}{\xi^3 a^{1/2}} \frac{3\xi^2}{8a^2} = \frac{-3i}{8a^{5/2}} \xi^{-1} \quad (2.34)$$

Og residuummet er da $-3i/(8a^{5/2})$. Sættes $z = x$ langs AB og $z = x \exp(2\pi i)$ langs CD og substitueres disse ind i integralerne fås ($\exp(2\pi i)$ må først sættes lig 1 **efter** det er substitueret ind i integralet, ellers tages der ikke højde for forgreningspunktet!):

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^3 x^{1/2}} + \int_\infty^0 \frac{dx}{(x \exp(2\pi i) + a)^3 (x^{1/2} \exp(\frac{2}{2}\pi i))} = 2\pi i \left(-\frac{3i}{8a^{5/2}}\right) = \frac{3\pi}{4a^{5/2}} \quad (2.35)$$

Her sættes $\exp(2\pi i) = 1$, og grænserne på det andet integral vendes:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^3 x^{1/2}} - \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^3 x^{1/2} \exp(\pi i)} = \left(1 - \frac{1}{\exp \pi i}\right) \int_0^\infty \frac{dx}{(x+a)^3 x^{1/2}} = \frac{3\pi}{4a^{5/2}} \quad (2.36)$$

og integralet bliver:

$$I = \frac{3\pi}{4a^{5/2}} \frac{1}{1 - \frac{1}{-\frac{1}{\exp \pi i}}} = \frac{1}{2} \frac{3\pi}{4a^{5/2}} = \frac{3\pi}{8a^{5/2}} \quad (2.37)$$

2.3 Summation af serier

Nogle gange kan resultatet af en uendelig serie med indeks n regnes ved hjælp af et passende konturintegral i den komplekse plan, hvor integranden har poler på den reelle akse i positionerne $z = n$, hvor residuerne i disse poler er lig med leddene i den uendelige serie. Et eksempel er som følger

Et eksempel. Regn

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} \quad (2.38)$$

ved hjælp af integralet

$$\oint_C \frac{\pi \cot \pi z}{(a+z)^2} dz, \quad \cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{\cos z}{\sin z} \quad (2.39)$$

hvor a ikke er et heltal og hvor C er en cirkel af stor radius R . Det ses at integranden har simple poler ved alle heltal n , for $-\infty < n < \infty$ grundet $\cot \pi z$, og at integranden har en dobbeltpol i $z = -a$.

For at finde residuerne for $z = n$ sættes $z = n + \xi$, hvor ξ som altid er et lille tal. Da skrives $\cot \pi z$ som $\cos \pi z / \sin \pi z$, og både tæller og nævner Tayloreksploderes til den første orden, om punktet $n\pi$, med variablen $u = n\pi + \xi\pi$. Det huskes her at $\sin n\pi = 0$

$$\begin{aligned} \cos(\pi z) &= \cos(n\pi + \xi\pi) \approx \cos(n\pi) - \sin(n\pi)(u - n\pi) = \cos(n\pi) \\ \sin(\pi z) &= \sin(n\pi + \xi\pi) \approx \sin(n\pi) + \cos(n\pi)(u - n\pi) = \cos(n\pi)(n\pi + \xi\pi - n\pi) = \cos(n\pi)\xi\pi \\ \cot(\pi z) &\approx \frac{\cos n\pi}{\xi\pi \cos n\pi} = (\xi\pi)^{-1} \end{aligned}$$

Da fås residuummet til

$$\text{Res}(n) = \frac{\pi \pi^{-1}}{(a+n)^2} = \frac{1}{(a+n)^2} \quad (2.40)$$

For at finde residuerne for $z = -a$ sættes $z = -a + \xi$, og der eksploderes for små ξ . Da vil førsteordensleddet i ξ give anledning til residuummet:

$$\frac{\pi \cot \pi z}{(a+z)^2} = \frac{\pi}{(a-a+\xi)^2} \cot(-a\pi + \xi\pi) = \frac{\pi}{\xi^2} \left\{ \cot(-a\pi) + \xi \left[\frac{d}{dz} \cot \pi z \right]_{z=-a} + \dots \right\}, \quad (2.41)$$

