MAT1110 oblig 1

Nikolai Engstad

February 2023

1

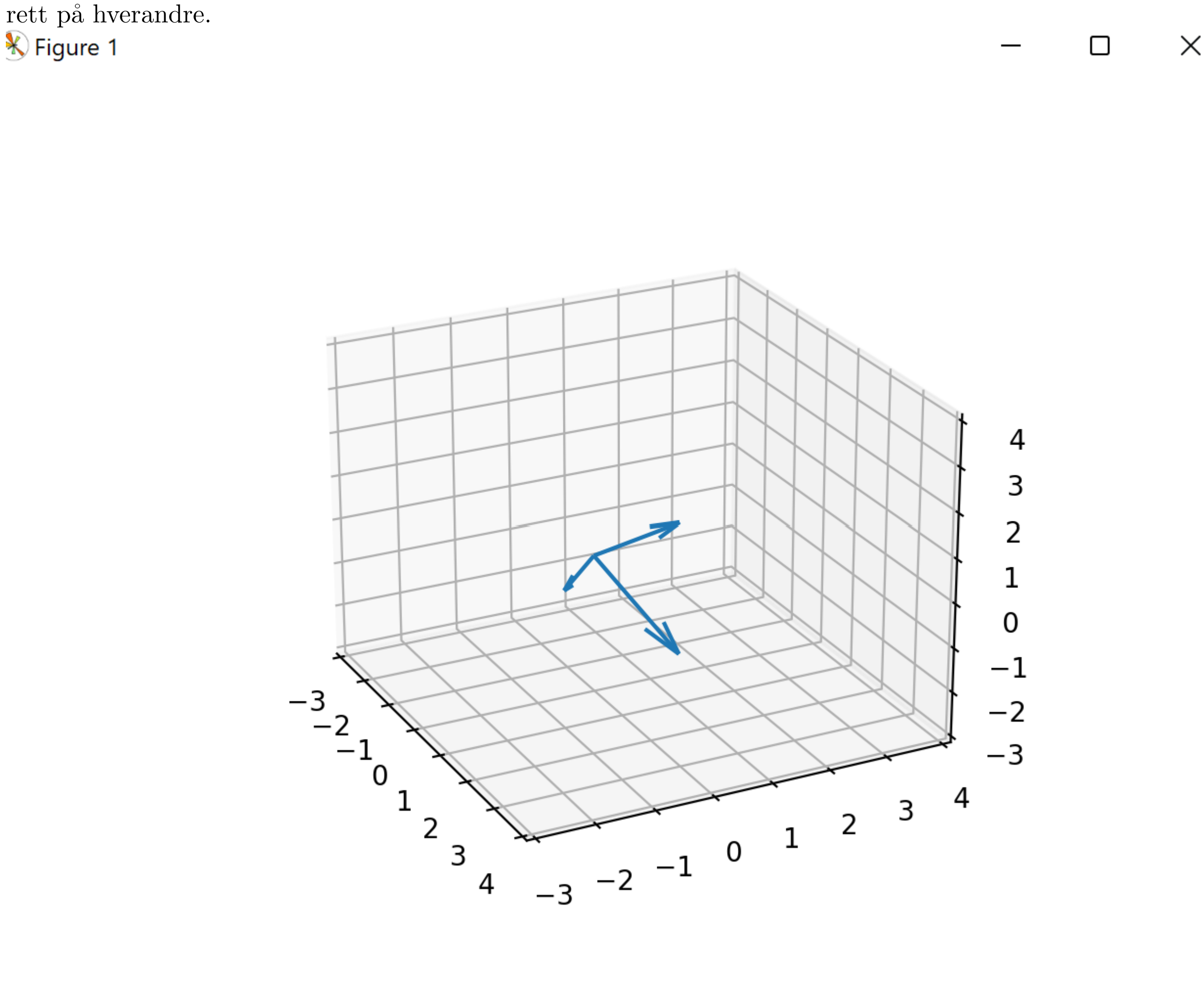
1.a

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

v_1 = np.array([1,
                1,
                1])
v_2 = np.array([1,
                1,
                -2])
v_3 = np.array([1,
                -1,
                0])

fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.quiver(0, 0, 0, 1, 1, 1,)
ax.quiver(0, 0, 0, 1, 1, -2,)
ax.quiver(0, 0, 0, 1, -1, 0,)


ax.set_xlim([-3, 4])
ax.set_ylim([-3, 4])
ax.set_zlim([-3, 4])

dot1 = v_1.dot(v_3)
dot2 = v_1.dot(v_2)
dot3 = v_2.dot(v_3)
```

```python
print(f"Dotproduktet mellom v1 og v2 er {dot1}")
print(f"Dotproduktet mellom v1 og v3 er {dot2}")
print(f"Dotproduktet mellom v2 og v3 er {dot3}")

