1 Komplekse Tal (Note kap 1)

Meget kort om komplekse tal:

De er en udvidelse af de reelle tal. Her består hvert komplekst tal af 2 led, hvor det ene er ganget med tallet i. Dette er et meget specielt talt, idet det har egenskaben:

$$i^2 = -1 \tag{1.1}$$

Et generelt komplekst tal z skrives da:

$$z = x + iy \tag{1.2}$$

hvor x kaldes den *reelle* del og y kaldes den *imaginære* del. Disse skrives også henholdsvis

$$\mathrm{Re}\, z = x, \quad \mathrm{Im}\, z = y \tag{1.3}$$

Man definerer også den *kompleks konjugerede* z^* ved

$$z^* = x - iy \tag{1.4}$$

Så man flipper bare fortegnet på den imaginære del. Den reelle og imaginære del kan udregnes ved hjælp af den konjugerede

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{z + z^*}{2}, \quad \mathrm{Im}\, z = \frac{z - z^*}{2i} \tag{1.5}$$

Man definerer også modulus (størrelse) og argument (vinkel/retning) af komplekse tal:

$$|z| = \sqrt{z * z} = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arg z = \theta \tag{1.6}$$

hvor θ kan findes ved trigonometri:

$$\tan\theta = \frac{y}{x}, \quad \cos\theta = \frac{x}{|z|}, \quad \sin\theta = \frac{y}{|z|} \tag{1.7}$$

Men pas på med at bruge tan til at finde argumentet, idet den ikke altid giver det rigtige svar. Så brug helst cos eller sin (jeg har ikke en god forklaring på det, lige nu, så det må vente til et senere tidspunkt.)

Hvis man er nødt til at dividere komplekse tal på kartesisk form (eller har et i i nævneren og gerne vil af med det), så er der et smart trick: forlæng brøken med nævnerens konjugerede. Dette giver nemlig:

$$z = \frac{a + ib}{c + id} = \frac{a + ib}{c + id}\frac{c - id}{c - id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} \tag{1.8}$$

Eller mere generelt:

$$z = \frac{w_1}{w_2} = \frac{w_2^* w_1}{|w_2|} \tag{1.9}$$

1.1 Den komplekse eksponentialfunktion

For imaginære tal ($z = i\theta$) er eksponentialfunktionen defineret ved

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{1.10}$$

Størrelsen af denne kan findes på to måder:

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1, \; |e^{i\theta}| = \sqrt{(e^{i\theta})^*\, e^{i\theta}} = \sqrt{e^{-i\theta}e^{i\theta}} = 1 \tag{1.11}$$

Den komplekse eksponentialfunktion for et komplekst tal er da

$$e^{x+iy} = e^x \d{e}^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \tag{1.12}$$

Komplekse tal kan også skrives på en anden form, der gør brug af den komplekse eksponentialfunktion. Denne form kaldes for *polær form.*

$$z = |z|e^{\imath\theta} \tag{1.13}$$

Denne måde at skrive komplekse tal på, har en stor fordel når det kommer til multiplikation og division. For i stedet for at skulle gange hvert led sammen, så er multiplikation bare at gange/dividere modulus, og lægge argumenter sammen (eller trække dem fra):

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\theta_1-\theta_2)} \tag{1.14}$$

1.2 Tidsudvikling (komplekse harmoniske svingninger)

Den komplekse eksponentialfunktion bruges ofte til at beskrive harmoniske svingninger. Eksempelvis ses en tidsligt varierende emf, givet ved $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. Dette kan skrives som den reelle del af den komplekse eksponentialfunktion:

$$\mathcal{E} = \mathrm{Re}(\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}) \tag{1.15}$$

Det negative fortegn i eksponenten er et arbitrært valg, men det er den konvention bøgerne, vi bruger, bruger.

Generelt har eksponenten både en reel og imaginær del. Eksempelvis:

$$f(t) = e^{-(\gamma + i\omega)t} = e^{-\gamma t} e^{-i\omega t} \tag{1.16}$$

hvor den reelle del af dette udtryk er en eksponentielt dæmpet harmonisk svingning (se Mek2/MatF2 pensum for grundigere gennemgang af denne, med udledning):

$$\mathrm{Re}(f(t)) = e^{-\gamma t} \cos \omega t \tag{1.17}$$

2 Grundlæggende elektronik (Noter kap 2)

2.1 Passive komponenter

Passive komponenter er komponenter, der ikke kan forstærke strømmen i et kredsløb. Dette vil sige resistorer (modstande), kapacitorer (kondensatorer) og induktorer (spoler). Kapitlet omhandler også batterier, strømforsyninger og vekselstrømme, selvom dette ikke helt har med passive komponenter at gøre.

Elektronerne i en leder bevæger sig fordi de bliver påvirket af en spædningsforskel (også kendt som et elektrisk felt). Hvis materialet er helt rent, så der ingen andre typer atomer der er, og hvis atomerne i materialet overhovedet ikke bevægede sig, men sad helt fast i krystalgitteret, ville der ingen modstand være i materialet, og alle de frie atomer ville falde gennem materialet i frit fald (indtil bevægelsen skaber et stort nok elektrisk felt til at modvirke tyngdekraften, selvfølgelig)

2.1.1 Modstande

Materialer er dog ikke perfekte, og det viser sig, at det elektriske felt og volumenstrømmen er lineært proporitonelle, med proportionalitetskontanten σ, kaldet for konduktiviteten:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{2.1}$$

Dette er en form af Ohms lov. Konduktiviteten er den inverse af *resistiviteten* ρ: $\sigma = \rho^{-1}$. I insulatorer er konduktiviteten høj, mens det omvendte er sandt for metaller og generelt ledere. Forskellen i konduktiviteten mellem et metal og en insulator er ofte i størrelsesordnen 10^{22}. Derfor kan metaller som oftest regnes for perfekte ledere.

Ohms lov er egentlig en approksimering, idet den egentlig har formen

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{f} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{2.2}$$

hvor $\mathbf{f}$ er kræften per ladningsenhed. Som regel er de magnetiske kræfter mange størrelsesordner mindre end de elektriske kræfter (det er normalt kun i plasmaer, at approksimationen i Ohms lov bryder ned).

Ved at omregne volumenstrømmen til den samlede strøm med $\int_{\mathcal{S}} \mathbf{J} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a}$ og omregne det elektriske felt til potentialet med $\int \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}$, fås den mere velkendte form af Ohms lov:

$$V = RI \tag{2.3}$$