Hvor $\frac{d}{dz} \cot \pi z = -\pi \csc^2 \pi z = -\pi / \sin^2 \pi z$. Dette giver da

$$\text{Res}(-a) = \pi \frac{-\pi}{\sin^2(-\pi a)} = \frac{-\pi^2}{\sin^2(\pi a)} \quad (2.42)$$

Til sammen giver disse residuer:

$$I = \oint_C \frac{\pi \cot \pi z}{(a+z)^2} dz = 2\pi i \left[\sum_{n=-N}^N \frac{1}{(a+n)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)} \right] \quad (2.43)$$

hvor N er R rundet ned til nærmeste heltal. Når $R \rightarrow \infty$ går $\cot \pi z \rightarrow \mp i$ (alt afhængig af, om $\text{Im } z$ er henholdsvis større eller mindre end 0). Dermed fås at

$$|I| < \left| k \oint_C \frac{dz}{(a+z)^2} \right|, \quad (2.44)$$

der går mod 0 for $R \rightarrow \infty$. Dermed går $I \rightarrow 0$ for R (og $N \rightarrow \infty$). Dermed fås:

$$0 = 2\pi i \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)} \right] \Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi a)} \quad (2.45)$$

3 Laplacetransformation

Lige som man kan definere en Fouriertransformation, kan man også definere en Laplacetransformation. Et problem med Fouriertransformationen er, at man ofte gerne vil transformere en funktion f , hvor $f \not\rightarrow 0$ for $t \rightarrow \infty$, hvor \hat{f} ikke konvergerer. Et eksempel er $f(t) = t$, som bestemt ikke går mod 0 for store t . Dette problem klarer Laplacetransformationen, samtidig med problemet, (eller begrænsningen) at man nogle gange kun vil kigge på en funktion for $t > 0$, for eksempel til problemer med startbetingelser for $f(0)$. Laplacetransformationen $\mathcal{L}[f(t)]$ eller $\hat{f}(s)$ er defineret ved

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \quad (3.1)$$

(såfremt det eksisterer, selvfølgelig). Til den generelle Laplacetransformation kan s godt ses som reel (idet der kun integreres langs den reelle akse, så den imaginære del er alligevel 0), men s er teknisk set kompleks, hvilket også bruges til den inverse laplacetransformation. Den inverse transformation er dog ikke identisk med den almindelige (i modsætning til Fouriertransformationen, hvor den almindelige og inverse transformation er ens, bortset fra et skift af integrationsvariabel), og denne kræver kompleks integration (og residuumsregning!)

I praksis vil der, for en given funktion $f(t)$, være et reelt tal s_0 , hvor Laplacetransformationen eksisterer for $s > s_0$, men divergerer for $s \leq s_0$. Laplacetransformationen er lineær, hvormed det gælder at

$$\mathcal{L}[af_1(t) + bf_2(t)] = a\mathcal{L}[f_1(t)] + b\mathcal{L}[f_2(t)] = a\hat{f}_1(s) + b\hat{f}_2(s) \quad (3.2)$$

Med disse egenskaber i tankerne, laves der en lille »ordbog« af Laplacetransformationer:

$f(t)$	$\hat{f}(s)$	s_0
c	c/s	0
ct^n	$cn!/s^{n+1}$	0
$\sin bt$	$b/(s^2 + b^2)$	0
$\cos bt$	$s/(s^2 + b^2)$	0
e^{at}	$1/(s - a)$	a
$t^n e^{at}$	$n!/(s - a)^{n+1}$	a
$\sinh at$	$a/(s^2 - a^2)$	$ a $
$\cosh at$	$s/(s^2 - a^2)$	$ a $
$e^{at} \sin bt$	$b/[(s^2 - a^2) + b^2]$	a
$e^{at} \cos bt$	$(s - a)/[(s^2 - a^2) + b^2]$	a
$t^{1/2}$	$\frac{1}{2}(\pi/s^3)^{1/2}$	0
$t^{-1/2}$	$(\pi/s)^{1/2}$	0
$\delta(t - t_0)$	e^{-st_0}	0
$H(t - t_0)$	e^{-st_0}/s	0

Tabel 1: Lille ordbog over normale Laplacetransformationer. H er selvfølgelig Heavisidefunktionen, $H(u) = \int_{-\infty}^u \delta(t) dt$.