plt.show()
```

```
PS C:\MAT1110\obliger> py .\oblig1_oppg1.py
Dotproduktet mellom v1 og v2 er 0
Dotproduktet mellom v1 og v3 er 0
Dotproduktet mellom v2 og v3 er 0
```

Siden dotproduktet mellom de ulike vektorene er 0 så vil det si at de står vinkelrett på hverandre.



1.b

Vi har at $\vec{v_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \vec{v_2} = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} \qquad \vec{v_3} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$.

$\vec{v_j}$ for j = 1,2,3 er da en 3x3 matrise gitt ved $\vec{v_j} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & -2 & 0\end{bmatrix}$.

Vi har en 3x3 matrise A, slik at $A \cdot \vec{e_j} = \vec{v_j}$ og vi vet at

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{e_2} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \vec{e_3} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

. La A være matrisen $\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\x_2 & y_2 & z_2\\x_3 & y_3 & z_3\end{bmatrix}$,

$$A \cdot \vec{e_1} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \qquad A \cdot \vec{e_2} = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix} \qquad A \cdot \vec{e_3} = \begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$$

Vi har at $A \cdot \vec{e_1} = \vec{v_1}, A \cdot \vec{e_2} = \vec{v_2}, A \cdot \vec{e_3} = \vec{v_3}$ slik at A = $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1\\1 & -2 & 0\end{bmatrix}$

$$\vec{a} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} \qquad A \cdot \vec{a} = a_1 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} + a_3 \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

Så vi har $A \cdot \vec{a} = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3$

1.c

```
A = np.array([[1,  1,  1],
              [1,  1,  -1],
              [1,  -2,  0]])
B = np.linalg.inv(A)
print(B)

v_1 = np.array([[1],
                [1],
                [1]])
v_2 = np.array([[1],
                [1],
                [-2]])
v_3 = np.array([[1],
```

```
                    [-1],
                    [0]])

print(B.dot(v_1))
print(B.dot(v_2))
print(B.dot(v_3))
```

```
[[ 0.33333333  0.33333333  0.33333333]
 [ 0.16666667  0.16666667 -0.33333333]
 [ 0.5        -0.5        -0.        ]]
[[1.]
 [0.]
 [0.]]
[[1.11022302e-16]
 [1.00000000e+00]
 [0.00000000e+00]]
[[0.]
 [0.]
 [1.]]
```

Her ser vi at B er $\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$

Og at $B \cdot \vec{v_j} = \vec{e_j}$

1.d

$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = B \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ ganger så begge sider med den inverse matrisen til B

$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ og vi vet at den inverse matrisen til B er A , så vi har

$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ som da blir $\vec{b} = a_1 \cdot \vec{v_1} + a_2 \cdot \vec{v_2} + a_3 \cdot \vec{v_3}$

2

2.a

$C = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$ for å sjekke om en vektor er en egenvektor kan vi bruke

$C \cdot \vec{v_j} = \lambda \cdot \vec{v_j}$ og hvis vi setter inn $j = 1, 2, 3$ får vi

$\vec{v_1}$ gir

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 + 1/6 + 1/6 \\ 1/6 + 2/3 + 1/6 \\ 1/6 + 1/6 + 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_1 = 1$$

$\vec{v_2}$ gir:

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2/3 + 1/6 - 2/6 \\ 1/6 + 1/6 - 2/6 \\ 1/6 + 1/6 - 4/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -2\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/6 \\ 3/6 \\ -3/3 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

$\vec{v_3}$ gir:

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 & 1/6 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ -\lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 - 1/6 - 0 \\ 1/6 - 2/3 - 0 \\ 1/6 - 1/6 - 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2}$$

Altså er $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}$ egenvektorer med egenverdier $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{2}$

2.b

$$\lim_{n\to\infty} C^n\vec{b} = \lambda^n \cdot \vec{b}$$

$$\vec{v_1} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \quad \vec{v_2} = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} \quad \vec{v_3} = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix}3\\7\\2\end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

Liknignen gir oss et likningssett med 3 ukjente

(1) $\quad 3 = x + y + z$

(2) $\quad 7 = x + y - z \to x + y = 7 + z$

(3) $\quad 2 = x - 2y \to x = 2 + 2y$

Finner nå verdien av x,y og z. Setter først inn $x + y = 7 + z$ inn i (1)

(1) $\quad 3 = 7 + z + z \to z = -2$

Setter inn $x = 2 + 2y$ og at $z = -2$

(2) $\quad 7 = 2 + 2y + y - (-2) \to y = 1$

Setter så inn at $z = -2$ og at $y = 1$

(3) $\quad 2 = x - 2 \cdot 1 \to x = 4$

$\lim_{n\to\infty} C^n\vec{b} = \lambda^n\vec{b} \to \lim_{n\to\infty} \lambda^n \cdot (4\vec{v_1} + \vec{v_2} - 2\vec{v_3})$

som blir $\lim_{n\to\infty} 1^n \cdot 4\vec{v_1} + (\frac{1}{2})^n \cdot \vec{v_2} - (\frac{1}{2})^n \cdot 2\vec{v_3}$

når n går mot uendelig vil $\pm(\frac{1}{2})^n$ gå mot 0 så vi står igjen med

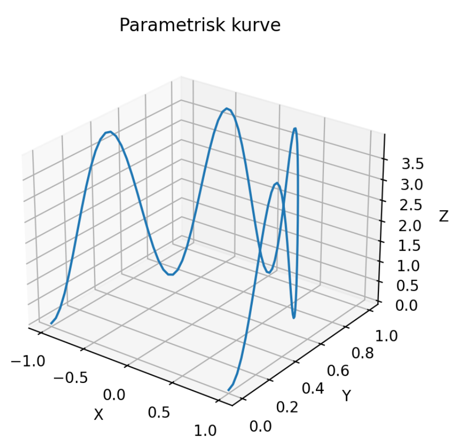
$4\vec{v_1} = \begin{bmatrix}4\\4\\4\end{bmatrix}$

3

3.a

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import mpl_toolkits.mplot3d as Axes3D

t = np.linspace(0,np.pi,100)

x = np.cos(t)
```

```
y = np.sin(t)
z = 4*np.sin(4*t)**2

fig = plt.figure("Parametrisk kurve")

ax = fig.add_subplot(projection="3d")

ax.plot(x,y,z)

ax.set_xlabel("X")
ax.set_ylabel("Y")
ax.set_zlabel("Z")

plt.title("Parametrisk kurve")
plt.show()
```