En række andre egenskaber er som følger

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] &= s\hat{f}(s) - f(0), \quad s > 0 \\
 \mathcal{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] &= s^2\hat{f}(s) - sf(0) - \frac{df}{dt}(0), \quad s > 0 \\
 \mathcal{L}\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] &= s^n\hat{f}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{df}{dt}(0) - \cdots - \frac{d^{n-1}f}{dt^{n-1}}(0), \quad s > 0 \\
 \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u) du\right] &= \frac{1}{s}\mathcal{L}[f] \\
 \mathcal{L}[e^{at}f(t)] &= \hat{f}(s - a) \\
 \mathcal{L}^{-1}\left[e^{-bs}\hat{f}(s)\right] &= \begin{cases} 0, & \text{for } 0 < t \leq b \\ f(t - b), & \text{for } t > b, \end{cases} \\
 \mathcal{L}[f(at)] &= \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{s}{a}\right) \\
 \mathcal{L}[t^n f(t)] &= (-1)^n \frac{d^n \hat{f}(s)}{ds^n}, \quad n \in \mathbb{N} \\
 \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] &= \int_s^\infty \hat{f}(u) du, \quad \text{såfremt } \lim_{t \rightarrow 0} [f(t)/t] \text{ eksisterer} \\
 \mathcal{L}[f(t) * g(t)] &= \hat{f}(s)\hat{g}(s)
 \end{aligned}$$

Hvor den sidste egenskab er foldningen af to funktioner f og g :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(u)g(t - u) du \tag{3.3}$$

Lige som med Fouriertransformationer er foldningen både kommutativ, associativ og distributiv.

4 Invers Laplacetransformation

Den inverse Laplacetransformation er defineret ved

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda-i\infty}^{\lambda+i\infty} e^{st} \hat{f}(s) ds, \quad \lambda > 0 \tag{4.1}$$

hvor λ er et reelt, positivt tal, der er stort nok til, at alle integrandens poler ligger til venstre for λ . Integrationen foregår altså langs en uendelig linje parallel med den imaginære akse. Denne linje lukkes

med et cirkelafsnit Γ , der har radius R , således at residuumsætningen kan bruges. Dette sætter dog nogle restriktioner på integranten, idet denne konturs bidrag skal gå mod 0, for $R \rightarrow \infty$. Dette opnås ved hjælp af en modificeret version af Jordans lemma, der siger, at hvis der findes et $M > 0$ og $\alpha > 0$, sådan så der på Γ gælder

$$|\hat{f}(s)| \leq \frac{M}{R^\alpha} \quad (4.2)$$

Dette er altid opfyldt, hvis $\hat{f}(s)$ er på formen

$$\hat{f}(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (4.3)$$

Hvor P og Q er polynomier, og graden af Q er højere end graden af P . Da bliver resultatet:

$$f(t) = \sum (\text{Residuer af } \hat{f}(s)e^{st} \text{ i alle dennes poler}). \quad (4.4)$$

5 Specielle funktioner

5.1 Legendrefunktioner

Legendres differentialligning lyder

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell + 1)y = 0 \quad (5.1)$$

Differentialligningen optræder ofte i problemer med aksial symmetri, og sfæriske koordinater. Funktioner, der løser ligningen kaldes for Legendrefunktioner, og en bestemt type, der ofte bruges, er **Legendrepolyomierne** $P_\ell(x)$, hvor ℓ er et heltal.

Disse polynomier har en række egenskaber, såsom lineær uafhængighed, som gør dem smarte at arbejde med. Én måde at konstruere dem på, er ved hjælp af **Rodrigues' formel**, der lyder

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2 - 1)^\ell \quad (5.2)$$

Herved fås de første 6 polynomier til at være

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, & P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) & P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) & P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x). \end{aligned}$$

De har følgende egenskaber:

- De er normaliserede, så $P_\ell(1) = 1$.
- P_ℓ indeholder kun lige potenser hvis ℓ er lige, og omvendt kun ulige potenser, hvis ℓ er ulige.
- De to første egenskaber giver også, at $P_\ell(-1) = (-1)^\ell$.
- De er indbyrdes ortogonale over intervallet -1 til 1, så

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_k(x) dx = 0 \quad (5.3)$$

- De har alle, undtagen for $\ell = 0$ en gennemsnitlig værdi på 0 over -1 til 1:

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) dx = 0, \quad \ell \neq 0. \quad (5.4)$$

- Integralet af kvadratet af polynomierne giver altid $(2/(2\ell + 1))$:

$$I_\ell = \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_\ell(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1}. \quad (5.5)$$

- Grundet den indbyrdes ortogonalitet (og fuldstændighed), kan enhver funktion (der opfylder Dirichlet betingelserne) med $|x| < 1$ skrives som en uendelig sum af Legendrepolyomier:

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_{\ell} P_{\ell}(x), \quad a_{\ell} = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_{\ell}(x) dx. \quad (5.6)$$

- Der er en række **rekursionsrelationer**, 5 af dem lyder

$$\begin{aligned} P'_{n+1} + P'_{n-1} &= P_n + 2xP'_n, \\ P'_{n+1} &= (n+1)P_n + xP'_n, \\ P'_{n-1} &= -nP_n + xP'_n, \\ (1-x^2)P'_n &= n(P_{n-1} - xP_n), \\ (2n+1)P_n &= P'_{n+1} - P'_{n-1}, \\ P_{n+1} &= \frac{(2n+1)xP_n - nP_{n-1}}{n+1} \end{aligned}$$

Disse relationer kommer fra **Generatorfunktionen** for Legendrepolyomier, der lyder

$$G(x, h) = (1 - 2xh + h^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) h^n \quad (5.7)$$

hvor h er en dummyvariabel, der bruges i ekspansionen af genereringsfunktionen, og $P_n(x)$ er det n -te Legendrepolyomium.

Del II

Ting, der ikke er pensum, men som er ret gode at have med alligevel

6 Dirac δ -funktion

Dirac δ -funktionen er en funktion defineret ved:

$$\int_a^c f(t)\delta(t-b) dt = f(b) \quad (6.1)$$

hvor $a \leq b \leq c$. Ellers er integralet 0. Ydermere er $\int \delta(t-a) dt = 1$, hvis a ligger inden for integralgrænsene. Deltafunktionen kan også defineres som

$$\delta(t) = 0, t \neq 0 \quad (6.2)$$

Hvor funktionsværdien, når $t = 0$, er ”uendelig”. Nogle andre egenskaber ved denne funktion er:

$$\delta(-t) = \delta(t), \quad \delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t), \quad t\delta(t) = 0 \quad (6.3)$$

Dens stamfunktion er Heavyside-funktionen, der er defineret ved $H(t) = 1$ til $t > 0$ og $H(t) = 0$ for $t < 0$. Dermed er $H'(t) = \delta(t)$. δ -funktionen kan også beskrives ved integraler:

$$\delta(t-u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-u)} d\omega, \quad \delta(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{k} \quad (6.4)$$

7 Fouriertransformation

Fouriertransformationer er en generalisering af Fourierserier, hvor perioden tages til at være uendelig, og der dermed ikke er noget krav om periodicitet. Det eneste krav er faktisk følgende:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt \neq \infty \quad (7.1)$$

altså at det uendelige integrale konvergerer. Selve transformationen er en lineær integraltransformation $f(t) \rightarrow \tilde{f}(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ defineret ved

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (7.2)$$

Og dens inverse

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \quad (7.3)$$

Her ses ligheden med den komplekse Fourierserie, men i stedet for en diskret sum af harmoniske svingninger, fra negativ til positiv uendeligt, har vi her en kontinuert funktion, der beskriver summen af disse harmoniske svingninger - netop et integral.