3.b

$$\vec{r}(t) = (cos(t), sin(t), 4sin^2(4t))$$
$$\vec{F}(x, y, z) = (5x^4 + 2xy^3 - yze^{xyz}, 3x^2y^2 - xze^{xyz}, -xye^{xyz})$$

Sjekker om feltet er konservativt og om det finnes en portensialfunsjon ϕ for $\vec{F}$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 6xy^2 - ze^{xyz} - xyz^2e^{xyz}$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -ye^{xyz} - xy^2ze^{xyz}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 6xy^2 - ze^{xyz} - xyz^2e^{xyz}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = -xe^{xyz} - x^2yze^{xyz}$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = -ye^{xyz} - xy^2ze^{xyz}$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = -xe^{xyz} - x^2yze^{xyz}$$

Siden $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}, \quad$ Så er feltet konservativt i alle punkter $\vec{X}$ og da er ϕ en potensialfunsjon for $\vec{F}$, finner så ϕ

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = (5x^4 + 2xy^3 - yze^{xyz}) \to \int 5x^4 + 2xy^2 - yze^{xyz} dx$$

Bruker substitusjon, setter

$$u = xyz \to \frac{du}{dx} = yz \to dx = \frac{du}{yz}$$
$$\int 5x^4 + 2xy^2 - yze^u \frac{du}{yz} = x^5 + x^2y^3 - e^{xyz} + c(y,z)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = (3x^2y^2 - xze^{xyz}) \to \int 3x^2y^2 - xze^{xyz} dy$$

Bruker samme substitusjon som i forrige integral

$$u = xyz \to \frac{du}{dy} = xz \to dy = \frac{du}{xz}$$
$$\int 3x^2y^2 - xze^u \frac{du}{xz} = x^2y^3 - e^{xyz} + c(x,z)$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = (-xye^{xyz}) \to \int -xye^{xyz} dz$$

Bruker samme substisjon som tidligere.

$$u = xyz \to \frac{du}{dz} = xy \to dz = \frac{du}{xy}$$
$$\int -xye^u \frac{du}{xy} = -e^{xyz} + c(xy)$$

Det er nå åpenbart at $\phi = x^5 + x^2y^3 - e^{xyz}$

$$\int_C \nabla\phi dr = \int_0^\pi \nabla\phi(r(t))dt = \phi(r(\pi)) - \phi(r(0)) = \phi(-1,0,0) - \phi(1,0,0) =$$

$$(-1)^5 + (-1)^2 \cdot 0^3 - e^{-1\cdot 0\cdot 0} - (1^5 + 1^2 \cdot 0^3 - e^{1\cdot 0\cdot 0}) =$$

$$-1 + 0 - 1 - 1 + 1 = -2$$