7.1 Foldning

Et emne der, som så, ikke omhandler Fouriertransformation, men som gøres nemmere ved brug af denne, er foldning. Målinger af fysiske fænomener medbringer ofte en eller anden form for støj grundet måleapparatet. Hvis det, der måles gives navnet $h(z)$, mens det fysiske fænomen er givet ved $f(x)$, så fås følgende sammenhæng mellem dem:

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x) dx \quad (7.4)$$

hvor $g(z - x)$ er støjen introduceret af måleapparatet. Dette kan også bruges til at introducere ”falske” måleinstrumenter, som for eksempel filtre, for at frafiltrere støj. Ligningen (7.4) kaldes for **foldningen** af f og g , og benævnes også $f * g$. Foldning er både **kommutativt** ($f * g = g * f$), **associativt** og **distributivt**.

Måden dette relaterer til Fouriertransformation, er ved at foldningen nemt kan skilles ad i frekvensdomænet, givet **foldeteoremet**, der siger:

$$\mathcal{F}[h(z)] = \tilde{h}(k) = \sqrt{2\pi} \tilde{f}(k) \tilde{g}(k) \quad (7.5)$$

Altså bliver det grimme, uegentlige integral til et simpelt produkt i frekvensdomænet. Ligeledes gælder der omvendt:

$$\mathcal{F}[f(x)g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k) * \tilde{g}(k) \quad (7.6)$$

7.2 Nyttige egenskaber ved Fouriertrasnformation

For Fouriertransformationer gælder **Parseval's teorem** også:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (7.7)$$

Der er også følgende transformationer:

Funktion	Fouriertransformation
$f(at)$	$a^{-1} \tilde{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$
$f(t - b)$	$e^{-ib\omega} \tilde{f}(\omega)$
$e^{\alpha t} f(t)$	$\tilde{f}(\omega + i\alpha)$
$f'(t)$	$i\omega \tilde{f}(\omega)$
$f''(t)$	$-\omega^2 \tilde{f}(\omega)$
$f^{(n)}(t)$	$(i\omega)^n \tilde{f}(\omega)$
$\int^t f(u) du$	$(i\omega)^{-1} \tilde{f}(\omega) + 2\pi c\delta(\omega)$
$f(t) * g(t)$	$\sqrt{2\pi} \tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)$
$f(t)g(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(\omega) * \tilde{g}(\omega)$

8 Binomialformler og binomialekspansioner

Fra bogen Kalkulus (kapitel 1.4 og kapitel 12.10) fås binomialformlen og binomialrækken/binomialekspansionen. **Binomialformlen** er som følger (for $n \in \mathbb{N}$):

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!} \quad (8.1)$$

Læg mærke til, at der er $n + 1$ led i denne sum, og at $\binom{n}{k}$ har præcis k faktorer i både tæller og nævner. $\binom{n}{k}$ kaldes for **binomialkoefficienterne** og disse kan findes ved hjælp af Pascals trekant, hvor de er summen af de to koefficienter lige oven for:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (8.2)$$

skriv endelig Pascals trekant ud, så dette giver mening. På engelsk kaldes koefficienterne også for »choose functions«, hvor $\binom{n}{k}$ siges som » n choose k «. Dette har med kombinatorik at gøre, og der står mere i kapitel 1.4. Det ses også, at $\binom{n}{0} = 1$, da $0! = 1$ og dermed:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \quad (8.3)$$

Binomialkoefficienter kan udvides til at gælde for alle reelle tal, hvilket er smart for binomialeksansioner. For et reelt tal α er $\binom{\alpha}{k}$ givet ved:

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1)}{k!} \quad (8.4)$$

altså helt det samme, som for et naturligt tal. Forskellen er bare, at der her ikke kan bruges fakultet for α (med mindre, selvfølgelig α er et naturligt tal, men så er denne definition jo ret redundant, for helvede da!). Igen har $\binom{\alpha}{k}$ k faktorer i både tæller og nævner, hvilket er ret smart, hvis man ikke er helt sikker på, hvor mange gange, man skal gange. Også her er $\binom{0}{k} = 1$.

8.1 Binomialeksansion

Hvor dette bliver rigtig relevant for MatF2 er **binomialeksansioner**. Taylorrækken for $(1+x)^\alpha$ omkring 0, er givet ved (se beviset for dette i kapitel 12.10, der er for mange udregninger til, at jeg gider skrive det her. Kort fortalt er faktorerne ud for den n -teaflede lig tælleren i binomialkoefficienterne, så a_n , faktoren ud for det n -te led i rækken, er da givet ved binomialkoefficienten)

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_k = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1)}{k!} = \binom{\alpha}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \end{aligned} \quad (8.5)$$

Det ses, at hvis $\alpha \in \mathbb{N}$ er $\binom{\alpha}{k} = 0$ for $k > \alpha$, og dermed er det en endelig serie, i stedet for en uendelig.

Idet dette er Taylorrækken omkring $x = 0$ gælder denne for små x (konvergensradius for reelle α er 1, så den gælder faktisk for $x < 1$, såfremt alle led tages med - altså hele den tællelige uendelighed af dem), og den er rigtig smart til at udregne residuer med (se afsnit 1.9.1).

9 Geometrisk serie

Den geometriske serie er defineret som

$$S_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n \quad (9.1)$$

Hvor a og r er konstante. Denne konvergerer for $|r| < 1$ og divergerer for alle andre værdier. Værdien, for $|r| < 1$ er

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} \quad (9.2)$$

Denne er specielt nyttig til rækkeudvikling af udtryk på formen $a/(1-r)$, hvor, igen, $|r| < 1$.

Et eksempel (eksamen 2015, opgave 6.a). Funktionen $f(z) = (3-z)^{-1}$ skal rækkeudvikles om punktet $z = 2$, i tilfælde hvor $|z-2| < 1$. Da kan funktionen omskrives til

$$f(z) = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{1-(z-2)} \quad (9.3)$$

hvilket netop er **resultatet** af den geometriske række, med $a = 1$, $r = z-2$, og det vides at $|r| < 1$, da dette er et krav stillet i opgaven. Dermed kan denne rækkeudvikles som en geometrisk serie, hvormed det fås:

$$f(z) = \frac{1}{1-(z-2)} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot (z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n \quad (9.4)$$

Og ved udregning ses det også, at dette netop er Taylorrækken for denne funktion, om punktet $z = 2$ (med konvergensradius 1, grundet polen i $z = 3$)

Eksamens 2015, opgave 6.b. Samme funktion, men for $|z - 2| > 1$. Her ses det, at konvergensradius er større end 1, så der skal findes en måde at omskrive udtrykket, så $r < 1$. Hvis $z - 2$ trækkes uden for nævneren fås

$$f(z) = \frac{1}{3-z} = \frac{1}{1-(z-2)} = \frac{1}{z-2} \frac{1}{\frac{1}{z-2}-1} = -(z-2)^{-1} \frac{1}{1-\frac{1}{z-2}} \quad (9.5)$$

Idet $|z - 2| > 1$ vil dennes inverse være mindre end 1. Da fås en geometrisk række med $r = (z-2)^{-1}$ og $a = 1$, og resultatet bliver:

$$f(z) = (z-2)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^{-n-1} \quad (9.6)$$

10 Diverse trigonometriske identiteter

10.1 Definitioner ved eksponentialfunktionen

$$\sin z = \frac{-i}{2} (e^{iz} - e^{-iz}) \quad (10.1)$$

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) \quad (10.2)$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} \quad (10.3)$$

$$\cot z = \frac{1}{\tan z} = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} \quad (10.4)$$

$$\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) \quad (10.5)$$

$$\cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) \quad (10.6)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \quad (10.7)$$

$$\coth z = \frac{1}{\tanh z} = \frac{\cosh z}{\sinh z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} \quad (10.8)$$

10.2 Tabel over trigonometriske funktioner udtrykt ved hyperbokse funktioner og i

$$\begin{aligned} \sin z &= -i \sinh iz \\ \cos z &= \cosh iz \\ \tan z &= -i \tanh iz \\ \cot z &= i \coth iz \\ \sinh z &= -i \sin iz \\ \cosh z &= \cos iz \\ \tanh z &= -i \tan iz \\ \coth z &= i \cot iz \end{aligned}$$

10.3 Rækkeudviklinger om $z = 0$ (Maclaurinrækker)

Rækkeudviklingerne for $\cos z$, $\sin z$, $\tan z$ og deres hyperbolske venner omkring 0 er givet ved

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (10.9)$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (10.10)$$

$$\tan z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} + \frac{17z^7}{315} + \frac{62z^9}{2835} + \dots \quad (10.11)$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (10.12)$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (10.13)$$

$$\tanh z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{2z^5}{15} - \frac{17z^7}{315} + \frac{62z^9}{2835} + \dots \quad (10.14)$$

Jeg har ikke taget sum-notationen med for $\tan z$ og $\tanh z$, da disse gør brug af de såkaldte »Bernoulli-tal«, som er ret grimme, og ikke spor sjove at udregne. Rækkeudviklinger (Taylorrækker) af denne type kaldes ofte for Maclaurinrækker (eksempelvis i EMM appendix A.6 og Schaums kapitel 22)

11 Komplekse variable 2

11.1 Konforme transformationer

Ikke pensum i kurset årgang 2015/2016, jeg nåede bare at skrive noterne, inden jeg fandt ud af det. Så jeg gad ikke at slette alt mit hårde arbejde. Jeg har da heller ikke kapitel 15.2 med, om anvendelse af konforme transformationer.

Konforme transformationer er en metode at skifte variable fra $z = x + iy$ til $w = r + is$, gennem en given formel

$$w = g(z) = r(x, y) + is(x, y)$$

samt dennes inverse $z = h(w)$. Såfremt begge disse eksisterer og er analytiske (ud over, måske, i nogle isolerede punkter), kaldes transformationen for **konform**.

Denne type transformationer afbilder hele z -planen over til noget af w -planen, hele w -planen, eller dele/hele w -planen flere gange. Disse fire tilfælde er alle stadig konforme transformationer, såfremt g og h eksisterer og er analytiske.

Konforme transformationer har følgende egenskaber overalt, ud over hvor g' og dermed også h' er enten 0 eller uendelig:

1. Kontinuerte linjer i z -planen transformeres til kontinuerte linjer i w -planen
2. Vinklen mellem to kurver, der skærer hinanden i z -planen, er den samme vinkel for kurverne, hvor de skærer hinanden i w -planen
3. Skaleringen af små linjeelementer i nærheden af ethvert bestemt punkt er uafhængigt af linjelementets retning. Dette vil altså sige, at små kurver/figurer eller lignende kan blive roteret og skaleret, men vil altid opretholde deres form under transformationen
4. Enhver analytisk funktion af z transformeres til en analytisk funktion af w

Kvantitative informationer om egenskab 2 og 3

Egenskab 2 og 3 kan beskrives som følger: Skæringen mellem to kurver i z -planen, C_1 og C_2 i punktet z_0 , kan beskrives som skæringen mellem tangenterne til kurven, i z_0 . Hvis z_1 beskriver et punkt på tangenten til C_1 og ligeledes for z_2 (og begge har afstanden ρ fra z_0), vil vinklen mellem den reelle akse og tangenterne være givet ved argumentet af $z_1 - z_0$ og $z_2 - z_0$:

$$\theta_1 = \arg z_1 - z_0, \quad \theta_2 = \arg z_2 - z_0 \quad (11.1)$$

Hvis lignende navngivning indføres for w -planen, med følgende transformationer:

Navn i z	Navn i w
C_1	C'_1
C_2	C'_2
z_0	w_0
z_1	w_1
z_2	w_2
θ_1	ϕ_1
θ_2	ϕ_2

Tabel 2: Tabel over navnene på henholdsvis kurver, punkter og vinkler mellem tangenter til kurver og den reelle akse, i z - og w -planen.

ϕ_1 er altså vinklen mellem tangenten til C'_1 i punktet w_0 , og den reelle akse, givet ved $\arg w_1 - w_0$, hvor w_1 ligger på den førnævnte tangent. Ligeledes gør sig gældende for ϕ_2 . De fulde definitioner af $z_1 - z_0$ og $z_2 - z_0$, samt deres tilsvarende i w er

$$z_n - z_0 = \rho \exp i\theta_n, \quad w_n - w_0 = \rho_n \exp i\phi_n \quad (11.2)$$

Her er afstanden mellem w_n og w_0 ikke nødvendig ens for alle n , da lige linjer af endelig længde i z ikke nødvendigvis er lige i w . En mere stringent definition af w_n er faktisk $w_n - w_0 = \rho_n \exp i(\phi_n + \delta\phi_n)$ hvor $\delta\phi_n \rightarrow 0$ når $\rho_n \rightarrow 0$, og dermed også $\rho \rightarrow 0$

Med alle disse navne og definitioner i baghovedet, kan egenskab 2 beskrives ved følgende ligning:

$$\phi_1 - \theta_1 = \phi_2 - \theta_2 = \arg g'(z_0), \quad \text{for } \rho \rightarrow 0 \quad (11.3)$$

og egenskab 3 kan beskrives ved

$$\rho_1/\rho = \rho_2/\rho = |g'(z_0)|, \quad \text{for } \rho \rightarrow 0 \quad (11.4)$$

Lighederne for egenskab 2 og 3 er strengt taget kun opfyldt når $\rho \rightarrow 0$, men er omtrent rigtige for *små* linjeelementer, hvormed lighedstegnene skal udskiftes med cirka-omtrent tegnene: \approx .

I (11.4) ses $|g'(z_0)|$ som den lineære skaleringsfaktor for små linjeelementer, beskrevet i listen over egenskaber. Dette vil altså siges, at små figurer i z skaleres med en faktor $|g'(z)|^2$ under transformationen til w .

Det noteres at i punkter hvor $g'(z) = 0$ er $\arg g'(z)$, som jo er vinklen hvormed linjeelementer roteres, udefineret. Punkter af denne art kaldes for **kritiske punkter** for transformationen.

Kvantitative informationer om egenskab 4

For en analytisk funktion $f(z) = \phi + i\psi$ i $z = h(w)$, er $F(w) = f(h(w)) = \Phi + i\Psi$ også analytisk i w . Da begge er analytiske, opfylder deres koordinatfunktioner ϕ, ψ, Φ og Ψ alle Laplaces ligning:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0, \quad \text{etc, for } \psi, \Phi \text{ og } \Psi \text{ med } r, s \text{ som koordinaterne for } \Phi, \Psi \quad (11.5)$$

Hvis, for eksempel $\operatorname{Re} f(z) = \phi$ er konstant over randen C i z , er $\operatorname{Re} F(w) = \Phi$ konstant over C' , som er kurven C , transformert af $w = h(z)$. Dette bruges blandt andet flittigt til løsning af Laplaces ligning i to dimensioner.

Nyttige konforme transformationer

Nogle eksempler på konforme transformationer er eksempelvis

- $w = z + b$, $b \in \mathbb{C}$: translation med b .
- $w = (\exp i\theta)z$: rotation med θ .
- $w = az$, $a \in \mathbb{R}$: skalering med reelt a .
- $w = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$: skalering og rotation med a , translation med b .
- $w = 1/z$: invers transformation - afbilder ydersiden af enhedscirklen på indersiden, og vice versa.